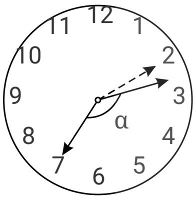
پاسخنامه تشریحی

۱ . گزینه ۳ ۱۵۵ دقیقه بعد از ساعت ۱۲ یعنی ساعت $'۲:۳۵$.

در ساعت $'۲:۳۵$ عقربهٔ دقیقه‌شمار مقابل عدد ۷ قرار دارد. عقربهٔ ساعت‌شمار در هر ۶۰ دقیقه (۱ ساعت) به میزان $\frac{\pi}{۶}$ رادیان جلو می‌رود. بنابراین این عقربه در ۵ دقیقه به میزان $\frac{\pi}{۷۲}$ رادیان جلو می‌رود و باگذشت ۳۵ دقیقه به میزان $۷ \times \frac{\pi}{۷۲}$ رادیان جلو می‌رود، بنابراین برای محاسبهٔ زاویهٔ میان عقربهٔ دقیقه‌شمار و ساعت‌شمار در ساعت $'۲:۳۵$ کافی است از $\frac{۵\pi}{۶}$ (به مقدار فاصلهٔ بین اعداد ۲ و ۷ روی دایره) به میزان $\frac{۷\pi}{۷۲}$ کم کنیم یعنی داریم (مطابق شکل پایین):

$$\alpha = \frac{۵\pi}{۶} - \frac{۷\pi}{۷۲} = \frac{۶۰\pi}{۷۲} - \frac{۷\pi}{۷۲} = \frac{۵۳\pi}{۷۲}$$



تذکر: $\frac{۵\pi}{۶}$ زاویهٔ بین دو عقربه در حالتی است که عقربهٔ ساعت‌شمار دقیقاً در مقابل ۲ و دقیقه‌شمار در مقابل ۷ باشد.

۲ . گزینه ۳ چون چرخ و فلک ۲۴ کابین دارد فاصلهٔ بین هر دو کابین متوالی برابر است با: $\frac{۲\pi}{۲۴} = \frac{\pi}{۱۲}$

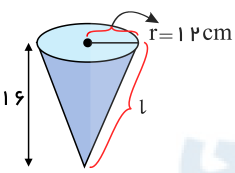
اگر چرخ و فلک یک دور کامل بچرخد ۲π رادیان دوران می‌کند و هر کابین به جای اول خود برمی‌گردد.

بنابراین وقتی چرخ و فلک $\frac{۳۸\pi}{۱۲}$ می‌چرخد، میزان جابه‌جایی هر کابین به اندازهٔ $۲\pi - \frac{۳۸\pi}{۱۲}$ خواهد بود که برابر است با $\frac{۱۴\pi}{۱۲}$. که با توجه به این که فاصلهٔ هر دو کابین متوالی برابر $\frac{\pi}{۱۲}$ است، پس هر کابین به اندازه $۱۴ = \frac{\frac{۱۴\pi}{۱۲}}{\frac{\pi}{۱۲}}$ کابین جلو می‌رود.

بنابراین کابین شمارهٔ ۴ به کابین شمارهٔ ۱۸ منتقل خواهد شد.

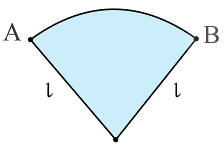
۳ . گزینه ۳

با توجه به شکل و رابطهٔ فیثاغورس طول مولد مخروط (ℓ) که همان شعاع قطاع ایجاد شده است، را می‌یابیم.



$$\ell^{۲} = ۱۶^{۲} + ۱۲^{۲} = ۲۵۶ + ۱۴۴ = ۴۰۰ \Rightarrow \ell = ۲۰$$

از طرفی طول کمان ایجاد شده در قطاع حاصل برابر محیط قاعدهٔ مخروط است.



$$\text{طول کمان } \widehat{AB} = ۲\pi r = ۲\pi \times ۱۲ = ۲۴\pi$$

بنابراین:

$$\theta = \frac{\text{طول کمان } \widehat{AB}}{\ell} \Rightarrow \theta = \frac{۲۴\pi}{۲۰} = \frac{۶\pi}{۵} \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{\frac{۶\pi}{۵}}{\pi} = \frac{۶}{۵} \Rightarrow D = \frac{۶ \times ۱۸۰}{۵} = ۲۱۶^{\circ}$$

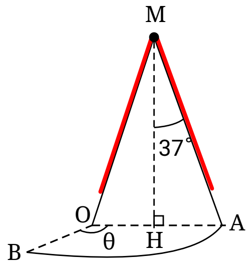
۴ . گزینه ۲ در دایره‌ای به شعاع r اگر طول کمان مقابل به زاویه θ رادیان برابر ℓ باشد، داریم: $\ell = r \cdot \theta$

قطر چرخ بزرگ برابر $D_۱ = ۱۲۰cm$ است بنابراین: $r_۱ = \frac{D_۱}{۲} = ۶۰cm$

چون دو چرخ به هم متصل‌اند میزان مسافت طی شده آن‌ها باهم برابر است یعنی:

$$\ell_۱ = \ell_۲ \Rightarrow r_۱\theta_۱ = r_۲\theta_۲ \Rightarrow \theta_۱ = \frac{r_۲\theta_۲}{r_۱} \Rightarrow \theta = \frac{۱۵ \times \frac{۲\pi}{۳}}{۶۰} = \frac{۲\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۶}$$

۵ . گزینه ۳ در دایره‌ای به شعاع R اگر طول کمان مقابل زاویه θ رادیان برابر L باشد، داریم: $\theta = \frac{L}{R}$



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB} \text{ طول کمان } = \ell = ۴۸cm \\ \theta = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳} \\ \pi \simeq ۳ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow |OA| = r = \frac{\ell}{\theta} = \frac{۴۸}{\frac{۲\pi}{۳}} = \frac{۴۸ \times ۳}{۲\pi} = ۲۴cm$$

چون مثلث $\overset{\triangle}{OMA}$ متساوی‌الساقین است، ارتفاع MH میانهٔ وارد بر OA نیز هست بنابراین:

$$AH = \frac{OA}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

از طرفی:

$$\sin ۳۷^\circ = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{۱۲}{AM} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow AM = ۲۰cm$$

۶ . گزینه ۳ $\cos C$ را دو مثلث $\overset{\triangle}{OBC}$ و $\overset{\triangle}{OHC}$ می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{OBC} : \cos C = \frac{OC}{BC}$$
$$\overset{\triangle}{OHC} : \cos C = \frac{CH}{OC}$$
$$\cos C = \frac{CH}{OC} = \frac{OC}{BC} \Rightarrow OC^۲ = BC \cdot CH$$
$$OC^۲ = ۳ \times \sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳}$$

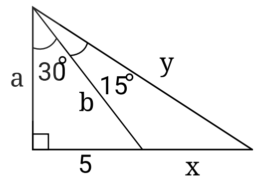
۷ . گزینه ۱ $\cos\alpha$ را با استفاده از دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{AEC}$ می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABD} : \cos\alpha = \frac{AB}{\frac{x}{۲}} \\ \overset{\triangle}{AEC} : \cos\alpha = \frac{\frac{۹x}{۲}}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{AB}{\frac{x}{۲}} = \frac{\frac{۹x}{۲}}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = \frac{۹x^۲}{۴}$$

$$۱۶AB = AC \Rightarrow AB \times ۱۶AB = \frac{۹x^۲}{۴} \Rightarrow ۱۶AB^۲ = \frac{۹x^۲}{۴} \xrightarrow{\sqrt{}} ۴AB = \frac{۳x}{۲}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{۳x}{۸} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{AB}{\frac{x}{۲}} = \frac{\frac{۳x}{۸}}{\frac{x}{۲}} = \frac{۳}{۴}$$

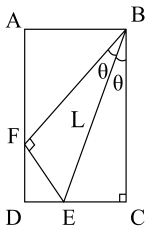
۸ . گزینه ۳



$$\sin ۳۰ = \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{b} \Rightarrow b = ۱۰$$
$$\cos ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a}{۱۰} \Rightarrow a = ۵\sqrt{۳}$$
$$\cos ۴۵ = \frac{۵\sqrt{۳}}{y} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow y = ۱۰\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$
$$\sin ۴۵ = \frac{x+۵}{۱۰\sqrt{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow x + ۵ = ۵\sqrt{۳} \rightarrow x = ۵\sqrt{۳} - ۵$$
$$x + y = ۵\sqrt{۳} - ۵ + ۱۰\sqrt{\frac{۳}{۲}} = ۵(\sqrt{۳} - ۱ + ۲\sqrt{\frac{۳}{۲}})$$

۹ . گزینه ۱

درمثلث $\overset{\triangle}{BCE}$ داریم:



$$\sin\theta = \frac{CE}{BE} = \frac{CE}{L} \Rightarrow CE = L\sin\theta$$

در چهار ضلعی $BCEF$ داریم:

$$\hat{E} + \hat{F} + \hat{B} + \hat{C} = ۳۶۰$$

$$\hat{E} + ۹۰ + ۲\theta + ۹۰ = ۳۶۰$$

$$\hat{E} = ۱۸۰ - ۲\theta$$

در مثلث $\overset{\triangle}{DEF}$ داریم:

$$D\hat{E}F = ۱۸۰ - (۱۸۰ - ۲\theta) \Rightarrow D\hat{E}F = ۲\theta$$

$$BC = BF, BE = BE \Rightarrow \overset{\triangle}{BCE} \cong BEF$$ (وتر و یک ضلع قائمه)

$$\cos D\hat{E}F = \frac{DE}{EF} \xrightarrow[EF=CE]{CE=L\sin\theta} \cos ۲\theta = \frac{DE}{L\sin\theta} \to DE = L\sin\theta\cos ۲\theta$$

نتیجه می گیریم:

$$CD = CE + DE \to ۶ = L\sin\theta + L\sin\theta\cos ۲\theta$$

$$\to ۶ = L\sin\theta(۱ + \cos ۲\theta)$$

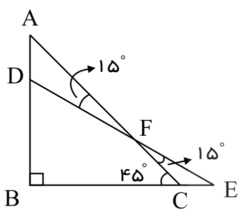
$$L = \frac{۶}{\sin\theta(۱ + \cos ۲\theta)}$$

۱۰ . گزینه ۱

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{AH}{AC} \\ \cot\beta &= \frac{BH}{AH} \end{aligned} \Rightarrow \cot\ \beta \times \sin\alpha = \frac{BH}{AH} \times \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AC}$$

۱۱ . گزینه ۱

با توجه به شکل، زاویهٔ $\hat{E}$ برابر ۳۰° است. زیرا زاویه $\hat{C} = ۴۵^\circ$، زاویه خارجی مثلث CFE است.



بنابراین:

$$\sin\hat{E} = \sin ۳۰^\circ = \frac{DB}{DE} = \frac{DB}{۱۰} = \frac{۱}{۲} \to DB = ۵$$

$$\sin\hat{C} = \sin ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{۱۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \to AB = ۵\sqrt{۲} \simeq ۵ \times ۱/۴ \simeq ۷$$

بنابراین: $AD = AB - DB = ۷ - ۵ = ۲$

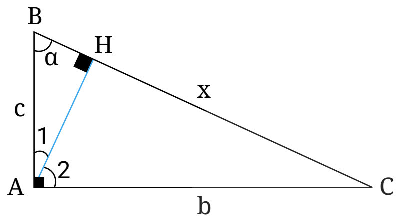
۱۲ . گزینه ۲ $\hat{B} = ۶۰^\circ$ زاویهٔ خارجی مثلث ABD است.

$$\hat{A}+\hat{D}_۱=۶۰^\circ \to \hat{D}_۱=۳۰^\circ \to AB=BD=۶$$

$$\overset{\triangle}{BCD}: \hat{B}=۶۰^\circ \to \sin\hat{B}=\frac{x}{BD}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \to x=\frac{BD\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

$$\to x^۲-x\sqrt{۳}=(۳\sqrt{۳})^۲-۳\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}=۲۷-۹=۱۸$$

۱۳ . گزینه ۱ با توجه به شکل زیر داریم:



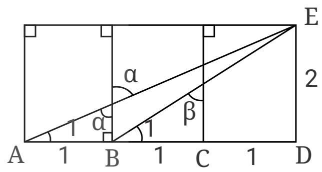
$$\overset{\triangle}{AHB}: \sin\hat{B}=\frac{AH}{AB} \Rightarrow AH=c\sin\alpha$$

$$\overset{\triangle}{AHC}: \tan\hat{A}_۲=\frac{HC}{AH} \Rightarrow x=AH\cdot\tan\hat{A}_۲=c\sin\alpha\tan\hat{A}_۲$$

توجه شود که $\hat{A}_۲=\alpha$ زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\\ \hat{A}_۱+\alpha=۹۰^\circ\end{array}\right\}\to \alpha=\hat{A}_۲ \xrightarrow[\text{داشت}]{\text{بنابراین خواهیم}} x=c\sin\alpha\tan\alpha$$

۱۴ . گزینه ۳ اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$ باشد، آن‌گاه $\tan\alpha=\cot\beta$ و $\cot\alpha=\tan\beta$ است.



$$\begin{cases}\hat{\alpha}+\hat{A}_۱=۹۰^\circ \to \cot\alpha=\tan\hat{A}_۱ \to \tan\hat{A}_۱=\frac{DE}{AD}=\frac{۲}{۳}\\ \hat{\beta}+\hat{B}_۱=۹۰^\circ \to \cot\beta=\tan\hat{B}_۱ \to \tan\hat{B}_۱=\frac{DE}{BD}=\frac{۲}{۲}=۱\end{cases}$$

$$\to \cot\hat{\alpha}+\cot\hat{\beta}=\tan\hat{A}_۱+\tan\hat{B}_۱=\frac{۲}{۳}+۱=\frac{۵}{۳}$$

۱۵ . گزینه ۲

در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه ۳۰° برابر با نصف وتر است. بنابراین با توجه به شکل زیر داریم $\overset{\triangle}{AED}$:

$$\hat{A}=۳۰^\circ \to ED=\frac{AE}{۲}=۳ \quad (۱)$$

از طرفی:

$$\cos ۳۰^\circ=\frac{AD}{AE}=\frac{AD}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \to AD=۳\sqrt{۳}$$

$$\tan\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{DC}{AD}=\frac{DC}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۹} \to DC=\frac{۳\sqrt{۳}\times۵\sqrt{۳}}{۹}=۵ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} EC=ED+DC=۳+۵=۸$$

۱۶ . گزینه ۴ با توجه به شکل صورت سؤال داریم:

$$\cos\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۱۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۵}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\to \alpha=۳۰ \xrightarrow{\alpha+\theta=۹۰^\circ} \theta=۶۰^\circ$$

۱۷ . گزینه ۱ نکته: زاویهٔ محاطی روبه‌روی قطر برابر ۹۰° است.

طبق نکتهٔ فوق زاویهٔ $A\hat{B}C$، ۹۰° است، چون $OB=OC=OA$ برابر شعاع دایره‌اند. پس $AC=۱۰$ است که طبق رابطهٔ فیثاغورث داریم:

$$BC=\sqrt{۱۰^۲-۸^۲}=۶$$

$$\to \tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

چون زاویه $\hat{A}$ و $\hat{C}$ متمم‌اند؛ داریم:

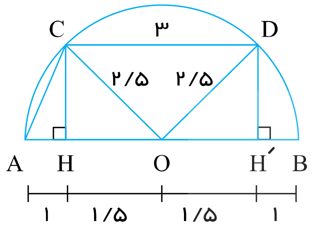
$$\tan\hat{A}=\cot\hat{C}$$

از طرفی چون مثلث CBO متساوی‌الساقین است داریم:

$$C\hat{B}O = \hat{C} \to \cot C\hat{B}O = \cot \hat{C} = \tan \hat{A} = \frac{۳}{۴}$$

۱۸ . گزینه ۱

شکل زیر را در نظر بگیرید.



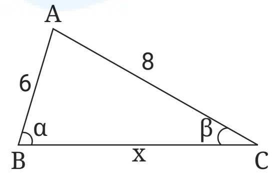
با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH می‌نویسیم:

$$CH = \sqrt{OC^۲ - OH^۲} = \sqrt{۶٫۲۵ - ۲٫۲۵} = \sqrt{۴} = ۲$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH می‌نویسیم:

$$\tan \hat{C} = \frac{AH}{CH} = \frac{۱}{۲}$$
$$A\hat{C}D = ۹۰^\circ + A\hat{C}H$$
$$\tan A\hat{C}D = \tan(۹۰^\circ + A\hat{C}H) = -\cot A\hat{C}H = -۲$$

۱۹ . گزینه ۳ باتوجه به شکل مقابل مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S = \frac{۱}{۲} \times ۶x \sin\alpha = \frac{۱}{۲} \times ۸x \times \sin\beta$$

بنابراین:

$$۳\sin\alpha = ۴\sin\beta \Rightarrow ۹\sin^۲\alpha = ۱۶\sin^۲\beta \Rightarrow ۹(۱ - \cos^۲\alpha) = ۱۶(۱ - \cos^۲\beta)$$
$$۹ - ۹\cos^۲\alpha = ۱۶ - ۱۶\cos^۲\beta \Rightarrow ۱۶\cos^۲\beta - ۹\cos^۲\alpha = ۷$$

۲۰ . گزینه ۲ باتوجه به قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{\sqrt{۶}}{\sin C_۱} = \frac{۲}{\sin ۴۵^\circ} \Rightarrow \sin C_۱ = \frac{\sqrt{۶} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{C}_۱ = ۶۰^\circ$$

پس $D = ۳۰^\circ$ و درنتیجه مثلث ACD متساوی‌الساقین است و $CD = ۲$ و $\hat{C}_۲ = ۱۲۰^\circ$ است. باتوجه به قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ACD داریم:

$$\frac{AD}{\sin ۱۲۰^\circ} = \frac{۲}{\sin ۳۰^\circ} \Rightarrow AD = \frac{۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۲\sqrt{۳}$$

۲۱ . گزینه ۲ در مثلث ADE چون $\hat{A} = ۳۰^\circ$ است، بنابراین DE نصف وتر AE است، بنابراین:

$$AE = ۲DE = ۸ \quad (۱)$$

با توجه به شکل $\hat{A}_۱ = ۶۰^\circ$ و $\hat{B}_۱ = ۳۰^\circ$ می‌باشند. بنابراین:

$$\hat{B}_۱ = ۳۰^\circ \to AF = \frac{AB}{۲} \to AF = ۶ \quad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} EF = AE - AF = ۸ - ۶ = ۲ \to y = ۲$$

از طرفی:

$$\sin A_۱ = \sin ۶۰^\circ = \frac{BF}{۱۲} = \frac{x}{۱۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \to x = ۶\sqrt{۳} \to xy = ۶\sqrt{۳} \times ۲ = ۱۲\sqrt{۳}$$

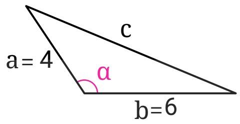
۲۲ . گزینه ۳ اگر طرفین تساوی را بر Z تقسیم کنیم آن‌گاه:

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \sqrt{۲} \Rightarrow \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۴} + \theta) = \sqrt{۲} \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۴} + \theta) = ۱$$

پس $\theta = \frac{\pi}{۴}$ می‌باشد.

۲۳ . گزینه ۲ می‌دانیم مساحت مثلث برابر با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع است.

باتوجه به شکل مقابل داریم:



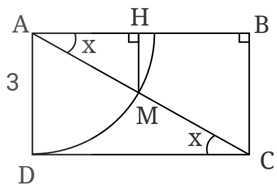
$$S = \frac{۱}{۲}ab\sin\alpha \Rightarrow ۶\sqrt{۳} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲\alpha} = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳} \text{ یا } \alpha = \pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$$

طول ضلع سوم زمانی بیش‌تر است که $\cos\alpha = -\frac{۱}{۲}$ $(\alpha = \frac{۲\pi}{۳})$ و مطابق قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\alpha = ۱۶ + ۳۶ - ۲ \times ۴ \times ۶ \times (-\frac{۱}{۲}) = ۵۲ + ۲۴ = ۷۶ \quad \Rightarrow c = \sqrt{۷۶} = ۲\sqrt{۱۹}$$

۲۴ . گزینه ۳ مساحت ذوزنقه برابر نصف حاصل ضرب مجموع دو قاعدهٔ در ارتفاع است.

طبق نکتهٔ بالا مساحت ذوزنقه $HMCB$ برابر با $\frac{۱}{۲}HB(HM + BC)$ است.



$$\begin{cases} AM = AD = ۳ \\ \sin x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{HM}{AM} = \frac{۱}{۳} \end{cases} \to HM = ۱$$

طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم:

$$\hat{A} = \hat{C} = x \to \sin\hat{C} = \frac{AD}{AC} = \frac{۱}{۳} \to AC = ۹$$

$$DC = \sqrt{AC^۲ - AD^۲} = \sqrt{۸۱ - ۹} = \sqrt{۷۲} = ۶\sqrt{۲}$$

از طرفی در مثلث $\overset{\triangle}{AHM}$داریم:

$$AH = \sqrt{AM^۲ - HM^۲} = \sqrt{۹ - ۱} = ۲\sqrt{۲}$$

چون $AB = DC = ۶\sqrt{۲}$، پس

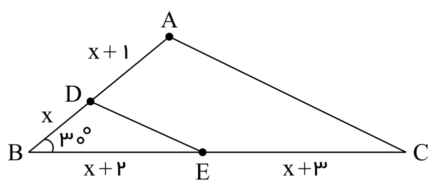
$$BH = ۶\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$$

طبق نکته‌ای که اشاره شد داریم:

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱}{۲}HB(HM + BC) = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۲} \times (۱ + ۳) = ۸\sqrt{۲}$$

۲۵ . گزینه ۲

توجه کنید که :



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AB \cdot BC\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}(۲x + ۱)(۲x + ۵) \times \frac{۱}{۲}$$

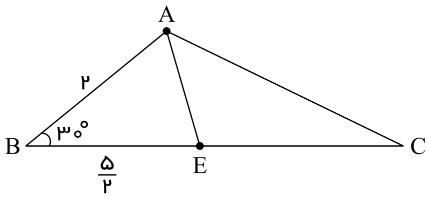
$$S_{\overset{\Delta}{BDE}} = \frac{۱}{۲}BD \cdot BE\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}(x)(x + ۲) \times \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{۴}(۲x+۱)(۲x+۵)=۹٫۶\times\frac{۱}{۴}(x)(x+۲)$$

$$۴x^{۲}+۱۲x+۵=\frac{۴۸}{۵}(x^{۲}+۲x)\Rightarrow ۲۸x^{۲}+۳۶x-۲۵=(۱۴x+۲۵)(۲x-۱)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲},x=-\frac{۲۵}{۱۴}(\text{غ ق ق})$$

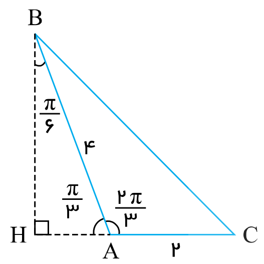
بنابراین مطابق شکل مساحت مثلث ABE برابر است با:



$$\frac{۱}{۲}AB\cdot BE\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times۲\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۴}$$

۲۶ . گزینه ۴

با در نظر گرفتن شکل زیر و رسم ارتفاع رأس B داریم:



$$\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{AH}{AB}=\frac{AH}{۴}\Rightarrow AH=۴\times\frac{۱}{۲}=۲$$

$$\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{BH}{AB}=\frac{BH}{۴}\Rightarrow BH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۴=۲\sqrt{۳}$$

$$BC=\sqrt{BH^{۲}+HC^{۲}}=\sqrt{۱۲+۱۶}=\sqrt{۲۸}=۲\sqrt{۷}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times۴\times۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$$

از طرفی:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times\sin C\Rightarrow ۲\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\sqrt{۷}\times\sin C$$

$$۲\sqrt{۳}=۲\sqrt{۷}\sin C\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۷}}$$

ضمناً:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin B\Rightarrow ۲\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\times۴\times۲\sqrt{۷}\times\sin B\Rightarrow ۲\sqrt{۳}=۴\sqrt{۷}\sin B\Rightarrow\sin B=\frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۷}}$$

پس:

$$\sin B+\sin C=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۷}}+\frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۷}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۷}}=\frac{۳\sqrt{۲۱}}{۱۴}$$

۲۷ . گزینه ۳

$$b^{۳}+a^{۲}c=c^{۳}+a^{۲}b\Rightarrow b^{۳}-c^{۳}=a^{۲}b-a^{۲}c\Rightarrow(b-c)(b^{۲}+bc+c^{۲})=a^{۲}(b-c)$$

چون اضلاع مثلث نابرابر هستند، پس $b \neq c$ و درنتیجه $b-c \neq 0$؛ بنابراین می‌توانیم طرفین را بر $b-c$ تقسیم کنیم.

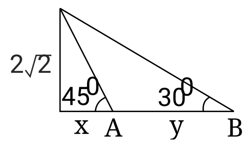
$$b^2+bc+c^2=a^2 \xrightarrow{\text{قضیه کسینوس‌ها}} b^2+bc+c^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A} \Rightarrow bc=-2bc\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A}=-\frac{1}{2} \Rightarrow A=120^\circ=\frac{2\pi}{3}^{rad}$$

۲۸. گزینه ۲ با نوشتن نسبت مساحت‌ها داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{1}{2}(AD\cdot AE\cdot\sin A)}{\frac{1}{2}(AB\cdot AC\cdot\sin A)}=(\frac{AD}{AB})\cdot(\frac{AE}{AC})=(\frac{AD}{3AD})\cdot(1-\frac{EC}{AC})=\frac{1}{3}(\frac{AC-EC}{AC})$$

$$=\frac{1}{3}(1-\underbrace{\frac{EC}{AC}}_{3EC})=(\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{9}$$

۲۹. گزینه ۴



$$\tan 45=\frac{2\sqrt{2}}{x}\to 1=\frac{2\sqrt{2}}{x}\to x=2\sqrt{2}$$

$$\tan 30=\frac{2\sqrt{2}}{x+y}\to\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{x+y}\to x+y=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$$

پس: $x+y=2\sqrt{6}\to 2\sqrt{2}+y=2\sqrt{6}\to y=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

۳۰. گزینه ۴ اگر از رابطهٔ $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=2\Rightarrow\sin^2 A+1-\sin^2 B+1-\sin^2 C=2\Rightarrow\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C\quad(1)$$

از طرفی می‌دانیم طبق قضیهٔ سینوس‌ها همواره داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

اگر مقدار مشترک کسرهای فوق را برابر k فرض کنیم، خواهیم داشت:

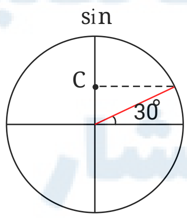
$$\frac{a}{\sin A}=k\Rightarrow\frac{a}{k}=\sin A\quad,\quad\frac{b}{\sin B}=k\Rightarrow\frac{b}{k}=\sin B\quad,\quad\frac{c}{\sin C}=k\Rightarrow\frac{c}{k}=\sin C$$

حال روابط فوق را در رابطهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

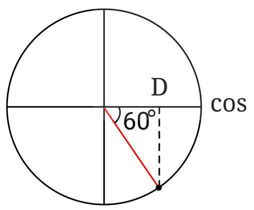
$$\frac{a^2}{k^2}=\frac{b^2}{k^2}+\frac{c^2}{k^2}\Rightarrow a^2=b^2+c^2$$

چون رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ برقرار است، پس طبق عکس قضیهٔ فیثاغورس، مثلث ABC در رأس A قائمه است، یعنی $\hat{A}=90^\circ$ است.

۳۱. گزینه ۱ با بدست آوردن مختصات نقاط D و C از روی نسبت‌های مثلثاتی، طول پاره‌خط CD را بدست می‌آوریم:



$$\sin 30=\frac{1}{2}\to C(0,\frac{1}{2})$$



$$\cos(360-60)=\cos 60=\frac{1}{2}\to D(\frac{1}{2},0)$$

$$|CD|=\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳۲. گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{O\quad\alpha+\beta=90^\circ\Rightarrow\sin\alpha=\cos\beta}$

می‌دانیم در ضرب خاصیت جابجایی وجود دارد؛

پس عبارت بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{\sin 1^\circ}{\cos 89^\circ}\times\frac{\sin 2^\circ}{\cos 88^\circ}\times\cdots\times\frac{\sin 89^\circ}{\cos 1^\circ}$$

$\sin ۸۹^\circ = \cos ۱^\circ , \cdots , sin۱^\circ = \cos ۸۹^\circ$

با توجه به فرمول بالا، پس داریم:

$A = ۱ \times ۱ \times \cdots \times ۱ = ۱$

۳۳ . گزینه ۴ با توجه به اینکه حاصل رادیکال همواره عبارتی مثبت است: $\cos x > ۰$ {ربع اول یا چهارم} (I)

و با به توان ۲ رساندن طرفین تساوی داریم:

$$\cos^۲ x = \frac{\cot x}{\cot x - a^۲} \xrightarrow{*} ۰ \leq \frac{\cot x}{\cot x - a^۲} \leq ۱$$

$$۱) \frac{\cot x}{\cot x - a^۲} \leq ۱ \Rightarrow \frac{\cot x}{\cot x - a^۲} - ۱ \leq ۰ \to \frac{\cot x}{\cot x - a^۲} - \frac{\cot x - a^۲}{\cot x - a^۲} \leq ۰ \to \frac{\cot x - \cot x + a^۲}{\cot x - a^۲} \leq ۰$$

$$\to \frac{a^۲}{\cot x - a^۲} \leq ۰ \xrightarrow{a^۲ \geq ۰} \cot x - a^۲ < ۰$$

$$\frac{\cot x}{\cot x - a^۲} \geq ۰ \xrightarrow{\cot x - a^۲ < ۰} \cot x \leq ۰ \{\text{ناحیه دوم یا چهارم}\} (II)$$

از اشتراک (I) و (II) نتیجه می‌شود که x در ناحیه چهارم قرار دارد.

$$* : \begin{array}{l} -۱ \leq \cos x \leq ۱ \\ ۰ \leq cos^۲ x \leq ۱ \end{array}$$

۳۴ . گزینه ۳

$$۱) \frac{۱}{\cos x} - \sin x \tan x < ۰ \to \frac{۱}{\cos x} - \sin x \frac{\sin x}{\cos x} < ۰$$

$$\frac{۱}{\cos x} - \frac{\sin^۲ x}{\cos x} < ۰ \to \frac{۱ - \sin^۲ x}{\cos x} < ۰ \to \frac{\cos^۲ x}{\cos x} < ۰ \to \cos x < ۰ \to \begin{cases} \text{ربع سوم} \\ \text{ربع دوم} \end{cases} (I)$$

$$\left. \begin{array}{l} ۲) \sin x + \tan x > ۰ \to \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} > ۰ \to \boxed{\sin x (۱ + \frac{۱}{\cos x}) > ۰} \\ -۱ < \cos x < ۰ \to \frac{۱}{\cos x} < -۱ \xrightarrow{+۱} \boxed{۱ + \frac{۱}{\cos x} < ۰} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin x < ۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{ربع سوم} \\ \text{ربع چهارم} \end{cases} (II)$$

از اشتراک جواب‌ها نتیجه می‌گیریم که x در ناحیهٔ سوم است.

