آزمون حضوری
شماره هشت

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

رشتهٔ ریاضی
پایهٔ دوازدهم

مرور برنامه شب آزمون خیلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه
حسابان	علی شهرابی	۲	۱۱
هندسه	علیرضا نصرالهی	۱۲	۱۳
گسسته	مصطفی دیداری	۱۴	۱۸
فیزیک	نوید شاهی	۱۹	۲۳
شیمی	سروش عبادی	۲۴	۳۵

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

مرورنامه شب آزمون

حسابان

تابع

نقاط برخورد تابع $f(x)$ با
- محور xها: نقاط $(x_1,0)$ و $(x_2,0)$ و ... که x_1، x_2 و ... جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند.
- محور yها: نقطهٔ $(0,f(0))$
- تابع $g(x)$: حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$

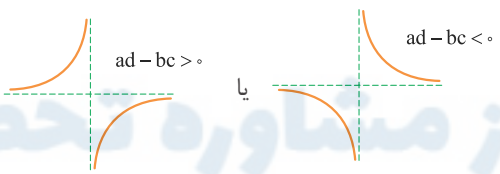
دامنهٔ توابع مهم
- کسری: $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$
- رادیکال‌های با فرجهٔ زوج: زیر رادیکال ≥ 0
- $\log_B A$: $(A>0)\cap(B>0)\cap(B\neq 1)$
- $\tan A$: $A\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$
- $\cot A$: $A\neq k\pi$

شروط تساوی توابع f و g
۱) $D_f=D_g$
۲) ضابطه‌ها برابر باشند.

نمایش تابع به فرم $\begin{cases} f:A\to B \\ f(x)=\text{ضابطه} \end{cases}$
- A دامنه است.
- B هم دامنه است. باید برد زیرمجموعهٔ B باشد.

توابع خاص
- ثابت: $f(x)=c$، نمودار یک خط افقی
- همانی: $f(x)=x$، نمودار روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم

تابع هموگرافیک
- ضابطه: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، شرط: $ad-bc\neq 0$ و $c\neq 0$
- دامنه: $\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$، برد $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$
- ضابطهٔ وارون: $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$، شرط برابری f و f^{-1}: $a+d=0$
- مرکز تقارن: $W(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$، محورهای تقارن: دو خط با شیب‌های ± 1 و گذرنده از نقطهٔ W
- خط‌چین عمودی: $x=\frac{-d}{c}$، خط‌چین افقی: $y=\frac{a}{c}$
- شکل نمودار:



مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

مرورنامه شب آزمون

حسابان

تبدیل نمودارها

- **انتقال:** $f(x\pm a)$ ($\pm$: چپ / راست)، $f(x)\pm b$ ($+$: بالا / $-$: پایین)
- **قرینه‌یابی:** $f(-x)$: نسبت به محور yها، $-f(x)$: نسبت به محور xها
- **انبساط و انقباض:** $f(kx)$: انقباض ($k>1$)، انبساط ($0<k<1$) / $kf(x)$: انبساط ($k>1$)، انقباض ($0<k<1$)
- **ترتیب:** $af(bx+c)+d$ (چهارم، اول، دوم، سوم)
- **قدرمطلق:**
  - $|f(x)|$ ← قسمت‌های زیر محور xها، نسبت به محور xها قرینه می‌شود.
  - $f(|x|)$ ← سمت چپ محور yها پاک می‌شود و قرینهٔ سمت راست به سمت چپ محور yها می‌آید.

نمودار توابع درجه۳ به فرم $y=a(x-\alpha)^3+\beta$

- $a>0$: (α,β)
- $a<0$: (α,β)

اعمال جبری روی توابع

دامنه‌ها: $D_{f\pm g}=D_f\cap D_g$ ، $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$

برد: ۱) دامنه را حساب می‌کنیم. ۲) ضابطه را به دست می‌آوریم. ۳) برد ضابطه را در دامنه‌اش حساب می‌کنیم.

ترکیب توابع

محاسبهٔ $(fog)(a)$: دو مرحله دارد؛ اول $g(a)$، بعد $f(g(a))$

دامنه: $D_{fog}=\{x\in D_g)\cap(g(x)\in D_f)\}$

برد: ۱) برد تابع g (داخلی) را حساب می‌کنیم (می‌شود بازهٔ I). ۲) برد تابع f با دامنهٔ I را حساب می‌کنیم.

ترکیب f و f^{-1}

$(fof^{-1})(x)=x$ و $D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f$

$(f^{-1}of)(x)=x$ و $D_{f^{-1}of}=D_f$

اگر $D_f=R_f$، آن‌گاه $fof^{-1}=f^{-1}of$

توابع معروف در یکنوایی

یکنواها:

- $mx+h$: صعودی اکید ($m>0$)، نزولی اکید ($m<0$)
- $a(x-\alpha)^3+\beta$: صعودی اکید ($a>0$)، نزولی اکید ($a<0$)
- $a\sqrt{bx+c}+d$: صعودی اکید ($ab>0$)، نزولی اکید ($ab<0$)
- a^x: صعودی ($a>1$)، نزولی ($0<a<1$)
- $\log_a x$

غیریکنواها و نقطهٔ مرزی بازه‌های یکنوایی: سهمی، $|ax+b|$ (رأس $-\frac{b}{a}$)، $|x-a|+|x-b|$ ($x=a, x=b$)، $\frac{ax+b}{cx+d}$ ($x=\frac{-d}{c}$)

مرکز مشاوره تحصیلی علیرضا افشار

مرورنامه شب آزمون

حسابان

نکات تابع وارون

- اگر $(a,b)\in f$، آن‌گاه $(b,a)\in f^{-1}$ یا $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$
- $D_{f^{-1}}=R_f$ و $D_f=R_{f^{-1}}$
- نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.
- شرط وارون‌پذیری، یک‌به‌یک بودن است.
- برای محاسبهٔ $f^{-1}(k)$، می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=k$ را حل می‌کنیم.

ضابطهٔ وارون

محاسبهٔ ضابطه: ۱) x را تنها می‌کنیم. ۲) جای x و y را عوض می‌کنیم.

وارون توابع مهم: $ax+b$، سهمی با دامنهٔ یک طرف رأس، $a(x-\alpha)^{۳}+\beta$، $\frac{ax+b}{cx+d}$

- $ax+b$: اول باید مربع کامل کنیم. $\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}$
- $a(x-\alpha)^{۳}+\beta$: اتحادهای $(x\pm۱)^{۳}$ و $(x\pm۲)^{۳}$ را بلد باشید.
- $\frac{ax+b}{cx+d}$: $\frac{-dx+b}{cx-a}$

نقطه (یا نقاط) برخورد f و f^{-1}

- روش ضابطه‌ای: ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم و بعدش معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم.
- روش نموداری: نمودار f را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار f^{-1} به دست آید. تعداد نقاط برخوردشان معلوم می‌شود.
- برخورد با $y=x$: اگر f صعودی اکید باشد، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=x$، طول نقاط برخورد f و f^{-1} است.

روش‌های محاسبهٔ برد

رسم نمودار

ساختن y به کمک نامساوی‌ها: $(ax+b)^{۲}\geq ۰$، $|ax+b|\geq ۰$، $\sqrt{ax+b}\geq ۰$، $-۱\leq\frac{\sin u}{\cos u}\leq ۱$، $۰\leq u-[u]<۱$

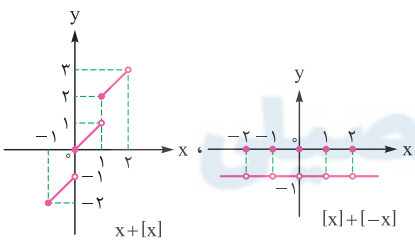
استفاده از یکنوایی: اگر f صعودی اکید و پیوسته با دامنهٔ $[a,b]$ باشد، آن‌گاه: $\mathbb{R}_f=[f(a),f(b)]$

معروف‌ها: خط و درجه ۳: $\mathbb{R}$، سهمی: $a>۰: [\frac{-\Delta}{۴a},+\infty)$، $a<۰: (-\infty,\frac{-\Delta}{۴a}]$، $|x-a|+|x-b|$: $[|a-b|,+\infty)$، $|x-a|-|x-b|$: $[-|a-b|,|a-b|]$، $\sqrt{R^{۲}-x^{۲}}$: $[۰,R]$

جزء صحیح

ویژگی‌ها: $[u]=k \Rightarrow k\leq u<k+۱$، $[u\pm \underset{\uparrow}{k}]=[u]\pm k$ ($k\in\mathbb{Z}$)، $۰\leq u-[u]<۱$، $[u]+[-u]=\begin{cases}۰ & u\in\mathbb{Z}\\ -۱ & u\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

نمودارهای مهم: $x+[x]$، $[x]+[-x]$، $x-[x]$، $[x]$



برای رسم تابع $y=a[bx]$، طول بازه‌ها را $\frac{۱}{|b|}$ انتخاب می‌کنیم.

دوازدهم ریاضی

مرورنامه شب آزمون

تقسیم

- تقسیم
  - $\begin{array}{r|l} f(x) & A(x) \\ \vdots & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array}$ ← روابط $\begin{cases} ۱)\ f(x)=A(x).Q(x)+R(x) \\ ۲)\ \text{درجهٔ } R < \text{درجهٔ } A \end{cases}$
  - باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $ax+b$ ← $f(\frac{-b}{a})$
  - مجموع ضرایب $f(x)$ ← $f(۱)$
  - حل معادلهٔ درجه۳ به فرم $f(x)=۰$ ← ۱) یک مقدار $x=a$ پیدا کنید که $f(a)=۰$ (۲ $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم. (a ∈ $\pm ۱, \pm ۲, \pm ۳$)
  - $f(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ بخش‌پذیر باشد. ← $f(a)=f(b)=۰$
  - $f(x)$ بر $(x-a)^۲$ بخش‌پذیر باشد. ← $f(x)=f'(a)=۰$

- اتحاد
  - n زوج ←
    $\begin{cases} x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}+\cdots+a^{n-۲}x+a^{n-۱}) \\ x^n-a^n=(x+a)(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}-\cdots+a^{n-۲}x-a^{n-۱}) \end{cases}$
  - n فرد ←
    $\begin{cases} x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}+\cdots+a^{n-۲}x+a^{n-۱}) \\ x^n+a^n=(x+a)(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}-\cdots-a^{n-۲}x+a^{n-۱}) \end{cases}$

مثلثات

- مقدمات
  - نسبت‌ها در مثلث قائم‌الزاویه: $\sin=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$، $\cos=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$، $\tan=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ و $\cot=\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$
  - مساحت‌ها: $S_\Delta=\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$، $S_\square=ab\sin\alpha$، $S_\bigcirc=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$
  - روابط سینوس‌ها و کسینوس‌ها: « $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ و $a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}$
  - $m=\tan\alpha$ (α زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.)
- دایرهٔ مثلثاتی
  - محور xها ← محور $\cos$ها، محور yها ← محور $\sin$ها
  - علامت $\sin$ در ربع‌ها ← $+\ +\ -\ -$، علامت $\cos$ ← $+\ -\ -\ +$
  - مختصات هر نقطه: $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

مرورنامه شب آزمون

حسابان

اتحادهای اولیه

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan x \cot x = 1 ، \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} ، \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} ، 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x ، \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$
- $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$
- هر وقت تساوی به شکل $\sin x \pm \cos x = k$ دیدید، طرفین را به توان ۲ برسانید.

رادیان

- $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ}$
- $1\,\text{rad} \simeq 57/3^\circ$
- طول کمان: $l = r\theta$
- قطاع: $S = \frac{1}{2}\theta r^2 ,\ P = r\theta + 2r$
- گستردهٔ مخروط ← قطاع ← روابط:
  - مولد مخروط = شعاع قطاع
  - محیط قاعدهٔ مخروط = طول کمان قطاع
- زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار: $|\frac{11}{2}m - 30h|$

زوایای مرتبط

- متمم ← «sin یکی با cos دیگری» و «tan یکی با cot دیگری» برابر است.
- مکمل ← «sinها برابر» و «سه نسبت دیگرشان قرینهٔ هم است.»
- قرینه ← «cosها برابر» و «سه نسبت دیگرشان قرینهٔ هم است.»
- هم‌پایان ← مثل α و $2k\pi + \alpha$ که همهٔ نسبت‌هایشان با هم برابر است.

