۱- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (۱ نمره)

الف) هر تابع یکنوا، اکیداً یکنوا نیز هست.

ب) اگر $A(۴,۲)$ روی نمودار $y=f(x)$ باشد، نقطهٔ $A'(۸,۵)$ متناظر آن روی نمودار $y=۳+f(\frac{x}{۲})$ است.

ج) اگر $f(x)=x^{۲}-۶$، آن‌گاه $(fof)(۳)=۳$ است.

د) تابع $y=\tan x$ در بازهٔ $(\pi,\frac{۳\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است.

۲- جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. (۲ نمره)

الف) اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۴-x$، آن‌گاه دامنهٔ gof برابر بازهٔ .... است.

ب) اگر کمترین مقدار تابع $y=۲'a-۲\sin\frac{\pi}{۵}x$ برابر ۴ باشد، بیشترین مقدار آن برابر .... است.

ج) تابع $y=x^{۲}|x|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a برابر .... است.

د) وارون تابع $y=x^{۳}+x+۳$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به‌طول .... قطع می‌کند.

۳- اگر تابع $f(x)=(۲a-۵)x^{۳}-۴$، روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a را به‌دست آورید. (۰/۵ نمره)

۴- به موارد «الف» و «ب» پاسخ دهید. (۱/۲۵ نمره)

الف) در تابع $g(x)=(a-۳)x^{۲}+۲bx+۱$ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع g هم صعودی و هم نزولی باشد.

ب) اگر تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، جواب نامعادلهٔ $f(۳x+۱)\geq f(x-۷)$ را به‌دست آورید.

۵- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(x^{۲}+۳)(x+۳)$ را با انتقال تابع $y=x^{۳}$ رسم کنید. (۱/۵ نمره)

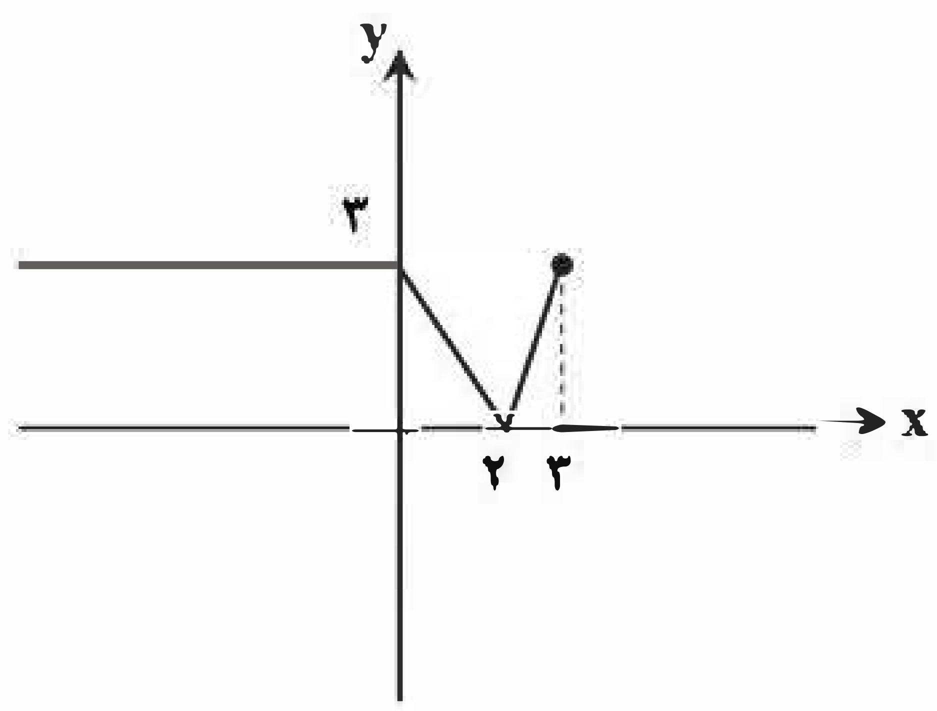
۶- توابع $f(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$ و $g(x)=\sqrt{۲-x}+۱$ را در نظر بگیرید. (۲/۲۵ نمره)

الف) دامنهٔ تابع fog را به‌کمک تعریف به‌دست آورید.

ب) مقدار $(fo(gof))(۰)$ را به‌دست آورید.