۳۵ . گزینه ۲

برای دو زاویه مکمل β و α یعنی $\alpha + \beta = ۱۸۰^\circ$ داریم: $\sin \alpha = \sin \beta$ و $\cos \alpha = -\cos \beta$ بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \sin ۴۵^\circ = \sin ۱۳۵^\circ \\ \sin ۴۶^\circ = \sin ۱۳۴^\circ \\ \vdots \\ \sin ۸۹^\circ = \sin ۹۱^\circ \\ \sin ۹۰^\circ = \sin ۹۰^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۱۳۵^\circ} \times \frac{\sin ۴۶^\circ}{\sin ۱۳۴^\circ} \times \cdots \times \frac{\sin ۹۰^\circ}{\sin ۹۰^\circ} = ۱$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos ۱^\circ = -\cos ۱۷۹^\circ \\ \cos ۲^\circ = -\cos ۱۷۸^\circ \\ \vdots \\ \cos ۴۴^\circ = -\cos ۱۳۶^\circ \\ \cos ۴۵^\circ = -\cos ۱۳۵^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow B = -۱$$

پس از بازنویسی به صورت $\cdots \times \frac{\cos ۲^\circ}{\cos ۱۷۸^\circ} \times \frac{\cos ۱^\circ}{\cos ۱۷۹^\circ}$ با ۴۵ کسر که هر کدام برابر ۱ — هستند مواجه می‌شویم که حاصلضرب تمام آن‌ها برابر با ۱ — می‌شود. پس $B = -۱$ داریم:

$$\Rightarrow A+B=۱+(-۱)=۱-۱=۰$$

۳۶ . گزینه ۳ ابتدا هر یک از اجزای عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

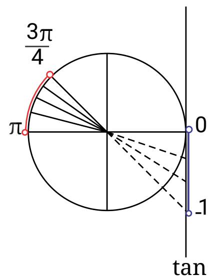
$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha \quad , \quad \sin(۵\pi-\alpha)=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\sin(۶۳۰^\circ-\alpha)=\sin(۳۶۰^\circ+۲۷۰^\circ-\alpha)=\sin(۲۷۰^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$,\quad \tan(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$$

با جایگذاری عبارات فوق در صورت سوال داریم:

$$\frac{۱}{-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}\times(-\cot\alpha)=\frac{-۱}{\cos\alpha}+(-\tan\alpha)(-\cot\alpha)$$
$$=۱-\frac{۱}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha-۱}{\cos\alpha}\times\frac{\cos\alpha+۱}{\cos\alpha+۱}=\frac{\cos^۲\alpha-۱}{\cos^۲\alpha+\cos\alpha}=\frac{-\sin^۲\alpha}{\cos\alpha+(۱-\sin^۲\alpha)}$$
$$=\frac{\sin^۲\alpha}{\sin^۲\alpha-\cos\alpha-۱}$$

۳۷ . گزینه ۱

با در نظر گرفتن دایرهٔ مثلثاتی زیر داریم:



$$\frac{۳\pi}{۴}<x<\pi\Rightarrow-۱<\tan x<۰\Rightarrow-۱<\frac{۲}{m-۱}<۰$$
$$\frac{۲}{m-۱}<۰\Rightarrow m-۱<۰\Rightarrow\boxed{m<۱}(۱)$$
$$\frac{۲}{m-۱}>-۱\Rightarrow\frac{۲}{m-۱}+۱>۰\Rightarrow\frac{۲+m-۱}{m-۱}>۰$$
$$\Rightarrow\frac{m+۱}{m-۱}>۰\Rightarrow$$

m		-۱		۱	
$\frac{m+۱}{m-۱}$	$+$	۰	$-$	ت.ن	$+$

$$\boxed{m<-۱ \text{ یا } m>۱}\ (۲)$$
$$\Rightarrow(۱)\cap(۲)\Rightarrow m<-۱$$

۳۸ . گزینه ۳ بیش‌ترین مقدار سینوس و کسینوس برابر ۱ است. وقتی جمع یک سینوس و کسینوس برابر ۲ شده باشد، یعنی هر دو مقدار برابر ۱ است. یعنی داریم:

$$\begin{cases}\sin(\frac{\hat{B}}{۲}+\hat{C})=۱\rightarrow\frac{\hat{B}}{۲}+\hat{C}=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۹۰^\circ-\frac{\hat{B}}{۲}\\ \cos(\hat{A}-\hat{B})=۱\rightarrow\hat{A}-\hat{B}=۰\rightarrow\hat{A}=\hat{B}\end{cases}$$
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\rightarrow\hat{B}+\hat{B}+۹۰^\circ-\frac{\hat{B}}{۲}=۱۸۰^\circ$$
$$\rightarrow ۳\frac{\hat{B}}{۲}=۹۰^\circ\rightarrow\hat{B}=۶۰^\circ\rightarrow\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ$$

یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۳۹ . گزینه ۴ چون A و B و C زاویه‌های داخلی یک مثلث هستند؛ پس داریم:

$$A+B+C=\pi\Rightarrow C=\pi-B-A\Rightarrow C-A=\pi-B-۲A$$

$$\rightarrow\frac{C-A}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{B}{۲}-\frac{۲A}{۲}=\frac{\pi}{۲}-(A+\frac{B}{۲})$$

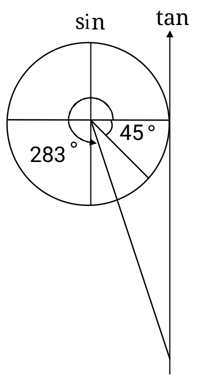
بنابراین:

$$\cos(\frac{C-A}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲}-(A+\frac{B}{۲}))=\sin(A+\frac{B}{۲})$$

۴۰ . گزینه ۲ زاویه ۲۸۳° در ربع چهارم قرار دارد پس سینوس مقداری منفی است و کسینوس مقداری مثبت است. در نتیجه تانژانت هم منفی می‌شود بنابراین گزینه ۱ حذف می‌شود.

همچنین با توجه به دایره مثلثاتی واضح است که $|\sin x|>|\cos x|$ و درنتیجه $\sin^۲ x>\cos^۲ x$ پس گزینهٔ ۳ نیز نادرست است.

بعلاوه:



$$\left.\begin{array}{l}\tan x < -۱\\ -۱ < \sin x < ۰\end{array}\right\} \to \sin^۲ x < \tan^۲ x, \tan x < \sin x$$

پس گزینه ۴ نیز نادرست است.

۴۱ . گزینه ۱

$$A = \frac{\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)}{\tan(۳\pi + \beta) \cdot \tan(۳\pi - \beta)} = \frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{۲} - \alpha)}{\tan(\pi + \beta) \cdot \tan(\pi - \beta)} = \frac{-\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)}{\tan\beta(-\tan\beta)}$$

$$= \frac{-\cos\alpha}{-\tan\beta \cdot \tan\beta} = \frac{\cos\alpha}{\tan^۲\beta} = \frac{\cos\alpha}{(\frac{۱}{۵})^۲} = ۲۵\cos\alpha$$

از طرفی داریم:

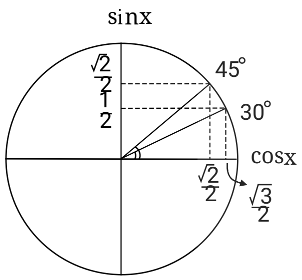
$$\cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \to \cos\alpha = \pm\frac{۳}{۵} \xrightarrow{\text{ناحیهٔ دوم}} \cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$$

بنابراین خواسته سوال برابراست با:

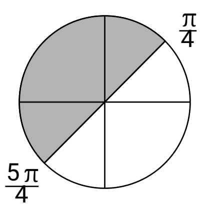
$$۲۵\cos\alpha = ۲۵(\frac{-۳}{۵}) = -۱۵$$

۴۲ . گزینه ۲ در نیمهٔ اول ناحیهٔ اول یعنی در بازهٔ $(۰, ۴۵)$ همواره مقدار $\cos x$ بزرگتر از $\sin x$ است و چون همواره عددی بین ۰ و ۱ و مثبت هستند از طرفین جذر بگیریم جهت نامساوی عوض نمی‌شود بنابراین داریم:

$$۳۰^\circ < x < ۴۵^\circ \Rightarrow \sin x < \cos x \Rightarrow \sqrt{\sin x} < \sqrt{\cos x}$$

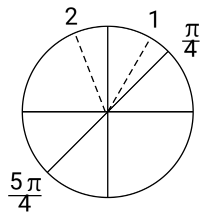


۴۳ . گزینه ۳ می‌دانیم: در دایره مثلثاتی مقابل اگر α در قسمت هاشورخورده باشد آنگاه: $\sin\alpha > \cos\alpha$



اگر α در قسمت سفید باشد آنگاه: $\sin\alpha < \cos\alpha$

حال زوایای ۱ و ۲ رادیان را در دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم.



روی دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\sin ۱ > \cos ۱ \quad , \cos ۲ < ۰ , \quad \cos ۱ > ۰ \to \cos ۲ < \cos ۱$$

$$|\underset{(+)}{\sin ۱ - \cos ۱}| + |\underset{(-)}{\cos ۲ - \cos ۱}| = \sin ۱ - \cos ۱ + \cos ۱ - \cos ۲ = \sin ۱ - \cos ۲$$

می‌دانیم $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲ \alpha$ لذا:

$$\sin ۱ - \cos ۲ = \sin ۱ - (۱ - ۲\sin^۲ ۱) = -۱ + M + ۲M^۲$$

۴۴ . گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که زاویه ۷ رادیان در ناحیه اول قرار دارد، زیرا:

$$۲\pi < ۷ < \frac{۵\pi}{۲} \Rightarrow ۰ < \sin ۷ < ۱ \Rightarrow -۱ < -\sin ۷ < ۰ \Rightarrow [-\sin ۷] = -۱$$

از طرف دیگرطبق فرمول $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{۲} \sin(\alpha - \frac{\pi}{۴})$ داریم:

$$\sin ۲ - \cos ۲ = \sqrt{۲} \sin(۲ - \frac{\pi}{۴})$$

$$\frac{\pi}{۳} < ۲ - \frac{\pi}{۴} < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} < \sin(۲ - \frac{\pi}{۴}) < ۱ \Rightarrow \sqrt{\frac{۳}{۲}} < \sqrt{۲} \sin(۲ - \frac{\pi}{۴}) < \sqrt{۲} \Rightarrow [\sqrt{۲} \sin(۲ - \frac{\pi}{۴})] = [\sin ۲ - \cos] = ۱$$

بنابراین:

$$[-\sin ۷] + [\sin ۲ - \cos ۲] = -۱ + ۱ = ۰$$

۴۵ . گزینه ۴

$$\sin(\frac{۱۱\pi}{۲} - \alpha) \cdot \tan(\alpha - \frac{۷\pi}{۲}) = -\sin(\frac{۱۱\pi}{۲} - \alpha) \cdot \tan(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha)$$

$$= -\sin(۶\pi - \frac{\pi}{۲} - \alpha) \cdot \tan(۴\pi - \frac{\pi}{۲} - \alpha) = -\sin(-\frac{\pi}{۲} - \alpha) \cdot \tan(-\frac{\pi}{۲} - \alpha)$$

$$= (\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha))(-\tan(\frac{\pi}{۲} + \alpha)) = (\cos \alpha)(\cot \alpha) = (\cos \alpha)(\frac{-۱}{\sqrt{۲}}) = -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \cos \alpha$$

حال $\cos \alpha$ را محاسبه می‌کنیم.

$$۱ + \tan^۲ \alpha = \frac{۱}{\cos^۲ \alpha} \to ۱ + ۲ = \frac{۱}{\cos^۲ \alpha} \to \cos^۲ \alpha = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین خواسته سؤال به صورت زیر است.

$$\to \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{۳}}{۳} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\frac{-۱}{\sqrt{۲}} \cos \alpha = \frac{-۱}{\sqrt{۲}}(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

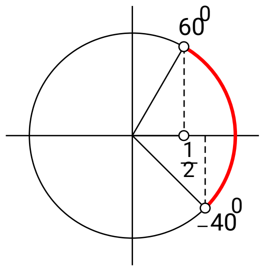
۴۶ . گزینه ۱

طرفین رابطهٔ $-۲۰^\circ < \alpha < ۳۰^\circ$ را در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$-۲۰^\circ < \alpha < ۳۰^\circ \xrightarrow{\times ۲} -۴۰^\circ < ۲\alpha < ۶۰^\circ$$

فرض می‌کنیم $۲\alpha = x$، پس:

$$-۴۰^\circ < x < ۶۰^\circ , \cos x = \frac{۳m - ۱}{۴}$$

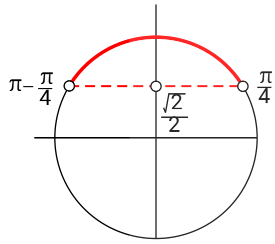


طبق دایرهٔ مثلثاتی مقابل اگر $-۴۰^\circ < x < ۶۰^\circ$ مقدار $\cos x$ از $\cos(-۴۰^\circ)$ تا ۱ افزایش یافته و سپس از ۱ تا $\frac{۱}{۲}$ کاهش می‌یابد، پس در کل داریم:

$$\frac{۱}{۲} < \cos x \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۳m-۱}{۴} \le ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۲ < ۳m-۱ \le ۴ \xrightarrow{+۱} ۳ < ۳m \le ۵ \rightarrow ۱ < m \le \frac{۵}{۳} \Rightarrow m \in (۱, \frac{۵}{۳}]$$

۴۷. گزینه ۲ برای این که گلوله قبل از رسیدن به زمین به دیوار برخورد کند، باید $d > \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ باشد، پس داریم:

$$\frac{v^۲ \sin ۲\alpha}{۱۲} > \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \xrightarrow{v=۶} \frac{۳۶ \sin ۲\alpha}{۱۲} > \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow ۳\sin ۲\alpha > \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin ۲\alpha > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



طبق دایرهٔ مثلثاتی مقابل برای آن که $\sin ۲\alpha > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد، باید زاویهٔ ۲α در محدودهٔ $(\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴})$ قرار داشته باشد.

$$\frac{\pi}{۴} < ۲\alpha < \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{۸} < \alpha < \frac{۳\pi}{۸}$$

۴۸. گزینه ۲

می‌دانیم اگر β و α دو زاویه مکمل باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \alpha = \pi - \beta \Rightarrow \cos\alpha = \cos(\pi - \beta) \Rightarrow cos\alpha = -\cos\beta$$

$$\frac{\pi}{۱۲} + \frac{۱۱\pi}{۱۲} = \frac{۵\pi}{۱۲} + \frac{۷\pi}{۱۲} = \pi \Rightarrow \cos\frac{\pi}{۱۲} = -\cos\frac{۱۱\pi}{۱۲} \quad , \quad \cos\frac{۵\pi}{۱۲} = -\cos\frac{۷\pi}{۱۲}$$

از طرفی $\frac{\pi}{۲} = \frac{۵\pi}{۱۲} + \frac{\pi}{۱۲}$؛ پس: $\cos\frac{۵\pi}{۱۲} = \sin\frac{\pi}{۱۲}$؛ بنابراین:

$$(\cos^۲\frac{\pi}{۱۲} + \cos^۲\frac{۱۱\pi}{۱۲}) + (\cos^۲\frac{۵\pi}{۱۲} + \cos^۲\frac{۷\pi}{۱۲}) = ۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲} + ۲\cos^۲\frac{۵\pi}{۱۲} = ۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲} + ۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲} = ۲$$

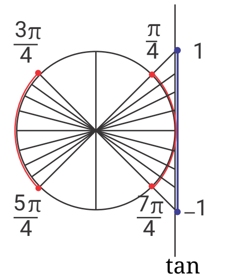
۴۹. گزینه ۲ ابتدا اجزای عبارت داده شده را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۵° می‌نویسیم.

$$\sin ۳۷۵^\circ = \sin(۳۶۰^\circ + ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ \quad , \quad \sin(۱۰۵^\circ) = \sin(۹۰^\circ + ۱۵^\circ) = \cos ۱۵^\circ$$
$$\cos ۱۶۵^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\cos ۱۵^\circ$$

بنابراین:

$$B = \frac{۳\sin ۱۵^\circ + ۲\cos ۱۵^\circ}{-\cos ۱۵^\circ} = \frac{۳\sin ۱۵^\circ}{-\cos ۱۵^\circ} + \frac{۲\cos ۱۵^\circ}{-\cos ۱۵^\circ} = -۳\tan ۱۵^\circ - ۲$$
$$-۳(۲ - \sqrt{۳}) - ۲ = ۳\sqrt{۳} - ۸$$

۵۰. گزینه ۲ بازهٔ $[-۱, ۱]$ را روی محور تانژانت‌ها مشخص می‌کنیم، حال زوایایی که تانژانت آن‌ها در بازهٔ $[-۱, ۱]$ قرار دارند به‌صورت زیر است:



$$-۱ \le \tan\alpha \le ۱ \xrightarrow{[۰,۲\pi]} ۰ \le \alpha \le \frac{\pi}{۴} \text{ یا } \frac{۳\pi}{۴} \le \alpha \le \frac{۵\pi}{۴} \text{ یا } \frac{۷\pi}{۴} \le \alpha \le ۲\pi$$

جواب نهایی $= \left[۰,\frac{\pi}{۴}\right] \cup \left[\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}\right] \cup \left[\frac{۷\pi}{۴},۲\pi\right]$

۵۱. گزینه ۴

ابتدا مزدوج هر کسر در داخل رادیکال را می نویسیم:

$$\begin{cases} A = \left(\sqrt{\frac{(۱+\cos\theta)^۲}{۱-\cos^۲\theta}} - \sqrt{\frac{(۱-\cos\theta)^۲}{۱-\cos^۲\theta}}\right)\left(\sqrt{\frac{(۱+\sin\theta)^۲}{۱-\sin^۲\theta}} - \sqrt{\frac{(۱-\sin\theta)^۲}{۱-\sin^۲\theta}}\right) \\ \cos^۲\theta = ۱-\sin^۲\theta \\ \sin^۲\theta = ۱-\cos^۲\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{|۱+\cos\theta|}{|\sin\theta|} - \frac{|۱-\cos\theta|}{|\sin\theta|}\right)\left(\frac{|۱+\sin\theta|}{|\cos\theta|} - \frac{|۱-\sin\theta|}{|\cos\theta|}\right)$$

از طرفی چون $-۱ \le \sin\theta \le ۱$ و $-۱ \le \cos\theta \le ۱$، پس $۱+\sin\theta$ و $۱-\sin\theta$ و $۱+\cos\theta$ و $۱-\cos\theta$ نامنفی اند و هم چنین در ناحیه چهار مثلثاتی $\sin\theta < ۰$ و $\cos\theta > ۰$ است. بنابراین:

$$A = \left(\frac{۱+\cos\theta}{-\sin\theta} - \frac{۱-\cos\theta}{-\sin\theta}\right)\left(\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \left(\frac{۲\cos\theta}{-\sin\theta}\right)\left(\frac{۲\sin\theta}{\cos\theta}\right) = -۴$$

۵۲. گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{۱+\cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}}$

$$\sqrt{۱+\cot^۲\alpha} = \sqrt{\frac{۱}{\sin^۲\alpha}} = \left|\overbrace{\frac{۱}{\sin\alpha}}^{+}\right| = \frac{۱}{\sin\alpha}$$

$$\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}} \xlongequal[\text{ضرب و تقسیم می کنیم}]{\text{در مزدوج مخرج}} \sqrt{\frac{(۱-\cos\alpha)(۱-\cos\alpha)}{(۱+\cos\alpha)(۱-\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{(۱-\cos\alpha)^۲}{۱-\cos^۲\alpha}} = \sqrt{\frac{(۱-\cos\alpha)^۲}{\sin^۲\alpha}}$$

$$= \left|\overbrace{\frac{۱-\cos\alpha}{\sin\alpha}}^{+}\right| = \frac{۱-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱+\cot^۲\alpha} - \sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}} = \frac{۱}{\sin\alpha} - \frac{۱-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$$

۵۳. گزینه ۱

$$\frac{\sin^۴x+\cos^۴x}{\sin^۲x\cos^۲x} - (\tan x+\cot x)^۲ =$$

$$\frac{\quad ^۴x}{\quad \cos^۲x} + \frac{\cos^۴x}{\sin^۲x\cos^۲x} - (\tan x+\cot x)^۲ = \frac{\sin^۴x}{\sin^۲x\cos^۲x} + \frac{\cos^۴x}{\sin^۲x\cos^۲x} - (\tan^۲x+\cot^۲x+۲\tan x\cot x) = \frac{\sin^۲x}{\cos^۲x} + \frac{\cos^۲x}{\sin^۲x} - \tan^۲$$

$$\text{ot}^۲x + ۲\underbrace{\tan x\cot x}_{۱} = \tan^۲x+\cot^۲x-\tan^۲x-\cot^۲x-۲ = -۲$$

۵۴. گزینه ۴

می‌دانیم : $۱+\cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}$

$$x = \frac{۲}{\sin\alpha} \rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۱}{\sin\alpha}$$

$$y = ۳\cot\alpha \rightarrow \frac{y}{۳} = \cot\alpha$$

$$\frac{۱}{\sin^۲\alpha}=۱+\cot^۲\alpha\rightarrow(\frac{x}{۲})^۲=۱+(\frac{y}{۳})^۲\Rightarrow\frac{x^۲}{۴}=۱+\frac{y^۲}{۹}\xrightarrow{\times ۳۶}۹x^۲=۳۶+۴y^۲$$

۵۵ . گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\begin{cases}a>\circ\rightarrow a+\frac{۱}{a}\geq ۲\\ a<\circ\rightarrow a+\frac{۱}{a}\leq -۲\end{cases}$$

داریم:

$$\begin{cases}\tan x>\circ\rightarrow \tan x+\frac{۱}{\tan x}\geq ۲:۲\leq k-۱\rightarrow ۳\leq k\\ \tan x<\circ\rightarrow \tan x+\frac{۱}{\tan x}\leq -۲:k-۱\leq -۲\rightarrow k\leq -۱\end{cases}\Rightarrow k\leq -۱ \quad \text{یا} \quad k\geq ۳$$

۵۶ . گزینه ۲ برای ساده کردن کسر $\frac{\sin x\cos x}{\sin x-\cos x+۱}$، مزدوج مخرج را در آن ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x-\cos x+۱}\times\frac{\sin x-\cos x-۱}{\sin x-\cos x-۱}=\frac{\sin x\cos x(\sin x-\cos x-۱)}{(\sin x-\cos x)^۲-۱}$$

$$=\frac{\sin x\cos x(\sin x-\cos x-۱)}{\underbrace{\sin^۲x+\cos^۲x}_{۱}-۲\sin x\cos x-۱}=\frac{\sin x\cos x(\sin x-\cos x-۱)}{-۲\sin x\cos x}=\frac{\sin x-\cos x-۱}{-۲}$$

$$=\frac{-۱}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x+\frac{۱}{۲}=a\sin x+b\cos x+c$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{۱}{۲}\\ b=\frac{۱}{۲}\\ c=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow\ a+b+c=\frac{۱}{۲}$$

۵۷ . گزینه ۳ طرفین اتحاد $sin^۲x+\cos^۲x=۱$ را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sin^۲x+\cos^۲x=۱\xrightarrow{(\ )^۲}\sin^۴x+\cos^۴x+۲\sin^۲x\cos^۲x=۱$$

$$\frac{۳}{۵}+۲\sin^۲x\cos^۲x=۱\rightarrow ۲\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۲}{۵}\rightarrow\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۱}{۵}$$

حال با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\sin^۶x+\cos^۶x\overset{*}{=}(\sin^۲x+\cos^۲)(\sin^۴x+\cos^۴x-\sin^۲x\cos^۲x)$$

$$=۱\times\left(\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۵}\right)=\frac{۲}{۵}$$

$$*:a^۶+b^۶=(a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴-a^۲b^۲)$$

۵۸ . گزینه ۲ در عبارت خواسته سوال، صورت و مخرج را بر $\sin^۳\alpha$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{cos\alpha}{\sin\alpha+۱\circ\sin^۳\alpha}\overset{\div\sin^۳\alpha}{=\!=}\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin^۳\alpha}}{\frac{\sin\alpha+۱\circ\sin^۳\alpha}{\sin^۳\alpha}}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\times\frac{۱}{\sin^۲\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\sin^۳\alpha}+\frac{۱\circ\sin^۳\alpha}{\sin^۳\alpha}}$$

$$=\frac{\cot\alpha\left(1+\cot^2\alpha\right)}{\frac{1}{\sin^2\alpha}+10}=\frac{\cot\alpha\left(1+\cot^2\alpha\right)}{\left(1+\cot^2\alpha\right)+10}=\frac{\cot\alpha+\cot^3\alpha}{11+\cot^2\alpha}=\frac{15}{7}$$

۵۹. گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\ ,\ (\sin a+\cos a)^2=1+2\sin a\cos a}$

$$(\sin x+\cos x)=\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{توان } 2}1+2\sin x\cos x=\frac{1}{9}\rightarrow 2\sin x\cos x=-\frac{8}{9}\rightarrow \sin x\cos x=-\frac{4}{9}$$

$$\sin^3x+\cos^3x=(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=\frac{1}{27}-3(\frac{-4}{9})(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}+\frac{12}{27}=\frac{13}{27}$$

۶۰. گزینه ۴

$$\frac{1}{\cos^4x}+\frac{A}{\cos^2x}=\tan^4x-1\rightarrow\frac{1}{\cos^4x}+\frac{A}{\cos^2x}=\frac{\sin^4x}{\cos^4x}-1$$

طرفین را در $\cos^4x$ ضرب می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\times\cos^4x}1+A\cos^2x=\sin^4x-\cos^4x\rightarrow$$

$$1+A\cos^2x=(\sin^2x-\cos^2x)\overbrace{(\sin^2x+\cos^2x)}^{1}$$

$$1+A\cos^2x=\sin^2x-\cos^2x\rightarrow 1-\sin^2x+A\cos^2x=-\cos^2x$$

$$\cos^2x+A\cos^2x=-\cos^2x\rightarrow\cos^2x(1+A)=-\cos^2x$$

$$1+A=-1\rightarrow A=-2$$

۶۱. گزینه ۲

می‌دانیم: $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2x}$

$$\sin\alpha-\frac{6}{2\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=-1\Rightarrow\sin\alpha-\frac{3}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=-1\Rightarrow\sin\alpha-\frac{3}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}}=-1\Rightarrow\sin\alpha-3|\cos\alpha|=-1$$

درناحیهٔ دوم، $\cos\alpha$ منفی است، پس: $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$ داریم:

$$\sin\alpha+3\cos\alpha=-1\xrightarrow{\text{به توان } 2}\sin^2\alpha+9\cos^2\alpha+6\sin\alpha\cos\alpha=1\Rightarrow 8\cos^2\alpha+\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+6\sin\alpha\cos\alpha=1$$

$$\Rightarrow 8\cos^2\alpha=-6\sin\alpha\cos\alpha\Rightarrow 8\cos\alpha=-6\sin\alpha\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{8}{-6}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=1+\frac{16}{9}=\frac{25}{9}\xrightarrow{\cos\alpha<0}\cos\alpha=-\frac{3}{5}\rightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$$

۶۲. گزینه ۱ برای ایجاد $\tan x$ در صورت سؤال، صورت و مخرج کسر داده شده را به $\cos^2x$ تقسیم می‌کنیم.