ساده‌کردن نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$

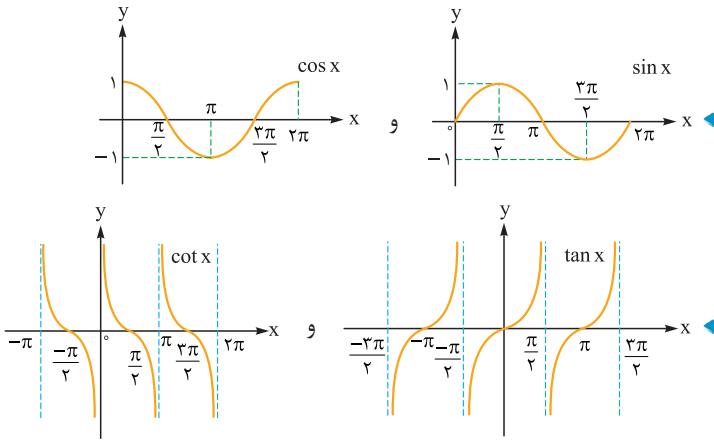
۱) اگر کمان از 2π بیشتر بود، مجاز هستیم مضارب 2π را از آن کم کنیم تا به زاویه‌ای در محدودهٔ صفر تا 2π برسیم.

۲) اگر π یا 2π داشتیم، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود، ولی اگر $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ داشتیم، sin به cos (و بالعکس) و tan به cot (و بالعکس) تبدیل می‌شود.

۳) α را زاویه‌ای در ربع اول (مثلاً ۱۰) در نظر می‌گیریم و با توجه به آن، محدودهٔ زاویهٔ $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ را مشخص و علامت نسبت را تعیین می‌کنیم.

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

نمودارها



اتحادهای $\alpha \pm \beta$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

اتحادهای 2α و 3α

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{و} \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{و} \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

اتحادهای تکمیلی

طلایی: $1 + \cos\square = 2\cos^2\frac{\square}{2}$ و $1 - \cos\square = 2\sin^2\frac{\square}{2}$

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(x \pm \frac{\pi}{4})$$

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \quad \text{و} \quad \cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha \quad \text{و} \quad \tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2} \quad \text{و} \quad \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) \quad \text{و} \quad \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$$

برحسب تانژانت نصف کمان: $\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ و $\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

دورهٔ تناوب ← توان فرد sin و cos ($\frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|}$) و توان زوج sin و cos، قدرمطلق sin و cos، توان فرد و زوج و قدرمطلق tan و cot ($\frac{\pi}{|\text{ضریب } x|}$)

و $[-ax] + [ax]$ و $ax - [ax]$ ($\frac{1}{|a|}$)

$$\left.\begin{matrix}\max = |a| + c \\ \min = -|a| + c\end{matrix}\right\} \quad a\sin(bx)+c \quad a\cos(bx+c)$$

معادلهٔ مثلثاتی

$$\sin u = \sin A \Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + A \\ u = 2k\pi + \pi - A \end{cases}$$

$$\cos u = \cos A \Rightarrow u = 2k\pi \pm A$$

$$\tan u = \tan A \Rightarrow u = k\pi + A$$

خاص sin

$$\begin{cases} \sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi \\ \sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

خاص cos

$$\begin{cases} \cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi \\ \cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

حد

همسایگی برای $x = 3$ ← ۱) راست (۳,۴)، ۲) چپ (۱,۳)، ۳) همسایگی (۲,۵) ۳ عضوشه!، ۴) محذوف $(2,5)-\{3\}$

مقدمات حد

- شروط حدداشتن f در $x = a$: ۱) f در یک همسایگی محذوف a تعریف شود. ۲) حد راست = حد چپ
- اگر $x \to 0$، آن‌گاه $x^2 \to 0^+$ و $|x| \to 0^+$
- اگر $x \to a^+$، آن‌گاه $-x \to (-a)^-$
- اگر $\sin x \to 1$، آن‌گاه $1 - \sin x \to 0^+$

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$، آن‌گاه

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$
- $\lim\limits_{x\to L} f^{-1}(x) = a$
- ۱) $L \notin \mathbb{Z}$: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)] = [L]$ و ۲) $L \in \mathbb{Z}$ { a اکسترمم نسبی باشد $\to \lim\limits_{x\to a}[f(x)] = \overset{\min}{L}$ یا $\overset{\max}{L-1}$; a اکسترمم نسبی نباشد $\to \lim\limits_{x\to a}[f(x)]$: موجود نیست
- $\lim\limits_{x\to a} g(\underbrace{f(x)}_{\text{مرحلهٔ ۱}})$ مرحلهٔ ۲

محاسبهٔ حد از روی ضابطه

- توابعی که حدشان با مقدارشان برابر است (در دامنه): $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$، $\cot x$، a^x، $\log_a x$، $\sqrt[3]{\text{چندجمله‌ای}}$، $|\text{چندجمله‌ای}|$
- توابعی که باید حد چپ و راست را جداگانه حساب کنیم: چندضابطه‌ای، براکتی، قدرمطلق در حالت $\div$
- حد تابع به فرم $\begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{Z} \\ h(x) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در هر نقطه‌ای از روی ضابطهٔ مربوط به $x \notin \mathbb{Z}$ به دست می‌آید.
- حد تابع به فرم $[\square]+[-\square]$ در هر نقطه‌ای برابر -1 است.

فرق $\lim\limits_{x\to a}[f]$ و $[\lim\limits_{x\to a} f]$ (می‌دانیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$)

- $\lim\limits_{x\to a}[f]$: مهم است که عامل حد، L^+ شده یا L^-. هر کدام بود، از آن براکت می‌گیریم.
- $[\lim\limits_{x\to a} f]$: خود L مهم است (کاری نداریم L^+ است یا L^-)، حاصل حد $[L]$ می‌شود.

اعمال جبری

- حد ندارد $=$ حد ندارد $\pm$ حد دارد
- حد ندارد $=$ حد ندارد $\times$ حد دارد $(L\neq 0)$
- حد دارد $=$ حد ندارد $\times$ حد دارد $(L=0)$ (حد ندارد: چپ و راست عدد باشن)
- نامعلوم $=$ حد ندارد $\overset{+}{-}\times$ حد ندارد

رفع ابهام $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

- با تجزیه
- با گویاکردن (مزدوج ـ چاق و لاغر)
- به کمک اتحادهای مثلثاتی
- به کمک هم‌ارزی (اگر $y\to 0$: $\sin u \sim u$، $\cos^n u = 1-\frac{nu^2}{2}$، $\tan u \sim u$، $(1\pm u)^n \sim 1\pm nu$)
- می‌شه به جاشون از Hop استفاده کرد ← $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

فرمول‌های مشتق برای هوپیتال

$$u^n \xrightarrow{'} nu^{n-1}.u'$$

$$\frac{1}{u} \xrightarrow{'} \frac{-u'}{u^2},\ \sqrt[3]{u} \xrightarrow{'} \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}},\ \sqrt{u} \xrightarrow{'} \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

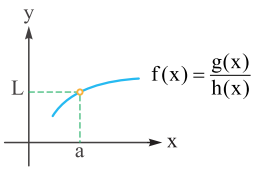
$$\cos u \xrightarrow{'} -u'\sin u,\ \sin u \xrightarrow{'} u'\cos u$$

$$\cot u \xrightarrow{'} -u'(1+\cot^2 u),\ \tan u \xrightarrow{'} u'(1+\tan^2 u)$$

$$\frac{au+b}{cu+d} \xrightarrow{'} \frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\times u'$$

۱) $g(a)=h(a)=0$

۲) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ (با Hop)



مرورنامه شب آزمون

حسابان

حد بی‌نهایت

۱) $\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$، $\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$، $\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$، $\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$

۲) $\pm\infty=$ عدد $\pm\infty$، $\infty\times\infty=\infty$ عدد غیرصفر، صفر حدی $=\frac{\text{عدد}}{\infty}$، $\infty-\infty$، $\frac{\infty}{\infty}$، $\infty\times$ صفر حدی (مبهم)

۳) اگر $\lim\limits_{x\to k}\frac{\text{؟}}{ax^2+bx+c}=\infty$ ($+\infty$ یا $-\infty$) باشد، باید مخرج به شکل $a(x-k)^2$ باشد.

۴) اگر شکل تابع $f(x)=\frac{\text{؟}}{ax^2+bx+c}$ در اطراف $x=k$ به صورت $\frac{k}{0^+}$ یا $\frac{k}{0^-}$ باشد، آن‌گاه مخرج $a(x-k)^2$ بوده است.

حد در بی‌نهایت

فقط جملهٔ پرتوان: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}ax^n$

هم‌ارزی رادیکالی در $\pm\infty$:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}=\begin{cases}\sqrt[n]{a}\,(x+\frac{b}{na}) & n\text{ فرد}\\ \sqrt[n]{a}\,|x+\frac{b}{na}| & n\text{ زوج}\end{cases}$$

چندجمله‌ای / چندجمله‌ای:
- درجهٔ صورت > درجهٔ مخرج ← $+\infty$ یا $-\infty$
- درجهٔ صورت = درجهٔ مخرج ← عدد غیرصفر
- درجهٔ صورت < درجهٔ مخرج ← صفر

نمایی:
- در $+\infty$، هم‌ارز بزرگ‌ترین پایه
- در $-\infty$، هم‌ارز کوچک‌ترین پایه

لگاریتم ← $\log_a 0^+=-\infty$ ($a>1$) و $\log_a 0^+=+\infty$ ($0<a<1$)

پیوستگی
- راست: حد راست = مقدار
- چپ: حد چپ = مقدار
- دوطرفه: مقدار = حد چپ = حد راست

توابع معروف
- پیوسته روی $\mathbb{R}$: $\sin x$، $\cos x$، $|x|$، a^x، $\sqrt[\text{فرد}]{x}$
- پیوسته روی دامنه: کسری (گویا)، $\tan x$، $\cot x$، $\log_a x$
- توابع براکتی: $\{x\}=x-\{\min$های نسبی $u\}$ $\{u\in\mathbb{Z}\}=$ نقاط ناپیوستگی $[u]$

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

مرورنامه شب آزمون

حسابان

اعمال جبری

- ناپیوسته = ناپیوسته ± پیوسته
- ناپیوسته = ناپیوسته × پیوسته
- پیوسته = ناپیوسته (حد چپ و راست عدد باشن) × پیوسته ($L=0$) ← نتیجه: اگر $h(x)$ (پیوسته) $\times g(x)$ ($g(x)$: ناپیوسته در α) بخواهد در a پیوسته باشد، باید $h(a)=0$ باشد.
- نامعلوم = ناپیوسته ± ناپیوسته

مجانب قائم

- حتماً اول ضابطه را ساده کنید.
- در توابع کسری، ریشهٔ مخرج مجانب قائم است. (بعد از ساده‌کردن)
- در توابع به فرم $\log\frac{A}{B}$، جواب‌های $A=0$ و $B=0$، مجانب قائم‌اند.
- در $\tan u$، $u=k\pi+\frac{\pi}{2}$، مجانب قائم را می‌دهد.

مجانب افقی

- همان حد تابع در بی‌نهایت است.
- مجانب افقی تابع $y=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^n+b'x^{n-1}+\cdots}$، خط $y=\frac{a}{a'}$ است.
- اگر لازم شد از هم‌ارزی رادیکالی در $\pm\infty$ استفاده کنید.
- مجانب افقی تابع $y=a^{bx+c}+d$، خط $y=d$ است.