۷- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۵}$ را ابتدا نسبت به محور عرض‌ها قرینه کرده، سپس ۳ واحد به بالا منتقل می‌کنیم و در نهایت آن را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع به‌دست آمده را بنویسید. (۰/۷۵ نمره)

۸- اگر نمودار f مطابق شکل مقابل باشد، نمودار تابع $g(x)=۲-f(\frac{x}{۲})$ را مرحله‌به‌مرحله رسم کرده و دامنه و برد تابع g را مشخص کنید. (۱/۵ نمره)



۹- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}-۶x+۱۳$ در بازهٔ $[m,+\infty)$ یک‌به‌یک است. محدودهٔ m را به‌دست آورید. (۱ نمره)

۱۰- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}-۴x$ و دامنهٔ $x\leq ۲$ را در نظر بگیرید. (۲ نمره)

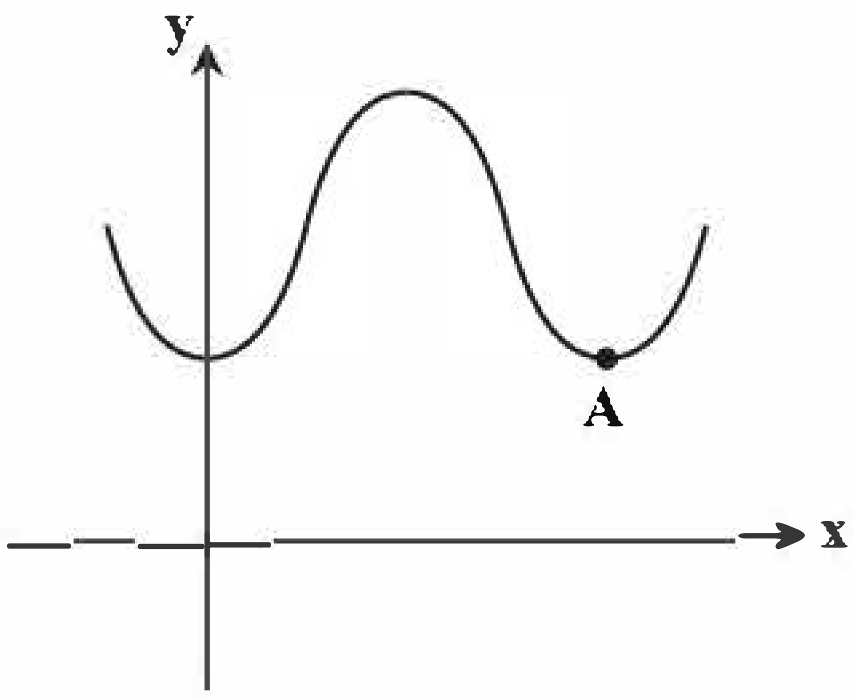
الف) ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را به‌دست آورید.

ب) دامنه و برد تابع $f^{-۱}$ را بنویسید.

۱۱- به‌کمک ترکیب توابع نشان دهید دو تابع $f(x)=x^{3}+1$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ وارون یکدیگر هستند. (۱/۲۵ نمره)

۱۲- رابطهٔ دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\mathrm{Sin}bx+c$ را برحسب a، b و c بنویسید و با توجه به آن دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم تابع $y=-2-\pi\mathrm{Sin}(\frac{x}{2})$ را به‌دست آورید. (۱/۵ نمره)

۱۳- قسمتی از نمودار تابع $y=c-4\mathrm{Cos}(\frac{\pi b}{2}x)$ به‌صورت شکل مقابل است. اگر $A(2,2)$ روی نمودار تابع باشد، مقادیر b و c را به‌دست آورید. (۱/۵ نمره)



۱۴- تابعی به‌صورت $y=a+b\mathrm{Sin}(3bx)$ چنان بنویسید که دورهٔ تناوب آن برابر $\frac{2\pi}{3}$ بوده و ماکزیمم آن سه برابر مینیمم آن باشد. (۲ نمره)