می‌دانیم : $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow\cos^2x=\frac{1}{1+\tan^2x}$

$$\frac{\dfrac{3\sin^2 x-2\cos^2 x+4}{\cos^2 x}}{\dfrac{2\sin^2 x-1}{\cos^2 x}}=\frac{\dfrac{3\sin^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{4}{\cos^2 x}}{\dfrac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\frac{3\tan^2 x-2+\dfrac{4}{\cos^2 x}}{2\tan^2 x-\dfrac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x}\frac{3(\sqrt{2})^2-2+4(1+\tan^2 x)}{2(\sqrt{2})^2-(1+\tan^2 x)}\overset{\tan x=\sqrt{2}}{=\!=\!=}\frac{6-2+4(1+(\sqrt{2})^2)}{4-(1+(\sqrt{2})^2)}=\frac{4+12}{1}=16$$

۶۳. گزینه ۲ باتوجه به اتحاد مزدوج داریم:

$$\frac{(-\sin x+1-\cos x)(\sin x+1+\cos x)}{(\tan x+\cot x)}=\frac{(1-(\sin x+\cos x))\,(1+(\sin x+\cos x))}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}}$$

$$=\frac{1-(\sin x+\cos x)^2}{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}}=\frac{1-(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)}{\dfrac{1}{\sin x\cos x}}$$

$$=\frac{1-(1+2\sin x\cos x)}{\dfrac{1}{\sin x\cos x}}=\frac{-2\sin x\cos x}{\dfrac{1}{\sin x\cos x}}=-2\sin^2 x\cos^2 x$$

۶۴. گزینه ۳ می‌دانیم در معادلهٔ خط $Ax+By+C=0$ شیب خط برابر است با: $m=-\dfrac{A}{B}$

پس: $m=\dfrac{-3\sin\theta}{5\cos\theta}=3\rightarrow\dfrac{-3}{5}\tan\theta=3\rightarrow\tan\theta=-5$

با تقسیم صورت و مخرج کسر A بر $\cos\theta$ داریم:

$$A=\frac{\dfrac{-2\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{7\cos\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{5\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{4\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{-2\tan\theta+7}{5+4\tan\theta}\xrightarrow{\tan\theta=-5}A=\frac{-2(-5)+7}{5+4(-5)}=\frac{17}{-15}=-\frac{17}{15}$$

۶۵. گزینه ۳ ابتدا عبارت داخل پرانتز را با مخرج مشترک‌گیری ساده می‌کنیم.

$$\frac{a}{1-\cos\theta}+\frac{-b}{1+\cos\theta}=\frac{a(1+\cos\theta)-b(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{a\cos\theta+b\cos\theta+a-b}{1-\cos^2\theta}=\frac{(a+b)\cos\theta+a-b}{\sin^2\theta}$$

طبق تساوی صورت سؤال داریم:

$$\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\cos\theta\left(\frac{(a+b)\cos\theta+(a-b)}{\sin^2\theta}\right)$$

$$\rightarrow\ 2\cos^2\theta=(a+b)\cos^2\theta+(a-b)\,\cos\theta$$

چون این تساوی به ازای هر θ برقرار است پس نسبت به θ اتحاد است. یعنی:

$$\left.\begin{array}{l}(a-b)=0\ \rightarrow\ a=b\\(a+b)=2\ \rightarrow\ a=b=1\end{array}\right\}\rightarrow\ a\times b=1$$

۶۶. گزینه ۴

$$\cot x=\frac{1}{\tan x}\rightarrow\cot x=\frac{1}{\frac{2ab}{a^2-b^2}}=\frac{a^2-b^2}{2ab}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x\Rightarrow\frac{1}{\sin^2 x}=1+\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\right)^2=$$

$$1+\frac{a^4+b^4-2a^2b^2}{4a^2b^2}=\frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{4a^2b^2}\Rightarrow \sin^2 x=\frac{4a^2b^2}{a^4+b^4+2a^2b^2}$$

$$\sin^2 x=\frac{(2ab)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{2ab}{a^2+b^2}\xrightarrow[\sin x>0]{x \text{ ربع اول}}\sin x=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

۶۷ . گزینه ۴ چون $180^\circ<\alpha<270^\circ$ است پس داریم: $\begin{cases}\sin\alpha<0\\ \cos\alpha<0\end{cases}$

می‌دانیم که $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ است اکنون به بررسی گزینهٔ ۴ می‌پردازیم:

$$\frac{\tan\alpha-1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}}=\frac{\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\underbrace{|\cos\alpha|}_{-}}}=\frac{\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{-1}{\cos\alpha}}=-\sin\alpha+\cos\alpha$$

۶۸ . گزینه ۲ چون در دایرهٔ مثلثاتی $r=1$ می‌باشد، بنابراین: $OF=OC=OA=1$ از طرفی داریم:

$$\sin\theta=\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OE}}{1}=\overline{OE}$$
$$\cos\theta=\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OD}}{1}=\overline{OD}$$
$$\tan\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{BC}}{1}=\overline{BC}$$

با جای‌گذاری عبارات بالا داریم:

$$\overline{OC}-\overline{OD}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{OE}=1-\cos\theta\cdot\tan\theta\cdot\sin\theta$$
$$=1-\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$$

پس: $\frac{\overline{OF}\cdot\overline{OD}}{\overline{OC}-\overline{OD}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{OE}}=\frac{1\times\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\overline{OD}}$

۶۹ . گزینه ۳ دو طرف تساوی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1\Rightarrow\underbrace{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}_{\frac{3}{5}}+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1\Rightarrow 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{3}{5}\Rightarrow\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$$

از طرفی طبق اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ داریم:

$$\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-2\tan\alpha\cot\alpha=(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})^2-2=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-2=5-2=3$$

۷۰ . گزینه ۳

می‌دانیم $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ است.

$$\left(\sqrt{\frac{1}{\cos x}+\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\cos x}-\tan x}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\cos x}+\tan x+\frac{1}{\cos x}-\tan x+2\sqrt{(\frac{1}{\cos x}+\tan x)(\frac{1}{\cos x}-\tan x)}$$

$$= \frac{2}{\cos x} + 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x} = \frac{2}{\cos x} + 2\sqrt{1+\tan^2 x - \tan^2 x} = \frac{2}{\cos x} + 2$$

۷۱ . گزینه ۱

$$3\sin^4\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 3\sin^2\alpha\underbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{1} = 1 \Rightarrow 3\sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{3}$$

می‌دانیم $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ ؛ پس:

$$1+\cot^2\alpha = 3 \Rightarrow \cot^2\alpha = 2 \Rightarrow \cot\alpha = \pm\sqrt{2}$$

در ربع سوم $\cot\alpha > 0$ ؛ پس $\cot\alpha = \sqrt{2}$ ؛ بنابراین:

$$\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷۲ . گزینه ۳ از اتحادهای $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ و $1+\cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$ استفاده می‌کنیم و ضابطهٔ تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = 1+\tan^2 x + 25(1+\cot^2 x) = 26 + \tan^2 x + 25\cot^2 x$$

از اتحاد مربع کامل استفاده می‌کنیم و مجدداً ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$y = 26 + [(\tan x - 5\cot x)^2 + 10\underbrace{\tan x\cot x}_{1}]$$

$$\Rightarrow y = 36 + (\tan x - 5\cot x)^2$$

حال به طریق زیر برد تابع را حساب می‌کنیم:

$$(\tan x - 5\cot x)^2 \geq 0 \Rightarrow y = 36 + (\tan^2 x - 5\cot x)^2 \geq 36$$

چرا از $(\tan x + 5\cot x)^2$ استفاده نکردیم؟!!

۷۳ . گزینه ۲ می‌دانیم $\sin a\cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$ است. برای حل، عبارت داده شده را در $\sin\frac{\pi}{5}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$A = \frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{1}{8}\sin(2\pi-\frac{2\pi}{5})}{\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{8}\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} \xlongequal{\sin 2a = 2\sin a\cos a} \frac{-\frac{1}{8}(2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5})}{\sin\frac{\pi}{5}} = -\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{5}$$

۷۴ . گزینه ۴

می‌دانیم : $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{6\sin x} \Rightarrow 6\sin^2 x + 6\sin x\cos x = 1$$

$$6(\frac{1-\cos 2x}{2}) + 3\sin 2x = 1 \Rightarrow 3 - 3\cos 2x + 3\sin 2x = 1 \Rightarrow 3\sin 2x - 3\cos 2x = -2 \Rightarrow \sin 2x - \cos 2x = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (\sin 2x - \cos 2x)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin^2 2x + \cos^2 2x + 2\sin 2x\cos 2x = \frac{4}{9}$$

$$1 + \sin 4x = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin 4x = -\frac{5}{9}$$

۷۵ . گزینه ۲ با توجه به رابطهٔ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ داریم:

$$\cos 150^\circ = 1 - 2\sin^2(75^\circ) \Rightarrow \sin^2(75^\circ) = \frac{1-\cos 150^\circ}{2} \ , \ \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \sin 75^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-(\frac{-\sqrt{3}}{2})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4} = \frac{a(\sqrt{3}+1)}{4} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow a^2 = \frac{4(2+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+1)^2}$$

$$= \frac{4(2+\sqrt{3})}{3+1+2\sqrt{3}} = \frac{4(2+\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})} = 2$$

۷۶ . گزینه ۲

می‌دانیم : $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha \ , \ \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

توجه کنید که:

$$\cos\frac{7\pi}{8} = \cos(\pi - \frac{\pi}{8}) = -\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\cos\frac{5\pi}{8} = \cos(\pi - \frac{3\pi}{8}) = -\cos\frac{3\pi}{8}$$

بنابراین:

$$A = (1-\cos\frac{\pi}{8})(1-\cos\frac{3\pi}{8})(1+\cos\frac{3\pi}{8})(1+\cos\frac{\pi}{8})$$

$$= (1-\cos^2\frac{\pi}{8})(1-\cos^2\frac{3\pi}{8}) = \sin^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}) = \sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8} = (\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8})^2 = (\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4})^2 = (\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{8}$$

۷۷ . گزینه ۴

می‌دانیم $\sin 2a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$ است.

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\tan x = t} \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2t^2 + 2 = 6t \Rightarrow 2t^2 - 6t + 2 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 5} t = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \tan x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \tan x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

چون طبق صورت سؤال $0 < x < \frac{\pi}{4}$ است پس $0 < \tan x < 1$ است.

بنابراین تنها $\tan x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ قابل قبول است.

۷۸ . گزینه ۲

می‌دانیم: $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ و $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ و $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)=8\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)\Rightarrow\frac{8\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)}=1$$

$$\Rightarrow 4\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\times\frac{(1-\tan^2\alpha)}{1+\tan^2\alpha}=1\Rightarrow 4\cos2\alpha\sin2\alpha=1\Rightarrow 2\sin4\alpha=1\Rightarrow\sin4\alpha=\frac{1}{2}$$

۷۹ . گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که:

$$\sin(\frac{9\pi}{14})=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{14})=\cos(\frac{2\pi}{14})$$

$$\sin(\frac{11\pi}{14})=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{14})=\cos(\frac{4\pi}{14})$$

بنابراین می‌خواهیم حاصل عبارت $A=\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\cos\frac{4\pi}{14}$ را به‌دست آوریم. برای این کار عبارت A را در $\cos\frac{\pi}{14}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

با توجه به اتحاد $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha$ حاصل عبارت را به‌دست می‌آوریم.

$$A=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{14}}(\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\cos\frac{4\pi}{14})=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{14}}(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\cos\frac{4\pi}{14})$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}(\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{14}\cos\frac{4\pi}{14})=\frac{1}{4\cos\frac{\pi}{14}}(\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{14})=\frac{1}{8}\times\frac{\sin\frac{8\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{14})}{\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{1}{8}\times\frac{\cos\frac{\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{1}{8}$$

۸۰ . گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\boxed{\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}$$

$$\alpha=36^\circ\Rightarrow3\alpha+2\alpha=180^\circ\Rightarrow3\alpha=180^\circ-2\alpha\Rightarrow\cos3\alpha=\cos(180^\circ-2\alpha)\Rightarrow\cos3\alpha=-\cos2\alpha$$

$$\Rightarrow\cos(3\alpha)+\cos(2\alpha)=0\Rightarrow4\cos^3\alpha-3\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=0$$

$$\Rightarrow(\cos\alpha+1)(4\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1)=0\Rightarrow4\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0\ ,\ \Delta=4+16=20$$

$$\cos\alpha=\frac{2+2\sqrt{5}}{8}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\cos36^\circ$$

۸۱ . گزینه ۳ توجه کنید که $\sin(x-\frac{\pi}{2})=-\cos x$ و $\sin(x-\pi)=-\sin x$

بنابراین:

$$5\sin(x-\frac{\pi}{2})=2\sin(x-\pi)\Rightarrow-5\cos x=-2\sin x$$

$$\Rightarrow\frac{5}{2}=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow\tan x=\frac{5}{2}$$

بنابراین با استفاده از اتحاد $\cos2x=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}$ می‌توانیم مقدار $\cos2x$ را پیدا کنیم:

$$\cos2x=\frac{1-(\frac{5}{2})^2}{1+(\frac{5}{2})^2}=\frac{1-\frac{25}{4}}{1+\frac{25}{4}}=-\frac{21}{29}$$

۸۲ . گزینه ۳

می‌دانیم:

$$\boxed{\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}\ ,\ \boxed{\sin3\alpha=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha}$$

$$\underbrace{۲(۴\sin^۳\frac{\pi}{۳۶}-۳\sin\frac{\pi}{۳۶})}_{-\sin\frac{۳\pi}{۳۶}=-\sin\frac{\pi}{۱۲}}\;\underbrace{۲(۴\cos^۳\frac{\pi}{۳۶}-۳\cos\frac{\pi}{۳۶})}_{\cos\frac{۳\pi}{۳۶}=\cos\frac{\pi}{۱۲}}=-۴\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}=-۴\times\frac{۱}{۲}\sin ۲(\frac{\pi}{۱۲})=-۲\sin\frac{\pi}{۶}=-۱$$

۸۳ . گزینه ۲ ابتدا کمی عبارت را ساده کنیم.

$$\frac{\cos(۲\alpha-\frac{\pi}{۲})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(۲\alpha)}=\frac{\sin ۲\alpha-\cos\alpha}{\cot(۲\alpha)}$$

دقت کنید که $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$ و $\cos(۲\alpha-\frac{\pi}{۲})=\sin ۲\alpha$.

برای حل سؤال مقادیر $\cos\alpha$، $\sin\alpha$، $\sin ۲\alpha$، $\cos ۲\alpha$ و $\cot ۲\alpha$ را نیاز داریم، که آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$۱)\ ۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+(\frac{۳}{۴})^۲=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}\xrightarrow{\alpha\ \text{در ربع سوم}}\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

$$۲)\ \sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha\Rightarrow\sin^۲\alpha=۱-(-\frac{۴}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵}\xrightarrow{\alpha\ \text{در ربع سوم}}\sin\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

$$۳)\ \sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(-\frac{۳}{۵})(-\frac{۴}{۵})=\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$۴)\ \cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=(-\frac{۴}{۵})^۲-(-\frac{۳}{۵})^۲=\frac{۷}{۲۵}$$

$$۵)\ \cot ۲\alpha=\frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha}=\frac{\frac{۷}{۲۵}}{\frac{۲۴}{۲۵}}=\frac{۷}{۲۴}$$

حال خواسته سوال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin ۲\alpha-\cos\alpha}{\cot(۲\alpha)}=\frac{\frac{۲۴}{۲۵}-(-\frac{۴}{۵})}{\frac{۷}{۲۴}}=\frac{۴۴\times ۲۴}{۲۵\times ۷}=\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$$

۸۴ . گزینه ۲

می‌دانیم : $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$\frac{۱}{\sin\alpha}+\frac{۱}{\cos\alpha}=۴\rightarrow\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=۴\rightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=۴\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\xrightarrow[\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha]{\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{۱+\sin ۲\alpha}}\sqrt{۱+\sin ۲\alpha}=۲\sin ۲\alpha\xrightarrow{\text{توان}۲}۱+\sin ۲\alpha=۴\sin^۲ ۲\alpha\rightarrow ۴\sin^۲ ۲\alpha-\sin ۲\alpha-۱=۰\xrightarrow[\sin ۲\alpha>۰]{۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}}$$

$$\sin ۲\alpha=\frac{۱\pm\sqrt{۱۷}}{۸}\rightarrow\sin ۲\alpha=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۸}\rightarrow(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲=۱+\sin ۲\alpha=۱+\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۸}=\frac{۹+\sqrt{۱۷}}{۸}$$

۸۵ . گزینه ۴ با توجه به رابطهٔ $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$ داریم:

$$\frac{\ \sin ۱۵^\circ}{in^۲ ۱۵^\circ}=\frac{\cancel{۱-\sqrt{۲}\sin ۱۵^\circ}}{(\cancel{۱-\sqrt{۲}\sin ۱۵^\circ})(۱+\sqrt{۲}\sin ۱۵^\circ)}=\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}\sin ۱۵^\circ}=\frac{۱}{\frac{k}{۲}\cos ۲۵۵^\circ+۱}\Rightarrow ۱+\sqrt{۲}\sin ۱۵^\circ=\frac{k}{۲}\cos ۲۵۵^\circ+۱\Rightarrow\sqrt{۲}\sin ۱۵^\circ$$

۲۵۵°

می‌دانیم:

$$\cos 255^\circ = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ \rightarrow \sqrt{2}\sin 15^\circ = \frac{k}{2}(-\sin 15^\circ) \rightarrow k = -2\sqrt{2}$$

۸۶ . گزینه ۴

می‌دانیم : $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{7\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{11\pi}{12} = \frac{12\pi - \pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$$

$$(1 - \sin\frac{\pi}{12})(1 + \sin(\pi - \frac{\pi}{12}))(1 - \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}))(1 + \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}))$$

$$= (1 - \sin\frac{\pi}{12})(1 + \sin\frac{\pi}{12})(1 - \cos\frac{\pi}{12})(1 + \cos\frac{\pi}{12})$$

$$= (1 - \sin^2\frac{\pi}{12})(1 - \cos^2\frac{\pi}{12}) = \cos^2\frac{\pi}{12} \times \sin^2\frac{\pi}{12}$$

$$= (\cos\frac{\pi}{12} \times \sin\frac{\pi}{12})^2 = (\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6})^2 = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$$

$$\rightarrow a^2 = \frac{1}{16} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{4} \rightarrow 8a + 1 = 3$$

۸۷ . گزینه ۲

می‌دانیم : $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha\ ,\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha\ ,\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

با استفاده از روابط فوق داریم:

$\sin\frac{5\pi}{18} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{18}) = \cos(\frac{2\pi}{9})$ و $\sin\frac{7\pi}{18} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{18}) = \cos\frac{\pi}{9}$ و $\sin\frac{\pi}{18} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}) = \cos\frac{4\pi}{9}$. بنابراین:

$$\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18} = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$$

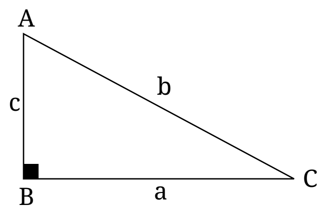
عبارت را در $\sin\frac{\pi}{9}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. با توجه به رابطهٔ $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ داریم:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{9})\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{\frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{\frac{1}{8}\sin(\pi - \frac{\pi}{9})}{\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$\frac{a - 1}{a} = \frac{\frac{1}{8} - 1}{\frac{1}{8}} = \frac{-\frac{7}{8}}{\frac{1}{8}} = -7$$

۸۸ . گزینه ۱ برای حل سؤال می‌توانیم از فرمول مثلثاتی $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ استفاده کنیم:



$$\sin A=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}$$
$$\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$
$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{c}{b}}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b+c}{b}}=\frac{a}{b+c}\Rightarrow \tan\frac{A}{2}=\frac{a}{b+c}$$

تذکر: برای اثبات فرمول مثلثاتی $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}$ می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

۸۹ . گزینه ۳ با در نظر گرفتن $BD=x$، داریم $AD=3x$. در نتیجه $AB=4x$.

$$\tan 30^\circ=\frac{BC}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{BC}{4x}\Rightarrow\boxed{BC=\frac{4}{3}\sqrt{3}x}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{CBD}$، رابطهٔ فیثاغورث را می‌نویسیم:

$$CD^2=BC^2+BD^2\Rightarrow CD^2=x^2+\frac{16}{3}x^2\Rightarrow CD^2=\frac{19}{3}x^2\Rightarrow\boxed{CD=\sqrt{\frac{19}{3}}x}$$

$$\cos\theta=\frac{BD}{CD}=\frac{x}{\sqrt{\frac{19}{3}}x}\Rightarrow\boxed{\cos^2\theta=\frac{3}{19}}\quad ,\quad \sin\theta=\frac{BC}{CD}=\frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}x}{\sqrt{\frac{19}{3}}x}\Rightarrow\boxed{\sin^2\theta=\frac{16}{19}}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{3}{19}-\frac{16}{19}=-\frac{13}{19}$$

۹۰ . گزینه ۳

توجه: در محاسبهٔ ضرب کسینوس‌ها، اگر کمان‌ها یک دنبالهٔ هندسی باشند، باید عبارت را در سینوس کوچکترین کمان ضرب و تقسیم کنیم.

می‌دانیم:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$$

$$A=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{4}\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin(180^\circ-20^\circ)}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}$$

توجه کنید که $\sin 160=\sin 20$

۹۱ . گزینه ۴

می‌دانیم : $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

ضابطه تابع f را در $\sin^2 3x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$f(x)=16\left(\frac{\overbrace{\sin 3x\cos 3x}^{\frac{1}{2}\sin 6x}\cos 6x\cos 12x\cos 24x}{\sin 3x}\right)^2$$

دقت کنید:

$$\sin 3x\cos 3x=\frac{1}{2}\sin 6x$$

$$\sin ۶x \cos ۶x = \frac{۱}{۲}\sin ۱۲x$$

$$\sin ۱۲x \cos ۱۲x = \frac{۱}{۲}\sin ۲۴x$$

$$\sin ۲۴x \cos ۲۴x = \frac{۱}{۲}\sin ۴۸x$$

$$f(x) = ۱۶\left(\frac{\frac{۱}{۱۶}\sin ۴۸x}{\sin ۳x}\right)^۲$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{۳۶}\right) = ۱۶\left(\frac{\sin \frac{۴۸\pi}{۳۶}}{۱۶\sin \frac{۳\times\pi}{۳۶}}\right)^۲ = \frac{\sin^۲ \frac{۴\pi}{۳}}{۱۶\sin^۲ \frac{\pi}{۱۲}}$$

از طرفی می‌دانیم $\sin^۲\alpha = \frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$ و $\sin\frac{۴\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و البته: $\cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

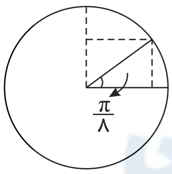
$$f\left(\frac{\pi}{۳۶}\right) = \frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶\left(\frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}\right)} = \frac{۳}{۱۶(۲-\sqrt{۳})} \times \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} = \frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

۹۲. گزینه ۱ فرض کنید $A = \sin\frac{\pi}{۸} - \cos\frac{\pi}{۸}$، در این صورت:

می‌دانیم : $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$

$$A^۲ = \left(\sin\frac{\pi}{۸} - \cos\frac{\pi}{۸}\right)^۲ = \sin^۲\frac{\pi}{۸} + \cos^۲\frac{\pi}{۸} - ۲\sin\frac{\pi}{۸}\cos\frac{\pi}{۸} = ۱ - \sin\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow A = -\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}}$$

طبق دایرهٔ مثلثاتی مقابل $\sin\frac{\pi}{۸} < \cos\frac{\pi}{۸}$ و درنتیجه مقدار A منفی است:



بنابراین با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\sin^۳\frac{\pi}{۸} - \cos^۳\frac{\pi}{۸} = \left(\sin\frac{\pi}{۸} - \cos\frac{\pi}{۸}\right)\left(\sin^۲\frac{\pi}{۸} + \cos^۲\frac{\pi}{۸} + \sin\frac{\pi}{۸}\cos\frac{\pi}{۸}\right) = -\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}}\left(۱ + \frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}\right) = -\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}}\left(۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۴}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{۴-۲\sqrt{۲}}{۴}}\left(\frac{۴+\sqrt{۲}}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}(۴+\sqrt{۲})}{۸}$$

پس عبارت موردنظر $-\frac{(۴+\sqrt{۲})}{۸}$ برابر $\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}$ است.

۹۳. گزینه ۲ به کمک اتحادهای $\sin x = \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}$ و $\cos x = \frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}$ تساوی داده شده را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} - ۲\left(\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}\right) = ۱ \Rightarrow ۲\tan\frac{x}{۲} - ۲ + ۲\tan^۲\frac{x}{۲} = ۱ + \tan^۲\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-3=0 \Rightarrow (\tan\frac{x}{2}-1)(\tan\frac{x}{2}+3)=0 \Rightarrow \begin{cases}\tan\frac{x}{2}=1\\ \tan\frac{x}{2}=-3\end{cases}$$

اکنون توجه کنید که اگر $\tan\frac{x}{2}=1$، آن‌گاه $\tan x$ تعریف نمی‌شود. زیرا:

$$\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

اگر $\tan\frac{x}{2}=-3$ باشد، آن‌گاه:

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{-6}{1-9}=\frac{3}{4}$$

۹۴. گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که:

$$\sin\frac{9\pi}{10}=\sin(\pi-\frac{\pi}{10})=\sin\frac{\pi}{10}$$

$$\cos\frac{4\pi}{5}=\cos(\pi-\frac{\pi}{5})=-\cos\frac{\pi}{5} \Rightarrow A=-\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$$

اکنون عبارت را در $4\cos\frac{\pi}{10}$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم و از فرمول $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$A=\frac{-4\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}}{4\cos\frac{\pi}{10}}=-\frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{4\cos\frac{\pi}{10}}=-\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{4\cos\frac{\pi}{10}}$$

از طرف دیگر:

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\sin(\frac{4\pi}{10})=\sin(\frac{5\pi}{10}-\frac{\pi}{10})=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10})=\cos\frac{\pi}{10}$$

بنابراین:

$$A=\frac{-\cos\frac{\pi}{10}}{4\cos\frac{\pi}{10}}=-\frac{1}{4}$$

۹۵. گزینه ۴

می‌دانیم : $\cos 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

ابتدا مقدار $\tan x$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\cos 2x=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x} \Rightarrow \frac{3}{5}=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x} \Rightarrow 3+3\tan^2x=5-5\tan^2x$$
$$8\tan^2x=2 \Rightarrow \tan^2x=\frac{1}{4} \Rightarrow \tan x=\pm\frac{1}{2}$$

از طرف دیگر:

$$A=\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{-\cos x}{\frac{1}{2}\sin x}=-2\cot x$$

اگر $\tan x=\frac{1}{2}$، آن‌گاه $\cot x=2$ و درنتیجه $A=-4$.

اگر $\tan x=-\frac{1}{2}$، آن‌گاه $\cot x=-2$ و درنتیجه $A=4$.

پس کمترین مقدار ممکن برای A برابر -4 است.

۹۶. گزینه ۱ از اتحادهای $\sin 2x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ و $\cos 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$$۲(\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x})-\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۴\tan x-۱+\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۱}{۳}$$

قرار می‌دهیم $t=\tan x$ و نتیجه می‌شود:

$$\frac{۴t-۱+t^۲}{۱+t^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳t^۲+۱۲t-۳=۱+t^۲\Rightarrow ۲t^۲+۱۲t-۴=۰$$
$$t^۲+۶t-۲=۰\Rightarrow t=-۳\pm\sqrt{۱۱}$$

پس بیشترین مقدار $\tan x$ برابر $\sqrt{۱۱}-۳$ است.

۹۷ . گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که:

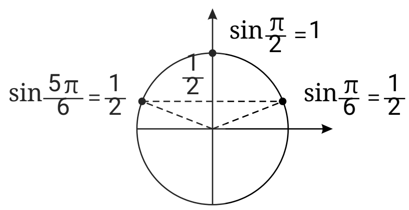
$$\sin x\cos x=\frac{۲m-۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sin ۲x=\frac{۲m-۱}{۴}\Rightarrow\sin ۲x=\frac{۲m-۱}{۲}$$

از طرف دیگر:

$$\frac{\pi}{۱۲}<x<\frac{۵\pi}{۱۲}\Rightarrow\frac{\pi}{۶}<۲x<\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\sin ۲x\leq ۱$$

درنتیجه:

$$\frac{۱}{۲}<\frac{۲m-۱}{۲}\leq ۱$$
$$۱<۲m-۱\leq ۲\Rightarrow ۲<۲m\leq ۳\Rightarrow ۱<m\leq\frac{۳}{۲}$$



پس $m\in(۱,\frac{۳}{۲}]$.

۹۸ . گزینه ۱ ابتدا مقدار $\cos ۲x$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x=۱-۲(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴})^۲=۱-\frac{۶-۲\sqrt{۵}}{۸}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۴}$$

اکنون مقدار $\cos ۴x$ را حساب می‌کنیم.

$$\cos ۴x=۲\cos^۲ ۲x-۱=۲(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴})^۲-۱=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۸}-۱=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$$

بنابراین:

$$\cos ۴x=\sin x\Rightarrow ۴x+x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۱۰}$$

۹۹ . گزینه ۱ از فرمول مثلثاتی $\cot x-\tan x=۲\cot ۲x$ استفاده می‌کنیم؛ یعنی در عبارت داده شده به‌جای عبارت $۲\cot ۸۰^\circ$ از فرمول $۲\cot ۸۰^\circ=\cot ۴۰^\circ-\tan ۴۰^\circ$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\tan ۲۰^\circ+۲\tan ۴۰^\circ+۲(۲\cot ۸۰^\circ)=\tan ۲۰^\circ+۲\tan ۴۰^\circ+۲(\cot ۴۰^\circ-\tan ۴۰^\circ)$$
$$A=\tan ۲۰^\circ+۲\tan ۴۰^\circ+۲\cot ۴۰^\circ-۲\tan ۴۰^\circ=\tan ۲۰^\circ+۲\cot ۴۰^\circ$$

مجدداً به جای $۲\cot ۴۰^\circ$ از فرمول $۲\cot ۴۰^\circ=\cot ۲۰^\circ-\tan ۲۰^\circ$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\tan ۲۰^\circ+\cot ۲۰^\circ-\tan ۲۰^\circ=\cot ۲۰^\circ$$

و چون $\cot ۲۰^\circ=\tan ۷۰^\circ$ است، بنابراین گزینهٔ ۱ جواب است.