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

ماتریس

ماتریس مربعی ۲×۲

جمع و تفریق:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{bmatrix}$$

ضرب:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

دترمینان:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

رابطهٔ کیلی ـ همیلتون:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲} = (a+d)A - (|A|)\ I$$

دترمینان ماتریس ۳×۳

۱) ساروس:

$$\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} \begin{matrix} a_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ \\ a_۳ & b_۳ \end{matrix}$$

$$= (a_۱b_۲c_۳ + b_۱c_۲a_۳ + c_۱a_۲b_۳) - (c_۱b_۲a_۳ + a_۱c_۲b_۳ + b_۱a_۲c_۳)$$

۲) بسط دادن:

$$\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۱ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} = a_۱ \begin{vmatrix} b_۲ & c_۲ \\ b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} - b_۱ \begin{vmatrix} a_۲ & c_۲ \\ a_۳ & c_۳ \end{vmatrix} + c_۱ \begin{vmatrix} a_۲ & b_۲ \\ a_۳ & b_۳ \end{vmatrix}$$

وارون ماتریس ۲×۲:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

دستگاه ۲ معادله ـ ۲ مجهولی:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-۱}B$$

$$\Leftarrow \text{حالت‌های مختلف جواب} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + by' = c' \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

- $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ← یک جواب
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ← صفر جواب
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ← بی‌شمار جواب

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

مقاطع مخروطی

۱) دایره

- معادلهٔ استاندارد: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ ← دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R
- معادلهٔ گسترده: $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ ← دایره‌ای به مرکز $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ و شعاع $R=\frac{۱}{۲}=\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

وضعیت نقطه و دایره

- $F(A)>۰ \Rightarrow$ بیرون دایره
- $F(A)=۰ \Rightarrow$ روی محیط
- $F(A)<۰ \Rightarrow$ داخل دایره

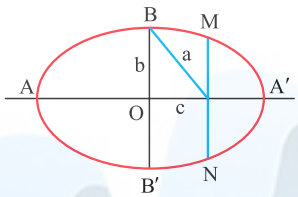
وضعیت خط و دایره

- $OH>R \Rightarrow$ خط بیرون دایره
- $OH=R \Rightarrow$ خط مماس دایره
- $OH<R \Rightarrow$ خط و دایرهٔ متقاطع

وضعیت دو دایره:

- $|R-r|<d<R+r \Rightarrow$ متقاطع
- $d>R+r$ متخارج
- $d=R+r$ مماس خارج
- $d=|R-r| \Rightarrow$ مماس داخل

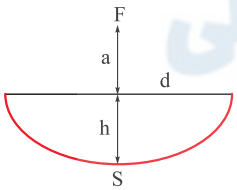
۲) بیضی



- پارامترهای بیضی ← $a^۲=b^۲+c^۲$
- خروج از مرکز $e=\frac{c}{a}=\sqrt{۱-(\frac{b}{۱})^۲}$ ← $۰<e<۱$
- طول وتر کانونی بیضی $MN=\frac{۲b^۲}{a}$

۳) سهمی

- معادلهٔ استاندارد سهمی:
  - افقی: $(y-\beta)^۲=۴a(x-\alpha)$
  - قائم: $(x-\alpha)^۲=۴a(y-\beta)$
  ← وتر کانونی سهمی: $|۴a|$
- معادلهٔ گسترده:
  - افقی: $Ay^۲+By+Cx+D=۰$
  - قائم: $Ax^۲+Bx+Cy+D=۰$
  ← $S(-,\frac{-B}{۲A})$ یا $S=(\frac{-B}{۲A},-)$ ← $a=\frac{-c}{۴A}$



- خواص
  - دیش مخابراتی: $a=\frac{d^۲}{۱۶h}$
  - ویژگی بازتابندگی: اشعه‌ای موازی محور تقارن تابانده شود، بازتابش از کانون برمی‌گردد و برعکس.

مرورنامه شب آزمون

گسسته

نظریهٔ اعداد

- روش‌های استدلال
  - گزاره
    - نادرست ← مثال نقض
    - درست
      - اثبات مستقیم
      - اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها
      - اثبات غیرمستقیم
      - اثبات بازگشتی

نوع اثبات	روش کار	کاربرد
مستقیم	از درستی فرض، به درستی حکم می‌رسیم.	از زوج یا فرد بودن اعداد به درستی حکم می‌رسیم.
در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها	n را حالت‌بندی می‌کنیم (مثلاً زوج و فرد) و در هر کدام به درستی حکم می‌رسیم.	برای هر n می‌خواهیم حکمی را ثابت کنیم.
برهان خلف	خلاف حکم را به تناقض می‌رسانیم.	اثبات گنگ‌بودن اعداد ـ هر جا که اثبات مستقیم دشوار باشد.
بازگشتی	حکم را با اعمال دوطرفه به یک رابطهٔ همواره درست می‌رسانیم.	نامساوی‌ها

ضرب	جمع و تفریق (نوع اثبات)	
گویا (اثبات مستقیم)	گویا (اثبات مستقیم)	هر دو گویا
(اگر عدد گویا صفر باشد. صفر ولی ضرب گویای ناصفر در گنگ، گنگ است.)	گنگ (برهان خلف)	یکی گویا و یکی گنگ
ممکن است گنگ یا گویا	ممکن است گنگ یا گویا	هر دو گنگ

- بخش‌پذیری در اعداد صحیح
  - ب.م.م و ک.م.م

عادکردن
$a\mid b \Leftrightarrow aq=b$
$a\mid b \Rightarrow ma\mid mb$
$a\mid b \Rightarrow a\mid mb$
$a\mid b \Rightarrow a^n\mid b^n$
$a\mid b \Rightarrow a\mid b^n$
$\pm a\mid \pm a$
$\pm 1\mid \pm a$
$a\mid 0$
$0\mid a \Rightarrow a=0$
$\begin{cases} a\mid b \\ a\mid c \end{cases} \Rightarrow a\mid b\pm c$

$[a,b]=$ نماد ک.م.م a,b

$(a,b)=$ نماد ب.م.م a,b

۱) $(a,b)=$ حاصل‌ضرب عامل‌های اول مشترک با توان کم‌تر

۲) $a\mid b \begin{cases} (a,b)=|a| \\ [a,b]=|b| \end{cases}$

۳) $[a,b]=$ حاصل‌ضرب عوامل اول مشترک با توان بیشتر در غیرمشترک‌ها

$(ka,kb)=|k|\times(a,b)$

۴) $[ka,kb]=|k|\times[a,b]$ ویژگی فاکتورگیری

$(a,b)=1 \Rightarrow [a,b]=|ab|$

۵) $[a,b]=\dfrac{|ab|}{(a,b)}=\dfrac{|\text{ضرب}|}{\text{ب.م.م}}$ ارتباط ب.م.م و ک.م.م:

۶) $d=(an+b,a'n+b') \Rightarrow d\left|\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-ba'\right.$ (دترمینان ضرایب)

مرورنامه شب آزمون

گسسته

قضیهٔ تقسیم

$$a = bq + r \quad ,\ 0 \le r < b$$

۱) مربع هر عدد فرد $8k+1$

۲) p (اول بزرگ‌تر از ۳) $= 6k+1$ یا $6k+5$

اعداد اول

۱) اگر $b \mid a$، آن‌گاه a مقسوم‌علیه b (b بر a بخش‌پذیر) و b مضرب a است.

۲) اگر $a \neq \pm 1, 0$ باشد، رابطهٔ $a^m \mid a^n$ فقط وقتی برقرار است که $m \le n$.

۳) اگر $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots$ تجزیه شود، داریم:

الف) $n \mid b \Rightarrow p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots \mid b \Rightarrow$ همهٔ عامل‌های $p_1^{\alpha_1}$، $p_2^{\alpha_2}$ و ... باید در b وجود داشته باشند.

ب) $a \mid n \Rightarrow a \mid p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots$

a فقط عامل‌های p_1، p_2 و ... با توان کم‌تر یا مساوی از توان آن در سمت راست می‌تواند داشته باشد.

پ) تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $n = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots$

هم‌نهشتی

$$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b \Leftrightarrow a \in [b]_m$$

ویژگی‌ها
$a+c \overset{m}{\equiv} b+c$
$ca \overset{m}{\equiv} cb$
$a^n \overset{m}{\equiv} b^n$
$a \overset{m}{\equiv} b \pm mk$
اگر $n \mid m$، آن‌گاه $a \overset{n}{\equiv} b$

به دست آوردن باقی‌ماندهٔ اعداد توان‌دار

۱) اگر a عددی بزرگ باشد، هم‌نهشت آن به پیمانهٔ m که کوچک‌تر از آن است (منفی یا مثبت مهم نیست) را قرار می‌دهیم.

۲) توانی از a پیدا می‌کنیم که هم‌نهشت ۱ یا -1 به پیمانهٔ m باشد، (اگر نشد سعی می‌کنیم توانی از a که هم‌نهشت عدد کوچکی به پیمانهٔ m باشد، پیدا کنیم.)

۳) با توان‌رساندن دو طرف و ضرب دو طرف در اعداد مناسب a^n را می‌سازیم.

قضیهٔ فرما: اگر p اول باشد. $p \nmid a$، آن‌گاه $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$.

اگر پیمانه اول باشد، با قضیهٔ فرما هم می‌توانیم رابطهٔ هم‌نهشتی اولیه بنویسیم.

تغییر پیمانه در هم‌نهشتی

۱) اگر دو عدد به پیمانهٔ m هم‌نهشت باشند، به پیمانهٔ مقسوم‌علیه‌های m نیز هم‌نهشت هستند.

۲) اگر دو عدد به پیمانهٔ m و n هم‌نهشت باشند، به پیمانهٔ ک.م.م n و m نیز هم‌نهشت هستند.

اتحادها

۱) $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

۲) n: زوج $(a-b)^n = (a+(-b))^n \overset{ab}{\equiv} a^n + (-b)^n = a^n + b^n$

۳) n: فرد $(a-b)^n = (a+(-b))^n \overset{ab}{\equiv} a^n + (-b)^n = a^n - b^n$

۴) اگر $\frac{n}{k}$ عددی طبیعی باشد ($k \mid n$)، آن‌گاه $a^k - b^k \mid a^n - b^n$

۵) اگر $\frac{n}{k}$ عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه $a^k + b^k \mid a^n + b^n$

۶) اگر $\frac{n}{k}$ عددی طبیعی و زوج باشد، آن‌گاه $a^k + b^k \mid a^n - b^n$

ویژگی ساده‌سازی عدد از دو طرف هم‌نهشتی:

۱) اگر $(c,m) = 1$ باشد، $a \overset{m}{\equiv} b$

۲) اگر $(c,m) = d$ باشد، c را ساده کرده، ولی پیمانه را باید به d تقسیم کنیم.

مرورنامه شب آزمون

گسسته

بخش‌پذیری بر اعداد خاص

پیمانه	قاعده	توضیح فارسی
۳ یا ۹	$a_n a_{n-1} \dots a_0 \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{۳ \text{ یا } ۹}$	هر عدد به پیمانهٔ ۳ یا ۹، هم‌نهشت مجموع ارقام خودش است.
۵ یا ۱۰ یا ۲	$a_n a_{n-1} \dots a_0 \equiv a_0 \pmod{۲ \text{ یا } ۱۰ \text{ یا } ۵}$	هر عدد، هم‌نهشت رقم یکان خود به پیمانهٔ ۵ یا ۱۰ یا ۲ است.
۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰	$a_n a_{n-1} \dots a_0 \equiv a_1 a_0 \pmod{۴ \text{ یا } \dots}$	هر عدد هم‌نهشت دو رقم آخر (یکان و دهگان) خود به پیمانهٔ ۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰ است.
۱۱	$a_n a_{n-1} \dots a_0 \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots \pmod{۱۱}$	ارقام را از سمت راست یکی در میان — و + می‌گذاریم. هر عدد به پیمانهٔ ۱۱ هم‌نهشت آن است.
۸	$a_n a_{n-1} \dots a_0 \equiv a_2 a_1 a_0 \pmod{۸}$	هر عدد هم‌نهشت سه رقم سمت راست به پیمانهٔ ۸ است.

کاربردها

رقم یکان

رقم یکان هر عدد برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۱۰؛ پس برای پیداکردن رقم یکان اعداد از هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۰ استفاده می‌کنیم.