ویژهٔ پایهٔ دوازدهم

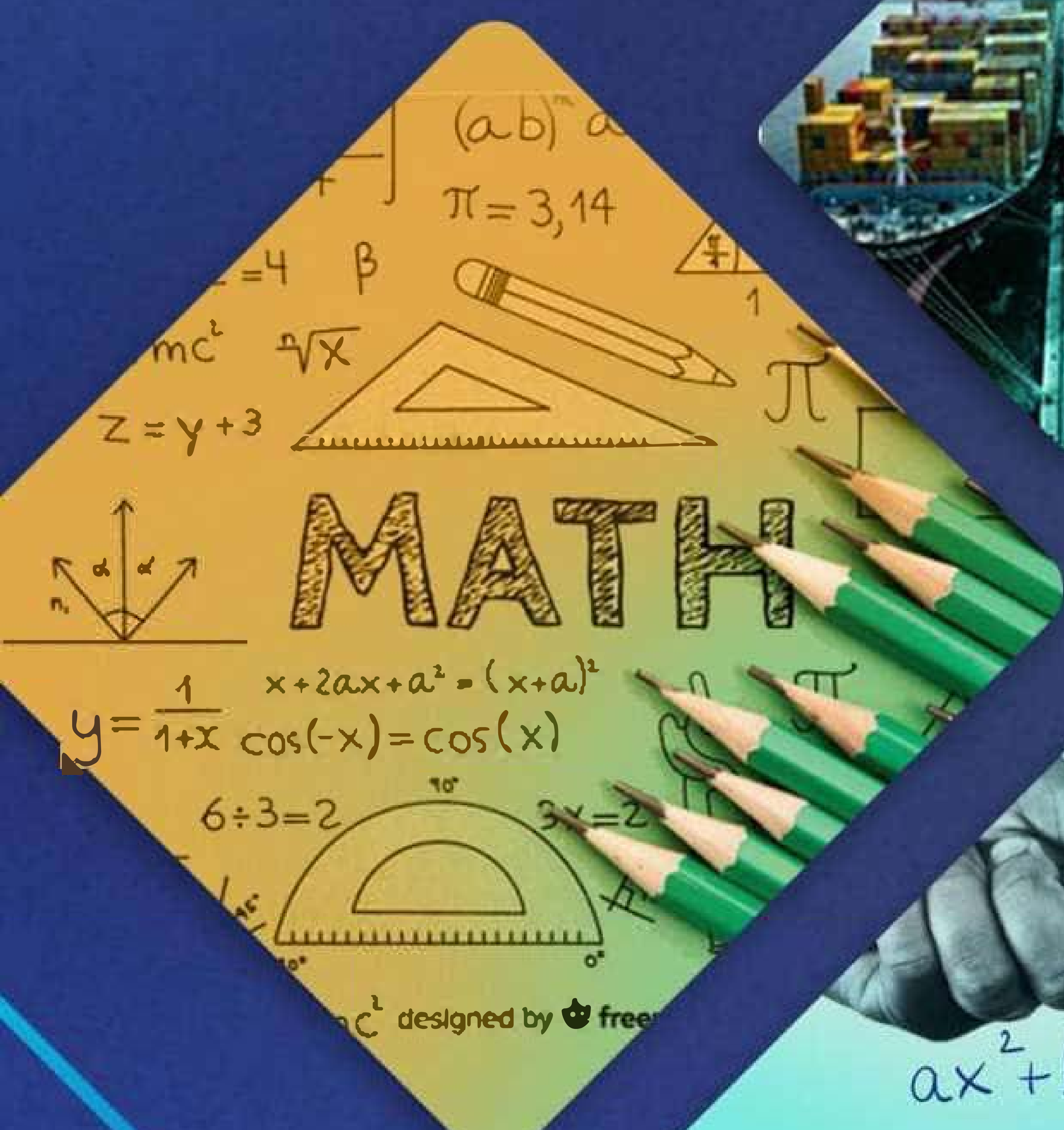
آذر ۱۴۰۲

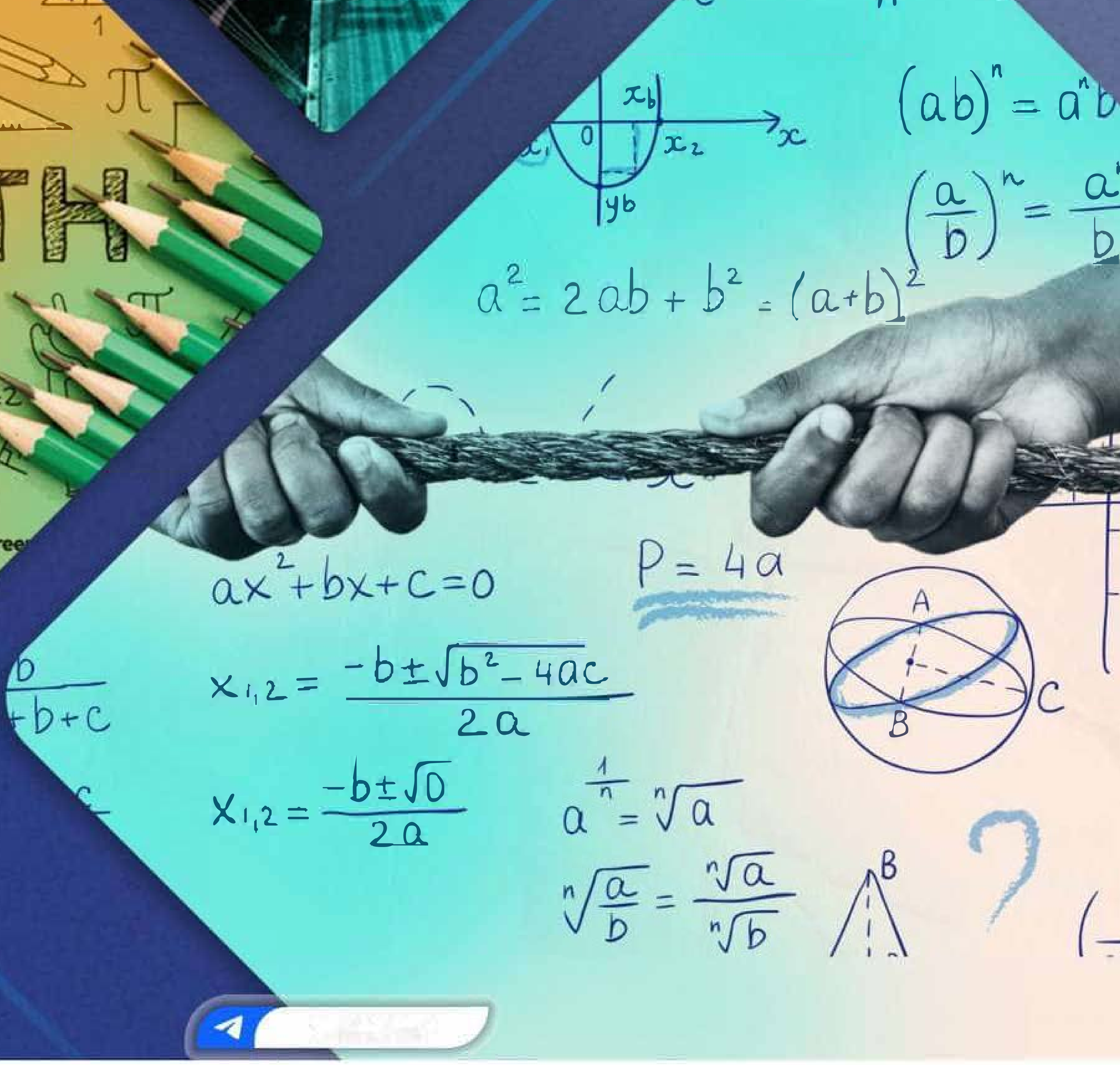
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۱