۱۰۰ . گزینه ۳ راه‌حل اول: دو طرف تساوی داده شده را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\sin^۲ x + ۴\sin x\cos x + ۵\cos^۲ x = ۳ \Rightarrow \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} + \frac{۴\sin x\cos x}{\cos^۲ x} + \frac{۵\cos^۲ x}{\cos^۲ x} = \frac{۳}{\cos^۲ x}$$

$$\Rightarrow \tan^۲ x + ۴\tan x + ۵ = ۳(۱+\tan^۲ x) \Rightarrow \tan^۲ x - ۲\tan x - ۱ = ۰ \Rightarrow \tan x = \frac{۲\pm\sqrt{۸}}{۲} \Rightarrow \tan x = \frac{۲\pm ۲\sqrt{۲}}{۲}$$

$\Rightarrow \tan x = ۱+\sqrt{۲}$ یا $\tan x = ۱-\sqrt{۲}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} = \frac{۲(۱+\sqrt{۲})}{۱-(۱+\sqrt{۲})^۲} = \frac{۲+۲\sqrt{۲}}{۱-۱-۲-۲\sqrt{۲}} = \frac{۲+۲\sqrt{۲}}{-(۲+۲\sqrt{۲})} = -۱ \\ \tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} = \frac{۲(۱-\sqrt{۲})}{۱-(۱-\sqrt{۲})^۲} = \frac{۲-۲\sqrt{۲}}{۱-۱-۲+۲\sqrt{۲}} = \frac{۲-۲\sqrt{۲}}{-(۲-۲\sqrt{۲})} = -۱ \end{cases}$$

بنابراین در هر دو حالت، حاصل $\tan ۲x$ برابر -۱ خواهد بود.

راه‌حل دوم:

$$۱-\cos^۲ x + ۴\sin x\cos x + ۵\cos^۲ x = ۳ \Rightarrow ۴\cos^۲ x - ۲ + ۴\sin x\cos x = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ + ۲\sin x\cos x = ۰$$

$$\Rightarrow \cos ۲x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = -\sin ۲x \Rightarrow \tan ۲x = -۱$$

۱۰۱. گزینه ۳

می‌دانیم: $\sin ۲x = ۲\sin x \cdot \cos x$

ابتدا فرض می‌کنیم: $\sin x - \cos x = k$ و سپس طرفین آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$k^۲ = \sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin x \cdot \cos x \Rightarrow k^۲ = ۱ - ۲\sin x \cdot \cos x \Rightarrow ۲\sin x\cos x = ۱ - k^۲$$

باید معادلهٔ $\sqrt{۲}\sin x - ۱۲\sin x \cdot \cos x - \sqrt{۲}\cos x + ۴ = ۰$ را بر حسب k بنویسیم:

$$\sqrt{۲}(\sin x - \cos x) - ۱۲\sin x \cdot \cos x + ۴ = ۰$$

$$\sqrt{۲}k - ۶(۱-k^۲) + ۴ = ۰ \Rightarrow ۶k^۲ + \sqrt{۲}k - ۲ = ۰$$

$$\Delta = ۲ + ۴۸ = ۵۰ \Rightarrow k = \frac{-\sqrt{۲}\pm ۵\sqrt{۲}}{۱۲} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{۲}}{۳}, \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin ۲x = ۱ - k^۲ \Rightarrow \sin ۲x = ۱ - (\frac{\sqrt{۲}}{۳})^۲ = \frac{۷}{۹} \text{ و } \sin ۲x = ۱ - (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲}$$

۱۰۲. گزینه ۲

روش اول: می‌دانیم $\frac{\pi}{۶} - \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۱۲}$، بنابراین:

$$\tan\frac{\pi}{۱۲} = \tan(\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۶}) = \frac{۱-\tan\frac{\pi}{۶}}{۱+\tan\frac{\pi}{۶}} = \frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{۳-\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}} = \frac{۳-\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}} \times \frac{۳-\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}} = \frac{۱۲-۶\sqrt{۳}}{۶} = ۲-\sqrt{۳}$$

روش دوم:

می‌دانیم $\cos^۲ \alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}$, $\sin^۲ \alpha = \frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$، بنابراین:

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{\pi}{12}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{12}}{\cos^2\frac{\pi}{12}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}\Rightarrow \tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$$

۱۰۳. گزینه ۲ می‌دانیم $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ و $\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$، بنابراین داریم:

$$\tan 20^\circ\sin 40^\circ-1=\tan 20^\circ\times\frac{2\tan 20^\circ}{1+\tan^2 20^\circ}-1=\frac{2\tan^2 20^\circ}{1+\tan^2 20^\circ}-1=\frac{2\tan^2 20^\circ-\tan^2 20^\circ-1}{1+\tan^2 20^\circ}=\frac{\tan^2 20^\circ-1}{\tan^2 20^\circ+1}=-\cos 40^\circ$$

۱۰۴. گزینه ۱

می‌دانیم: $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$$\sin(\frac{11\pi}{24})=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{24})=\cos\frac{\pi}{24}$$

$$A=\sin^2\frac{\pi}{24}\times\sin^2\frac{11\pi}{24}=(\sin\frac{\pi}{24}\times\sin\frac{11\pi}{24})^2=(\sin\frac{\pi}{24}\times\cos\frac{\pi}{24})^2=(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{24})^2=\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{12}$$

$$\cos 75^\circ=m\to\sin 15^\circ=m\to\sin\frac{\pi}{12}=m\to A=\frac{1}{4}(m^2)=\frac{m^2}{4}$$

۱۰۵. گزینه ۴

می‌دانیم: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\ ,\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

پس خواسته سوال برابر است با:

$$P=(3-(2-\sqrt{3}))(3-(2+\sqrt{3}))=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1-3=-2$$

۱۰۶. گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\boxed{2\sin x\cos x=\sin 2x\ ,\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\ ,\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}}$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+2\sin 2x+\frac{5(1+\cos 2x)}{2}=3\Rightarrow 1-\cos 2x+4\sin 2x+5+5\cos 2x=6$$

$$4\cos 2x+4\sin 2x=0\Rightarrow\cos 2x+\sin 2x=0$$

$$\Rightarrow\sin 2x=-\cos 2x\xrightarrow{\div\cos 2x}\tan 2x=\cot 2x=-1\Rightarrow\tan 2x+\cot 2x=-1-1=-2$$

۱۰۷. گزینه ۴

می‌دانیم:

$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ ,\ 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\ ,\ 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\ ,\ \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$A=\sqrt{\frac{۱}{۲}}-\sqrt{\frac{۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}}=\frac{۱}{|\sin\alpha|}-|\tan\frac{\alpha}{۲}|\overset{۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}}{=}\frac{۱}{\sin\alpha}-\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

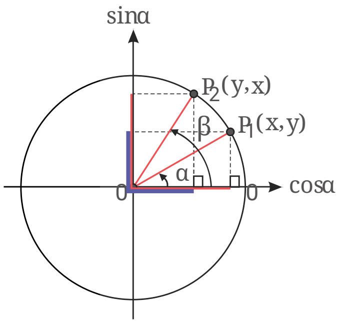
$$\sin\alpha=\frac{۱-۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cdot\cos\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۱-۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$$

۱۰۸. گزینه ۲

می‌دانیم : $\cot\alpha-\tan\alpha=۲\cot ۲\alpha$

اگر دو نقطه $P_۱(x,y)$ و $P_۲$ نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگر باشند داریم: $P_۲=(y,x)$

چون نقاط $P_۱$ و $P_۲$ روی دایره مثلثاتی واقع‌اند با توجه به شکل نتیجه می‌گیریم:



$\beta=\frac{\pi}{۲}-\alpha\to$ α و β متمم یکدیگرند.

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\beta=\cos\alpha\\ \cos\beta=\sin\alpha\end{cases}\Rightarrow\tan\beta=\cot\alpha$$

طبق صورت سوال داریم:

$$\tan\alpha-\tan\beta=۴\Rightarrow\tan\alpha-\cot\alpha=۴\Rightarrow-۲\cot ۲\alpha=۴\Rightarrow\cot ۲\alpha=-۲$$

از طرفی:

$$۱+\cot^۲(۲\alpha)=\frac{۱}{\sin^۲ ۲\alpha}\Rightarrow ۱+(-۲)^۲=\frac{۱}{\sin^۲ ۲\alpha}\Rightarrow\sin^۲ ۲\alpha=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\sin(۲\alpha)=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

چون:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۲\alpha+۲\beta=\pi\Rightarrow ۲\alpha=\pi-۲\beta$$

$$\Rightarrow\sin(۲\alpha)=\sin(\pi-۲\beta)=\sin(۲\beta)\Rightarrow\sin(۲\alpha)+\sin(۲\beta)=۲\sin(۲\alpha)=\pm\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

۱۰۹. گزینه ۳

می‌دانیم : $\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$

با فرض $\alpha=x+\frac{\pi}{۵}$، داریم:

$$x=\frac{۳\pi}{۱۰}=\alpha-\frac{\pi}{۵}-\frac{۳\pi}{۱۰}=\alpha-\frac{۵\pi}{۱۰}=\alpha-\frac{\pi}{۲}$$

$$\sin\alpha+\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})=\sqrt{۳}\Rightarrow ۲\sin\alpha=\sqrt{۳}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow ۷x+\frac{\pi}{۱۵}=۷(\alpha-\frac{\pi}{۵})+\frac{\pi}{۱۵}=۷\alpha-\frac{۲۰\pi}{۱۵}=\frac{۷\pi}{۳}-\frac{۲۰\pi}{۱۵}=\pi\quad\Rightarrow\cos(۷x+\frac{\pi}{۱۵})=-۱$$

۱۱۰. گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a=\frac{۱-\tan^۲ a}{۱+\tan^۲ a}\quad \text{و}\quad \sin ۲a=\frac{۲\tan a}{۱+\tan^۲ a}}$

$$۳\sin x-۴\cos x=۵\Rightarrow ۳(\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}})-۴(\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}})=۵$$

$$\xrightarrow{\times(۱+\tan^۲\frac{x}{۲})} ۶\tan\frac{x}{۲}-۴(۱-\tan^۲\frac{x}{۲})=۵(۱+\tan^۲\frac{x}{۲})$$

$$\to \tan^۲\frac{x}{۲}-۶\tan\frac{x}{۲}+۹=۰ \to \left(\tan\frac{x}{۲}-۳\right)^۲=۰ \to \tan\frac{x}{۲}-۳=۰ \to \tan\frac{x}{۲}=۳$$

می‌دانیم: $\tan x=\dfrac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}=\dfrac{۲(۳)}{۱-۹}=-\dfrac{۳}{۴}$

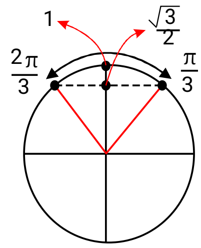
$$\cos ۲x=\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۱-\frac{۹}{۱۶}}{۱+\frac{۹}{۱۶}}=\frac{\frac{۷}{۱۶}}{\frac{۲۵}{۱۶}}=\frac{۷}{۲۵}=۰/۲۸$$

۱۱۱. گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\dfrac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\cos ۲\alpha}$

$$\frac{۱-\tan^۲(۴۵-\alpha)}{۱+\tan^۲(۴۵-\alpha)}=\cos ۲(۴۵-\alpha)=\cos(۹۰-۲\alpha)=\sin ۲\alpha$$

$$\frac{\pi}{۶}\le\alpha\le\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\frac{\pi}{۳}\le ۲\alpha\le\frac{۲\pi}{۳}$$



مقدار سینوس در این بازه از $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ تا ۱ متغیر است که کم‌ترین مقدار آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

۱۱۲. گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{(\sin a+\cos a)^۲=۱+\sin ۲a \ , \ \tan a+\cot a=\dfrac{۲}{\sin ۲a}}$

$$\sin x+\cos x=\frac{۴}{۳}\xrightarrow{\text{توان ۲}}۱+\sin ۲x=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow\sin ۲x=\frac{۷}{۹}$$

$$\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}=A\xrightarrow{\text{توان ۲}}\tan x+\cot x+\underbrace{\sqrt{\tan x\cot x}}_{۱}=A^۲$$

$$\to\frac{۲}{\sin ۲x}+۲=A^۲\to\frac{۲}{\frac{۷}{۹}}+۲=A^۲\to\frac{۱۸}{۷}+۲=A^۲\to A^۲=\frac{۳۲}{۷}\to A=\sqrt{\frac{۳۲}{۷}}$$

۱۱۳. گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab \ , \ a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b) \ , \ \tan a+\cot a=\dfrac{۲}{\sin ۲a}}$

$$\frac{\tan^۲x+\cot^۲x}{\tan^۳x+\cot^۳x}=\frac{(\tan x+\cot x)^۲-۲\tan x\cot x}{(\tan x+\cot x)^۳-۳\tan x\cot x(\tan x+\cot x)}=\frac{(\frac{۲}{\sin ۲x})^۲-۲}{(\frac{۲}{\sin ۲x})^۳-۳(\frac{۲}{\sin ۲x})}$$

$$=\frac{(\frac{۵}{۲})^۲-۲}{(\frac{۵}{۲})^۳-۳(\frac{۵}{۲})}=\frac{\frac{۲۵}{۴}-۲}{\frac{۱۲۵}{۸}-\frac{۱۵}{۲}}=\frac{\frac{۱۷}{۴}}{\frac{۶۵}{۸}}=\frac{۸\times ۱۷}{۴\times ۶۵}=\frac{۳۴}{۶۵}$$

۱۱۴. گزینه ۴ می‌دانیم $(\sin a-\cos a)^۲=۱-\sin ۲a$ و $\cos ۲a=\cos^۲a-\sin^۲a$ است.

$$\frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{1-\sin 20^\circ}}-\cos 10^\circ=\frac{\cos^2 10^\circ-\sin^2 10^\circ}{\sqrt{(\sin 10^\circ-\cos 10^\circ)^2}}-\cos 10^\circ=\frac{(\cos 10^\circ+\sin 10^\circ)(\cos 10^\circ-\sin 10^\circ)}{\underbrace{|\sin 10^\circ-\cos 10^\circ|}_{-}}-\cos 10^\circ$$

$$=\frac{(\cos 10^\circ+\sin 10^\circ)(\cos 10^\circ-\sin 10^\circ)}{(\cos 10^\circ-\sin 10^\circ)}-\cos 10^\circ=\cos 10^\circ+\sin 10^\circ-\cos 10^\circ=\sin 10^\circ=\cos 80^\circ$$

۱۱۵. گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a}$

عبارت را در $\sin 20^\circ$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\overbrace{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\overbrace{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overbrace{\sin 80^\circ)\cos 80^\circ}}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{8}\sin(180^\circ-20^\circ)}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{8}\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}$$

۱۱۶. گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u\ ,\ \cos 2a=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}\ ,\ \sin 2a=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}}$

$$\frac{\tan a(1-\tan^2 a)}{(1+\tan^2 a)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\times\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 4\alpha}=\frac{1}{4}\sin 4\alpha=\frac{1}{4}\to\sin 4\alpha=1$$

۱۱۷. گزینه ۴ می‌دانیم $(\sin a\pm\cos a)^2=1\pm\sin 2a$ است.

توجه کنید که $\sin\frac{5\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12})=\cos\frac{\pi}{12}$ است.

$$\begin{cases}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{4}\\ \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{4}\end{cases}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{a}}{2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}1+\sin\frac{2\pi}{12}=\frac{a}{4}\to 1+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{a}{4}\to 1+\frac{1}{2}=\frac{a}{4}\to\frac{3}{2}=\frac{a}{4}\to 2a=12\to a=6$$

$$\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}=\frac{-\sqrt{b}}{2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}1-\sin\frac{2\pi}{12}=\frac{b}{4}\to 1-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{b}{4}\to 1-\frac{1}{2}=\frac{b}{4}\to\frac{1}{2}=\frac{b}{4}\to 2b=4\to b=2$$

پس $a-b=4$ است.

۱۱۸. گزینه ۴ می‌دانیم $\sin 2a=2\sin a\cos a$ و $1+\cos 2a=2\cos^2 a$ و $\tan a+\cot a=\frac{2}{\sin 2a}$ است.

$$\frac{\sin 15^\circ+\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ+\cos 15^\circ}+\frac{1+\cos 30^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ+\sin 30^\circ}=\frac{\sin 15^\circ+2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}{2\cos^2 15^\circ+\cos 15^\circ}+\frac{2\cos^2 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ+2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}$$

$$=\frac{\sin 15^\circ(1+2\cos 15^\circ)}{\cos 15^\circ(2\cos 15^\circ+1)}+\frac{\cos 15^\circ(2\cos 15^\circ+1)}{\sin 15^\circ(1+2\cos 15^\circ)}=\tan 15^\circ+\cot 15^\circ=\frac{2}{\sin 30^\circ}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

۱۱۹. گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{(\sin a\pm\cos a)^2=1\pm\sin 2a\ ,\ \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a}$

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=4\Rightarrow\frac{(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}=4\Rightarrow\frac{1+\sin 2x+1-\sin 2x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=4$$

$$\Rightarrow\frac{2}{-\cos 2x}=4\Rightarrow\cos 2x=\frac{-1}{2}\Rightarrow\cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 2x=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

$$\tan^2 x+\cot^2 x=\tan^2\frac{\pi}{3}+\cot^2\frac{\pi}{3}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

۱۲۰. گزینه ۲ می‌دانیم $\tan^2 a=\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$ است.

$$\tan^{۲}۱۵^\circ=\frac{۱-\cos ۳۰^\circ}{۱+\cos ۳۰^\circ}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}\to \tan ۱۵^\circ=\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}}=\sqrt{\frac{(۲-\sqrt{۳})^{۲}}{۴-۳}}=|۲-\sqrt{۳}|=۲-\sqrt{۳}$$

$$\tan^{۲}۲۲{,}۵^\circ=\frac{۱-\cos ۴۵^\circ}{۱+\cos ۴۵^\circ}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}\to \tan ۲۲{,}۵^\circ=\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}\times\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}}=\sqrt{\frac{(۲-\sqrt{۲})^{۲}}{۴-۲}}$$

$$=\frac{|۲-\sqrt{۲}|}{\sqrt{۲}}=\frac{۲-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}-۲}{۲}=\sqrt{۲}-۱$$

پس: $$\frac{\tan ۱۵^\circ+\tan ۶۰^\circ}{۱+\tan ۲۲{,}۵^\circ}=\frac{۲-\sqrt{۳}+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۲}-۱}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

۱۲۱. گزینه ۱ می‌دانیم که $۱-\cos a=۲\sin^{۲}\frac{a}{۲}$ و $\sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a$ است.

$$(۱-\cos\frac{\pi}{۷})\tan\frac{۳\pi}{۷}-\sin\frac{\pi}{۷}=(۲\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۴})\tan(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۴})-\sin\frac{\pi}{۷}=۲\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۴}\cot\frac{\pi}{۱۴}-\sin\frac{\pi}{۷}=۲\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۴}\times\frac{\cos\frac{\pi}{۱۴}}{\sin\frac{\pi}{۱۴}}-\sin\frac{\pi}{۷}$$

$$=۲\sin\frac{\pi}{۱۴}\cos\frac{\pi}{۱۴}-\sin\frac{\pi}{۷}=۲(\frac{۱}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۱۴})-\sin\frac{\pi}{۷}=\sin\frac{\pi}{۷}-\sin\frac{\pi}{۷}=۰$$

۱۲۲. گزینه ۱

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=۳۲\cos^{۲}\frac{\pi}{۱۲}\cdot\cos^{۲}\frac{\pi}{۶}\cdot\cos^{۲}\frac{\pi}{۳}\cdot\cos^{۲}\frac{۲\pi}{۳}\cdot\cos^{۲}\frac{۴\pi}{۳}$$

توجه کنید که $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان معادل ۱۵° است و $\cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$ و $\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$ و $\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$ و $\cos\frac{۴\pi}{۳}=\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})=-cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$ است، پس داریم:

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=۳۲(\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴})(\frac{۳}{۴})(\frac{۱}{۴})(\frac{۱}{۴})(\frac{۱}{۴})=\frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۳۲}=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۳۲}=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

۱۲۳. گزینه ۳ می‌دانیم که $\sin^{۴}a+\cos^{۴}a=۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲a$ و $\tan a+\cot a=\frac{۲}{\sin ۲a}$ و $a^{۲}+b^{۲}=(a+b)^{۲}-۲ab$ است.

$$\sin^{۴}x+\cos^{۴}x=\frac{۳}{۴}\to ۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲x=\frac{۳}{۴}\to\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲x=\frac{۱}{۴}\to\sin^{۲}۲x=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan^{۲}x+\cot^{۲}x=(\tan x+\cot x)^{۲}-۲\tan x\cdot\cot x=(\frac{۲}{\sin ۲x})^{۲}-۲=\frac{۴}{\sin^{۲}۲x}-۲=\frac{۴}{\frac{۱}{۲}}-۲=۶$$

۱۲۴. گزینه ۱ با توجه به تساوی داده شده خواهیم داشت:

$$\cot^{۴}\frac{\pi}{۱۲}-\tan^{۴}\frac{\pi}{۱۲}=(\cot^{۲}\frac{\pi}{۱۲}-\tan^{۲}\frac{\pi}{۱۲})(\cot^{۲}\frac{\pi}{۱۲}+\tan^{۲}\frac{\pi}{۱۲})$$

$$=(\cot\frac{\pi}{۱۲}-\tan\frac{\pi}{۱۲})(\cot\frac{\pi}{۱۲}+\tan\frac{\pi}{۱۲})(\cot^{۲}\frac{\pi}{۱۲}+\tan^{۲}\frac{\pi}{۱۲})$$

$$=(۲\cot\frac{\pi}{۶})(\frac{۲}{\sin\frac{\pi}{۶}})[(\cot\frac{\pi}{۱۲}+\tan\frac{\pi}{۱۲})^{۲}-\underbrace{۲\cot\frac{\pi}{۱۲}\tan\frac{\pi}{۱۲}}_{۱}]$$

$$(۲\times\sqrt{۳})(\frac{۲}{\frac{۱}{۲}})[(\frac{۲}{\sin\frac{\pi}{۶}})^{۲}-۲]=(۲\sqrt{۳})\times(۴)[۴^{۲}-۲]$$

$$= ۸ \times ۱۴ \times \sqrt{۳} = a\sqrt{۳} \to a = ۸ \times ۱۴ \to \sqrt{\frac{a}{۱۴}+۱} = \sqrt{۸+۱} = ۳$$

۱۲۵. گزینه ۳

$$\cos ۴\theta = -\frac{۱}{۹} \Rightarrow ۲\cos^۲ ۲\theta - ۱ = -\frac{۱}{۹} \Rightarrow \cos^۲ ۲\theta = \frac{۴}{۹} \xrightarrow{\cos ۲\theta > ۰} \cos ۲\theta = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲\cos^۲\theta - ۱ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \cos^۲\theta = \frac{۵}{۶}$$

$$۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta} \Rightarrow \tan^۲\theta = \frac{۶}{۵} - ۱ = \frac{۱}{۵} \Rightarrow f(-\frac{۱}{۹}) = \frac{۱}{۵}$$

۱۲۶. گزینه ۲ اگر T دورهٔ تناوب تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه با شرط $n \in \mathbb{Z}$ رابطهٔ $f(x+nT) = f(x)$ برقرار است. بنابراین داریم:

$$f(۲۸٫۵) = f(\overbrace{۲}^{T} \times \overbrace{۱۵}^{n} - ۱٫۵) = f(-۱٫۵) = -۱۳\cos^۲\frac{۳\pi}{۴} = -۱۳(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})^۲ = -۱۳(\frac{۱}{۲}) = -۶٫۵$$

$$f(f(۲۸٫۵)) = f(-۶٫۵) = f(\overbrace{-۲}^{n} \times \overbrace{۲}^{T} - ۲٫۵) = f(-۲٫۵) = ۷\sin(\frac{-۵\pi}{۲}) = -۷$$

۱۲۷. گزینه ۲

می‌دانیم که اگر $f(x+T) = f(x)$، آن‌گاه کوچک‌ترین مقدار مثبت T را دورهٔ تناوب می‌گویند.

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \cos(x+T) \times x(-۱)^{[\frac{x+T}{\pi}]} = \cos(x) \times (-۱)^{[\frac{x}{\pi}]}$$

با فرض اینکه $\frac{T}{\pi}$ عددی صحیح باشد، داریم:

$$\cos(x+T) \times (-۱)^{[\frac{x}{\pi}] + \frac{T}{\pi}} = \cos(x) \times (-۱)^{[\frac{x}{\pi}]}$$

$$\Rightarrow \cos(x+T) \times (-۱)^{[\frac{x}{\pi}]} \times (-۱)^{\frac{T}{\pi}} = \cos(x) \times (-۱)^{[\frac{x}{\pi}]}$$

$$\Rightarrow \cos(x+T) \times (-۱)^{\frac{T}{\pi}} = \cos x$$

با توجه به اینکه $\frac{T}{\pi}$ عددی صحیح باید باشد، با انتخاب $T = \pi$ داریم:

$$\cos(x+\pi) \times (-۱)^{\frac{\pi}{\pi}} = -\cos x \times (-۱) = \cos x$$

بنابراین $T = \pi$ دورهٔ تناوب تابع است.

۱۲۸. گزینه ۱ به‌طور کلی انتقال نمودار یک تابع در راستای محور xها و محور yها، تأثیری در دورهٔ تناوب یک تابع ندارد. یعنی اگر دورهٔ تناوب تابع $y = f(x)$ برابر T باشد، دورهٔ تناوب توابع $f(x) \pm k$ و $f(x \pm a)$ نیز برابر T خواهد بود. همچنین دورهٔ تناوب تابع $kf(x)$ نیز برابر T خواهد بود. اما اعمالی مانند به توان زوج رساندن یا قدرمطلق گرفتن یا تبدیل x به $g(x)$ می‌تواند دورهٔ تناوب یک تابع را تغییر دهد.

به‌عنوان مثال اگر تابع $y = \sin x$ را در نظر بگیریم، گزاره‌های «الف» و «ب» و «ج» و «د» به ترتیب به‌صورت $y = ۴\sin(\frac{x}{۲}+۱)$ و $y = |\sin x|$ و $y = ۲\sin^۲ x + ۵$ و $y = ۳\sin(x^۲) + ۴$ خواهند بود که دورهٔ تناوب هیچ‌یک از آن‌ها با دورهٔ تناوب تابع $y = \sin x$ برابر نیست.

در تابع $y = ۴\sin(\frac{x}{۲}+۱)$ دورهٔ تناوب برابر $T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۴\pi$ و در تابع $y = |\sin x|$ دورهٔ تناوب برابر $T = \pi$ و در تابع $y = ۲\sin^۲ x + ۵$ نیز دورهٔ تناوب برابر π است و تابع $y = ۳\sin(x^۲) + ۴$ متناوب نیست، زیرا کمان آن خطی نیست، بنابراین تمام موارد داده شده دارای مثال نقض هستند و در هیچ‌یک از آن‌ها نمی‌توان ادعا کرد که دورهٔ تناوب تابع f تغییری نخواهد کرد.

۱۲۹. گزینه ۴ دورهٔ تناوب تابع برابر $T = ۴$ است، پس بازهٔ $(۱۰۶, ۱۰۷)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۱۰۶, ۱۰۷) = (۲۶ \times ۴ + ۲, ۲۶ \times ۴ + ۳)$$

بنابراین نمودار تابع در بازهٔ $(۱۰۶, ۱۰۷)$ همان نمودار تابع در بازهٔ $(۲, ۳)$ است. حال شیب خط گذرنده از نقاط $(۲, ۱)$ و $(۳, ۰)$ را می‌یابیم.

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۰ - ۱}{۳ - ۲} = -۱$$

معادله خط گذرنده از نقطه $(۱۰۶, ۱)$ با شیب $m = -۱$ بصورت زیر است.

$$y - ۱ = -۱(x - ۱۰۶) \Rightarrow y = -x + ۱۰۷$$

۱۳۰. گزینه ۴ تابع زوج و فرد حذف شده!

نمودار تابع نسبت به خط $x = ۱$ متقارن است؛ پس:

$$f(۲ - x) = f(x)$$

نمودار تابع نسبت به خط $x=3$ متقارن است؛ پس:

$$f(6-x)=f(x)$$

در رابطهٔ دوم به جای x قرار می‌دهیم: $x+4$:

$$f(6-(x+4))=f(x+4)\Rightarrow f(2-x)=f(x+4)$$

از طرفی $f(2-x)=f(x)$، پس $f(x+4)=f(x)$؛ بنابراین $t=4$ دورهٔ تناوب است. حال بررسی می‌کنیم آیا $t=2$ هم دورهٔ تناوب است. در رابطهٔ اول به جای x قرار می‌دهیم $x+2$:

$$f(2-(x+2))=f(x+2)\Rightarrow f(x+2)=f(-x)$$

و دلیلی نداریم که $f(-x)=f(x)$، پس $t=4$ کوچک‌ترین دورهٔ تناوب است.