تقویم‌نگاری

۱) فاصلهٔ روزهای دو تاریخ را پیدا می‌کنیم. دقت کنید اگر امروز nام ماه باشد، تا انتهای ماه $(۳۱-n)$ روز (برای ۶ ماه اول) یا $(۳۰-n)$ روز (برای ۶ ماه دوم) مانده است.

۲) باقی‌ماندهٔ عدد به دست آمده به ۷ را پیدا می‌کنیم.

۳) اگر تاریخ جلوتر را بخواهیم، به اندازهٔ باقی‌مانده از مبدأ داده‌شده جلو می‌رویم و اگر تاریخ عقب‌تر را بخواهیم، به اندازهٔ باقی‌مانده عقب می‌رویم.

حل معادله

حل معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$

۱) اگر a و b اعداد بزرگی هستند، هم‌نهشت آن‌ها به پیمانهٔ m را قرار می‌دهیم.

۲) با اضافه‌کردن مضارب پیمانه به b کاری می‌کنیم تا دو طرف بر a بخش‌پذیر باشند.

۳) با استفاده از ویژگی تقسیم، دو طرف را به a ساده می‌کنیم تا x به دست آید.

معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+by=c$

شرط جواب: $(a,b) \mid c$ (یعنی ب.م.م ضرایب عدد ثابت c را عاد کند.)

روش‌های حل: الف) هم‌نهشتی ب) استفاده از فرمول

روش هم‌نهشتی

۱) دو طرف را به پیمانهٔ ضریب کوچک‌تر (علامت مهم نیست)، مثلاً اگر دو طرف را به پیمانهٔ a ببریم؛ می‌شود:

$$ax+by \overset{a}{\equiv} c \Rightarrow by \overset{a}{\equiv} c$$

۲) معادلهٔ هم‌نهشتی را حل کرده و y را پیدا می‌کنیم

۳) با قراردادن y در معادله، x را پیدا می‌کنیم.

روش استفاده از فرمول: اگر بتوانیم با جست‌وجو، یک جواب معادله به صورت (x_0, y_0) را پیدا کنیم، کل جواب‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases} \qquad d=(a,b)$$

نظریهٔ گراف

مقدمات گراف

نماد	اسم
$V(G)$	مجموعهٔ رأس‌های گراف
$E(G)$	مجموعهٔ یال‌های گراف
p	مرتبهٔ گراف
q	اندازهٔ گراف
$\deg_G(v)$	درجهٔ رأس v
Δ	ماکزیمم درجه
δ	مینیمم درجه
$N_G(a)$	همسایگی باز رأس a
$N_G[a]$	همسایگی بستهٔ رأس a

۱) $0 \le \delta \le \deg v \le \Delta \le p-1$

۲) $0 \le q \le \frac{p(p-1)}{2}$

۳) $|N_G[a]| = 1 + \deg(a), |N_G(a)| = \deg(a)$

۱) تعداد درجه‌ها برابر تعداد رأس‌ها یا مرتبهٔ گراف است.

۲) مجموع درجات برابر با $2q$ است.

۳) تعداد رأس‌های فرد (رأس‌های با درجهٔ فرد)، عددی زوج است.

۴) تعداد رأس‌های زوج (رأس‌های با درجهٔ زوج) از نظر زوج و فردی مثل مرتبهٔ گراف است.

۵) $\Delta \le p-1$

۶) اگر k رأس از درجهٔ $p-1$ (رأس فول یا رأسی که به همه وصل است.) داشته باشیم، $\delta \ge k$ باید باشد.

۷) در بین درجه‌ها حتماً عدد تکراری وجود دارد.

تعداد گراف‌ها

نوع گراف	تعداد
گراف ساده با p رأس مختلف	$2^{\frac{p(p-1)}{2}}$
گراف ساده با p رأس مختلف شامل k یال مشخص (یا فاقد k یال مشخص)	$2^{\frac{p(p-1)}{2}-k}$
گراف‌های سادهٔ q یالی با p رأس مختلف	$\binom{\frac{p(p-1)}{2}}{q}$
گراف‌های جهت‌دار با p رأس مختلف	$2^{p(p-1)}$

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

مرورنامه شب آزمون

گسسته

گراف‌های خاص

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف کامل مرتبهٔ P	k_p	گرافی که هر دو رأس در آن مجاورند. (به هم وصل‌اند.)	۱) درجهٔ همهٔ رأس‌ها $p-1$ است. ۲) گراف $(p-1)$ـ منتظم است. ۳) $q=\frac{p(p-1)}{2}$ ۴) بیشترین یال را در بین گراف‌های هم‌مرتبهٔ خود دارد.
گراف مکمل G	$\bar{G}$	رأس‌های $\bar{G}$ همان رأس G است. یال‌های $\bar{G}$ یال‌هایی هستند که در G وجود ندارد.	۱) $q(G)+q(\bar{G})=\frac{p(p-1)}{2}$ ۲) $\deg_G(v)+\deg_{\bar{G}}(v)=p-1$
گراف kـ منتظم	—	گرافی که درجهٔ هر رأس برابر k است.	۱) $kp=2q$ که $0\le k\le p-1$ ۲) گراف فرد منتظم مرتبهٔ فرد نداریم. (از بین p و k حداقل یکی زوج باید باشد.)

انواع گراف‌های منتظم

نوع	ویژگی
گراف ۰ـ منتظم (گراف تهی)	۱) $q=0$ ۲) از تعدادی رأس ایزوله تشکیل شده.
گراف ۱ـ منتظم	از تعدادی یال تشکیل شده است.
گراف ۲ـ منتظم	از اجتماع تعدادی چندضلعی تشکیل شده است.
گراف کامل k_p	$(p-1)$ـ منتظم هستند.

مسیر ـ دور

مسیر	دنباله‌ای از رأس‌های غیرتکراری که رأس‌های پشت سر هم به هم وصل‌اند.
طول مسیر	تعداد یال‌های طی‌شده (یا یکی کم‌تر از تعداد رأس‌های مسیر)
P_n	مسیر nرأسی به طول $n-1$

۱) مسیر رأس تکراری ندارد.
۲) هر رأس یک مسیر به طول صفر به خودش است؛ پس تعداد مسیرهای به طول صفر برابر مرتبهٔ گراف یا p است.
۳) تعداد مسیرهای به طول یک، برابر تعداد یال‌های گراف یا q است.
۴) تعداد مسیرهای به طول حداکثر یک، برابر $p+q$ است.
۵) برای به دست آوردن تعداد مسیرها از روی درجه‌ها ابتدا گراف را رسم و سپس به صورت مستقیم مسیرها را شمارش می‌کنیم.

گراف همبند

گراف همبند ← گرافی که بین هر دو رأس آن، مسیر وجود دارد.

۱) $q<p-1$ ← قطعاً ناهمبند
۲) $p-1\le q\le\binom{p-1}{2}$ ممکن است همبند یا ناهمبند
۳) $q>\binom{p-1}{2}$ ← قطعاً همبند

دور	دنباله‌ای از رأس‌های غیرتکراری (به غیر از اول و آخر) که رأس‌های پشت سر هم به هم وصل‌اند.
طول دور	تعداد یال‌های طی‌شده
C_n	دور nرأسی به طول $n(n\ge3)$

۱) در گراف غیرکامل به صورت مستقیم شمارش می‌کنیم.
۲) تعداد دورهای به طول m در KP برابر $\binom{p}{m}\frac{(m-1)!}{2}$ است.

حرکت روی خط راست

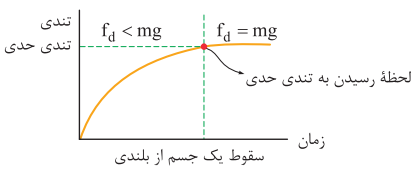
- شناخت حرکت
  - مسافت (l): طول مسیر طی‌شده، جابه‌جایی ($\Delta\vec{x}$ یا $\vec{d}$): برداری که نقطهٔ اولیه را به نهایی وصل می‌کند.
    شرط برابری مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی: حرکت روی خط راست و بدون تغییر جهت باشد. $l \geq |\Delta x|$
  - سرعت متوسط و تندی متوسط: $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\quad s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$
  - اصطلاحات زمانی: ثانیهٔ nام: $n-1$ تا n $\quad$ m ثانیهٔ nام: از $mn-m$ تا mn
  - بردار مکان: برداری که مبدأ را به مکان وصل می‌کند، معادلهٔ مکان ـ زمان: $x = f(t)$، عبور از مبدأ: x صفر شده و تغییر علامت دهد. فاصله از مبدأ: $|x|$
  - سرعت در حرکت روی محور x: $x > 0$: حرکت به سمت راست، $v < 0$: حرکت به سمت چپ
    شرط تغییر جهت: v صفر شده و تغییر علامت دهد.
  - شتاب: آهنگ تغییر سرعت: $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، سرعت متغیر $\Rightarrow a \neq 0$، سرعت ثابت $\Rightarrow a = 0$
  - نوع حرکت
    - تندشونده ← $|v|$: ↑، $av > 0$
    - کندشونده ← $|v|$: ↓، $av < 0$
  - نمودارها
    - شیب مماس بر $x-t$ ← سرعت لحظه‌ای، شیب واصل دو نقطه در $x-t$ ← سرعت متوسط
    - شیب مماس بر $v-t$ ← شتاب لحظه‌ای، شیب واصل دو نقطه در $v-t$ ← شتاب متوسط
    - مساحت زیر نمودار $v-t$ در یک بازه: Δx، مساحت زیر نمودار $a-t$ در یک بازه: Δv
    - در نمودار $x-t$: قله و دره یعنی تغییر جهت، قطع محور t یعنی عبور از مبدأ
    - در نمودار $v-t$: قطع محور t یعنی تغییر جهت، نزدیک‌شدن به محور t، کندشونده، دورشدن از محور t: تندشونده
- حرکت با سرعت ثابت
  - معادلهٔ مکان ـ زمان: $x = vt + x_0$، جابه‌جایی با سرعت ثابت: $\Delta x = v\Delta t$
  - نمودار $x-t$ خطی به شیب v (سرعت) و عرض از مبدأ x_0 (مکان اولیه)
- حرکت با شتاب ثابت
  - معادلهٔ $v-t$: $v = at + v_0$، معادلهٔ $x-t$: $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$
  - فرمول‌ها: مستقل از شتاب: $\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2}\Delta t$، مستقل از زمان: $v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$
  - مستقل از سرعت ثانویه: $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_1t$، سرعت متوسط: $v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$، سرعت متوسط = سرعت در لحظهٔ وسط، جابه‌جایی در ثانیهٔ nام: $\Delta x_n = (n - 0/5)a + v_0$
  - در معادلهٔ $x = At^2 + Bt + c$
    - A هم‌علامت B ← تغییر جهت نداریم، همواره تندشونده
    - A مخالف علامت B ← تغییر جهت داریم، ابتدا کندشونده، سپس تندشونده
  - نمودارها
    - سرعت ـ زمان: خطی به شیب a و عرض از مبدأ v_0
    - مکان ـ زمان: یک سهمی ← $a > 0$ سهمی رو به بالا، $a < 0$ سهمی رو به پایین.
- سقوط آزاد
  - معادلات و فرمول‌ها: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$، $v = -gt$، $v_2^2 - v_1^2 = -2g\Delta y$، لحظهٔ وسط $v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = v$
  - تناسب‌ها: t ثانیه بعد از سقوط ← $v \propto t$ و $|\Delta y| = $ جابه‌جایی $\propto t^2$
    تندی در هر ثانیه g تا زیاد می‌شود.
  - عددهای طلایی: در ثانیه‌های متوالی بعد از سقوط جابه‌جایی به ترتیب ۵، ۱۵، ۲۵، ۳۵، ... است.