ریاضی ۳ (رشته علوم تجربی)





۱۴۰۲_۱۴۰۳

gozine2.ir

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

اسامی هیئت علمی ارزشیابی تشریحی مؤسسه گزینه دو در سال تحصیلی ۱۴۰۲_۱۴۰۳

معاون تولید محتوا: علی الفتی

مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدحسین کشانی

گروه عمومی

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

		طراحان
ادبیات فارسی	مسئول درس: عماد فیض آبادی دستیاران: محسن ابراهیم طهرانی	ابوالفضل غلامی عماد فیض آبادی احسان محسنی
دین و زندگی	مسئول درس: علی اکبر آخوندی	محمد کریمی زهرا محمدی علیرضا دلشاد علی اکبر آخوندی
زبان انگلیسی	مسئول درس: سعید ابراهیمی	امیرحسین راد سعید ابراهیمی

گروه ریاضی

مدیر گروه: سید امیرمحمد سید شاکری

		طراحان
حسابان و ریاضی پایه	مسئول درس: سید امیرمحمد سید شاکری دستیاران: حسین اسدزاده-عباس سعیدی	حسین شفیع زاده امیرمحمد سید شاکری محمدحسین کشانی
هندسه	مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیاران: هادی کاظم نژاد- فرهاد فرزامی	سیدمحسن میراسلامی هادی کاظم نژاد علی نعمت
ریاضیات گسسته	مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیاران: هادی کاظم نژاد- فرهاد فرزامی	سعید اکبرزاده فرهاد فرزانی
ریاضی تجربی	مسئول درس: ایمان اردستانی دستیار: پویک مقدم	مهرداد کیوان ایمان اردستانی
ریاضی انسانی	مسئول درس: سید امیرمحمد سید شاکری دستیار: عباس سعیدی	امیدرضا پورحسینی حسین افسری وحید رباعی

گروه علوم

مدیر گروه: محمدرضا محمدهاشمی

		طراحان
زیست شناسی	مسئول درس: امیر کبیری راد دستیاران: بتول خواجه پور - علی قلی زاده	امیر کبیری راد حسین ذبحی منصوره رئیس دانا
فیزیک	مسئول درس: منصور داوودوندی- علیرضا سلیمانی	احمد رضوانی یوسف علی محمدی صیافی هدیه منوچهری مهناز طلوع شهبی رضا عابدی متش علی پیره‌قی
شیمی	مسئول درس: احمد عباسی دستیار: سید حامد میرقادری	مهرداد ملاصالحی محمدعلی توسلی فر مهدی کمالی
زمین شناسی	مسئول درس: شکیبا کریمی	فرزانه رجایی

گروه انسانی

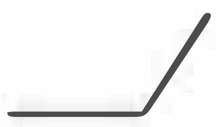
مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