۱۳۱ . گزینه ۱

در رابطهٔ داده شده x را با x + ۴ جایگزین می‌کنیم.

$$f(x+8)=-\frac{1}{f(x+4)}=-\frac{1}{\frac{-1}{f(x)}}=f(x)\Rightarrow f(x+8)=f(x)$$

f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $T=8$ است.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & 0\le x\le 2\\ 2x-4 & 2\le x<4\end{cases}$$

$$f(21)=f(21-16)=f(5)=f(1+4)=-\frac{1}{f(1)}=-1$$

۱۳۲ . گزینه ۳

در تابع متناوب f با دورهٔ تناوب T داریم:

$$n\ in\mathbb{Z}: f(x\pm nT)=f(x)$$

ضابطهٔ تابع در بازهٔ $[0,4]$ بصورت زیر است.

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 2\\ -\frac{1}{2}x+3 & 2\le x<4\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(21)=f(21-5T)=f(21-20)=f(1)=1\\ f(23)=f(23-5T)=f(23-20)=f(3)=1/5\end{cases}\Rightarrow \text{جمع}=2/5$$

۱۳۳ . گزینه ۴ اگر x به بازه‌هایی به شکل $[2k,2k+1)$ متعلق باشد؛ مانند $[0,1)$، $[2,3)$، $[-2,-1)$ و ... آنگاه، $(-1)^{[x]}=1$ ؛ درنتیجه:

$$(-1)^{[x]}f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\ge 0$$

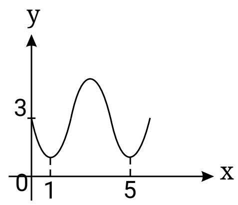
و اگر x به بازه‌هایی به شکل $[2k-1,2k)$ متعلق باشد؛ مانند $[1,2)$، $[-1,0)$ و ... آنگاه $(-1)^{[x]}=-1$ ؛ درنتیجه:

$$(-1)^{[x]}f(x)=|f(x)|\Rightarrow -f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\le 0$$

پس باید نموداری را انتخاب کنیم که در بازه‌هایی مانند $[0,1)$ و $[2,3)$ بالای محور x هاست و در بازه‌هایی مانند $[1,2)$ و $[3,4)$ پایین محور x هاست. نمودار گزینهٔ «۴» چنین است.

۱۳۴ . گزینه ۲

با توجه به شکل روبه‌رو به راحتی پی می‌بریم که دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=a+\sin(b\pi x)$ برابر $T=4$ می‌باشد. از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر ۳ است یعنی: $f(0)=3\to a=3$



توجه کنید که دوره‌ی تناوب تابع $y=\sin kx$ برابر $T=\frac{2\pi}{|k|}$ است.

$$y=a+\sin(\underbrace{b\pi}_{k}x)\Rightarrow \text{دوره‌ی تناوب}=T=\frac{2\pi}{|k|}=\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{|b|}\xrightarrow{T=4}\frac{2}{|b|}=4\Rightarrow |b|=\frac{1}{2}\to b=\pm\frac{1}{2}$$

چون به ازای $x>0$ ، تابع ابتدا نزولی می‌باشد، پس مقدار b منفی می‌باشد، یعنی $b=-\frac{1}{2}$ است. داریم:

$$y=۳+\sin(-\frac{۱}{۲}\pi x)$$

$$\Rightarrow y(\frac{۲۵}{۳})=۳+\sin(-\frac{۲۵}{۶}\pi)=۳-\sin(۴\pi+\frac{\pi}{۶})=۳-\sin\frac{\pi}{۶}=۳-\frac{۱}{۲}=۲/۵$$

۱۳۵ . گزینه ۱ اگر $[x]$ زوج باشد آنگاه:

$$(-۱)^{[x]}f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\geq ۰$$

اگر $[x]$ فرد باشد آنگاه:

$$(-۱)^{[x]}f(x)=|f(x)|\Rightarrow -f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\leq ۰$$

تابع $f(x)=\sin\pi x$ ویژگی های بالا را دارد.

۱۳۶ . گزینه ۴ توان فرد روی دورهٔ تناوب تأثیر ندارد ولی توان زوج دورهٔ تناوب را نصف می‌کند و می‌دانیم دورهٔ تناوب $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ از رابطهٔ $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin^{۲}\frac{۳}{۴}x \;\Rightarrow\; T_۱=\frac{\pi}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴\pi}{۳} \\ g(x)=\cos^{۳}\frac{۲}{۳}x \;\Rightarrow\; T_۲=\frac{۲\pi}{\frac{۲}{۳}}=۳\pi=\frac{۹\pi}{۳} \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ک م م}} T=\frac{۳۶\pi}{۳}=۱۲\pi$$

۱۳۷ . گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که: $f(x)=a\sin(bx-\frac{\pi}{۲})=-a\cos(bx)$

از روی نمودار معلوم است که نصف دورهٔ تناوب تابع برابر ۳ است. پس:

$$\frac{T}{۲}=۳\Rightarrow T=۶\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=۶\Rightarrow|b|=\frac{\pi}{۳}$$

همچنین کمترین مقدار تابع برابر ۳− است. پس:

$$|-a|=۳\Rightarrow a=\pm۳$$

چون نمودار تابع f شبیه نمودار تابع $y=-\cos x$ است، پس a باید مثبت باشد، بنابراین:

$$f(x)=-۳\cos(\pm\frac{\pi}{۳}x)=-۳\cos(\frac{\pi}{۳}x)$$

$$f(\frac{۵}{۲})=-۳\cos(\frac{\pi}{۳}\times\frac{۵}{۲})=-۳\cos(\frac{۵\pi}{۶})=-۳\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=۳\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۳۸ . گزینه ۱

$$-۱\leq\sin bx\leq ۱\;\Rightarrow\;-a\leq a\sin bx\leq a\;\Rightarrow -a+c\leq a\sin bx+c\leq a+c$$

یعنی:

$$R_f=[c-a\,,\,c+a]\;\Rightarrow\begin{cases}c+a=۶\\c-a=-۱\end{cases}\;\Rightarrow\;c=\frac{۵}{۲}\;,\;a=\frac{۷}{۲}$$

دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\sin bx+c$ به‌صورت $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است، پس داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۴\Rightarrow\frac{۲\pi}{b}=۴\to b=\frac{\pi}{۲}$$

پس: $f(x)=\frac{۷}{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}x)+\frac{۵}{۲}\;\Rightarrow\;f(\frac{۱}{۳})=\frac{۷}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۲}=\frac{۱۷}{۴}$

۱۳۹ . گزینه ۳ دورهٔ تناوب تابع برابر π است.

$$T=\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow|b|=۲\Rightarrow b=\pm۲$$

ماکزیمم تابع برابر ۱/۵ است، پس:

$$۱+|a|=۱/۵\Rightarrow|a|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}$$

تابع در اطراف $x=۰$ نزولی است، پس a، b مختلف العلامت هستند و داریم:

$$a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=-۲\Rightarrow a+b=-\frac{۳}{۲}$$
$$a=-\frac{۱}{۲}\ ,\ b=۲\Rightarrow a+b=\frac{۳}{۲}$$

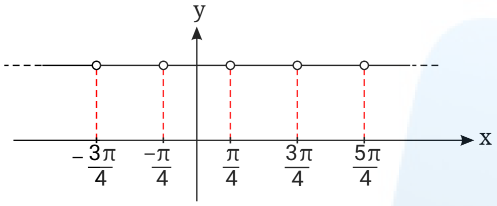
۱۴۰ . گزینه ۲ ابتدا به کمک رابطهٔ $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$، تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=۲\cos^۲x-(۲\cos^۲x-۱)=۱$$

می‌دانیم تابع $y=\tan x$ در $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in\mathbb{Z})$ تعریف نمی‌شود، بنابراین دامنهٔ تابع $g(x)=\tan ۲x$ به‌صورت $x\neq\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ می‌باشد، درنتیجه داریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}\ =\{x\neq\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}|\tan ۲x\in\mathbb{R}\}\ \Rightarrow D_{fog}=\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\}\ (k\in\mathbb{Z})$$
$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\tan ۲x)=۱$$

حال نمودار تابع $y=(fog)(x)$ را با شرط $x\neq\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ $(k\in\mathbb{Z})$ رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل، دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{\pi}{۲}$ است.

۱۴۱ . گزینه ۴ تابع $\tan x$ برای $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in\mathbb{Z})$ تعریف نمی‌شود.

$$\frac{\pi}{۱+x^۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{\div\pi}\frac{۱}{۱+x^۲}=\frac{۲k+۱}{۲}\Rightarrow x^۲+۱=\frac{۲}{۲k+۱}\Rightarrow x^۲=\frac{۲}{۲k+۱}-۱=\frac{-۲k+۱}{۲k+۱}$$

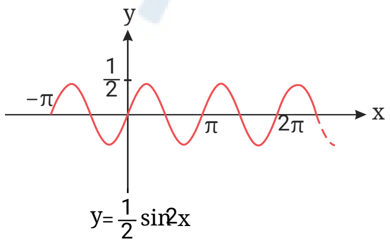
چون $x^۲$ نامنفی است، پس:

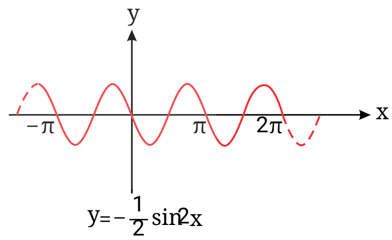
$$\frac{-۲k+۱}{۲k+۱}\geq ۰\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<k\leq\frac{۱}{۲}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

پس دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$ است، بنابراین اعداد ۱ و -۱ در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

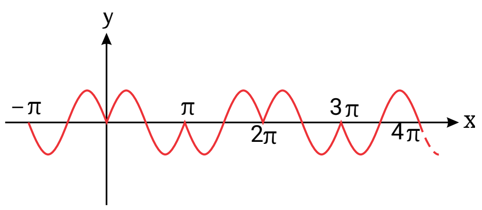
۱۴۲ . گزینه ۳ تابع را به‌صورت دوضابطه‌ای نوشته و نمودار هر ضابطه را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x\sin x & \sin x\geq ۰\\ -\cos x\sin x & \sin x<۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}\sin ۲x & \sin x\geq ۰\\ \frac{-۱}{۲}\sin ۲x & \sin x<۰\end{cases}$$





می دانیم در بازه‌های $(۰,\pi)$ و $(۲\pi,۳\pi)$ و $\cdots$ مقدار سینوس مثبت و در بازه‌های $(\pi,۲\pi)$ و $(۳\pi,۴\pi)$ و $\cdots$ مقدار سینوس منفی است. بنابراین نمودار $f(x)$ به‌صورت زیر می‌باشد:



درنتیجه دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ برابر ۲π می‌باشد.

۱۴۳. گزینه ۲ باتوجه به شکل تابع در بازهٔ $[0, \frac{5}{3}]$، ۱٫۵ مرتبه تکرار شده است. پس اگر دورهٔ تناوب تابع را T درنظر بگیریم، داریم:

$$1/5T=\frac{5}{3}\to\frac{3}{2}T=\frac{5}{3}\to T=\frac{10}{9}$$

حال اگر ضابطهٔ تابع را تا حد امکان ساده کنیم به ضابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$f(x)=+2-a\sin(\frac{b\pi x}{2}+\frac{3\pi}{2})=+2+a\cos(\frac{b\pi x}{2})\to T=\frac{2\pi}{|\frac{b\pi}{2}|}=\frac{4}{|b|}\to\frac{4}{|b|}=\frac{10}{9}\to|b|=\frac{18}{5}\to b=\pm\frac{18}{5}$$

همچنین از روی نمودار، مقدار مینیمم تابع برابر صفر است، داریم:

$$\to\min=-|a|+2=0\to|a|=2$$

از آنجا که نمودار تابع در اطراف صفر روند کاهشی دارد، پس $a>0$ بوده و داریم $a=2$.

پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases}b=\frac{18}{5}\\a=2\end{cases}\to 5b-a=18-2=16\to\sqrt{16}=4$$

$$\begin{cases}b=-\frac{18}{5}\\a=2\end{cases}\to 5b-a=-18-2=-20\to\sqrt{-20}\to \text{غیرقابل قبول}$$

۱۴۴. گزینه ۲

می‌دانیم: $y=\sin ax\xrightarrow{\text{دورهٔ تناوب}}T=\frac{2\pi}{|a|}$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به شکل}}5\frac{T}{4}=10\Rightarrow 5T=40\Rightarrow T=8$$

$$\Rightarrow\frac{2\pi}{|a|}=8\Rightarrow|a|=\frac{\pi}{4}\Rightarrow a=\pm\frac{\pi}{4}$$

چون بلافاصله بعد از محور عرض‌ها، نمودار صعود پیدا کرده است، بنابراین باید ضریب پشت سینوس مثبت باشد، بنابراین ضریب کمان سینوس باید مثبت باشد پس $a=\frac{\pi}{4}$ است.

$$f(x)=b+\sin\frac{\pi}{4}x\xrightarrow{\text{صدق}\ \left|{}^{0}_{2}\right.}2=b+0\Rightarrow b=2\Rightarrow f(x)=2+\sin\frac{\pi}{4}x$$

$$f(15)=2+\sin\frac{15\pi}{4}=2+\sin(4\pi-\frac{\pi}{4})=2-\sin\frac{\pi}{4}=2-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

۱۴۵. گزینه ۴ دورهٔ تناوب اصلی تابع $y=\frac{\pi}{3}-2\sin^5(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi x}{k})$ برابر است با:

$$T=\frac{2\pi}{\left|\frac{-3\pi}{k}\right|}=\frac{1}{3}\Rightarrow\left|\frac{3\pi}{k}\right|=6\pi$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{3\pi}{k}=6\pi\Rightarrow k=\frac{1}{2}\\\frac{3\pi}{k}=-6\pi\Rightarrow k=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow|k|=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}\tan(\frac{3k}{2}x)\to T_1=\frac{\pi}{\left|\frac{3k}{2}\right|}=\frac{\pi}{\frac{3}{2}|k|}=\frac{\pi}{\frac{3}{4}}=\frac{4\pi}{3}\\4\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{3k}{4}x)\to T_2=\frac{2\pi}{\left|\frac{-3k}{4}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{3}{4}|-k|}=\frac{2\pi}{\frac{3}{8}}=\frac{16\pi}{3}\end{cases}$$

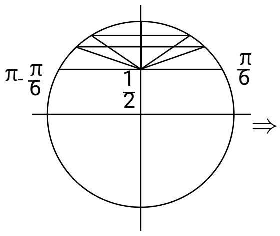
دورهٔ تناوب تابع خواسته شده برابر ک.م.م T_1 و T_2 است یعنی داریم:

$$T=\left[\frac{4\pi}{3},\frac{16\pi}{3}\right]=\frac{16\pi}{3}$$

۱۴۶. گزینه ۴ عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد، پس:

$$y=\sqrt{2\sin x-1}\Rightarrow 2\sin x-1\geq 0\Rightarrow\sin x\geq\frac{1}{2}$$

از روی دایرهٔ مثلثاتی باید کمان‌های x را چنان بیابیم که $\sin x \geq \frac{۱}{۲}$ باشد.



$$\Rightarrow \frac{\pi}{۶} \leq x \leq \frac{۵\pi}{۶}$$

۱۴۷ . گزینه ۱ بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است. پس:

$$|a| - ۲ = ۱ \Rightarrow |a| = ۳ \xrightarrow{a>۰} a = ۳ \quad \Rightarrow f(x) = ۳\sin(\frac{b\pi x}{۲}) - ۲$$

پس کمترین مقدار تابع برابر $-۵ = -۲ - ۳$ است. درنتیجه $f(۱) = -۵$.

$$۳\sin(\frac{b\pi}{۲}) - ۲ = -۵ \Rightarrow \sin(\frac{b\pi}{۲}) = -۱$$

$$\frac{b\pi}{۲} = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow b = ۴k - ۱$$

با توجه به اینکه اولین بار در سمت راست محور عرض‌ها، تابع در $x = ۱$ مینیمم شده است، پس b باید کمترین مقدار ممکن مثبت را داشته باشد. یعنی $b = ۳$.

درنتیجه $a + b = ۶$.

۱۴۸ . گزینه ۳ می‌دانیم که در تابع $y = a \cdot \sin bx$ اگر $a \cdot b > ۰$ باشد، تابع در نقطهٔ شروع $x = ۰$ صعودی خواهد بود و اگر $a \cdot b < ۰$ باشد، نزولی خواهد بود.

توجه:

$$y = k \cdot \sin ax \xrightarrow{\text{دورهٔ تناوب}} T = \frac{۲\pi}{|a|}$$

با توجه به شکل، منحنی دو بار تکرار شده است. پس عدد $\frac{۴}{۳}$ دو برابر دورهٔ تناوب تابع است.

$$۲T = \frac{۴}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow |b| = ۳$$

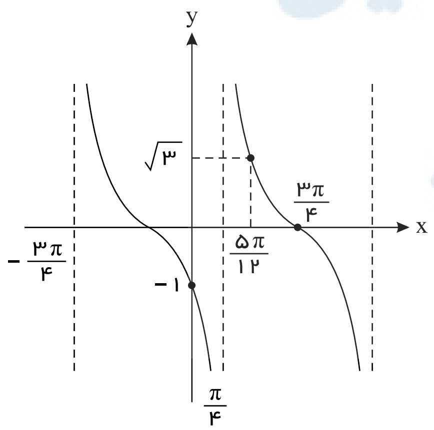
کم‌ترین مقدار تابع $y = ۱ + a\sin(b\pi x)$ زمانی ایجاد می‌شود که مقدار سینوس عدد ۱ یا -۱ باشد و با توجه به شکل مقدار $\min$ عدد -۱ است. پس:

$$\min = ۱ - |a| = -۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a + b = \begin{cases} ۲ + ۳ = ۵ \\ -۲ - ۳ = -۵ \end{cases}$$

۱۴۹ . گزینه ۴

اگر نمودار تابع $y = \tan x$ را $\frac{\pi}{۴}$ واحد به سمت چپ منتقل کنیم و نسبت به محور xها قرینه کنیم، تابع $y = -\tan(x + \frac{\pi}{۴})$ به‌دست می‌آید که به صورت زیر است:

برد تابع با توجه به شکل برابر است با:



$$[\sqrt{۳}, +\infty) \cup (-\infty, -۱] = \mathbb{R} - (-۱, \sqrt{۳})$$

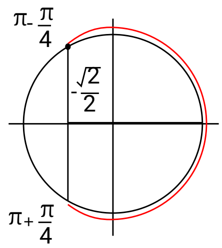
توجه کنید که:

$$x = \frac{۵\pi}{۱۲} \rightarrow y = -\tan(\frac{۵\pi}{۱۲} + \frac{\pi}{۴}) = -\tan(\frac{۸\pi}{۱۲}) = -\tan(\frac{۲\pi}{۳}) = -\tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \tan\frac{\pi}{۳} = \sqrt{۳}$$

۱۵۰ . گزینه ۲ عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد، پس:

$$y = \sqrt{\sqrt{۲} + ۲\cos x} \Rightarrow ۲\cos x + \sqrt{۲} \geq ۰ \Rightarrow \cos x \geq -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

از روی دایرهٔ مثلثاتی باید کمان‌های x را چنان بیابیم که $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، پس:

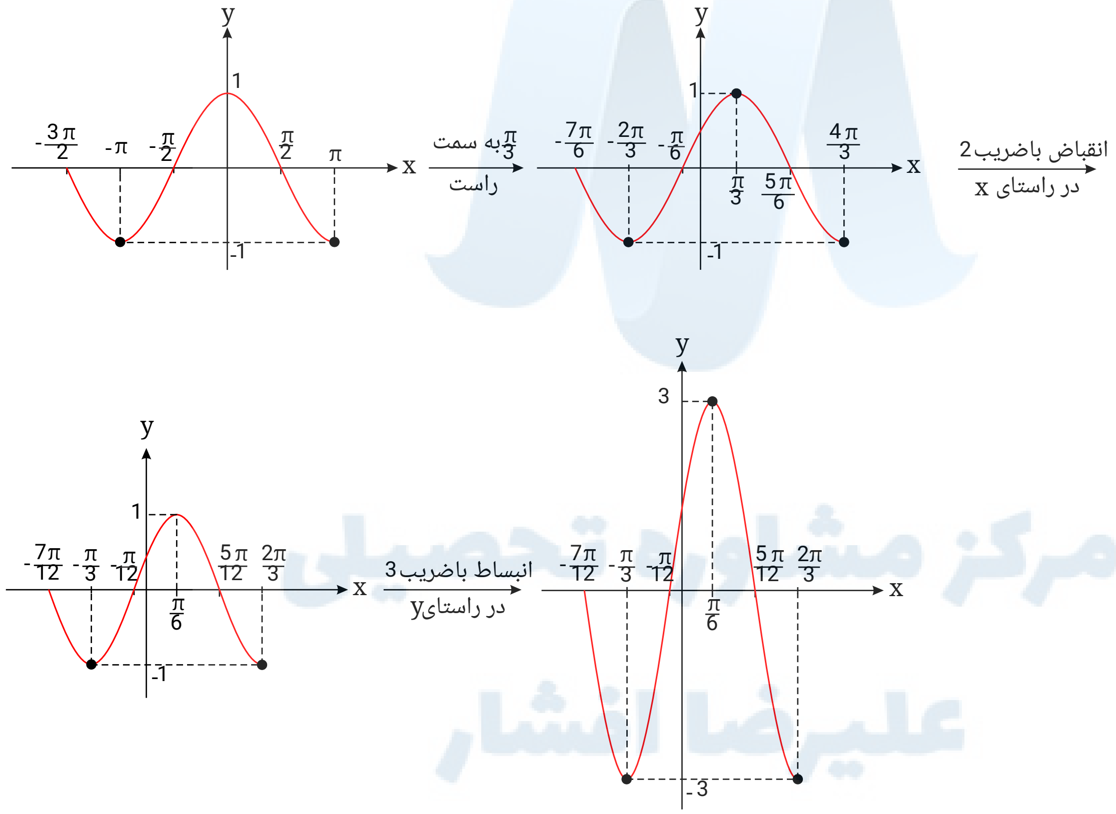


$$\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{5\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$$

۱۵۱ . گزینه ۴

$$f(x) = 3 - 6\cos^2(\frac{11\pi}{3} - x) = 3(1 - 2\cos^2(\frac{11\pi}{3} - x)) = 3(-\cos 2(\frac{11\pi}{3} - x)) = -3\cos(\frac{22\pi}{3} - 2x) = -3\cos(7\pi + \frac{\pi}{3} - 2x)$$
$$= +3\cos(\frac{\pi}{3} - 2x) = 3\cos(2x - \frac{\pi}{3})$$

به کمک انتقال نمودار $y = \cos x$ داریم:



خط $y = 2$ نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند، پس گزینهٔ ۴ نادرست است.

۱۵۲ . گزینه ۱

می‌دانیم در $\tan u$ باید $u \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ باشد.

$$\frac{3\pi - \pi x}{6} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{6} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi x}{6} \neq k\pi \Rightarrow -\pi x \neq 6k\pi \Rightarrow x \neq -6k \ (k \in \mathbb{Z})$$

یعنی اعداد صحیح مضرب ۶ نباید در دامنهٔ تابع قرار داشته باشند.

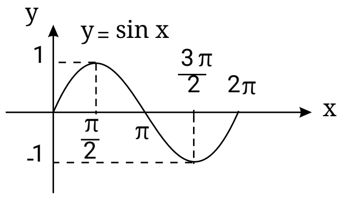
از طرفی به دلیل عبارت زیر رادیکال باید داشته باشیم:

$$120 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 120 \Rightarrow -\sqrt{120} \leq x \leq \sqrt{120} \Rightarrow -10/\cdots \leq x \leq 10/\cdots \xrightarrow[\text{موجود در بازه}]{\text{اعداد صحیح}} x = -10, -9, -8, \cdots, 8, 9, 10$$

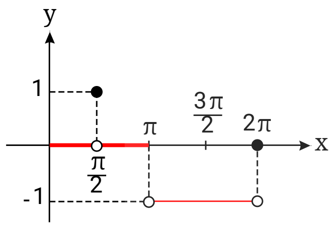
چون باید مضارب صحیح ۶ را از این مجموعه اعداد حذف کنیم، اعداد ۰ و ۶ و ۶− از این مجموعه حذف می‌شوند و تعداد اعداد باقی‌مانده برابر $21 - 3 = 18$ خواهد بود. یعنی دامنهٔ تابع شامل ۱۸ عدد صحیح است.

۱۵۳ . گزینه ۴

باید قسمت‌هایی از نمودار $y=\sin x$ را که بین دو خط افقی $y=k$ و $y=k+۱$ $(k\in\mathbb{Z})$ قرار دارد، روی خط $y=k$ تصویر کنیم.



نمودار تابع $y=[\sin x]$ بصورت زیر است.



۱۵۴ . گزینه ۳ الف) متناوب نیست ب) متناوب نیست ج) متناوب نیست

د) متناوب است و دوره تناوب آن ۲π است

هـ) متناوب است و دوره تناوب آن ۴ است و) متناوب است و دوره تناوب آن می تواند هر عدد گویا باشد

ز) متناوب است و دوره تناوب آن ۲π است.

نکته: در توابع مثلثاتی اگر کمان از درجه یک نباشد متناوب نیست اگر توابع مثلثاتی با دیگر توابع از درجه بزرگ تر یا کم تر، جمع، ضرب و ... شوند آن تابع دیگر متناوب نیست.

۱۵۵ . گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=a\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۲}-bx)=a\sin(bx)$.

از روی نمودار معلوم است که $\frac{۳}{۴}$ دورهٔ تناوب تابع برابر ۶ است. پس:

$$\frac{۳}{۴}T=۶\Rightarrow T=۸\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۸\Rightarrow |b|=\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{b>۰} b=\frac{\pi}{۴}$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۲ است. پس:

$$|a|=۲\Rightarrow a=\pm۲$$

چون نمودار تابع f در اطراف $x=۰$ شبیه نمودار $y=-\sin x$ است، پس a باید منفی باشد و درنتیجه:

$$a=-۲\Rightarrow ab=-\frac{\pi}{۲}$$

۱۵۶ . گزینه ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=a\cos(\frac{۳\pi}{۲}-b\pi x)-c=a\cos(\pi+\frac{\pi}{۲}-b\pi x)-c=-a\sin(b\pi x)-c$$

اکنون توجه کنید که طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی تابع به اندازهٔ $\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۴}$ اختلاف دارند که با نصف دورهٔ تناوب تابع برابر است. پس:

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow |b|=۶\Rightarrow b=\pm۶$$

از طرف دیگر ماکزیمم و مینیمم تابع به‌ترتیب برابر ۱ و ۳− هستند. پس:

$$\begin{cases}|-a|-c=۱\\-|-a|-c=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=۱\\|a|=۲\Rightarrow a=\pm۲\end{cases}$$

با توجه به این که نمودار در اطراف نقطه $x=۰$ شبیه نمودار $y=-\sin x$ است. پس $-a$ و b مختلف‌العلامت هستند یعنی a و b هم‌علامت هستند. پس $a=۲$ و $b=۶$ یا $a=-۲$ و $b=-۶$

در هر صورت $abc=۱۲$.

۱۵۷ . گزینه ۳ حداکثر مقدار تابع برابر ۳ است. پس:

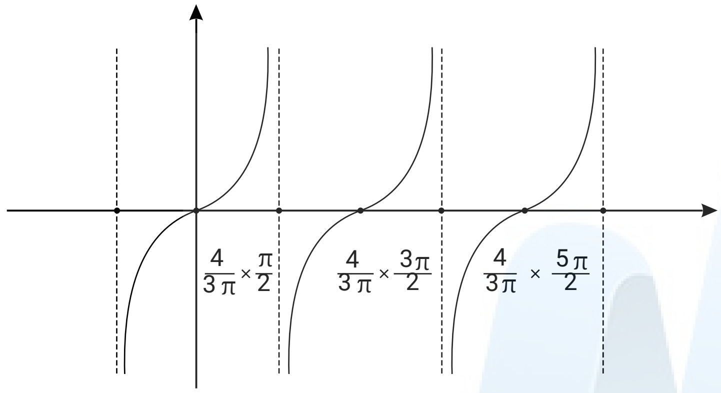
$$|a|+۱=۳\Rightarrow |a|=۲\Rightarrow a=۲$$

از طرف دیگر $f(\frac{\pi}{۶}) = ۰$

$$۲\sin(\frac{b\pi}{۶}) + ۱ = ۰ \Rightarrow \sin(\frac{b\pi}{۶}) = -\frac{۱}{۲}$$

ضمناً برای اولین بار در سمت راست مبدأ، تابع در $\frac{\pi}{۶}$ صفر شده است یعنی $\sin(\frac{b\pi}{۶})$ برای اولین بار $-\frac{۱}{۲}$ است. پس $\frac{b\pi}{۶}$ باید برابر $\frac{۷\pi}{۶}$ باشد و در نتیجه $b = ۷$.