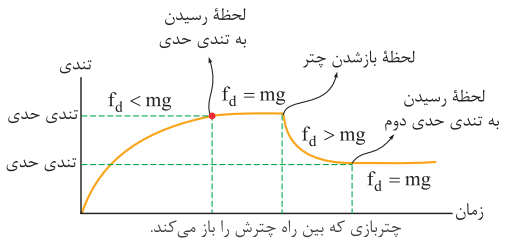
مرورنامه شب آزمون

فیزیک

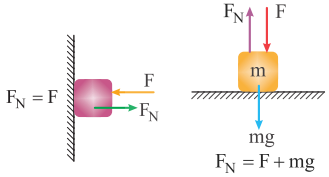
دینامیک

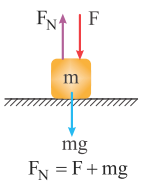
- قوانین نیوتون
  - **قانون اول:** (اندازه و جهت سرعت ثابت می‌ماند.) ثابت $v = \Rightarrow F_{net} = 0$، لختی: تمایل به حفظ حالت قبلی
  - **قانون دوم:** $F_{net} = ma$، نیروی خالص در جهت شتاب جسم هم‌جهت و متناسب هستند.
  - **قانون سوم:** نیروهای کنش و واکنش هم‌اندازه‌اند و در خلاف جهت هم
- وزن (W) ← $W = mg$، جرم: ثابت، وزن: متغیر، جرم: نرده‌ای، وزن: برداری
- نیروی مقاومت هوا (f_d)
  - وابسته به تندی و اندازهٔ جسم، همیشه در خلاف جهت حرکت جسم
  - تندی حدی: پس از رهاشدن جسم از یک ارتفاع بلند، با افزایش تندی، f_d هم افزایش می‌یابد تا در جایی با mg برابر شود و تندی ثابت بماند.



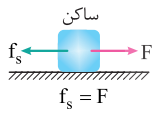


- نیروهای خاص
  - نیروی عمودی سطح (F_N)
    - فرمول ندارد و به کمک قوانین نیوتون محاسبه می‌شود. مثلاً
    - عددی که ترازو نشان می‌دهد: F_N
      - کندشونده رو به پایین/ تندشونده رو به بالا
    - آسانسور: $F_N = m(g \pm |a|)$
      - تندشونده رو به پایین/کندشونده رو به بالا

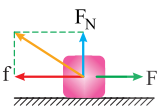




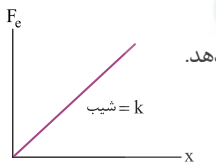
- نیروی اصطکاک (f)
  - نیروی اصطکاک ایستایی (f_s) ← هم‌اندازه با نیروی محرک، وقتی جسم شروع به حرکت نمی‌کند.



  - نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $(f_{s,max})$ ← $f_{s,max} = F_{N}.\mu_s$ (وقتی جسم در آستانهٔ حرکت است.)
    - جسم شروع به حرکت نمی‌کند: $F_{محرک} \le F_{s,max}$
    - جسم شروع به حرکت می‌کند: $F_{محرک} > f_{s,max}$
  - نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) ← $f_k = F_{N}.\mu_k$ (وقتی جسم در حال حرکت است.)
- نیروی سطح، نیروی تکیه‌گاه (R) ← $R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$،



- نیروی کشسانی فنر
  - اندازه: $F_e = kx$ (x: متغیر طول فنر نسبت به حالت عادی)
  - جهت: فنر کشیده جسم را می‌کشد، فنر فشرده جسم را هل می‌دهد.



- نیروی کششی طناب (T) ← فرمول ندارد و به کمک قوانین نیوتون محاسبه می‌شود. فنر همیشه جسم را می‌کشد.

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

تکانه

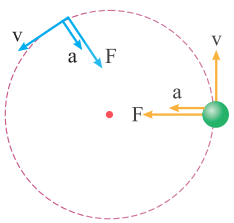
- $\vec{p} = m\vec{v}$ ، $p = mv$ ← تغییرات: $\Delta p = m\Delta v$ ، هر بلایی سر سرعت بیاید سر تکانه هم میاد.
- رابطه با انرژی جنبشی: $K = \frac{p^2}{2m}$
- رابطه با نیروی خالص ← $F_{net} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$
  - نیروی خالص برابر است با آهنگ تغییر تکانه
  - شیب نمودار تکانه ـ زمان ← نیروی خالص
  - مساحت زیر نمودار نیروی خالص ـ زمان در یک بازه ← تغییرات تکانه
  - $F_{net}\Delta t = m\Delta v$

نیروی گرانش

- $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ، هر دو جسم نیروی جاذبهٔ گرانشی به هم وارد می‌کنند.
- شتاب گرانشی سطح سیاره: $g = \frac{GM}{R^2}$
- شتاب گرانشی در ارتفاع h از سطح زمین: $g' = \frac{QM}{(R+h)^2}$ ← $\frac{g'}{g} = (\frac{R}{R+h})^2$

حرکت دایره‌ای یکنواخت

- مفاهیم اولیه: تندی: ثابت جهت حرکت: متغیر ← سرعت متغیر (شتاب‌دار)
- دورهٔ تناوب: (تعداد دور در هر دقیقه: rpm) و $T = \frac{t}{n}$
- تندی: $V = \frac{\text{محیط}}{\text{دوره}} \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T}$
- شتاب مرکزگرا و نیروی مرکزگرا: همان شتاب و نیروی خالص که همیشه به سمت مرکز دایره هستند.



$a_c = \frac{v^2}{r}$ و $F_c = \frac{mv^2}{r}$

نیروی مرکزگرا یک نیروی جداگانه نیست و همیشه یک نیرو، نقش مرکزگرایی را برعهده می‌گیرد.

- تندی بیشینهٔ خودرو در پیچ افقی: $v_{max} = \sqrt{rg\mu_s}$

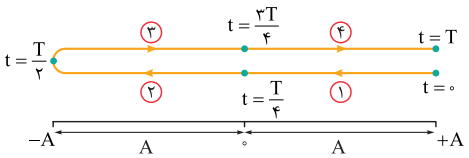
حرکت ماهواره به دور زمین

- شتاب مرکزگرا، همان شتاب گرانش است.
- نیروی مرکزگرا، همان نیروی گرانش است.
- تندی ماهواره: $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ r: شعاع دوران
- دورهٔ ماهواره: $T \propto \sqrt{r^3}$

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

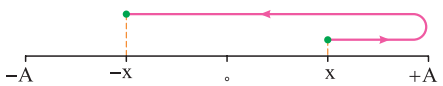
حرکت هماهنگ ساده

- دورهٔ تناوب: $T=\frac{t}{n}$، بسامد: $f=\frac{n}{t}$، $f=\frac{1}{T}$
- معادلهٔ مکان ـ زمان: $x=A\cos(\omega t)$، $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$
- نوسانگر در حال
  - دورشدن از مبدأ ← u, U, F, a, x: ↑ ، k, p, v: ↓ / کندشونده
  - نزدیک‌شدن به مبدأ ← U, F, a, x: ↓ ، K, p, v: ↑ / تندشونده
- یک نوسان کامل از ۴ مرحلهٔ زیر تشکیل شده:

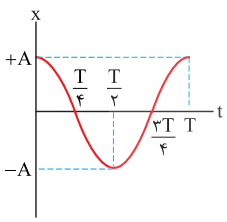


مسافت در هر نوسان: $\ell=4A$

- در مدت نصف دوره $(\frac{T}{2})$
  - مکان از x به $-x$ می‌رسد.
  - مسافت برابر $2A$ است.



- سامانهٔ جرم ـ فنر: $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$، $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$، دورهٔ تناوب فقط به جرم جسم و ثابت فنر بستگی دارد.
- آونگ ساده: $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$، $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$، دورهٔ تناوب فقط به طول آونگ و شتاب گرانش بستگی دارد.
- نمودار مکان ـ زمان: شبیه تابع کسینوس



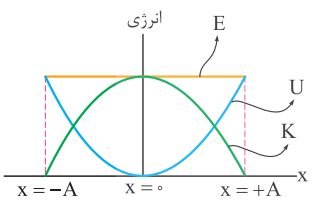
- رابطهٔ شتاب و نیرو با مکان: $a=-\omega^2 x$ و $F=-m\omega^2 x$ → $a_{max}=A\omega^2$ و $F_{max}=m\omega^2 A$

شتاب و نیرو همیشه هم‌علامت هستند و علامتشان مخالف علامت x است.

- انرژی مکانیکی نوسانگر:

$$E=U+K=U_{max}=K_{max}=\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}mw^2A^2=\frac{1}{2}mv_{max}^2$$

- نمودار انرژی ـ مکان:



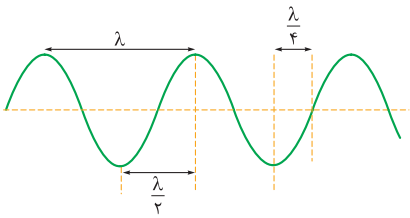
- تندی بیشینه: تندی در نقطهٔ تعادل: $v_{max}=A\omega$

در نقطه‌ای که $U=K$ است، $v=\frac{\sqrt{2}}{2}v_{max}$ است.

- تشدید: به یک نوسانگر نیروی هم‌بسامد با بسامد طبیعی آن وارد شود ← بیشینهٔ انرژی منتقل می‌شود ← با دامنهٔ بیشینه نوسان می‌کند.

موج

- انتقال انرژی بدون انتقال ماده، انواع موج
  - از نظر ماهیت
    - مکانیکی: نیاز به محیط مادی دارد.
    - الکترومغناطیسی: نیاز به محیط مادی ندارد.
  - از نظر شکل
    - عرضی: راستای نوسان عمود بر راستای انتشار
    - طولی: راستای نوسان موازی راستای انتشار
- طول موج (λ): مسافت طی‌شده توسط موج در مدت یک دوره، فاصلهٔ دو قلهٔ متوالی، فاصلهٔ دو دورهٔ متوالی
- بسامد موج: وابسته به چشمه تندی انتشار: وابسته به محیط

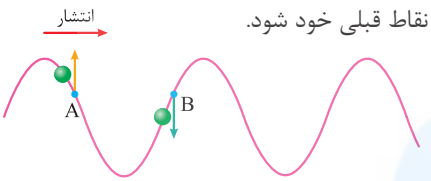


$$\lambda = vT \text{ یا } \lambda = \frac{v}{f}$$

- موج مکانیکی
  - تندی انتشار امواج عرضی در طناب:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F\ell}{m}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} = \frac{۲}{d}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

  - در یک محیط تندی انتشار امواج طولی از عرضی بیشتر است.
  - در موج مکانیکی هر یک از ذرات محیط، شبیه چشمه حرکت نوسانی ساده انجام می‌دهند.
  - در نقش موج هر ذره با توجه به جهت انتشار قرار است شبیه نقاط قبلی خود شود.



  - در موج طولی: مرکز بیشینهٔ جمع‌شدگی و مرکز بیشینهٔ بازشدگی در نقطهٔ تعادل است. فاصلهٔ جمع‌شدگی تا جمع‌شدگی $= \lambda$، فاصلهٔ بازشدگی تا بازشدگی $= \lambda$
  - توان موج: $P_{av} \propto A^۲f^۲$
- موج الکترومغناطیسی
  - میدان الکتریکی و مغناطیسی عمود بر هم و هم‌گام
  - قاعدهٔ دست راست: $\vec{E}$: ۴ انگشت $\vec{B}$: کف دست جهت انتشار: انگشت شست
  - تندی انتشار در خلأ: $c = \frac{۱}{\sqrt{\mu_۰\varepsilon_۰}} = ۳\times۱۰^۸ \ m/s$
  - طیف امواج الکترومغناطیسی:

پرتو گاما — پرتو x — فرابنفش — نور مرئی — فروسرخ — میکروموج — رادیویی

افزایش f، کاهش λ، افزایش انرژی

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

مرورنامه شب آزمون

شیمی

مفاهیم و حفظیجات

حفظیجات

- امید به زندگی شاخصی است که نشان می‌دهد با توجه به خطراتی که انسان‌ها در طول زندگی با آن مواجه هستند، به طور میانگین چند سال عمر می‌کنند.
- مقایسهٔ امید به زندگی در نواحی مختلف: نواحی برخوردار > میانگین جهانی > نواحی کم‌برخوردار
  اما میزان رشد امید به زندگی در نواحی کم‌ترتوسعه‌یافته، بیشتر است.
- آلاینده‌ها موادی هستند که بیش از مقدار طبیعی در یک محیط، نمونهٔ ماده یا یک جسم وجود دارد.
- آشنایی با مواد:
  ۱) اتیلن گلیکول (قطبی ـ $CH_2(OH)-CH_2(OH)$)
  ۲) اوره (قطبی ـ $(NH_2)_2CO$)
  ۳) نمک خوراکی (ترکیب یونی ـ $NaCl$)
  ۴) روغن زیتون (ناقطبی ـ $C_{57}H_{104}O_6$)
  ۵) وازلین (ناقطبی ـ $C_{25}H_{52}$)
  ۶) بنزین (ناقطبی ـ C_8H_{18})

چربی‌ها: مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلندزنجیر هستند.