		طراحان
علوم و فنون ادبی	مسئول درس: محمدرضا پیره دستیار: امیرحسین نیکدست	محمدرضا لمسه چی عباس شفیعی مهراوه مجتهد
جامعه شناسی	مسئول درس: الهام رضایی	فروغ تیموریان الهام میرزایی محمدزمان کبیر
روان شناسی	مسئول درس: سیده ضحی سکاکی	سیده ضحی سکاکی
زبان عربی	مسئول درس: پویا رضاداد دستیار: مانده خدایاری	پدرام علیمرادی کیارش پوره‌هدی
تاریخ و جغرافیا	مسئول درس: الناز کنجکار دستیار: ثنا کاشیان	بهروز یحیی پیمان بیگدلی مهسا اصغری
فلسفه و منطق	مسئول درس: حمید سودیان طهرانی دستیاران: سعید رحیمیان - منصور کاظم بیگی	فاطمه سادات شریف زاده حسین صادقی
اقتصاد	مسئول درس: امیر محمدبیگی دستیار: محمدرضا مبارکی	طاهره کریمی

۱-

الف) نادرست؛ زیرا ممکن است تابع یکنوا باشد ولی اکیداً یکنوا نباشد. به مثال نقض زیر دقت کنید:

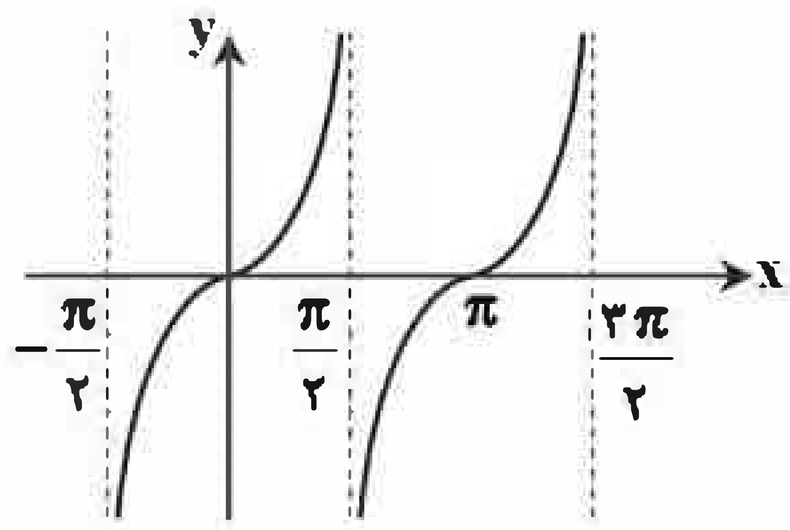
f صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.



ب) درست؛ باید طول نقطهٔ A را دو برابر کنیم و به عرض آن ۳ واحد اضافه کنیم تا به نقطهٔ A' برسیم، پس $A'(۸,۵)$ است.

ج) درست؛ زیرا $f(۳) = ۹ - ۶ = ۳ \Rightarrow f(f(۳)) = f(۳) = ۳$.

د) درست؛



۲-

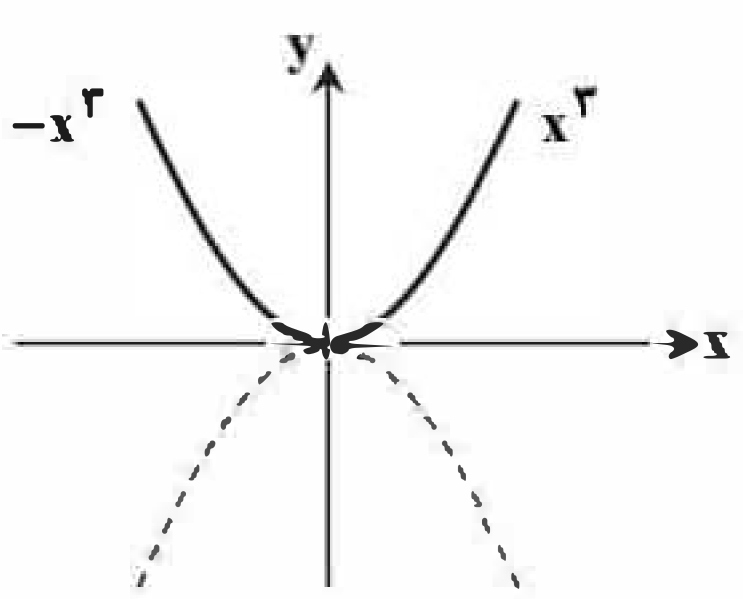
الف) $[۱,+\infty)$؛ زیرا:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq ۱ \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = [۱,+\infty)$$

ب) ۸؛ زیرا:

$$\min = ۴ \Rightarrow ۳a - ۲ = ۴ \Rightarrow a = ۲$$
$$\max = ۳a + ۲ = ۳\times۲ + ۲ = ۸$$

ج) صفر؛ زیرا نمودار تابع $y = x^۲|x|$ به‌صورت زیر است:



$$y = x^۲|x| = \begin{cases} x^۳ & x \geq ۰ \\ -x^۳ & x < ۰ \end{cases}$$

د) ۳؛ زیرا اگر طول نقطهٔ موردنظر را a بنامیم، آنگاه:

$$f^{-۱}(a) = ۰ \Rightarrow a = f(۰) \Rightarrow a = ۰^۳ + ۰ + ۳ \Rightarrow a = ۳$$

۳-

نکته: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ تابع f که $x_۱ < x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱) > f(x_۲)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

برای آنکه تابع درجه‌سوم $f(x) = ax^۳ + b$ اکیداً نزولی باشد، باید ضریب $x^۳$ منفی باشد.

$$۲a - ۵ < ۰ \Rightarrow ۲a < ۵ \Rightarrow a < \frac{۵}{۲}$$

۴-

نکتهٔ ۱: تابع ثابت، هم صعودی و هم نزولی است.