۱۵۸. گزینه ۳ اگر طول نقاط نمودار تابع $y = \tan x$ را بر $\frac{۳\pi}{۴}$ تقسیم کنیم، نمودار تابع $y = \tan(\frac{۳\pi x}{۴})$ به‌دست می‌آید. تابع $y = \tan x$ و تابع f وضعیت یکنوایی یکسان دارند.

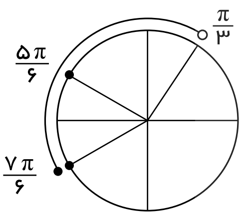


مطابق شکل، تابع روی بازهٔ $(۲, \frac{۱۰}{۳})$ اکیداً صعودی است.

پس حداکثر مقدار a برابر $\frac{۱۰}{۳}$ است.

۱۵۹. گزینه ۴

بر روی دایره‌ی مثلثاتی کمان‌های $\frac{۷\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ را پیدا کرده و مینیمم مقدار کسینوس را یکبار در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۶}]$ و یکبار در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۳}, \frac{۷\pi}{۶}]$ بدست می‌آوریم.



$$\left.\begin{aligned} x=\tfrac{۵\pi}{۶} &\Rightarrow \tfrac{\pi}{۳}<t\le\tfrac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \min\cos\ t=\cos\tfrac{۵\pi}{۶}=-\tfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\ x=\tfrac{۷\pi}{۶} &\Rightarrow \tfrac{\pi}{۳}<t\le \tfrac{۷\pi}{۶}\Rightarrow \min\cos\ t=\cos\pi=-۱\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\frac{۵\pi}{۶})+f(\frac{۷\pi}{۶})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱$$

۱۶۰. گزینه ۳ می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$ است. بنابراین داریم:

$$y=۳+\frac{a}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲}+\pi bx)=۳+\frac{a}{۲}(-\sin(\pi bx))=۳-\frac{a}{۲}\sin(b\pi x)$$

با توجه به شکل مقدار مینیمم تابع برابر صفر است. بنابراین داریم:

$$Min=-|\frac{a}{۲}|+۳=۰ \to \frac{|a|}{۲}=۳\to|a|=۶$$

همچنین با توجه به شکل اگر T دورهٔ تناوب تابع باشد، داریم:

$$۱٫۵T=\frac{۴}{۳}\to\frac{۳}{۲}T=\frac{۴}{۳}\to T=\frac{۸}{۹}=\frac{۲\pi}{|b\pi|}\to\frac{۸}{۹}=\frac{۲}{|b|}\to|b|=\frac{۹}{۴}$$

چون شکل تابع در اطراف صفر به‌صورت صعودی است پس $ab>۰$ می‌باشد. بنابراین:

$$ab=۶\times\frac{۹}{۴}=\frac{۲۷}{۲}=۱۳٫۵$$

۱۶۱. گزینه ۱ در توابع $a+b\sin(cx+d)$ و $a+b\cos(cx+d)$، ماکزیمم و مینیمم به‌ترتیب برابر است با: $a+|b|$ و $a-|b|$؛ پس در اینجا:

$$۳-a-|۲a|=۲+|-۳a|\Rightarrow ۱-a=|۲a|+|۳a|$$

$$\Rightarrow ۱-a=|۵a| \overset{a<۱}{\Rightarrow} ۱-۲a+a^۲=۲۵a^۲ \Rightarrow ۲۴a^۲+۲a-۱=۰ \Rightarrow a_۱a_۲=-\frac{۱}{۲۴}$$

یادآوری: حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ برابر $\frac{c}{a}$ است.

۱۶۲. گزینه ۲ به کمک اتحادهای مثلثاتی ضابطه تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

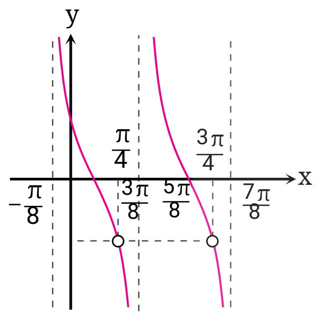
$$y=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan ax}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}-\tan ax}=\tan(\frac{\pi}{۴}-ax)\Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow |a|=۲$$

حال دقت کنید که به ازای $a=۲$ داریم، $y=\frac{۱-\tan ۲x}{۱+\tan ۲x}$ که ضابطه آن برابر $y=\tan(\frac{\pi}{۴}-۲x)$ است؛ اما دقت کنید که دامنه تابع تغییر کرده؛ پس از روی ضابطه اول دامنه را می‌یابیم:

$$(۱)\quad \tan ۲x\neq -۱ \Rightarrow ۲x\neq -\frac{\pi}{۴}\,,\,\frac{۳\pi}{۴}\,,\,\cdots \Rightarrow x\neq -\frac{\pi}{۸}\,,\,\frac{۳\pi}{۸}\,,\,\cdots$$

$$(۲)\quad \cos ۲x\neq ۰ \Rightarrow ۲x\neq \frac{\pi}{۲}\,,\,\frac{۳\pi}{۲}\,,\,\cdots \Rightarrow x\neq \frac{\pi}{۴}\,,\,\frac{۳\pi}{۴}\,,\,\cdots$$

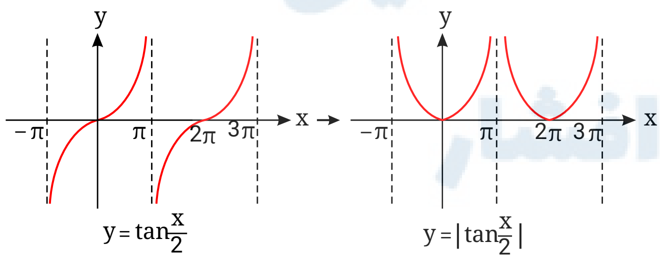
چون فاصله نقاط تعریف‌نشده تابع برابر $\frac{\pi}{۲}$ است؛ دوره تناوب این تابع همان $\frac{\pi}{۲}$ است.



۱۶۳. گزینه ۱ ابتدا به کمک روابط $۱-\cos x=۲\sin^۲\frac{x}{۲}$ و $۱+\cos x=۲\cos^۲\frac{x}{۲}$ تابع را به‌صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}}=\sqrt{\frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}=\sqrt{\tan^۲\frac{x}{۲}}=|\tan\frac{x}{۲}|$$

حال نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب $f(x)=|\tan\frac{x}{۲}|$ برابر ۲π است درنتیجه در بازهٔ $(۰,\frac{T}{۲})=(۰,\pi)$ تابع صعودی و در بازهٔ $(\frac{T}{۲},T)=(\pi,۲\pi)$ تابع نزولی می‌باشد.

۱۶۴. گزینه ۲ با توجه به اتحادهای $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ و $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$f(\sin x)+f(\cos x)=\sin^۴x+\sin^۶x+\cos^۴x+\cos^۶x=(\sin^۴x+\cos^۴x)+(\sin^۶x+\cos^۶x)$$

$$=(\sin^۲x+\cos^۲x)^۲-۲\sin^۲x\cos^۲x+(\sin^۲x+\cos^۲x)^۳-۳\sin^۲x\cos^۲x(\sin^۲x+\cos^۲x)$$

$$=۱-۲\sin^۲x\cos^۲x+۱-۳\sin^۲x\cos^۲x=۲-۵\sin^۲x\cos^۲x=۲-۵(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲$$

$$=۲-\frac{۵}{۴}\sin^۲ ۲x=۲-\frac{۵}{۴}(\frac{۱-\cos ۴x}{۲})=۲-\frac{۵}{۸}+\frac{۵}{۸}\cos ۴x=\frac{۱۱}{۸}+\frac{۵}{۸}\cos ۴x$$

$$\Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

۱۶۵ . گزینه ۴ با توجه به رابطهٔ $\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\cos\alpha$ داریم:

$$f(x) = ۲a + \sin(\frac{۳\pi}{۲} - b\pi x) = ۲a - \cos b\pi x$$

از روی نمودار مینیمم آن برابر صفر است.

$$Min = ۲a - ۱ = ۰ \to a = \frac{۱}{۲}$$

همچنین $x = ۵$ ریشهٔ تابع موردنظر است. بنابراین:

$$f(۵) = ۰ \to ۲ \times \frac{۱}{۲} - \cos ۵b\pi = ۰ \to \cos ۵\pi b = ۱$$

$$\to ۵\pi b = ۰ \text{ یا } ۲\pi \text{ یا } ۴\pi \text{ یا } \cdots$$

با توجه به شکل $x = ۵$ دومین ریشهٔ مثبت تابع است پس:

$$۵\pi b = ۴\pi \to b = \frac{۴}{۵} \to ab = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

۱۶۶ . گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ زوج باشد، آن‌گاه:

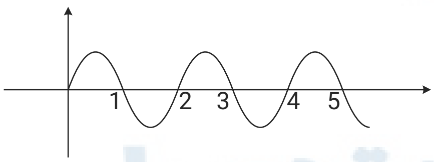
$$(-۱)^{[x]} = ۱ \Rightarrow f(x) = |f(-x)|$$

و اگر $[x]$ فرد باشد آن‌گاه:

$$(-۱)^{[x]} = -۱ \Rightarrow f(x) = -|f(-x)| \Rightarrow |f(-x)| = -f(x)$$

اکنون فرض کنید $f(x) = \sin(\pi x)$. در نتیجه $f(-x) = -\sin(\pi x)$ و در نتیجه $|f(-x)| = |-\sin(\pi x)| = |\sin(\pi x)|$.

از طرف دیگر نمودار تابع $f(x) = \sin(\pi x)$ به‌صورت مقابل است:



واضح که اگر $[x]$ زوج باشد آن‌گاه $\sin(\pi x) > ۰$ و درنتیجه:

$$|f(-x)| = |\sin(\pi x)| = \sin(\pi x) = f(x)$$

و اگر $[x]$ فرد باشد آن‌گاه $\sin(\pi x) < ۰$ و درنتیجه:

$$|f(-x)| = |\sin(\pi x)| = -\sin(\pi x) = -f(x)$$

۱۶۷ . گزینه ۱ می‌دانیم در توابعی به شکل کلی $f(x) = a\sin^{۲n+۱}(bx+c)+d$ یا $f(x) = a\cos^{۲n+۱}(bx+c)+d$ مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a|+d$ و $-|a|+d$ و دورهٔ تناوب تابع به‌صورت $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ است. همچنین در توابعی به شکل کلی $f(x) = a\sin^{۲n}(bx+c)+d$ یا $f(x) = a\cos^{۲n}(bx+c)+d$ با فرض $a > ۰$ مقادیر ماکزیمم و مینیمم به‌ترتیب $a+d$ و d و دورهٔ تناوب تابع به‌صورت $T = \frac{\pi}{|b|}$ است و اگر $a < ۰$ باشد، مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب d و $a+d$ و دورهٔ تناوب به‌صورت $T = \frac{\pi}{|b|}$ است. بنابراین در تابع ۴ $f(x) = -۶\cos(\frac{\pi x}{۳}) + ۴$ داریم:

$$T_۱ = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳}} = ۶, M_۱ = -۲, m_۱ = ۱۰$$

و در تابع ۳ $g(x) = ۲\sin^۲(\frac{\pi}{۷} - ۲x) - ۳$ داریم:

$$T_۲ = \frac{\pi}{۲}, M_۲ = -۳, m_۲ = -۱$$

بنابراین داریم:

$$\frac{m_۱ M_۱ T_۱}{m_۲ M_۲ T_۲} = \frac{۱۰ \times (-۲) \times ۶}{-۳ \times (-۱) \times \frac{\pi}{۲}} = -\frac{۸۰}{\pi}$$

۱۶۸. گزینه ۱

$$f(x)=۱+۴\cos^۲(b\pi-\frac{۲a}{۳}x)\Rightarrow T=\frac{\pi}{|-\frac{۲a}{۳}|}=\frac{۳\pi}{۲|a|}\Rightarrow\frac{۳\pi}{۲|a|}=\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow|a|=\frac{۱۸}{۱۰}=\frac{۹}{۵}$$

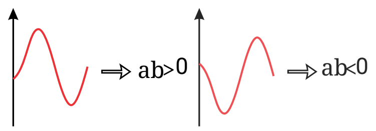
چون نمودار تابع، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند، پس داریم:

$$f(۰)=۲\Rightarrow ۱+۴\cos^۲(b\pi)=۲\Rightarrow\cos^۲(b\pi)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos b\pi=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases}b\pi=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow b=۲k\pm\frac{۱}{۳}\Rightarrow min|b|=\frac{۱}{۳}\\ b\pi=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow b=۲k\pm\frac{۲}{۳}\Rightarrow min|b|=\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow min(|a|+|b|)=\frac{۹}{۵}+\frac{۱}{۳}=\frac{۳۲}{۱۵}$$

۱۶۹. گزینه ۴ نکته: در تابع $y=a\sin bx+c$، اگر شکل مربوطه با شروع از نقطهٔ $x=۰$ به صورت‌های زیر باشد داریم:



پس با توجه به نکتهٔ بالا در این تابع $ab>۰$ است. از طرفی در تابع $y=a\sin(bx+d)+c$ مقادیر ماکزیمم و مینیمم به‌ترتیب $|a|+c$ و $-|a|+c$ است. بنابراین:

$$\begin{cases}|a|+c=۰\\ -|a|+c=-۲\end{cases}\Rightarrow c=-۱\ ,\ |a|=۱$$

حال با توجه به اینکه $f(۰)$ عددی کوچک‌تر از -۱ است علامت a را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=a\cdot\sin(bx+\frac{\pi}{۳})+c\Rightarrow f(۰)=a\sin\frac{\pi}{۳}-۱=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a-۱$$

$$\xrightarrow{f(۰)<-۱}\frac{\sqrt{۳}}{۲}a-۱<-۱\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}a<۰\Rightarrow a<۰\xrightarrow{|a|=۱}a=-۱$$

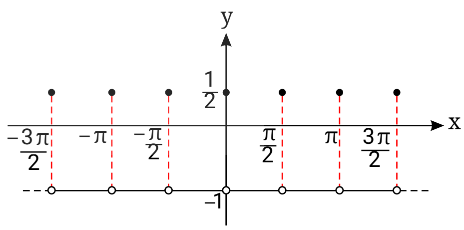
هم‌چنین نمودار تابع در بازهٔ $[۰,۳\pi]$، ۳بار تکرار شده است، درنتیجه داریم:

$$\begin{cases}۳T=۳\pi\Rightarrow T=\pi\\ y=-\sin(bx+\frac{\pi}{۳})-۱\end{cases}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow|b|=۲\xrightarrow{a=-۱\ ,\ ab>۰}b=-۲$$

$$\Rightarrow a+b+c=-۱-۲-۱=-۴$$

۱۷۰. گزینه ۳ می‌دانیم مقدار تابع $g(x)=\sin^۲x$ در $x=\frac{k\pi}{۲}$ $(k\in\mathbb{Z})$ صحیح می‌شود. بنابراین ضابطه و نمودار تابع $y=(fog)(x)$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$y=f(g(x))=\begin{cases}\frac{۱}{۲} & x=\frac{k\pi}{۲}\\ -۱ & x\neq\frac{k\pi}{۲}\end{cases}$$



با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع $y=(fog)(x)$ برابر $T=\frac{\pi}{۲}$ است.

۱۷۱. گزینه ۱

$$۱-\cos\alpha=۲\sin^۲(\frac{\alpha}{۲})\ ,\ \sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha$$: می‌دانیم

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\cos^۲x(۲\sin^۲x)=۲(\sin x\cos x)^۲=۲(\frac{۱}{۲}\sin۲x)^۲$$

$$=\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲x=\frac{۱}{۲}(\frac{۱-\cos ۴x}{۲})=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}\cos ۴x$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{۴}$ است.

۱۷۲ . گزینه ۲ کمترین مقدار تابع برابر $|a|-۱$ است، پس:

$$۱-|a|=-۱\Rightarrow |a|=۲\Rightarrow a=\pm ۲$$

چون نمودار تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مینیمم است، پس $a=۲$ قابل‌قبول است. زیرا در این صورت $f(x)=-۲cos(b\pi x)+۱$.

اکنون توجه کنید که نمودار تابع f از نقطهٔ $(۱۰,۰)$ عبور می‌کند، پس:

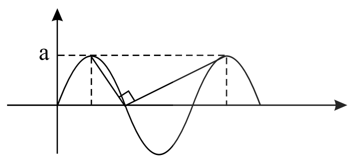
$$f(۱۰)=۰\Rightarrow ۱-۲\cos(۱۰\pi b)=۰\Rightarrow \cos(۱۰b\pi)=\frac{۱}{۲}$$

چون تابع f در $x=۱۰$ برای بار دوم در نقطه‌ای با طول مثبت برابر صفر شده است، پس:

$$۱۰b\pi=۲\pi-\frac{\pi}{۳}\Rightarrow ۱۰b\pi=\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow b=\frac{۱}{۶}$$

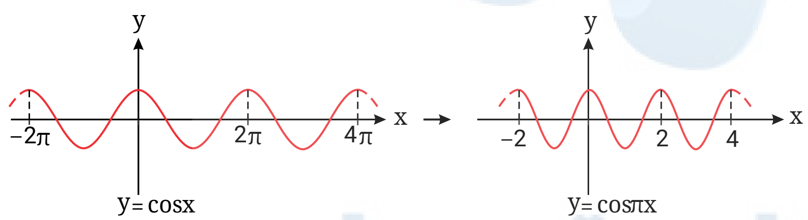
بنابراین $ab=\frac{۱}{۳}$

۱۷۳ . گزینه ۳ دورهٔ تناوب برابر $۴=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}$ است. در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین دو قطعه‌ای است که روی وتر ایجاد می‌کند.



$$BH^{۲}=AH\cdot CH\Rightarrow a^{۲}=۱\times ۳\Rightarrow a=\sqrt{۳}$$

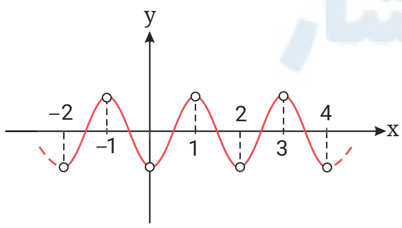
۱۷۴ . گزینه ۲ ابتدا نمودار $y=\cos\pi x$ را رسم می‌کنیم:



می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، پس دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{\cos\pi x}{[x]+[-x]}\xrightarrow{x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}}f(x)=\frac{\cos\pi x}{-۱}\Rightarrow f(x)=-\cos\pi x$$

حال نمودار تابع $f(x)=-\cos\pi x$ با شرط $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ برابر $T=۲$ است.

۱۷۵ . گزینه ۱

صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۲x$ تقسیم می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}}{\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}+\frac{\cos ۲x}{cos۲x}}=\frac{\tan ۲x}{۱+\tan ۲x}$$

می‌دانیم دورهٔ تناوب $\tan ax$برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس:

$$T=\frac{\pi}{۲}$$

۱۷۶. گزینه ۳

می‌دانیم:

$$y=\cos ax \to T=\frac{۲\pi}{|a|}\ ,\ y=|\cos ax| \to T=\frac{\pi}{|a|}$$

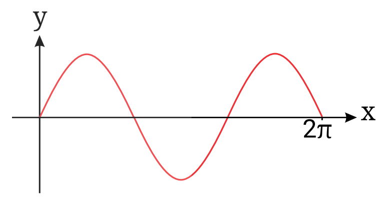
عبارت عبارتی همواره نامثبت است، پس:

$$y=-\sin ۳x+۱+|\cos ۳x|$$
$$\sin ۳x \Rightarrow T_۱=\frac{۲\pi}{۳}$$
$$|\cos ۳x| \Rightarrow T_۲=\frac{\pi}{۳}$$

ک . م . م $T_۲$ و $T_۱$ برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi}{۳}$$

۱۷۷. گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع را با توجه به صورت سؤال رسم می‌کنیم:



$$T+\frac{T}{۲}=۲\pi \Rightarrow T=\frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۲\pi}{a}=\frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

۱۷۸. گزینه ۱

ابتدا ضابطه را به صورت زیر ساده می‌کنیم و سپس داریم:

$$y=-a\sin bx+c$$
$$|a|=\frac{۳+۱}{۲}=۲\ ,c=\frac{۳-۱}{۲}=۱$$
$$\frac{۱}{۴}T=\frac{\pi}{۸} \Rightarrow T=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow |b|=۴$$

در همسایگی راست $x=۰$ تابع نزولی می‌باشد، پس $-ab<۰$ و در نتیجه $ab>۰$ یعنی a و b هم‌علامت هستند، پس ضابطه را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$y=-۲\sin ۴x+۱$$

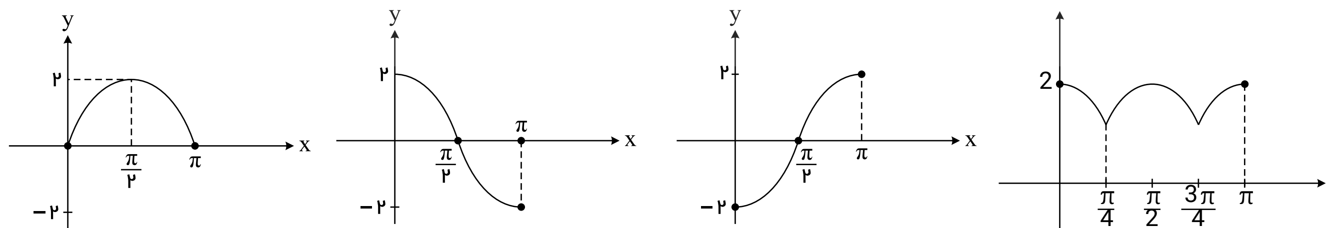
طول A دومین نقطهٔ تلاقی نمودار با محور yها در قسمت مثبت محور xها می‌باشد.

$$-۲\sin ۴x+۱=۰ \Rightarrow \sin ۴x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴x_A=\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x_A=\frac{۵\pi}{۲۴}$$

۱۷۹. گزینه ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$۰\le x\le\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases}\sin x-\cos x\le ۰\\ \sin x+\cos x\ge ۰\end{cases} \Rightarrow f(x)=-\sin x+\cos x+\sin x+\cos x=۲\cos x$$
$$\frac{\pi}{۴}\le x\le\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases}\sin x-\cos x\ge ۰\\ \sin x+\cos x\ge ۰\end{cases} \Rightarrow f(x)=\sin x-\cos x+\sin x+\cos x=۲\sin x$$
$$\frac{۳\pi}{۴}\le x\le\pi \Rightarrow \begin{cases}\sin x-\cos x\ge ۰\\ \sin x+\cos x\le ۰\end{cases} \Rightarrow f(x)=\sin x-\cos x-\sin x-\cos x=-۲\cos x$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر به‌دست می‌آید.

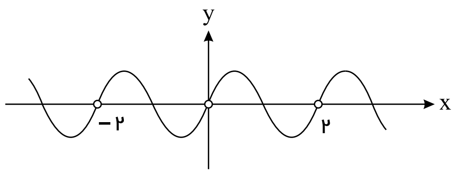


y = ۲ sinx   y = ۲ cosx   y = -۲ cosx   y = f(x)

۱۸۰. گزینه ۲ توجه کنید که اگر $\frac{x}{۲}\in\mathbb{Z}$ آن‌گاه $[\frac{x}{۲}]+[-\frac{x}{۲}]=۰$ و اگر $\frac{x}{۲}\not\in Z$ آن‌گاه $[\frac{x}{۲}]+[-\frac{x}{۲}]=-۱$ بنابراین:

$$D_f=\mathbb{R}-\{x|x\neq ۲k, k\in\mathbb{Z}\}\ ,\ f(x)=\frac{-\sin(\pi x)}{-۱}=۱\sin(\pi x) \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$$

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است و دورهٔ تناوب آن برابر ۲ است.

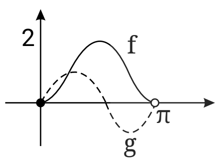


۱۸۱ . گزینه ۲ دورهٔ تناوب تابع $g(x)=\sin(bx)$ برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۲\sin^۲ x=۱-\cos ۲x$ برابر $\frac{۲\pi}{۲}$ است. پس:

$$\frac{۲\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=۲$$

نمودار تابع f و نمودار تابع g با شرط $b>۰$ روی بازهٔ $[۰,\pi)$ در شکل مقابل رسم شده‌اند و دو نقطه برخورد دارند.



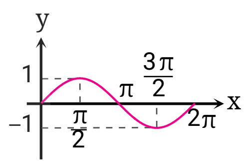
توجه کنید که اگر $b<۰$ آن‌گاه نمودار تابع g قرینهٔ نمودار مقابل نسبت به محور عرض‌ها خواهد بود و در این حالت هم دو نقطهٔ برخورد وجود دارد.

۱۸۲ . گزینه ۴ حاصل $[۱+\cos x]$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ بصورت زیر است.

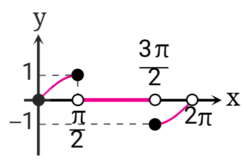
$$[۱+\cos x]=۱+[\cos x]=\begin{cases} ۱+۱=۲ & x=۰ \\ ۱+۰=۱ & ۰<x\leq\frac{\pi}{۲} \\ ۱-۱=۰ & \frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲} \\ ۱+۰=۱ & \frac{۳\pi}{۲}\leq x<۲\pi \end{cases}$$

پس ضابطه تابع و نمودار آن چنین است:

$$y=\begin{cases} ۲\sin ۰=۰ & x=۰ \\ \sin x & ۰<x\leq\frac{\pi}{۲} \\ ۰ & \frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲} \\ \sin x & \frac{۳\pi}{۲}\leq x<۲\pi \end{cases}$$



y= sinx



y=[1+cosx] sinx

۱۸۳ . گزینه ۳ برای آنکه تابع $y=-۴\cos(\frac{\pi}{۴}-۳\pi x)$ روی بازه‌ی $[-۱,۱]$ بیشترین مقدار را داشته باشد، باید حاصل $\cos(\frac{\pi}{۴}-۳\pi x)$ کمترین مقدار، یعنی مقدار (-۱) را به خود بگیرد. پس داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{۴}-۳\pi x)=-۱\rightarrow \frac{\pi}{۴}-۳\pi x=۲k\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{-۲k}{۳}-\frac{۱}{۴}$$

حال برای تعیین تعداد جواب‌های این معادله در بازه‌ی $[-۱,۱]$ کافی است به k اعداد صحیح را نسبت دهیم:

k	-۲	-۱	۰	۱	۲
x	$\frac{۱۳}{۱۲}$	$\frac{۵}{۱۲}$	$-\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱۱}{۱۲}$	$-\frac{۱۹}{۱۲}$
	غ ق ق	✓	✓	✓	غ ق ق

بنابراین معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[-1, 1]$، دارای ۳ جواب است.

۱۸۴ . گزینه ۴

می‌دانیم $\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a}$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} = (\frac{-\sqrt{2}}{2})^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \to 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

توجه کنید که $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۱۸۵ . گزینه ۴

نکته : $\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + v \ , \ u = 2k\pi + \pi - v$

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \underbrace{\cos \pi}_{-1} \to \sin 5x = -\sin 4x \to \sin 5x = \sin(-4x)$$

$$\to \begin{cases} 5x = 2k\pi - 4x \to 9x = 2k\pi \to x = \frac{2k\pi}{9} \\ 5x = 2k\pi + \pi + 4x \to x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$x = \frac{2k\pi}{9} \to$

k	0	1	2	3	4	$\cdots$	9
x	0	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{6\pi}{9}$	$\frac{8\pi}{9}$	$\cdots$	2π

$$x = 2k\pi + \pi \xrightarrow{0 \le x \le 2\pi} x = \pi$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{2\pi + 4\pi + 6\pi + \cdots + 18\pi}{9} + \pi$$

$$= \frac{(2 + 4 + 6 + \cdots + 18)\pi}{9} + \pi = \frac{90\pi}{9} + \pi = 10\pi + \pi = 11\pi$$

دقت کنید که $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$ است روی همین اصل داریم:

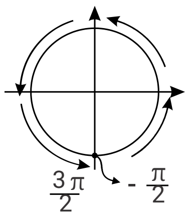
$$2 + 4 + 6 + \cdots + 18 = 9(9+1) = 90$$

۱۸۶ . گزینه ۱ ابتدا معادله داده شده را به کمک اتحاد یک جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^2 x + (2 - m)\sin x - 2m = (\sin x + 2)(\sin x - m) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x + 2 = 0 \Rightarrow \sin x = -2 \to \text{جواب ندارد.} \\ \sin x - m = 0 \Rightarrow \sin x = m \end{cases}$$

با حرکت روی دایره مثلثاتی از $\frac{-\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ می‌بینیم تنها در صورتی که $m = 1$ باشد معادلهٔ $\sin x = m$ دارای یک جواب $x = \frac{\pi}{2}$ خواهد بود.



۱۸۷ . گزینه ۳

می‌دانیم $\tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cot x$، پس:

$$(\sin x-\tan x)\tan(\frac{3\pi}{2}-x)=\cos\frac{4\pi}{3}\Rightarrow(\sin x-\tan x)\cot x=\cos(\pi+\frac{\pi}{3})$$

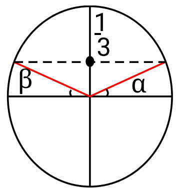
$$\Rightarrow\sin x\cot x-\tan x\cot x=-\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}-1=-\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow\cos x-1=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۱۸۸ . گزینه ۱

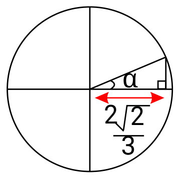
ضرب دو عبارت صفر شده پس تک‌تک آن‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$3\sin x-1=0\Rightarrow\sin x=\frac{1}{3}$$



برای $\sin x=\frac{1}{3}$ دو جواب در ناحیهٔ اول و دوم وجود دارد.

$$3\cos x-2\sqrt{2}=0\Rightarrow\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow$$ یک ریشه دارد.