چربی‌ها ناقطبی هستند و نیروهای بین مولکول غالب در آن‌ها، وان‌درووالسی است.

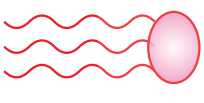
اسیدهای چرب

۱) فرمول کلی: $R-COOH$ (کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر کربنی (R) بلند)
۲) فرمول عمومی با گروه R خطی و سیرشده: $C_nH_{2n+1}COOH$ یا $C_nH_{2n}O_2$
۳) دارای یک بخش قطبی و یک بخش ناقطبی که در آن بخش ناقطبی بر قطبی غلبه می‌کند.

نمای کلی اسیدهای چرب

استرهای بلندزنجیر

۱) فرمول ساختاری: $R-COO-R'$
۲) حاصل واکنش الکل‌ها و کربوکسیلیک اسیدها و دارای یک بخش قطبی و یک بخش ناقطبی که در آن بخش ناقطبی بر قطبی غلبه می‌کند.



نمای کلی استرهای سنگین

انواع مخلوط‌ها

۱) محلول: همگن ـ پایدار ـ عدم پخش نور ـ تشکیل‌شده از یون‌ها و مولکول‌ها
۲) کلوئید: ناهمگن ـ پایدار ـ پخش نور ـ تشکیل‌شده از مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی
۳) سوسپانسیون: ناهمگن ـ ناپایدار ـ پخش نور ـ تشکیل‌شده از ذرات ریزماده

صابون‌ها

- صابون ماده‌ای است که می‌تواند هم در آب و هم در چربی حل شود.
- انواع:
  - جامد ← نمک سدیم اسید چرب ($RCOONa$)
  - مایع ← نمک پتاسیم/ آمونیوم اسید چرب ($RCOONH_4$ یا $RCOOK$)
- فرمول عمومی با گروه R خطی و سیرشده: $C_nH_{2n+1}COO^-Na^+$ یا $C_nH_{2n-1}O_2^-Na^+$
- صابون‌ها دو بخش قطبی و ناقطبی و دو بخش آنیونی و کاتیونی دارند.
- عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی:
  ۱) دما
  ۲) نوع پارچه (نخی یا پلی‌استری)
  ۳) نوع آب
  ۴) وجود یا عدم وجود آنزیم
  ۵) نوع و مقدار صابون مصرفی

مرکز مشاوره تحصیلی علیرضا افشار

مرورنامه شب آزمون

شیمی

- افزودنی‌ها به صابون
  - ۱) گوگرد ← ازبین‌برندهٔ قارچ‌های پوستی و جوش‌های صورت
  - ۲) مواد شیمیایی کلردار ← ↑ قدرت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی
  - ۳) نمک‌های فسفات ← واکنش با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} و ↑ قدرت پاک‌کنندگی صابون
- پاک‌کننده‌های غیرصابونی
  - تولیدشده از بنزن و مواد اولیهٔ دیگر در صنایع پتروشیمیایی با قدرت پاک‌کنندگی بیشتر نسبت به صابون‌ها
  - فرمول ساختاری: $R-C_6H_4-SO_3^-Na^+$ یا $RC_6H_4SO_3^-Na^+$ ← اتصال به چربی و آب و پخش‌شدن چربی در آب
    - ناقطبی: $R-$
    - قطبی: $-C_6H_4-SO_3^-Na^+$
  - عمل براساس برهم‌کنش میان ذرات مشابه صابون‌ها
- پاک‌کننده‌های خورنده ← عمل براساس واکنش میان ذرات و برهم‌کنش میان آن‌ها: مانند NaOH (لوله‌بازکن)، HCl (جوهرنمک) و سفیدکننده‌ها و مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم
- واکنش این پاک‌کننده‌ها در لوله‌ها و مجاری مسدودشده:
  - فراورده‌های دیگر + گاز هیدروژن ← آب + مخلوط سدیم هیدروکسید و آلومینیم
  - واکنش گرماده ← افزایش دما ← ذوب‌شدن چربی‌ها ← ↑ قدرت پاک‌کنندگی
  - مخلوط دارای خاصیت بازی و ایجاد صابون ← انحلال در آب و افزایش قدرت پاک‌کنندگی
  - تولید گاز ← ایجاد فشار و ضربهٔ مکانیکی

- اسید و باز آرنیوس
  - آرنیوس با کار بر روی رسانای الکتریکی محلول‌های آبی، نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.
  - ماده‌ای که **هنگام** انحلال در آب، غلظت یون‌های H^+ و OH^- را افزایش دهند، به ترتیب اسید و باز آرنیوس می‌شود:

$$\underbrace{N_2O_5(s)}_{\text{اسید آرنیوس}} + H_2O(l) \rightarrow 2H^+ + 2NO_3^- \quad \text{و} \quad \underbrace{Na_2O(s)}_{\text{باز آرنیوس}} + H_2O(l) \rightarrow 2Na^+(aq) + 2OH^-(aq)$$

- اسیدها
  - اسیدهای قوی
    - یونش کامل در آب، الکترولیت‌های قوی و به طور کلی فاقد مولکول‌های یونیده‌نشده
    - مقایسهٔ غلظت یون‌ها و اسید اولیه: $M(HX) = [H^+] = [X^-]$
    - **مثال:** HCl، HBr، HI، HNO_3، H_2SO_4 و ...
  - اسیدهای ضعیف
    - یونش جزئی در آب، الکترولیت ضعیف، شمار یون‌ها اندک و حاوی شمار زیاد مولکول‌های اسید
    - مقایسهٔ غلظت یون‌ها و اسید اولیه: $M(HX) > [H^+] = [X^-]$
    - **مثال:** HF، HCN، کربوکسیلیک اسیدها، HNO_2 و ...

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

بازها

- **بازهای قوی**
  - یونش کامل در آب، الکترولیت‌های قوی و فاقد مولکول‌های یونیده‌نشده
  - معادلهٔ یونش بازهای قوی $B(OH)_n$: $B(OH)_n(aq) \xrightarrow{H_2O(l)} B^{n+}(aq) + nOH^-(aq)$
  - **مثال:** هیدروکسیدهای فلزات گروه اول و دوم جدول دوره‌ای (به‌جز $Be(OH)_2$ و $Mg(OH)_2$)
- **بازهای ضعیف**
  - یونش جزئی در آب، الکترولیت‌های ضعیف، شامل یون‌های اندک و حاوی شمار زیاد مولکول‌های باز
  - **مثال:** آمونیاک (محلول شیشه‌پاک‌کن)
  - مقایسهٔ غلظت گونه‌ها در محلول آمونیاک: $M(NH_3) > [NH_4^+] = [OH^-]$

ثابت یونش اسیدها و بازها

- ثابت یونش یک اسید، نسبت حاصل‌ضرب غلظت تعادلی یون‌های موجود در محلول را به غلظت تعادلی آن اسید نشان می‌دهد و با K_a نشان داده می‌شود.

$$HA \rightleftharpoons A^- + H^+ ; K_a = \frac{[A^-][H^+]}{[HA]}$$

- ثابت تعادل برای بازها، به ثابت یونش باز معروف است و با K_b نشان داده می‌شود.
- هرچه K_a / K_b ↑ ← میزان یونش اسید / باز ↑ ← $[H^+]$ / $[OH^-]$ ↑ ← اسید / باز قوی‌تر و رسانایی الکتریکی محلول آن ↑
- مقایسهٔ قدرت اسیدی اسیدهای ضعیف:

$$HCN < H_2CO_3 < CH_3COOH < HCOOH < HNO_2$$

- مقدار عددی ثابت یونش اسیدها و بازها تنها به دما وابسته است.

ارتباط میان $[OH^-]$ و $[H^+]$ با pH

- هرچه خاصیت اسیدی یک محلول ↑ ← $[H^+]$ ↑ ← $[OH^-]$ ↓ ← pH ↓
- هرچه خاصیت بازی یک محلول ↑ ← $[H^+]$ ↓ ← $[OH^-]$ ↑ ← pH ↑

در دمای اتاق رابطهٔ $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$ برقرار است؛ پس: البته خاصیت اسیدی ↑ ← $[H^+]$ ↑ ← pH ↓ ← $[OH^-]$ ↓ ← خاصیت بازی ↓

یونش آب

- آب و همهٔ محلول‌های آبی، حاوی یون‌های OH^- و H^+ هستند؛ این یون‌ها در اثر خود یونش آب نیز به دست می‌آیند.
- آب خالص در هر دمایی خنثی است؛ زیرا در هر دمایی رابطهٔ $[H^+] = [OH^-]$ برقرار است و در دمای ۲۵ °C غلظت یون‌ها یکسان و برابر 10^{-7} مولار است.

$$H_2O(l) \rightarrow H^+(aq) + OH^-(aq)$$

- در محلول‌های آبی در دمای ۲۵ °C، هرگاه غلظت یکی از یون‌های OH^- یا H^+ افزایش یابد، غلظت یون دیگر کاهش می‌یابد.
- در محلول‌های اسیدی و بازی هر دو یون H^+ و OH^- وجود دارند؛ اما در محلول‌های اسیدی $[H^+]$ و در محلول‌های بازی $[OH^-]$ بیشتر از دیگری است.

شوینده‌های خورنده

- در واکنش خنثی‌شدن اسیدها و بازها، یون‌های H^+ در واکنش با یون‌های OH^-، به مولکول‌های آب تبدیل می‌شوند؛ در حالی که سایر یون‌ها دست‌نخورده باقی می‌مانند. ← معادلهٔ این واکنش به طور کلی به صورت زیر است:

$$H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$$

- برای بازکردن لوله‌های مسدودشده با اسیدهای چرب، می‌توان از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید استفاده کرد. فراوردهٔ این واکنش محلول در آب و پاک‌کننده است و چربی‌های اضافی را می‌زداید.
- اگر موادی که سبب گرفتی لوله‌ها و مجاری می‌شوند، خاصیت بازی داشته باشند، برای زدودن آن‌ها از محلول غلیظ HCl استفاده می‌شود.

ضد اسیدها

- غلظت یون H^+ در شیرهٔ معده، حدود ۰/۰۳ مولار است.
- ↑ مقدار اسید معده ← ↑ شمار یون‌های جذب‌شده توسط دیوارهٔ معده ← نابودی سلول‌های دیوارهٔ معده ← درد، التهاب و خونریزی
- ضد اسیدها داروهایی هستند که با خنثی‌کردن مقداری از اسید معده سبب کاهش میزان اسید معده می‌شوند.

مواد موجود در سه نمونه از ضد اسیدها: ۱) $NaHCO_3$ ـ $Al(OH)_3$ ۲) $Al(OH)_3$ ـ $Mg(OH)_2$ ۳) $NaHCO_3$

- شیر منیزی، یکی از رایج‌ترین ضد اسیدهاست که شامل $Mg(OH)_2$ است و به شکل سوسپانسیون مصرف می‌شود.