نکتهٔ ۲: دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲) $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

نکتهٔ ۳: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ تابع f که $x_۱ < x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱) > f(x_۲)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

الف) تابع باید ثابت باشد. بنابراین:

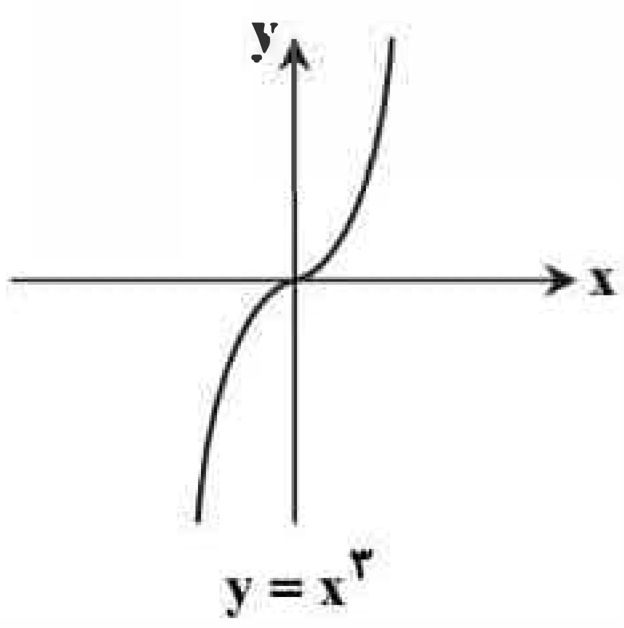
$$a - ۳ = ۰ \Rightarrow a = ۳$$
$$۲b = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

ب)

$$f(۳x+۱) \geq f(x-۷) \xrightarrow{\text{f اکیداً نزولی}} ۳x + ۱ \leq x - ۷ \Rightarrow x \leq -۴$$

-۵

نکتهٔ ۱: نمودار تابع $y = x^{۳}$ به‌صورت زیر است:



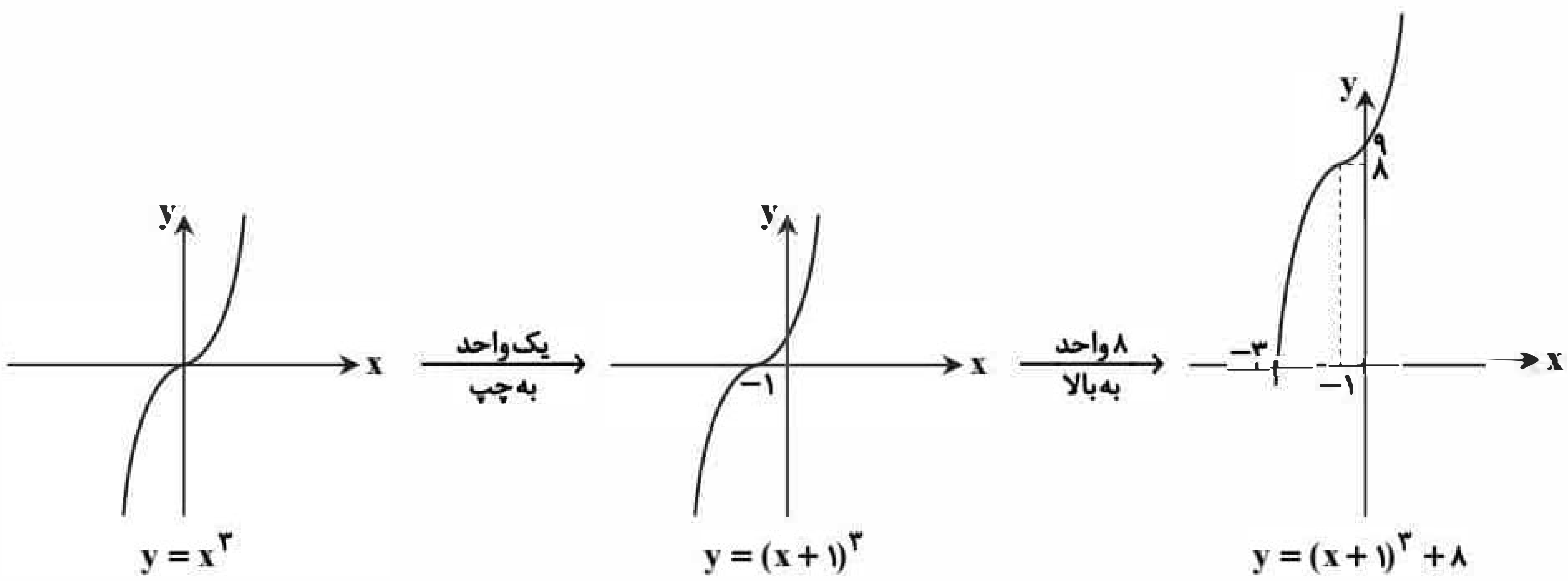
نکتهٔ ۲: برای رسم نمودار تابع $y = f(x)+k$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور عرض‌ها انتقال دهیم. اگر $k > ۰$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k < ۰$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکتهٔ ۳: برای رسم نمودار تابع $y = f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور طول‌ها انتقال دهیم. اگر $k > ۰$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k < ۰$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x^{۲}+۳)(x+۳) = x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۹ = (x+۱)^{۳}+۸$$