اما باید دقت کرد که این دو جوابی که برای $\sin x$ و $\cos x$ به دست آمده یکسان نباشد. چون: $(\frac{1}{3})^2+(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2=1$

پس در نهایت این معادله دو ریشهٔ متمایز دارد.

تذکر: هر زاویه‌ای که سینوس آن $\frac{1}{3}$ باشد، کسینوس آن $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ یا $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ است، زاویه ای که در ربع اول است، کسینوس آن $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ و زاویه ای که در ربع دوم است، کسینوس آن $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ است. پس ریشه جدیدی ایجاد نمی‌کند.

۱۸۹ . گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_b^N=x\to b^x=N}$

$$\log_{\sin x}^{\cos x}=1\to\cos x=\sin x\xrightarrow{\div\sin x}\cot x=1\Rightarrow x=k\pi+\alpha\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

اما اگر k فرد باشد، هم سینوس و هم کسینوس به علت قرار گرفتن در ربع سوم منفی خواهند شد که در این صورت در دامنهٔ تعریف لگاریتم قرار ندارند. پس ضریب π باید حتماً زوج باشد.

۱۹۰ . گزینه ۱ دو زاویهٔ $(\alpha+\frac{\pi}{6})$ و $(\frac{\pi}{3}-\alpha)$ متمم یکدیگرند، زیرا:

$$(\frac{\pi}{6}+\alpha)+(\frac{\pi}{3}-\alpha)=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\ \cos(\frac{\pi}{6}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)=-\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})$$

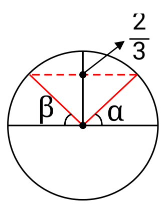
پس: $\sin 4x=\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})-\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}4x=k\pi\ \Rightarrow\ x=\frac{k\pi}{4}$

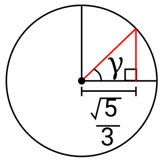
توجه کنید که وقتی $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه $\sin\alpha=\cos\beta$ و $\cos\alpha=\sin\beta$ است.

۱۹۱ . گزینه ۱

$$(3\sin x-2)(3\cos x-\sqrt{5})=0$$

$$3\sin x-2=0\Rightarrow\sin x=\frac{2}{3}$$ ۲ ریشه دارد.





۱ ریشه دارد. $۳\cos x - \sqrt{۵} = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$

حال باید دقت کنیم که آیا این دو معادله ریشه مشترک دارند یا خیر اگر ریشه مشترک داشته باشند پس حتما جوابی موجود است که در هر دو معادله صدق کند $\sin^۲ x + \cos^۲ x = (\frac{۲}{۳})^۲ + (\frac{\sqrt{۵}}{۳})^۲ = \frac{۴}{۹} + \frac{۵}{۹} = ۱$ پس این دو معادله یک ریشه مشترک در ناحیه اول دایره مثلثاتی دارند پس معادله در کل دارای ۲ ریشه است.

۱۹۲. گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\tan^۲ a = \frac{۱ - \cos ۲a}{۱ + \cos ۲a}}$

$$\tan^۲ x - \cos ۲x = ۱ \to \frac{۱ - \cos ۲x}{۱ + \cos ۲x} = ۱ + \cos ۲x \to (۱ + \cos ۲x)^۲ = ۱ - \cos ۲x$$

$$\to ۱ + ۲\cos ۲x + \cos^۲ ۲x = ۱ - \cos ۲x \to \cos^۲ ۲x + ۳\cos ۲x = ۰ \to \cos ۲x(\cos ۲x + ۳) = ۰$$

$$\cos ۲x = ۰ \xrightarrow[x = k\pi + \frac{\pi}{۲}]{\text{حالت خاص}} ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \to x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

$$\cos ۲x + ۳ = ۰ \to \cos ۲x = -۳ \quad \text{غ ق ق} \quad (-۱ \leq \cos x \leq ۱)$$

۱۹۳. گزینه ۴ نکته: $\cos(x - \frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x + \sin x)$ و $\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$

طبق صورت سؤال داریم:

$$\sin ۴x \cos ۲x = \cos^۲(x - \frac{\pi}{۴}) \Rightarrow (۲\sin ۲x \cos ۲x)(\cos ۲x) = (\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x + \sin x))^۲ = \frac{۱}{۲}(\sin x + \cos x)^۲$$

$$\Rightarrow ۲\sin ۲x \cos^۲ ۲x = \frac{۱}{۲}(\underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱} + \underbrace{۲\sin x \cos x}_{\sin ۲x})$$

$$\Rightarrow ۴\sin ۲x(۱ - \sin^۲ ۲x) = ۱ + \sin ۲x \Rightarrow ۴\sin ۲x - ۴\sin^۳ ۲x = ۱ + \sin ۲x$$

$$\Rightarrow ۳\sin ۲x - ۴\sin^۳ ۲x = ۱ \Rightarrow \sin ۳(۲x) = ۱ \Rightarrow \sin ۶x = ۱ = \sin\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow ۶x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲}$$

۱۹۴. گزینه ۱

$$\underbrace{\sin^۲ ۳x - ۲\sin ۳x} \; \underbrace{-۲\sin x + \sin x \sin ۳x} = ۰ \to \sin ۳x(\sin ۳x - ۲) + \sin x(\sin ۳x - ۲) = ۰$$

$$\to (\sin ۳x - ۲)(\sin ۳x + \sin x) = ۰$$

$$\to \begin{cases} \sin ۳x = ۲ > ۱ \quad \text{امکان ندارد.} \\ \sin ۳x = -\sin x = \sin(-x) \to \begin{cases} ۳x = ۲k\pi - x \to x = \frac{k\pi}{۲} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi + x \to x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases} \end{cases}$$

جوابهای $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ توسط $x = \frac{k\pi}{۲}$ تولید می‌شوند، پس جواب کلی بصورت $x = \frac{k\pi}{۲}$ است.

۱۹۵. گزینه ۳

می‌دانیم $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ و $\sin ۲x = ۲\sin x \cos x$

$\sin ۴x = \sin^۴ x - \cos^۴ x$

$۲\sin ۲x\cos ۲x = (\sin^۲ x + \cos^۲ x)(\sin^۲ x - \cos^۲ x) = -\cos ۲x$

$\to ۲\sin ۲x\cos ۲x + \cos ۲x = ۰ \to \cos ۲x(۲\sin ۲x + ۱) = ۰$

$\cos ۲x = ۰ \to ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \to x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \xrightarrow{۰\le x\le \pi} \left\{\frac{\pi}{۴}\ ,\ \frac{۳\pi}{۴}\right\}$

$$\sin ۲x = -\frac{۱}{۲} \to \begin{cases} ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \to x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{۰\le x\le\pi} \left\{\frac{۱۱\pi}{۱۲}\right\} \\ ۲x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \to x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲} \xrightarrow{۰\le x\le\pi} \left\{\frac{۷\pi}{۱۲}\right\} \end{cases}$$

$\frac{\pi}{۴} + \frac{۳\pi}{۴} + \frac{۱۱\pi}{۱۲} + \frac{۷\pi}{۱۲} = \frac{۵\pi}{۲}$

۱۹۶ . گزینه ۴ این معادله تنها زمانی جواب دارد که هر سه سینوس هم‌زمان یک شوند.

$\sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \to x = \frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{۵\pi}{۲}\ ,\ \frac{۹\pi}{۲}\ ,\cdots$

$\sin ۲x = ۱ \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \to x = \frac{\pi}{۴}\ ,\ \frac{۵\pi}{۴}\ ,\ \frac{۹\pi}{۴}\ ,\cdots$

$\sin ۳x = ۱ \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \to x = \frac{\pi}{۶}\ ,\ \frac{۵\pi}{۶}\ ,\ \frac{۹\pi}{۶}\ ,\cdots$

زاویه‌ی مشترکی وجود ندارد پس معادله فاقد جواب است.

۱۹۷ . گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{۱ - \cos ۲u = ۲\sin^۲ u}$

$\cot^۲ x + \cos ۲x = ۱ \Rightarrow \cot^۲ x = ۱ - \cos ۲x \Rightarrow \frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x} = ۲\sin^۲ x \Rightarrow ۲\sin^۴ x = \cos^۲ x$

$\Rightarrow ۲\sin^۴ x = ۱ - \sin^۲ x \Rightarrow ۲\sin^۴ x + \sin^۲ x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\sin^۲ x = A} ۲A^۲ + A - ۱ = ۰$

چون $a + c = b$ می باشد، پس یک ریشه -۱ و یک ریشه $\frac{-c}{a}$ است.

$$\begin{cases} \sin^۲ x = -۱ \to \text{امکان ندارد} \\ \sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۴} \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin(-\frac{\pi}{۴}) \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

که اجتماع این ۴ دسته جواب $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ است. (به این نکته هم توجه کنید $\sin^۲ x = \sin^۲ a \to x = k\pi \pm \alpha$ یعنی وقتی $\sin^۲ x = \frac{۱}{۲} = \sin^۲(\frac{\pi}{۴})$ باشد $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ می‌شود)

۱۹۸ . گزینه ۱ با استفاده از روابط $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$ معادله را ساده می‌کنیم.

$۲\sin x\cos x - (۲\cos^۲ x - ۱) = ۱ + \sin x - \cos x$

$۲\sin x\cos x - ۲\cos^۲ x - \sin x + \cos x = ۰ \Rightarrow ۲\sin x\cos x - \sin x - ۲\cos^۲ x + \cos x = ۰$

$\sin x(۲\cos x - ۱) - \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰ \Rightarrow (\sin x - \cos x)(۲\cos x - ۱) = ۰$

$$\begin{cases} \sin x = \cos x \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

تنها جواب معادلهٔ $\sin x = \cos x$ که در بازهٔ $(۰, \frac{\pi}{۲})$ قرار دارد، $x = \frac{\pi}{۴}$ است.

تنها جواب معادلهٔ $\cos x = \frac{۱}{۲}$ که در بازهٔ $(۰, \frac{\pi}{۲})$ قرار دارد، $x = \frac{\pi}{۳}$ است.

پس مجموع جواب‌های معادله که در بازهٔ $(\circ, \frac{\pi}{۲})$ قرار دارند، برابر $\frac{۷\pi}{۱۲}$ است.

۱۹۹ . گزینه ۲

$$\cos^۴ x - \sin^۸ x = ۱ \Rightarrow \cos^۴ x = \sin^۸ x + ۱$$

اگر $\sin x \neq \circ$ باشد، سمت راست معادله از ۱ بزرگ‌تر خواهد شد و نمی‌تواند برابر $\cos^۴ x$ شود، زیرا حداکثر مقدار $\cos^۴ x$ برابر ۱ است. پس به ناچار باید $\sin x = \circ$ باشد که در این صورت $\cos^۴ x = ۱$ و درنتیجه $\cos x = \pm ۱$ خواهد شد. در بازهٔ $[\circ, ۳\pi]$ نقاطی که در آن‌ها $\sin x = \circ$ و $\cos x = \pm ۱$ باشد، فقط نقاط $x = \circ$ و $x = \pi$ و $x = ۲\pi$ و $x = ۳\pi$ هستند؛ بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$\text{مجموع جواب‌های معادله} = \circ + \pi + ۲\pi + ۳\pi = ۶\pi$$

۲۰۰ . گزینه ۲ فرض می‌کنیم جملهٔ xام دنبالهٔ حسابی، جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی باشد، پس باید رابطهٔ $a_{۱۲} \cdot a_x = a_۷^۲$ برقرار باشد:

$$(a_۱ + ۱۱d)(a_۱ + (x-۱)d) = (a_۱ + ۶d)^۲$$

$$a_۱^۲ + a_۱ d(x-۱) + ۱۱a_۱ d + ۱۱(x-۱)d^۲ = a_۱^۲ + ۱۲a_۱ d + ۳۶d^۲ \Rightarrow a_۱ d(x-۲) = d^۲(۳۶ - ۱۱x + ۱۱) \Rightarrow \frac{d}{a_۱} = \frac{x-۲}{۴۷-۱۱x} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۹۴ - ۲۲x = ۳x - ۶ \Rightarrow x = ۴$$

۲۰۱ . گزینه ۱

$$\text{اگر}: \ \alpha + \beta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{matrix} \sin\alpha = \cos\beta \\ \tan\alpha = \cot\beta \end{matrix}$$

$$(x + \frac{\pi}{۸}) + (\frac{۳\pi}{۸} - x) = \frac{\pi}{۲} \rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{۸}) = \cos(\frac{۳\pi}{۸} - x) = \cos(x - \frac{۳\pi}{۸})$$

$$\Rightarrow ۲\sin(x + \frac{\pi}{۸}) = ۱ \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{۸}) = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{۸} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x + \frac{\pi}{۸} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \xrightarrow{[\circ, ۲\pi]} \begin{matrix} x_۱ = \frac{\pi}{۶} - \frac{\pi}{۸} = \frac{\pi}{۲۴} \\ x_۲ = \frac{۵\pi}{۶} - \frac{\pi}{۸} = \frac{۱۷\pi}{۲۴} \end{matrix} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = \frac{۱۸\pi}{۲۴} = \frac{۳\pi}{۴}$$

۲۰۲ . گزینه ۴ نقاطی به طول a و b، نقاطی هستند که در آن‌ها $y = \circ$ است، بنابراین کافی است معادلهٔ $y = \circ$ را حل کنیم و طول نقاطی مثبت (نقاطی بعد از $x = \circ$) را بیابیم که در آن‌ها $y = \circ$ می‌شود.

$$f(x) = \circ \Rightarrow ۲\sin(x - \frac{\pi}{۶}) + ۱ = \circ \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{۶}) = -\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \\ x - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۴\pi}{۳} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c|cc} k & \circ & ۱ \\ \hline x & \circ & ۲\pi \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} k & \circ & ۱ \\ \hline x & \frac{۴\pi}{۳} & ۲\pi + \frac{۴\pi}{۳} \end{array}$$

اولین دو نقطه‌ای با طول مثبت که مورد نظر هستند $a = \frac{۴\pi}{۳}$ و $b = ۲\pi$ هستند، پس $b - a = \frac{۲\pi}{۳}$ است.

۲۰۳ . گزینه ۱

می‌دانیم:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x \quad , \quad \sin x + \cos x = \sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴})$$

$$\sin^۳ x + \cos^۳ x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

به کمک اتحاد $a^۳ + b^۳ = (a+b)(a^۲ - ab + b^۲)$ عبارت $\sin^۳ x + \cos^۳ x$ را تجزیه می‌کنیم.

$$(\sin x + \cos x) \cdot (\sin^۲ x - \sin x \cdot \cos x + \cos^۲ x) = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot (۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x) = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$(\sin x+\cos x)\cdot(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)-(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۰$$

$$(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)\cdot(\sin x+\cos x-۱)=۰$$

$$\begin{cases} ۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۰ \Rightarrow \sin ۲x=۲ \ \text{غقق} \\ \sin x+\cos x=۱ \Rightarrow \sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱ \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=۲k\pi \Rightarrow x=۰,۲\pi \\ x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\text{جمع}=۰+\frac{\pi}{۲}+۲\pi=\frac{۵\pi}{۲}$$

۲۰۴ . گزینه ۴

می‌دانیم: $\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x \quad , \quad \sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$

$$۴(\sin^۴ x+\cos^۴ x)=۳ \Rightarrow \sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۳}{۴} \Rightarrow ۱-۲(\sin x\cos x)^۲=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱-۲(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۴}=۲\times\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x \Rightarrow \sin^۲ ۲x=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin ۲x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin ۲x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۸} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۸},\pi+\frac{\pi}{۸} \Rightarrow \text{۲ جواب}$$

$$۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x=k\pi+\frac{۳\pi}{۸} \Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۸},\pi+\frac{۳\pi}{۸} \Rightarrow \text{۲ جواب}$$

$$\sin ۲x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۸} \Rightarrow x=\pi-\frac{\pi}{۸},۲\pi-\frac{\pi}{۸} \to \text{۲ جواب}$$

$$۲x=۲k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{۴})=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow x=k\pi+\frac{۵\pi}{۸} \Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۸},\pi+\frac{۵\pi}{۸} \to \text{۲ جواب}$$

در کل معادله ۸ جواب در بازه $[۰,۲\pi]$ دارد.

۲۰۵ . گزینه ۲

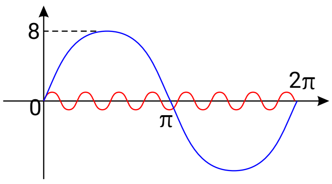
می‌دانیم: $\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$

$$\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=\tan ۳x \to \tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\tan ۳x$$

$$\to ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۴}-x \to ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \to x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۱۶}$$

۲۰۶ . گزینه ۳

$$\underbrace{\sin ۲x\cos ۲x}_{\frac{۱}{۲}\sin ۲(۲x)}\cos ۴x=۲\sin x \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۴x\cos ۴x=۲\sin x \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin ۲\times ۴x=۲\sin x \Rightarrow \sin ۸x=۸\sin x$$



دو تابع $y=\sin ۸x$ و $y=۸\sin x$ در سه نقطه ۲π و π و $x=۰$ متقاطع‌اند.

۲۰۷. گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha \;,\; ۱+\cos\alpha=۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}$$

$$(۱+\cos ۲\alpha)(۱+\cos ۴\alpha)(۱+\cos ۸\alpha)=\frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲\alpha\times ۲\cos^۲ ۲\alpha\times ۲\cos^۲ ۴\alpha=\frac{۱}{۸}\Rightarrow \cos^۲\alpha\cdot\cos^۲ ۲\alpha\cdot\cos^۲ ۴\alpha=\frac{۱}{۶۴}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\cdot\cos ۲\alpha\cos ۴\alpha=\pm\frac{۱}{۸}\xrightarrow[\alpha\neq k\pi]{\times\sin\alpha}\underbrace{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}_{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha}\cdot\cos ۲\alpha\cdot\cos ۴\alpha=\frac{۱}{۲}\underbrace{\sin ۲\alpha\cdot\cos ۲\alpha}_{\frac{۱}{۲}\sin ۴\alpha}\cdot\cos ۴\alpha=\frac{۱}{۴}\underbrace{\sin ۴\alpha\cdot\cos ۴\alpha}_{\frac{۱}{۲}\sin ۸\alpha}$$

$$=\frac{۱}{۸}\sin ۸\alpha=\pm\frac{۱}{۸}\sin\alpha\Rightarrow \sin ۸\alpha=\pm\sin\alpha$$

$$(۱)\,\sin ۸\alpha=\sin\alpha\;\Rightarrow\begin{cases}۸\alpha=۲k\pi+\alpha\Rightarrow\alpha=\dfrac{۲k\pi}{۷}\Rightarrow max:\dfrac{۶\pi}{۷}\\[2ex] ۸\alpha=۲k\pi+\pi-\alpha\Rightarrow\alpha=\dfrac{۲k\pi}{۹}+\dfrac{\pi}{۹}\Rightarrow max:\dfrac{۷\pi}{۹}\end{cases}$$

$$(۲)\,\sin ۸\alpha=-\sin\alpha\;\Rightarrow \sin ۸\alpha=\sin(-\alpha)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۸\alpha=۲k\pi-\alpha\Rightarrow\alpha=\dfrac{۲k\pi}{۹}\Rightarrow max=\dfrac{۸\pi}{۹}\\[2ex] ۸\alpha=۲k\pi+\pi+\alpha\Rightarrow\alpha=\dfrac{۲k\pi}{۷}+\dfrac{\pi}{۷}\Rightarrow max=\dfrac{۵\pi}{۷}\end{cases}$$

* البته دقت کنید که $\alpha=\pi$ جواب قابل قبول برای معادله نیست. پس ماکزیمم جواب‌ها $\frac{۸\pi}{۹}$ است.

۲۰۸. گزینه ۴

$$\tan(۲x+\frac{\pi}{۳})=\tan(\frac{\pi}{۲}-(۲x-\frac{\pi}{۶}))\;\Rightarrow \tan(۲x+\frac{\pi}{۳})=\tan(\frac{۲\pi}{۳}-۲x)\;\Rightarrow ۲x+\frac{\pi}{۳}=k\pi+\frac{۲\pi}{۳}-۲x$$

$$\Rightarrow ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\;\Rightarrow x=(۳k+۱)\frac{\pi}{۱۲}$$

اکنون توجه کنید که:

$$۲x=(۳k+۱)\frac{\pi}{۶}\;\Rightarrow ۲x+\frac{\pi}{۳}=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}\;\Rightarrow ۲x+\frac{\pi}{۳}=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}$$

اگر k زوج باشد آن‌گاه $۲x+\frac{\pi}{۳}=\frac{۲k'\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}=k'\pi+\frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه $\tan(۲x+\frac{\pi}{۳})$ تعریف نمی‌شود. پس k باید فرد باشد.

دقت کنید که اگر k زوج باشد $\cot(۲x-\frac{\pi}{۶})$ نیز تعریف نمی‌شود.

$$۲x-\frac{\pi}{۶}=(۳k+۱)\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\frac{k\pi}{۲}=\frac{۲k'\pi}{۲}=k'\pi$$

بنابراین $k=۲k'-۱$ و در نتیجه جواب‌ها به‌صورت زیر هستند:

$$x=(۳(۲k'-۱)+۱)\frac{\pi}{۱۲}=(۶k'-۲)\frac{\pi}{۱۲}=(۳k'-۱)\frac{\pi}{۶}$$

۲۰۹. گزینه ۲ باید عبارات زیر رادیکال نامنفی باشند تا تابع f تعریف شده باشد و علاوه بر آن عبارت زیر رادیکال در مخرج کسر، باید مخالف صفر هم باشد، پس داریم:

$$\sin(\pi x-\frac{\pi}{8})-1\geq 0\Rightarrow \sin(\pi x-\frac{\pi}{8})\geq 1\xrightarrow[\text{کمان نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۱ باشد}]{\text{چون حاصل سینوس یک}}\sin(\pi x-\frac{\pi}{8})=1\Rightarrow \pi x-\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow \pi x=2k\pi+\frac{5\pi}{8}$$

$$\Rightarrow x=2k+\frac{5}{8}(k\in\mathbb{Z})$$

از طرفی باید داشته باشیم:

$$9x-x^2>0\Rightarrow x(9-x)>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}0<x<9$$

چون محدودهٔ مشترک x مورد نظر است، پس در دسته جواب $x=2k+\frac{5}{8}$ فقط مقادیر $k=0, k=1, k=2, k=3$ و $k=4$ قابل قبول هستند؛ زیرا در این صورت $0<x<9$ خواهد بود.

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	$\frac{5}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{37}{8}$	$\frac{53}{8}$	$\frac{69}{8}$

یعنی دامنهٔ این تابع مجموعه‌ای ۵ عضوی است.

۲۱۰. گزینه ۱

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2}{\sin^2 2x}\Rightarrow\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{2}{\sin^2 2x}\Rightarrow\frac{\cos 2x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}=\frac{2}{\sin^2 2x}\Rightarrow\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}=\frac{2}{\sin^2 2x}$$

چون مخرج کسرها مساویند و نمی‌توانند برابر صفر باشند، پس باید صورت کسرها برابر باشند.

$$4\cos 2x=2\Rightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

به ازای $k=2$، کوچک‌ترین جواب در بازهٔ $[2\pi,4\pi]$ برابر $x=\frac{13\pi}{6}$ و به ازای $k=4$، بزرگ‌ترین جواب در این بازه برابر $x=\frac{23\pi}{6}$ خواهد بود که اختلاف آن‌ها برابر است با:

$$\frac{23\pi}{6}-\frac{13\pi}{6}=\frac{10\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}$$

۲۱۱. گزینه ۲

می‌دانیم $\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$، پس:

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{5}=0\Rightarrow\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{3x}{5}\Rightarrow\sin\frac{x}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{5})$$

$$\begin{cases}\frac{x}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{5}\Rightarrow\frac{x}{2}+\frac{3x}{5}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{11x}{10}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \frac{x}{2}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{3x}{5}\Rightarrow\frac{x}{2}-\frac{3x}{5}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{x}{10}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{20k\pi}{11}+\frac{5\pi}{11}\\ x=-20k\pi-5\pi\end{cases}$$

اولین دسته جواب به ازای $k=0$، جواب $x=\frac{5\pi}{11}$ را خواهد داد که در بازهٔ $(0,2\pi)$ قرار دارد و این جواب، تنها جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ است. یعنی معادلهٔ داده شده، در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارای فقط یک جواب است.

۲۱۲. گزینه ۲ نمودار از نقطهٔ $(0,5)$ می‌گذرد؛ پس:

$$f(0)=5\Rightarrow a+c=5\ (*)$$

با توجه به نمودار ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۵ و ۱ است. با توجه به ضابطهٔ، این مقادیر برابر $|a|+c$ و $-|a|+c$ هستند؛ پس $|a|+c=5$ و $-|a|+c=1$. با مقایسهٔ این روابط و $(*)$ معلوم است که $a>0$ است؛ پس:

$$\begin{cases}a+c=5\\ -a+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ c=3\end{cases}$$

با توجه به شکل اگر دورهٔ تناوب تابع T باشد، آنگاه $\frac{3}{2}T=6\pi$. می‌دانیم $T=\frac{2\pi}{|b|}$؛ پس:

$$\frac{3}{2}\times\frac{2\pi}{|b|}=6\pi\Rightarrow\frac{3}{|b|}=6\Rightarrow|b|=\frac{1}{2}$$

با فرض $b=\frac{1}{2}$ ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=2\cos\frac{1}{2}x+3$ است.

A اولین نقطه با طول مثبت است که عرض آن برابر ۳ است؛ پس برای به‌دست آوردن طول آن باید معادلهٔ $f(x)=3$ را حل کنیم:

$$3=2\cos\frac{1}{2}x+3\Rightarrow 2\cos\frac{1}{2}x=0\Rightarrow\frac{1}{2}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x_A=\pi$$

۲۱۳ . گزینه ۱ نمودار $f(x)$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ − قطع کرده است، بنابراین:

$$f(۰) = -۱ \Rightarrow ۲\sin^۲(-\frac{\pi}{۶}) + b = -۱ \Rightarrow ۲(\frac{۱}{۴}) + b = -۱ \Rightarrow b = -\frac{۳}{۲}$$

حال به کمک رابطهٔ $۱ - \cos ۲\alpha = ۲\sin^۲ \alpha$ تابع را به‌صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = ۲\sin^۲(ax - \frac{\pi}{۶}) - \frac{۳}{۲} \Rightarrow f(x) = ۱ - \cos(۲ax - \frac{\pi}{۳}) - \frac{۳}{۲} \Rightarrow f(x) = -\cos(۲ax - \frac{\pi}{۳}) - \frac{۱}{۲}$$

حال معادله $f(x) = ۰$ را حل می‌کنیم.

$$f(x) = ۰ \Rightarrow -\cos(۲ax - \frac{\pi}{۳}) - \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow \cos(۲ax - \frac{\pi}{۳}) = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos(۲ax - \frac{\pi}{۳}) = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۲ax - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

$$۲ax - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۲ax = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{۲k\pi + \pi}{۲a} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲a}, \frac{۳\pi}{۲a}, \cdots$$

$$۲ax - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۲ax = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{a} - \frac{\pi}{۶a}$$

$$x = \frac{۵\pi}{۶a}, \cdots$$

دومین ریشه مثبت $x = \frac{۵\pi}{۶a}$ است، پس:

$$\frac{۵\pi}{۶a} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow a = \pi \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۲a} = \frac{\pi}{a} = ۱$$

۲۱۴ . گزینه ۱ می‌دانیم $\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$، پس:

$$\sin(\cos x) = \sin(\frac{\pi}{۲} - \sin x)$$

$$\begin{cases} \cos x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - \sin x \\ \cos x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} + \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos x - \sin x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

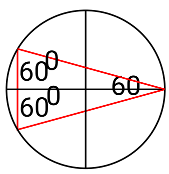
$$\begin{matrix} -\sqrt{۲} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{۲} \\ -\sqrt{۲} \le \cos x - \sin x \le \sqrt{۲} \end{matrix} \Rightarrow -\sqrt{۲} \le ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \le \sqrt{۲}$$

با جایگذاری چند مقدار k در عبارت $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ می‌بینیم که این عبارت هیچ‌گاه در بازهٔ $[-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}]$ قرار نمی‌گیرد پس معادله جواب ندارد.

$$k = ۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۲} > \sqrt{۲}$$

$$k = -۱ \Rightarrow ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} = -\frac{۳\pi}{۲} < -\sqrt{۲}$$

۲۱۵ . گزینه ۱

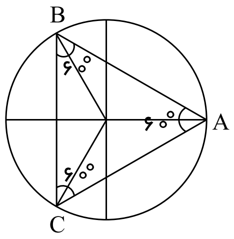


$$\sin(\frac{\pi}{۲} - ۲x) + \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۰ \Rightarrow \cos ۲x - \cos x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \cos x$$

$$۲x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = ۲k\pi$$

$$۲x = ۲k\pi - x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳}$$

$x=\frac{2k\pi}{3}$ جواب کلی معادله است، زیرا $x=2k\pi$ نیز توسط $x=\frac{2k\pi}{3}$ تولید می‌شوند. انتهای کمانهای $x=\frac{2k\pi}{3}$ بر روی دایره مثلثاتی بصورت مقابل است.