مسائل

قسمت (۱)

واکنش تولید صابون

واکنش NaOH با اسید چرب:

$$RCOOH + NaOH \rightarrow RCOO^-Na^+ + H_2O$$

واکنش NaOH با استر بلندزنجیر:

$$C_3H_5(RCOO)_3 + 3NaOH \rightarrow 3RCOONa + \underbrace{C_3H_5(OH)_3}_{\text{الکل}}$$

واکنش صابون با آب سخت:

$$2RCOONa(aq) + Ca^{2+}(aq) \rightarrow (RCOO)_2Ca(s) + 2Na(aq)$$

$$2RCOONa(aq) + Mg^{2+}(aq) \rightarrow (RCOO)_2Mg(s) + 2Na(aq)$$

قسمت (۲)

محاسبهٔ درجهٔ یونش اسیدها (α):

$$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq)$$

$$\alpha = \frac{\text{تعداد مولکول‌های یونیده‌شده}}{\text{تعداد کل مولکول‌های حل‌شده}} = \frac{\text{غلظت مولی } H^+ \text{ یا } A^- \text{ تولیدی}}{\text{غلظت مولی اولیهٔ اسید}} \qquad \%\alpha = 100 \times \alpha$$

$$\alpha = \frac{[A^-]}{M} = \frac{[H^+]}{M} \Rightarrow [H^+] = [A^-] = M\alpha$$

محاسبهٔ ثابت تعادل برای واکنش $aA + bB \rightarrow cC + dD$:

$$K = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b} \rightarrow \text{یکا}: \left(\frac{mol}{L}\right)^{(c+d)-(a+b)}$$

$$HA(aq) \rightarrow H^+(aq) + A^-(aq) \rightarrow K_a = \frac{[H^+].[A^-]}{[HA]}$$

قسمت (۳) ← محاسبهٔ ثابت یونش اسیدی:

مقادیر K_a برای اسیدها:

- اسیدهای قوی $\alpha = ۱$ ← K_a بزرگ
- اسیدهای ضعیف $\alpha < ۱$:
  - اسیدهای خیلی ضعیف ($K_a < ۱۰^{-۳}$ یا $\alpha < ۰/۰۵$): $K_a = \frac{[H^+]^۲}{M}$
  - $K_a = \frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha}$

$$K_a = \frac{[H^+]^۲}{M}, K_a = M\alpha^۲ = [H^+].\alpha \Rightarrow [H^+] = \sqrt{K_a}.M$$

محاسبهٔ pH:

اسیدها: $[H^+] = ۱۰^{-pH} = M.\underset{\text{ظرفیت اسید}}{n}.\alpha \Rightarrow pH = -\log[H^+]$

بازها: $[OH^-] = M.\underset{\text{ظرفیت باز}}{n}.\alpha \Rightarrow$ در دمای اتاق: $[H^+].[OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Rightarrow pH = -\log[H^+]$

قسمت (۴) ← محاسبهٔ pH محلول حاصل از اختلاط اسیدهای قوی: (M: غلظت مولی محلول‌ها و V: حجم محلول‌ها)

$$[H^+] = \frac{M_۱V_۱ + M_۲V_۲ + \cdots}{V_۱ + V_۲ + \cdots}$$

قسمت (۵) ← تغییر pH بر اثر رقیق‌کردن

- محلول اسیدهای قوی را تا حجم n برابر رقیق کنیم.
  - غلظت محلول و H^+، $\frac{۱}{n}$ برابر می‌شود.
  - غلظت OH^-، n برابر می‌شود.
  - $pH_{\text{جدید}} = pH_{\text{اولیه}} + \log n$
- محلول بازهای قوی را تا حجم n برابر رقیق کنیم.
  - غلظت محلول و OH^-، $\frac{۱}{n}$ برابر می‌شود.
  - غلظت H^+، n برابر می‌شود.
  - $pH_{\text{جدید}} = pH_{\text{اولیه}} - \log n$

مرکز مشاوره تحصیلی علیرضا افشار

قسمت (۶)

خنثی‌شدن کامل اسیدها و بازها: (n = ظرفیت اسید یا باز)

$$M_a.V_a.n_a = M_b.V_b.n_b$$

خنثی‌شدن ناقص اسیدها و بازها:

مرحلهٔ ۱) برای هریک از محلول‌ها، مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم، در واقع شمار مول‌های یون‌های H^+ و OH^- را محاسبه می‌کنیم:

$M_a.V_a.n_a$ = مقدار مول اسید $\times n$

$M_b.V_b.n_b$ = مقدار مول باز $\times n$

مرحلهٔ ۲)

۱) $M_a.V_a.n_a > M_b.V_b.n_b \xrightarrow{\text{محلول اسیدی}} [H^+] = \dfrac{M_a.V_a.n_a - M_b.V_b.n_b}{V_a + V_b}$

۲) $M_a.V_a.n_a < M_b.V_b.n_b \xrightarrow{\text{محلول بازی}} [OH^-] = \dfrac{M_b.V_b.n_b - M_a.V_a.n_a}{V_a + V_b}$

مرحلهٔ ۳) pH محلول نهایی را با استفاده از غلظت‌های به‌دست‌آمده محاسبه می‌کنیم.

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

مفاهیم و حفظیجات

انجام واکنش با سفر الکترون

- اکسایش: به معنای از دست دادن الکترون ← گونه‌ای که با دادن الکترون به گونه‌های دیگر، آن‌ها را کاهش می‌دهد و خودش اکسایش می‌یابد، کاهنده نامیده می‌شود.
- کاهش: به معنای گرفتن الکترون ← گونه‌ای که با گرفتن الکترون از گونه‌های دیگر، سبب اکسایش آن‌ها و سبب کاهش خود می‌شود، اکسنده نامیده می‌شود.
- شیمی‌دان‌ها هر یک از فرایندهای کاهش و اکسایش را با یک نیم‌واکنش نشان می‌دهند که باید از لحاظ جرم اتم‌ها و بار الکتریکی موازنه باشد.

نیم‌واکنش اکسایش: گونهٔ کاهنده ⟶ گونهٔ اکسایش‌یافته $+ne^-$

نیم‌واکنش کاهش: گونهٔ اکسنده $+ne^-$ ⟶ گونهٔ کاهش‌یافته

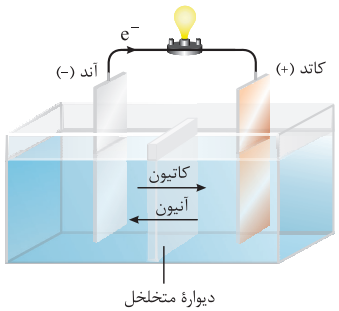
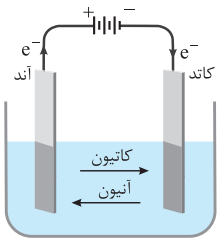
ویژگی‌های واکنش‌های اکسایش ـ کاهش

- در واکنش‌های اکسایش ـ کاهشی که به صورت طبیعی انجام می‌شوند، فراورده‌ها پایدارتر از واکنش‌دهنده‌هاست؛ پس این واکنش‌ها گرماده بوده و ΔH شان منفی است.
- اغلب فلزها در واکنش با نافلزها، الکترون از دست داده و به کاتیون تبدیل می‌شوند.

سری الکتروشیمیایی

- تغییر علامت E°
  - E° منفی‌تر
    - گونهٔ کاهنده، کاهندهٔ قوی‌تری است.
    - گونهٔ اکسنده، اکسندهٔ ضعیف‌تری است.
  - E° مثبت‌تر
    - گونهٔ کاهنده، کاهندهٔ ضعیف‌تری است.
    - گونهٔ اکسنده، اکسندهٔ قوی‌تری است.
- **نکتهٔ مهم:** برای مقایسهٔ قدرت اکسندگی، گونه‌های سمت چپ نیم‌واکنش کاهش و برای مقایسهٔ قدرت کاهندگی، گونه‌های سمت راست نیم‌واکنش کاهش را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.
- در واکنش‌هایی که به طور طبیعی انجام می‌شوند، قدرت کاهندگی فلز و قدرت اکسندگی کاتیون فلز که در سمت واکنش‌دهنده‌ها قرار دارند به ترتیب بیشتر از قدرت کاهندگی فلز و قدرت اکسندگی کاتیون فلزی است که در سمت فراورده‌ها قرار دارند.
- در سری الکتروشیمیایی ظرفی از جنس فلز راست بالا، برای نگه‌داری محلول حاوی کاتیون‌های چپ پایین‌تر مناسب است.

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

	سلول گالوانی	سلول الکترولیتی
		
تفاوت‌ها	انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.	انرژی الکتریکی به انرژی شیمیایی تبدیل می‌شود.
	یک واکنش شیمیایی در جهت طبیعی پیش می‌رود.	با اعمال یک ولتاژ بیرونی یک واکنش «اکسایش ـ کاهش» دلخواه انجام می‌شود.
	دارای دو الکترولیت است که توسط دیواره‌ای متخلخل از هم جدا شده‌اند (الکترولیت‌ها حاوی کاتیون‌هایی از جنس الکترودها هستند).	دو الکترود درون یک الکترولیت قرار گرفته‌اند (الکترولیت یک محلول یونی یا یک ترکیب یونی مذاب است.)
	آند، قطب منفی و کاتد، قطب مثبت است.	آند قطب مثبت و کاتد، قطب منفی است.
	معمولاً الکترودهای آند و کاتد در واکنش شرکت می‌کنند.	معمولاً الکترودهای آند و کاتد بی‌اثرند و در واکنش شرکت نمی‌کنند.
شباهت‌ها	اکسایش در آند و کاهش در کاتد انجام می‌شود.	
	جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند به کاتد است.	
	کاتیون‌ها به سمت کاتد و آنیون‌ها به سمت آند مهاجرت می‌کنند.	

نیم‌سلول استاندارد هیدروژن (SHE)

- شیمی‌دان‌ها، SHE را به عنوان مبنا انتخاب کردند و پتانسیل آن را برابر صفر در نظر گرفتند.
- SHE:
  - شامل یک الکترود پلاتینی (Pt) است.
  - دارای محلول یک مولار از یون‌های H^+ در دمای $25\ ^\circ C$ است که گاز هیدروژن با فشار $1\ atm$ درون این نیم‌سلول‌ها وجود دارد.

فلز لیتیم

- در فناوری‌های جدید ساخت باتری، فلز Li دارای نقش مهمی است؛ زیرا لیتیم کم‌ترین چگالی و E° را در میان فلزها دارد.
- باتری‌های لیتیمی می‌توانند قابل شارژ و یا غیر قابل شارژ باشند، اما همهٔ باتری‌ها، از لیتیم ساخته نمی‌شوند؛ مثل باتری‌های دگمه‌ای روی ـ نقره (Zn ـ Ag)

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

مرورنامه شب آزمون

شیمی

سلول سوختی، نوعی سلول **گالوانی** است که افزون بر **کارایی بیشتر، ردپای CO_2 را کاهش می‌دهد**.

سوزاندن هیدروژن در موتور درون‌سوز، بازدهی نزدیک به ۲۰٪ دارد در حالی که اکسایش آن در سلول سوختی، بازدهی را تا ۳ برابر افزایش می‌دهد.

سلول سوختی «هیدروژن ـ اکسیژن»

گاز H_2 به صورت **غیرمستقیم و کنترل‌شده** با O_2 واکنش داده و بخش قابل توجهی از انرژی شیمیایی این واکنش به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.

سلول سوختی — اجزا:
- الکترود آند
- الکترود کاتد

(دارای کاتالیزگرهایی که به نیم‌واکنش‌ها سرعت می‌بخشند.)

- غشای مبادله‌کنندهٔ یون H^+

جهت حرکت e^-ها از آند به کاتد و از طریق مدار بیرونی (رسانای الکترونی) و جهت حرکت H^+ها در غشای مبادله‌کننده (رسانای یونی) به سمت کاتد است.

نیم‌واکنش اکسایش: $(H_2(g) \rightarrow 2H^+(aq) + 2e^-) \times 2 ; E^\circ = 0\ V$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(g) ; E^\circ = 1/23\ V$

واکنش کلی: $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g) ; E^\circ = 1/23\ V$

سلول سوختی برخلاف باتری‌ها، انرژی شیمیایی را ذخیره نمی‌کند.