اکنون نمودار تابع f را با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = x^{۳}$ رسم می‌کنیم:



-۶

نکتهٔ ۱: دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که همزمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲) f(x) در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

نکتهٔ ۲: $(fog)(x) = f(g(x))$

الف) ابتدا دامنهٔ f و g را محاسبه می‌کنیم.

$$D_f : ۴-x^{۲} \ge ۰ \Rightarrow -۲ \le x \le ۲ \Rightarrow D_f = [-۲,۲]$$
$$D_g : ۲-x \ge ۰ \Rightarrow x \le ۲ \Rightarrow D_g = (-\infty,۲]$$

بنابراین دامنهٔ تابع fog برابر است با:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \le ۲ \mid -۲ \le \sqrt{۲-x}+۱ \le ۲\}$$

نامعادلهٔ $-۲ \le \sqrt{۲-x}+۱$ همواره برقرار است، برای حل نامعادلهٔ $\sqrt{۲-x}+۱ \le ۲$ داریم:

$$\sqrt{۲-x}+۱ \le ۲ \Rightarrow \sqrt{۲-x} \le ۱ \Rightarrow ۲-x \le ۱ \Rightarrow x \ge ۱$$

بنابراین دامنهٔ تابع fog به‌صورت $D_{fog} = [۱,۲]$ است.

ب) مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$(fo(gof))(۰) = f(g(f(۰))) = f(g(۲)) = f(۱) = \sqrt{۳}$$

۷-

نکتهٔ ۱: برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ کافی است، نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.

نکتهٔ ۲: برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

نکتهٔ ۳: برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور عرض‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

$$y=\sqrt{x+5}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}}y=\sqrt{-x+5}\xrightarrow{\text{سه واحد به بالا}}y=\sqrt{-x+5}+3\xrightarrow[\text{محور طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}}y=-(\sqrt{-x+5}+3)$$

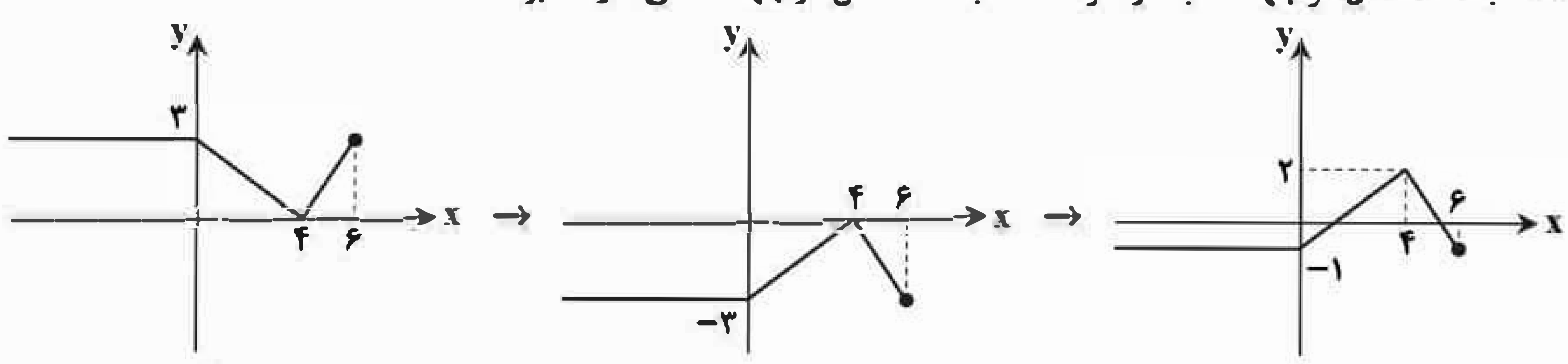
بنابراین ضابطهٔ تابع به‌دست آمده به‌صورت $y=-\sqrt{-x+5}-3$ است.

۸-

نکتهٔ ۱: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

نکتهٔ ۲: برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

نکتهٔ ۳: برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور عرض‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.



«الف» $y=f(\frac{x}{2})$ طول تمامی نقاط دو برابر می‌شود.

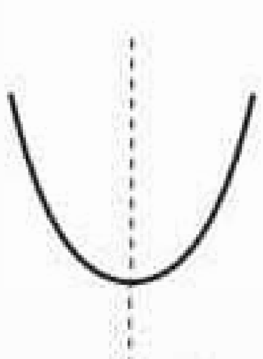
«ب» $y=-f(\frac{x}{2})$ نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌شود.

«ج» $y=2-f(\frac{x}{2})$ دو واحد به‌سمت بالا منتقل می‌شود.

$D_g=(-\infty,6]$ $\qquad$ $R_g=[-1,2]$

۹-

نکته: تابع درجه‌دوم $y=ax^2+bx+c$ در بازه‌های $\left[\frac{-b}{2a},+\infty\right)$ یا $\left(-\infty,\frac{-b}{2a}\right]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه یک‌به‌یک است.



$x_S=\frac{-b}{2a}$

طول رأس سهمی $y=x^2-6x+13$ برابر $x_S=\frac{-(-6)}{2\times1}=3$ است. پس سهمی در بازهٔ $[3,+\infty)$ یک‌به‌یک است، پس: $\qquad m\geq 3$

۱۰-

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

الف) به‌کمک مربع کامل کردن x را برحسب y پیدا می‌کنیم.

راه‌حل اول:

$$y=x^2-4x\Rightarrow y=(x-2)^2-4\Rightarrow y+4=(x-2)^2\Rightarrow\sqrt{y+4}=|x-2|\xrightarrow{x\leq2}\sqrt{y+4}=-x+2\Rightarrow x=-\sqrt{y+4}+2$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f^{-1} به‌صورت $y=-\sqrt{x+4}+2$ است.

راه‌حل دوم:

ابتدا جای x و y را عوض می‌کنیم، سپس y را برحسب x پیدا می‌کنیم.

$$x=y^2-4y\Rightarrow x=(y-2)^2-4\Rightarrow x+4=(y-2)^2\Rightarrow\sqrt{x+4}=|y-2|\xrightarrow{y-2\leq0}y=-\sqrt{x+4}+2$$

ب)

$D_{f^{-1}}=[-4,+\infty)$ $\qquad$ $R_{f^{-1}}=(-\infty,2]$

-۱۱

نکته: اگر دو تابع f و g به‌گونه‌ای باشند که توابع fog و gof در دامنهٔ خود تابع همانی باشند، دو تابع f و g وارون یکدیگر هستند.

ضابطهٔ دو تابع fog و gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگر هستند.

-۱۲

نکته: توابع $y = a\,Sin\,bx + c$ و $y = a\,Cos\,bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $c + |a|$ و مقدار مینیمم $c - |a|$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

در تابع $y = a\,Sin\,bx + c$ داریم:

$$\text{دورهٔ تناوب}\ T = \frac{2\pi}{|b|} \quad , \quad max = c + |a| \quad , \quad min = c - |a|$$

بنابراین در تابع $y = -\pi Sin(\frac{x}{2}) - 2$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$max = -2 + |-\pi| = -2 + \pi$$

$$min = -2 - |-\pi| = -2 - \pi$$

-۱۳

نکته: توابع $y = a\,Sin\,bx + c$ و $y = a\,Cos\,bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $c + |a|$ و مقدار مینیمم $c - |a|$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

با توجه به مکان نقطهٔ A روی نمودار، طول این نقطه برابر دورهٔ تناوب تابع و عرض این نقطه برابر مینیمم تابع است. پس:

$$T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{\left|b\frac{\pi}{2}\right|} = 2 \Rightarrow \frac{4}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$min = 2 \Rightarrow c - |-4| = 2 \Rightarrow c - 4 = 2 \Rightarrow c = 6$$

-۱۴

نکته: توابع $y = a\,Sin\,bx + c$ و $y = a\,Cos\,bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $c + |a|$ و مقدار مینیمم $c - |a|$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{3}$ است، بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|3b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |3b| = 3 \Rightarrow |b| = 1$$

اکنون ماکزیمم و مینیمم را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} max = a + |b| \\ min = a - |b| \end{cases} \xrightarrow{|b|=1} \begin{cases} max = a + 1 \\ min = a - 1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ماکزیمم سه برابر مینیمم است، داریم:

$$a + 1 = 3(a - 1) \Rightarrow a + 1 = 3a - 3 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

با توجه به آنکه $|b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y = 2 + Sin(3x)$ یا $y = 2 - Sin(-3x)$ است.