حالت گازی

سلول سوختی «متان ـ اکسیژن» ← معادلهٔ کلی واکنش انجام‌شده:

$$CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$$

برقکافت آب:
- انجام در سلول‌های الکترولیتی و با عبور جریان الکتریکی و تبدیل مولکول‌های آب، به عناصر سازنده
- حجم گاز H_2 تولیدشده در اطراف کاتد، ۲ برابر حجم گاز O_2 تولیدشده در اطراف آند است.
- در محلول پیرامون آند، pH ↓ و در محلول پیرامون کاتد، pH ↑ می‌یابد.

نیم‌واکنش اکسایش: $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $(2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)) \times 2$

واکنش کلی: $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 2H_2(g)$

برقکافت سدیم کلرید:
- فلز سدیم را می‌توان از برقکافت سدیم کلرید **مذاب** (نه محلول!) در یک سلول الکترولیتی تهیه کرد.
- فلز سدیم در سمت کاتدی (قطب −) و گاز زردرنگ Cl_2 در سمت آندی (قطب +) تولید می‌شود.

نیم‌واکنش اکسایش: $2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $2Na^+(l) + 2e^- \rightarrow 2Na(l)$

واکنش کلی: $\underbrace{2Na^+(l) + 2Cl^-(l)}_{2NaCl(l)} \rightarrow 2Na(l) + Cl_2(g)$

مرکز مشاوره تحصیلی علیرضا افشار

تهیهٔ فلز منیزیم

در صنعت، فلز Mg را از برقکافت منیزیم کلرید **مذاب** (نه محلول!) تهیه می‌کنند که یکی از منابع فلز منیزیم، آب دریاست.

مرحلهٔ ۱)
$$Mg^{2+}(aq) + 2OH^-(aq) \rightarrow Mg(OH)_2(s)$$

مرحلهٔ ۲) عبور از صافی و واکنش با یک اسید قوی (HCl)
$$Mg(OH)_2(s) + 2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + 2H_2O(l)$$

مرحلهٔ ۳) ابتدا خشک‌کردن $MgCl_2$ و سپس ورود مذاب آن به سلول الکترولیتی:

نیم‌واکنش اکسایش: $2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $Mg^{2+}(l) + 2e^- \rightarrow Mg(l)$

واکنش کلی: $\underbrace{Mg^{2+}(l) + 2Cl^-(l)}_{MgCl_2(l)} \rightarrow Mg(l) + Cl_2(g)$

نکتهٔ مهم: چگالی: $Mg(l) < MgCl_2(l)$

فرایند هال

Al، فلز فعالی است که به سرعت در هوا اکسید می‌شود اما این فلز با تشکیل لایهٔ چسبنده و متراکم Al_2O_3، از ادامهٔ اکسایش جلوگیری می‌کند و خورده نمی‌شود.

رایج‌ترین روش تولید Al که در سلول الکترولیتی با آند و کاتد از جنس گرافیت انجام می‌شود.

آند (قطب $(+)$)، میله‌های گرافیتی داخل الکترولیت / کاتد (قطب $(-)$)، بدنهٔ گرافیتی و کف سلول

نکتهٔ مهم: چگالی: $Al_2O_3(l) < Al(l)$

نیم‌واکنش اکسایش: $6O^{2-}(l) \rightarrow 3O_2(g) + 12e^- \Rightarrow 3C(s) + 3O_2(g) \rightarrow 3CO_2(g)$

نیم‌واکنش کاهش: $4Al^{3+}(l) + 12e^- \rightarrow 4Al(l)$

واکنش کلی: $Al_2O_3(l) + 3C(s) \rightarrow 4Al(l) + 3CO_2(g)$

تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه، تنها به ۷٪ انرژی لازم برای تهیهٔ همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد.

O_2، چون یک کاهندهٔ قوی است، در دمای بالا در آند فرایند هال با الکترود آند (گرافیت) واکنش داده و گاز CO_2 تولید می‌کند.

خوردگی آهن

در فرایند خوردگی آهن، یک سلول گالوانی تشکیل می‌شود که قسمت‌های گوناگون سطح آهن، آند و کاتد و قطرهٔ آب، محلول الکترولیت را تشکیل می‌دهند:

نیم‌واکنش اکسایش: $Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$

نیم‌واکنش کاهش (در محیط خنثی): $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

یون‌های Fe^{2+} تولیدشده در آند، وارد بخش کاتدی شده و در آن‌جا به صورت $Fe(OH)_2$ رسوب می‌کنند. این رسوب دوباره با آب و اکسیژن واکنش داده و به زنگ آهن تبدیل می‌شود.

$$4Fe(OH)_2(s) + O_2(g) + 2H_2O(l) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$$

واکنش کلی: $4Fe(s) + 6H_2O(l) + 3O_2(g) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$

نکتهٔ مهم: در محیط اسیدی، نیم‌واکنش کاهش به صورت $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$ انجام می‌شود که E° بزرگ‌تری نسبت به نیم‌واکنش کاهش محیط خنثی داشته و سبب افزایش سرعت زنگ‌زدن آهن می‌شود.

حفاظت کاتدی

- در روش حفاظت کاتدی، فلز با E° کوچک‌تر (منفی‌تر) آند بوده و دچار خوردگی می‌شود اما فلز با E° بزرگ‌تر (مثبت‌تر) کاتد بوده و در سطح آن، واکنش کاهش اکسیژن صورت می‌گیرد اما خود فلز خورده نمی‌شود.
- نیم‌واکنش کاهش در حفاظت کاتدی مشابه نیم‌واکنش کاهش در خوردگی آهن است که در هر دو حالت، اکسیژن کاهش می‌یابد.
- آهن گالوانیزه (سفید)
  - ورقهٔ آهنی با پوششی از فلز روی ـ کاربرد در ساخت تانکر آب و کانال کولر
  - قبل از ایجاد خراش ← فلز روی به عنوان پوشش، مانع از ورود رطوبت و اکسیژن به سطح آهن می‌شود ← آهن خورده نمی‌شود.
  - با ایجاد خراش ← فلز روی خورده می‌شود تا از خورده‌شدن فلز آهن جلوگیری کند (حفاظت کاتدی).

نیم‌واکنش اکسایش: $(Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-) \times 2$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

واکنش کلی: $2Zn(s) + O_2(g) + 2H_2O(l) \rightarrow 2Zn(OH)_2(aq)$

حلبی

- ورقهٔ آهنی پوشیده‌شده با لایهٔ نازک قلع ـ کاربرد در ساخت قوطی کنسرو روغن نباتی
- قبل از ایجاد خراش ← حفاظت فلز قلع از آهن به عنوان پوشش ← آهن دچار خوردگی نمی‌شود.
- بعد از ایجاد خراش ← آهن به دلیل E° کوچک‌تر (منفی‌تر) از قلع، به عنوان آند اکسایش یافته و خورده می‌شود.
- قوطی‌های حلبی در اثر خراش زودتر دچار خوردگی می‌شوند.
- برای ساخت ظروف بسته‌بندی مواد غذایی از حلبی استفاده می‌شود و از آهن سفید نباید استفاده کرد.

نیم‌واکنش اکسایش: $(Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-) \times 2$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

واکنش کلی: $4Fe(s) + 6H_2O(l) + 3O_2(g) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$

آبکاری

پوشاندن سطح یک فلز با لایهٔ نازکی از فلزهای ارزشمند و مقاوم در برابر خوردگی، آبکاری نام دارد که در سلول‌های الکترولیتی انجام می‌شوند.

آبکاری یک فلز فولادی با فلز نقره

- فلز پوشاننده (نقره) در آند خورده شده و به صورت یون (Ag^+) وارد محلول الکترولیت می‌شود.
- کاتیون‌های فلز پوشاننده (Ag^+) در کاتد کاهش یافته و روی جسم مورد نظر (جسم فولادی) می‌نشیند.
- الکترولیت باید حاوی کاتیون‌های فلز آند (Ag^+) باشد.
- جسمی که به عنوان کاتد (فولاد) قرار است توسط فلز نقره پوشیده شود، باید رسانای جریان برق باشد.

نیم‌واکنش اکسایش: $Ag(s) \rightarrow Ag^+(aq) + e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s)$

سلول‌های نور الکتروشیمیایی

برای انجام فرایندهای اکسایش و کاهش از نور استفاده می‌کنند. نمونه‌ای از آن‌ها برای تهیهٔ گاز H_2 به کار می‌رود:

نیم‌واکنش اکسایش: $Si(s)+2H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s)+4H^+(aq)+4e^-;E^\circ=+0/84\ V$

نیم‌واکنش کاهش: $(2H_2O(l)+2e^- \rightarrow H_2(g)+2OH^-(aq))\times 2;E^\circ=-0/83\ V$

واکنش کلی: $Si(s)+2H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s)+2H_2(g);E^\circ=0/01\ V$

مزایا:

۱) استفاده از نور خورشید، ارزان است.

۲) آلایندگی کم‌تری تولید می‌شود.

عدد اکسایش

- عدد اکسایش عنصرها در حالت آزاد برابر صفر و در حالت یون تک‌اتمی برابر بار آن‌هاست.
- عدد اکسایش فلزها در ترکیب‌ها: فلزهای گروه (۱) برابر $(+1)$، فلزهای گروه (۲) برابر $(+2)$ و Al برابر $(+3)$
- عدد اکسایش فلوئور در ترکیب‌های مختلف آن، برابر (-1) است.
- عدد اکسایش هیدروژن معمولاً برابر $(+1)$ است. به جز در ترکیب نافلزها که برابر (-1) است.
- عدد اکسایش اکسیژن، معمولاً برابر (-2) است؛ به‌جز در ترکیب‌های: $\overset{+2}{O}F_2$، $H\overset{0}{O}F$، $H_2\overset{-1}{O}_2$ و $\overset{+1}{O_2}F_2$
- مجموع عدد اکسایش اتم‌ها در یک مولکول، برابر صفر و در یک یون چندتامی برابر با بار یون است.

(۲) مسائل

- در واکنش‌های «اکسایش ـ کاهش»، برای تعیین شمار الکترون‌های مبادله‌شده می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

ضریب گونهٔ کاهنده × زیروند گونهٔ کاهنده × میزان تغییر عدد اکسایش گونهٔ کاهنده

یا

ضریب گونهٔ اکسنده × زیروند گونهٔ اکسنده × میزان تغییر عدد اکسایش گونهٔ اکسنده

- محاسبهٔ نیروی الکتروموتوری (emf) یک سلول گالوانی: $emf=E^\circ(\text{سلول})=E^\circ(\text{کاتد})-E^\circ(\text{آند})$
- برای محاسبهٔ تغییر جرم آند و کاتد در سلول‌های گالوانی، ابتدا واکنش انجام‌شده را نوشته و سپس با استفاده از روش کسرهای تناسب یا کسرهای تبدیل، مسئله را حل می‌کنیم:

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}=\frac{\text{مول } e^- \text{ مبادله‌شده}}{\text{ضریب } e^- \text{ در واکنش}}=\frac{\text{شمار } e^- \text{ مبادله‌شده}}{N_A\times \text{ضریب } e^- \text{ در واکنش}}$$

- وقتی تیغه‌ای را وارد محلول یونی با خاصیت اکسندگی بیشتر می‌کنیم، تغییر جرم تیغه برابر است با:

تغییر جرم تیغه = |جرم فلز کاتدی کاهش‌یافته ـ جرم فلز آندی اکسایش‌یافته|

- اگر همهٔ رسوب تشکیل‌شده روی تیغه قرار گیرد، می‌توانیم از کسر تناسب زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}=\frac{\text{تغییر جرم تیغه}}{|(\text{جرم مولی فلز کاهنده}\times\text{ضریب})-(\text{جرم مولی یون اکسنده}\times\text{ضریب})|}$$

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

راه‌های ارتباطی مرکز مشاوره

وبسایت	اینستاگرام	تلگرام
www.AlirezaAfshar.org	AlirezaAfsharOriginal	AlirezaAfsharOfficial

رزور مشاوره خصوصی علیرضا افشار

برای رزرو مشاوره خصوصی تک جلسه و ماهانه
به شمارهٔ ۰۹۳۵۸۹۶۰۵۰۳ در واتساپ پیام دهید

آدرس تمام رسانه ها : Afshar.xyz