$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}=120^\circ$$

$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$$

مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

۲۱۶ . گزینه ۲ معادله را ساده می‌کنیم.

$$\tan x=(2-2\cos x)(1+\cos x)$$

$$\tan x=2(1-\cos x)(1+\cos x)$$

$$\tan x=2(1-\cos^2 x)\ \Rightarrow \tan x=2\sin^2 x\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=2\sin^2 x\Rightarrow \sin x=2\sin^2\cos x\Rightarrow 2\sin^2 x\cos x-\sin x=0$$

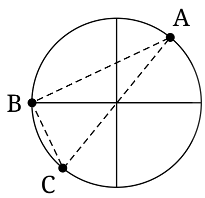
$$\sin x(2\sin x\cos x-1)=0\ \Rightarrow \sin x(\sin 2x-1)=0$$

پس جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند.

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi$$

$$\sin 2x=1\ \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ \ ,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

توجه کنید که در $x=k\pi$ اگر k زوج باشد قابل قبول نیست، زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند.



پس k باید فرد باشد و درنتیجه $x=(2k+1)\pi$ و $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ جواب‌های کلی معادله هستند که انتهای کمان متناظر آن‌ها مطابق شکل مقابل مثلث قائم الزاویهٔ ABC است که در رأس B قائم است.

۲۱۷ . گزینه ۴

$$\sin 2x=\tan x\Rightarrow 2\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow 2\sin x\cos^2 x-\sin x=0$$
$$\Rightarrow \sin x(2\cos^2 x-1)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}1)\ \sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})\\ 2)\ 2\cos^2=1\Rightarrow \cos x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}\ \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

اجتماع جواب‌های ۱ و ۲ به صورت $x=\frac{k\pi}{4}$ می‌باشد ولی از آنجایی که $\cos x\neq 0$ است پس x نمی‌تواند برابر $k\pi+\frac{\pi}{2}$ باشد.

پس گزینه ۴ صحیح است.

۲۱۸ . گزینه ۱

نکته : $\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + v , x = 2k\pi + \pi - v$

نکته : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

طرفین معادلهٔ $\sin x + \cos x = 1$ را به توان ۲ می‌رسانیم، داریم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 \Rightarrow 1 + \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{0 \le x \le 2\pi} x = 0 \ , \ \frac{\pi}{2} \ , \ \pi \ , \ \frac{3\pi}{2} \ , \ 2\pi$$

با توجه به این که برای حل معادله آن را به توان ۲ رسانده‌ایم، ممکن است ریشه اضافی وارد معادله شده باشد، به همین دلیل جواب‌ها را در معادله اولیه امتحان می‌کنیم.

$x = 0 \to \sin 0 + \cos 0 = 1 \Rightarrow 0 + 1 = 1$ صحیح و $x = \pi \to \sin\pi + \cos\pi = 1 \Rightarrow -1 = 1$ غلط

$x = \frac{\pi}{2} \to \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$ صحیح و $x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = -1$ غلط

$x = 2\pi \Rightarrow \sin 2\pi + \cos 2\pi = 1 \Rightarrow 1 = 1$ صحیح

در کل جواب‌های معادله عبارتند از: $x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$ یعنی معادله ۳ ریشه دارد.

۲۱۹ . گزینه ۲

$$x = 6\alpha \Rightarrow \sin 3\alpha + 2\cos 2\alpha = 2 \Rightarrow 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha + 2(1 - 2\sin^2\alpha) = 2 \Rightarrow 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha - 4\sin^2\alpha = 0$$

$$\sin\alpha(-4\sin^2\alpha - 4\sin\alpha + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi \Rightarrow \frac{x}{6} = k\pi \Rightarrow x = 6k\pi \Rightarrow x = 0, 6\pi \\ \sin\alpha = \frac{4 \pm 8}{-8} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{12}{8} \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 12k\pi + \pi \Rightarrow x = \pi \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 12k\pi + 5\pi \Rightarrow x = 5\pi \end{cases} \end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها برابر $12\pi = 5\pi + \pi + 6\pi + 0$ است.

۲۲۰ . گزینه ۱

می‌دانیم $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$، پس داریم:

$$\cot x + \tan x - \cot x = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \Rightarrow \tan x = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

$\Rightarrow \tan x - \tan^2 x = 1 + \tan x \Rightarrow \tan^2 x = -1 \Rightarrow$ جواب ندارد

۲۲۱ . گزینه ۲ می‌دانیم که $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ است.

$$5\sin^2 x + 2\cos 3x + 2 = 0 \to 5\sin^2 x + 2(1 + \cos 3x) = 0 \to 5\sin^2 x + 2\cos^2\frac{3x}{2} = 0$$

جمع دو عبارت نامنفی وقتی صفر است که تک‌تک آن‌ها صفر باشند و ریشهٔ مشترک، جواب معادله است.

$$5\sin^2 x = 0 \to \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \to x = -\pi, 0, \pi$$

$$2\cos^2\frac{3x}{2} = 0 \to \cos\frac{3x}{2} = 0 \xrightarrow{\cos x = 0 \to x = k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\to x = -\pi \ , \ -\frac{\pi}{3} \ , \ \frac{\pi}{3} \ , \ \pi$$

بنابراین ریشه‌های مشترک π و $-\pi$ هستند. پس معادله دو جواب دارد.

۲۲۲ . گزینه ۱

می‌دانیم : $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$

معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$3(\sin x - \cos x) = 2(1 - \sin 2x) \Rightarrow 3(\sin x - \cos x) = 2(\sin x - \cos x)^2$$

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = ۰ \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴} \\ \sin x - \cos x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow ۱ + ۲\sin x \cos x = \frac{۹}{۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin ۲x = +\frac{۵}{۴}$$ غقق

بنابراین معادله فقط یک جوابِ $\frac{\pi}{۴}$ را در بازهٔ $(۰, \pi)$ دارد.

۲۲۳ . گزینه ۴

می‌دانیم : $\cos ۲x = \frac{۱ - \tan^۲ x}{۱ + \tan^۲ x}$, $\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x}$

معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱ - \tan^۲ x}{۱ + \tan^۲ x} = \frac{\tan ۲x}{۱ + \tan^۲ ۲x} \Rightarrow \cos ۲x = \frac{۱}{۲}\sin ۴x \Rightarrow \cos ۲x = \frac{۱}{۲} \times ۲\sin ۲x \cos ۲x \Rightarrow \cos ۲x(\sin ۲x - ۱) = ۰$$

بنابراین جواب‌های به‌صورت زیر هستند.

$$\cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$
$$\sin ۲x = ۱ \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

ولی هر دو دسته جواب غیرقابل‌قبول هستند، زیرا:

$x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow$ $\tan ۲x$ تعریف نمی‌شود.

$x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow$ $\tan ۲x$ تعریف نمی‌شود.

۲۲۴ . گزینه ۲ با استفاده از اتحادهای $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۸\cos^۲ x}{\frac{۱}{\sin^۲ x}} + ۳\sin ۲x = -۱ \Rightarrow ۸\sin^۲ x\cos^۲ x + ۳\sin ۲x = -۱$$

$$۲\sin ۲x + ۳\sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow (\sin ۲x + ۱)(۲\sin ۲x + ۱) = ۰$$

$$\begin{cases} \sin ۲x = -۱ \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \\ \sin ۲x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \\ ۲x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله که در بازهٔ $(۰, \pi)$ قرار دارند عبارتند از:

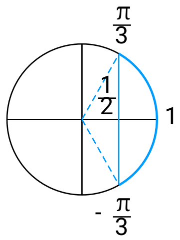
$$\frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۱۲}, \frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

۲۲۵ . گزینه ۳

$$\cos^۲ x - ۳(m+۱)\cos x + ۹m = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{(۳m+۳) \pm \sqrt{۹m^۲ + ۱۸m + ۹ - ۳۶m}}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{(۳m+۳) \pm \sqrt{۹m^۲ - ۱۸m + ۹}}{۲} = \frac{(۳m+۳) \pm \sqrt{(۳m-۳)^۲}}{۲} = \frac{(۳m+۳) \pm (۳m-۳)}{۲} \Rightarrow \cos x = ۳m, \cos x = ۳$$

بدیهی است که $\cos x = ۳$ جواب ندارد. زیرا تغییرات $\cos x$ در بازهٔ $[-۱, ۱]$ است. پس $\cos x = ۳$ غیرقابل قبول است. حال اگر بخواهیم معادلهٔ $\cos x = ۳m$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳})$ دارای جواب باشد، خواهیم داشت:



$$-\frac{\pi}{۳}<x<\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{\text{طبق شکل}}\frac{۱}{۲}<\cos x\le ۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}<۳m\le ۱\Rightarrow\frac{۱}{۶}<m\le\frac{۱}{۳}$$

۲۲۶ . گزینه ۲ باید طول نقاط برخورد تابع با محور xها را بیابیم. یعنی معادله $f(x)=۰$ را حل کنیم:

$$\cos ۲x+\sin x=۰\Rightarrow\cos ۲x=-\sin x$$

با استفاده از رابطهٔ $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$ داریم:

$$\cos ۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}+x)\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm(\frac{\pi}{۲}+x)$$
$$۱)\ ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+x\to x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$
$$۲)\ ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-x\to ۳x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\to x=\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}$$

A طول دومین جواب منفی است، پس:

$$\left.\begin{array}{l}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\to x=\cdots,-\frac{۷\pi}{۲},-\frac{۳\pi}{۲}\\ x=\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}\to x=\cdots,-\frac{۵\pi}{۶},-\frac{\pi}{۶}\end{array}\right\}\Rightarrow A=-\frac{۵\pi}{۶}$$

B طول دومین جواب مثبت است، پس:

$$\left.\begin{array}{l}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\to x=\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲},\cdots\\ x=\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}\to x=\frac{\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۶},\cdots\end{array}\right\}\Rightarrow B=\frac{۷\pi}{۶}$$

$$AB=\frac{۷\pi}{۶}-(-\frac{۵\pi}{۶})=\frac{۱۲\pi}{۶}=۲\pi$$

۲۲۷ . گزینه ۱

اگر $\pi\cos x=\alpha$ باشد؛ داریم :
$$\cos^۲(\alpha)=۱\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=۱\\ \cos\alpha=-۱\end{cases}$$

از معادلهٔ $\cos\alpha=۱$ نتیجه می‌گیریم $\alpha=۲k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

$$\Rightarrow\pi\cos x=۲k\pi\Rightarrow\cos x=۲k\Rightarrow\cos x=۰$$
$$\xrightarrow{\text{در بازهٔ }[۰,۵\pi]}x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۲},\frac{۹\pi}{۲}\to \text{۵ جواب}$$

از معادلهٔ $\cos\alpha=-۱$ داریم:
$$\alpha=(۲k+۱)\pi\Rightarrow\pi\cos x=(۲k+۱)\pi$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۲k+۱\\ -۱\le\cos x\le ۱\end{cases}\Rightarrow\cos x=\begin{cases}۱ & (k=۰)\Rightarrow x=۰,۲\pi,۴\pi\\ -۱ & (k=-۱)\Rightarrow x=\pi,۳\pi,۵\pi\end{cases}\to\text{۶ جواب}$$

در نهایت معادلهٔ داده شده ۱۱ جواب خواهد داشت.

۲۲۸ . گزینه ۴

نکته: $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha,\cos(۲k\pi-\alpha)=\cos\alpha$

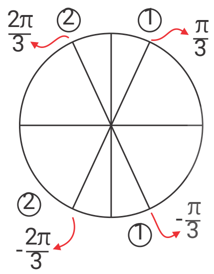
$$\sin(\frac{\pi}{۲}+x)\cos(۸\pi-x)=\sin^۲(\pi+\frac{\pi}{۶})\Rightarrow\cos x\times\cos x=(-\sin\frac{\pi}{۶})^۲$$

$$\Rightarrow \cos^{۲} x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$\cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \qquad (۱)$$

$$\cos x = -\frac{۱}{۲} = -\cos\frac{\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \qquad (۲)$$

حال با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:



$$\Rightarrow \text{جواب کلی} = x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۲۲۹ . گزینه ۳ می‌دانیم به ازای $x > ۰$ همواره $x + \frac{۱}{x} \geq ۲$ است بنابراین داریم:

$$\tan^{۲}x + \cot^{۲}x = \tan^{۲}x + \frac{۱}{\tan^{۲}x} \geq ۲$$

از طرفی داریم :

$$\sqrt{۲}(\sin x + \cos x) = ۲\sin(x + \frac{\pi}{۴}) \Rightarrow -۲ \leq \sqrt{۲}(\sin x + \cos x) \leq ۲$$

حداکثر مقدار سمت راست معادله برابر ۲ و حداقل مقدار سمت چپ معادله نیز ۲ است بنابراین تنها در صورتی تساوی برقرار است که دو طرف تساوی برابر ۲ شود.

$$\begin{cases} \tan x = ۱ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ \tan x = -۱ \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \end{cases} \quad (۱)$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \quad (۲)$$

$$(۱)\,,\,(۲) \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{۴}, \frac{۹\pi}{۴}$$

۲۳۰ . گزینه ۲ با توجه به معادله $x \neq \frac{k\pi}{۲}$

$$\tan x + ۳\cot x - ۲k = ۰ \xrightarrow{\times \tan x} \tan^{۲}x - ۲k\tan x + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \tan x' + \tan x'' = -\frac{b}{a} = ۲k$$

$$\tan x' \cdot \tan x'' = \frac{c}{a} = ۳$$

$$\tan(x' + x'') = ۵ \Rightarrow \frac{\tan x' + \tan x''}{۱ - \tan x' \tan x''} = ۵ \Rightarrow \frac{۲k}{۱ - ۳} = ۵ \Rightarrow k = -۵$$

۲۳۱ . گزینه ۳

می‌دانیم $-\sqrt{۲} \leq \cos x - \sin x \leq \sqrt{۲}$، پس:

$$[\cos x - \sin x] = -۲, -۱, ۰, ۱$$

از طرفی $\tan x + \cot x \leq -۲$ یا $\tan x + \cot x \geq ۲$، پس:

$$[\tan x + \cot x] = \cdots, -۳, -۲, ۲, ۳, \cdots$$

بنابراین تساوی داده شده زمانی برقرار است که هر دو عبارت برابر ۲− باشند.

$$[\cos x-\sin x]=-۲\Rightarrow -\sqrt{۲}\leq \cos x-\sin x<-۱$$
$$[\tan x+\cot x]=-۲\Rightarrow -۲\leq \tan x+\cot x<-۱$$

هر دو نامساوی فوق زمانی برقرار است که داشته باشیم:

$$\begin{cases}\cos x-\sin x=-\sqrt{۲}\\ \tan x+\cot x=-۲\end{cases}\Rightarrow$$

طبق دایرهٔ مثلثاتی فوق کمانهای هم انتها با نقطه «۱» جوابهای معادله هستند، پس:

$$x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\xrightarrow{۰\leq x\leq ۶\pi}x=\frac{۳\pi}{۴},۲\pi+\frac{۳\pi}{۴},۴\pi+\frac{۳\pi}{۴}$$

معادله ۳ جواب در بازهٔ $[۰,۶\pi]$ دارد.

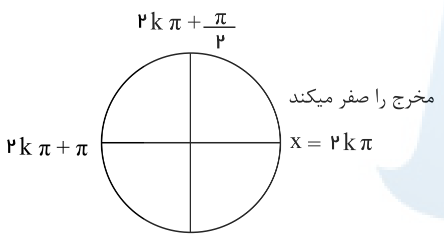
۲۳۲. گزینه ۱ کسر را طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\sin x=۱-\cos^۲ x=\sin^۲ x\ \to \sin^۲ x-\sin x=۰\ \to \sin(\sin x-۱)=۰\ \to \begin{cases}\sin x=۰\to x=k\pi\\ \sin x=۱\to x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

توجه کنید که ریشهٔ مخرج، ریشهٔ معادلهٔ $۱-\cos x=۰$ است، بنابراین:

$$\cos x=۱\ \to x=۲k\pi$$

بنابراین ریشهٔ مخرج از جواب اصلی باید کم شود. یعنی جواب کلی $x=۲k\pi+\pi$ و $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ است.



۲۳۳. گزینه ۳ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{۹\cos^۲ x-۳\sin^۲ x}{\cos x}=\frac{۴\cos x}{\sin x}\Rightarrow \frac{۹(۱-\sin^۲ x)-۳\sin^۲ x}{\cos x}=\frac{۴\cos x}{\sin x}$$
$$(۹-۱۲\sin^۲ x)\sin x=۴\cos^۲ x\ \Rightarrow ۹\sin x-۱۲\sin^۳ x=۴-۴\sin^۲ x$$

$$۱۲\sin^۳ x-۴\sin^۲ x-۹\sin x+۴=۰$$

با فرض $\sin x=t$، $-۱\leq t\leq ۱$ معادله به‌صورت $۱۲t^۳-۴t^۲-۹t+۴=۰$ درمی‌آید که $t=\frac{۱}{۲}$ یک جواب آن است. پس:

$$(۲t-۱)(۶t^۲+t-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{۱}{۲}\\ t=\frac{-۱\pm\sqrt{۹۷}}{۱۲}\end{cases}$$

چون هر سه جواب بالا در بازهٔ $(-۱,۱)$ قراردارند، پس هر سه جواب قابل قبول هستند.

از طرفی معادلهٔ $\sin x=a$ اگر $-۱<a<۱$ دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد، پس معادلهٔ مورد نظر مسألهٔ شش جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۲۳۴. گزینه ۳ با استفاده از رابطه $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ داریم:

$$\cos x(۲\cos^۲ x-۱)=-\frac{۱}{۴}\ \Rightarrow ۲\cos^۳ x-\cos x+\frac{۱}{۴}=۰$$

اگر فرض کنیم $\cos x=t$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۲t^۳-t+\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow ۸t^۳-۴t+۱=۰\Rightarrow ۸t^۳-۱-۴t+۲=۰$$
$$(۲t-۱)(۴t^۲+۲t+۱)-۲(۲t-۱)=۰\Rightarrow (۲t-۱)(۴t^۲+۲t-۱)=۰$$

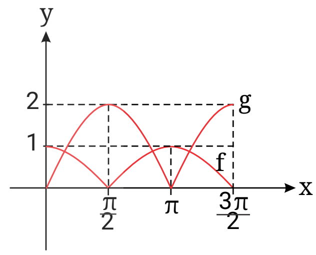
$$\begin{cases} t=\frac{۱}{۲} \\ t=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۴} \\ t=\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۴} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin x=\frac{۱}{۲} \\ \sin x=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴} \\ \sin x=\frac{-\sqrt{۵}-۱}{۴} \end{cases}$$

هر کدام از معادله‌های بالا دو جواب در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ دارند، بنابراین معادله ۶ جواب در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ دارد.

۲۳۵ . گزینه ۳ معادله را به روش هندسی حل می‌کنیم.

با فرض $f(x)=|\cos x|$ و $g(x)=|۲\sin x|$، جواب‌های معادله طول نقاط به توابع f و g است.

$$|\cos x|-۲|\sin x|=۰ \Rightarrow |\cos x|=۲|\sin x| \Rightarrow |\cos x|=|۲\sin x|$$



نمودار توابع f و g در بازهٔ $[۰, \frac{۳\pi}{۲}]$ در ۳ نقطه متقاطع هستند.

۲۳۶ . گزینه ۴ با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$ ، ابتدا صورت معادله را به‌صورت ساده‌تر می‌نویسیم، داریم:

$$\cos^۲ x=۱-\cos^۲ ۳x=\sin^۲ ۳x$$

می‌دانیم $\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ در این صورت $\sin ۳x=\cos(\frac{\pi}{۲}-۳x)$ بوده و خواهیم داشت:

$$\cos^۲ x=\cos^۲(\frac{\pi}{۲}-۳x)$$

جواب کلی معادلهٔ $\cos^۲ x=\cos^۲\alpha$ به‌صورت $x=k\pi\pm\alpha$ می‌باشد. پس داریم:

$$\cos^۲ x=\cos^۲\underbrace{(\frac{\pi}{۲}-۳x)}_{\alpha} \rightarrow x=k\pi\pm\alpha$$

$$\begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-۳\alpha \rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸} \\ x=k\pi+۳x-\frac{\pi}{۲} \rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

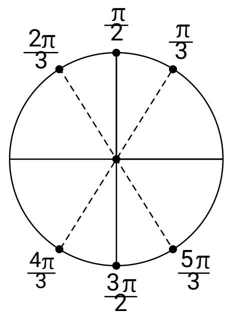
مقادیر $\frac{\pi}{۸}, \frac{۳\pi}{۸}, \frac{۵\pi}{۸}, \frac{۷\pi}{۸}, \frac{۹\pi}{۸}, \frac{۱۱\pi}{۸}, \frac{۱۳\pi}{۸}, \frac{۱۵\pi}{۸}$ از مجموعهٔ جواب $\frac{\pi}{۸}+\frac{k\pi}{۴}$ و مقادیر $\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴}$ نیز از مجموعهٔ جواب $\frac{\pi}{۴}+\frac{k\pi}{۲}$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ به‌دست می‌آید. پس در مجموع ۱۲ جواب در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ داریم.

۲۳۷ . گزینه ۱ با توجه به اینکه $\sin^۲ x=۲\sin x\cos x$ و $\cot x=\frac{\cos x}{\sin}$ داریم:

$$\frac{۳}{۲}\cot x=\sin^۲ x \rightarrow \frac{۳}{۲}\frac{\cos x}{\sin x}=۲\sin x\cos x$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x=۰ \\ \frac{۳}{۲\sin}=۲\sin \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos x=۰ \xrightarrow{\text{جواب خاص}} x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \sin^۲ x=\frac{۳}{۴}=\sin^۲\frac{\pi}{۳} \rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

با مشخص کردن جواب‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی، شکل روبه‌رو به‌دست می‌آید:



در صورت سؤال جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{۶}$ است. با توجه به اینکه جواب‌ها به‌صورت $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ و $k\pi + \frac{\pi}{۲}$ است، مجموع مقادیر i به‌صورت $\{-۲, ۲, ۳\}$ است.

۲۳۸ . گزینه ۳ معادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\sin x - ۲\sin^۳ x = ۰ \Rightarrow \sin x(۱ - ۲\sin^۲ x) = ۰$$

$$\sin x \cos ۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \quad \Rightarrow x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

جواب $k\pi$ را می‌توانیم به‌صورت $(۴k+۰)\frac{\pi}{۴}$ بنویسیم و جواب $(۲k+۱)\frac{\pi}{۴}$ را می‌توانیم به‌صورت اجتماع جواب‌های $(۴k+۱)\frac{\pi}{۴}$ و $(۴k+۳)\frac{\pi}{۴}$ در نظر بگیریم. بنابراین i می‌تواند مقادیر ۰، ۱ و ۳ را داشته باشد.

۲۳۹ . گزینه ۴

$$\cos ۲x + \cos x - \sin x = ۰ \Rightarrow \cos^۲ x - \sin^۲ x + \cos x - \sin x = ۰$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + (\cos x - \sin x) = ۰ \;\Rightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x + ۱) = ۰$$

بنابراین یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:

$$(۱)\ \cos x - \sin x = ۰ \Rightarrow \tan x = ۱ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴}\ ,\ \frac{۵\pi}{۴}$$

$$(۲)\ \cos x + \sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow \sqrt{۲}\cos(x - \frac{\pi}{۴}) = -۱$$

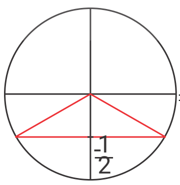
$$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{۴}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow x - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi \pm \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \pi \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

پس ریشه‌ها عبارتند از $x = \frac{\pi}{۴}, \pi, \frac{۵\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۲}$.

۲۴۰ . گزینه ۳ در حل این سوال از دایره مثلثاتی کمک می‌گیریم.

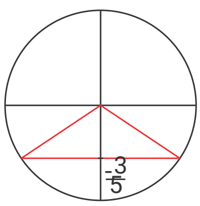
$$(۲\sin x + ۱)(۵\sin x + ۳) = ۰$$

$۲\sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow \sin x = -\frac{۱}{۲}$



$\Rightarrow$ ۲ جواب

$۵\sin x + ۳ = ۰ \Rightarrow \sin x = -\frac{۳}{۵}$



$\Rightarrow$ ۲ جواب

در کل معادله ۴ جواب دارد.

۲۴۱ . گزینه ۴

$$\cos^{۲}x+(m-۱)\cos x-m=۰\xrightarrow{\cos x=t}t^{۲}+(m-۱)t-m=۰$$

$$\Delta=(m-۱)^{۲}+۴m=(m+۱)^{۲}$$

$$\cos x=\frac{(۱-m)\pm(m+۱)}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۱\Rightarrow & \text{در بازهٔ } [-\frac{\pi}{۶},\frac{۲\pi}{۳}] \text{ جواب ندارد}\\ \cos x=-m\end{cases}$$

$$x\in[-\frac{\pi}{۶},\frac{۲\pi}{۳}]\Rightarrow-\frac{۱}{۲}\le\cos x\le۱\Rightarrow-\frac{۱}{۲}\le-m\le۱\Rightarrow-۱\le m\le\frac{۱}{۲}$$

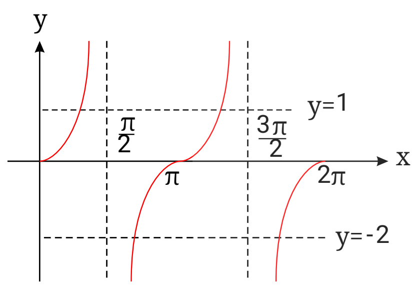
۲۴۲ . گزینه ۳ طرفین رابطه را در $\frac{۱}{\cos^{۲}x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow۲\tan^{۲}x-۱+\tan x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}\Rightarrow۲\tan^{۲}x-۱+\tan x=۱+\tan^{۲}x$$

$$\tan^{۲}x+\tan x-۲=۰\Rightarrow(\tan x+۲)(\tan x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}\tan x=۱\\ \tan x=-۲\end{cases}$$

باتوجه به نمودار مقابل خطوط افقی $y=۱$ و $y=-۲$ در ۴ نقطه منحنی $y=\tan x$ را قطع می‌کنند؛

بنابراین معادلهٔ فوق ۴ ریشه دارد.



۲۴۳ . گزینه ۲

$$x=۲t\Rightarrow\cos۲t+\cos t=-۱\Rightarrow۲\cos^{۲}t-۱+\cos t=-۱\Rightarrow\cos t(۲\cos t+۱)=۰$$

$$\cos t=۰\Rightarrow t=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=\pi\ ,\ ۳\pi$$

$$\text{cost}=-\frac{۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\begin{cases}t=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\frac{x}{۲}=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۴k\pi+\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۴\pi}{۳}\\ t=۲k\pi-\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\frac{x}{۲}=۲k\pi-\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۴k\pi-\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۸\pi}{۳}\end{cases}$$

۲۴۴ . گزینه ۴

چون طرف دوم تساوی بزرگتر یا مساوی ۳ می‌باشد پس معادله فقط وقتی برقرار است که:

$$\begin{cases}\sin x=۰\\ \cos x=۱\\ \cos۲x=۱\Rightarrow x=۲k\pi\Rightarrow۲\pi,۴\pi\\ \cos۳x=۱\end{cases}$$

۲۴۵ . گزینه ۲

$$۳\cos^{۲}x-\sqrt{۳}\sin x\cos x=۳\Rightarrow۳(۱-\sin^{۲}x)-\sqrt{۳}\sin x\cos x=۳$$

$$\Rightarrow۳-۳\sin^{۲}x-\sqrt{۳}\sin x\cos x=۳\Rightarrow-\sin x(۳\sin x+\sqrt{۳}\cos x)=۰$$

$$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

$$۳\sin x+\sqrt{۳}\cos x=۰\Rightarrow۳\sin x=-\sqrt{۳}\cos x\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow\tan x=-\tan\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\tan x=\tan(-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۶}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

۲۴۶ . گزینه ۴

$$۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}\times۲\cos^{۲}\alpha\times۲\cos^{۲}۲\alpha=\frac{۱}{۸}\Rightarrow۶۴\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}\cos^{۲}\alpha\cos^{۲}۲\alpha=۱\Rightarrow۸\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\alpha\cos۲\alpha=\pm۱$$

دو طرف را در $\sin\frac{\alpha}{۲}\neq۰$ ضرب می‌کنیم:

$$۴\underbrace{(۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲})}_{\sin\alpha}\cos\alpha\cos۲\alpha=\pm\sin\frac{\alpha}{۲}\Rightarrow۲\underbrace{(۲\sin\alpha\cos\alpha)}_{\sin۲\alpha}\cos۲\alpha=\pm\sin\frac{\alpha}{۲}\Rightarrow\sin۴\alpha=\sin(\pm\frac{\alpha}{۲})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4\alpha=2k\pi\pm\dfrac{\alpha}{2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{7}{2}\alpha=2k\pi\\ \dfrac{9}{2}\alpha=2k\pi\end{cases}\\ 4\alpha=(2k+1)\pi\mp\dfrac{\alpha}{2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{9}{2}\alpha=(2k+1)\pi\\ \dfrac{7}{2}\alpha=(2k+1)\pi\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{7}{2}\alpha=k\pi\\ \dfrac{9}{2}\alpha=k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{2k\pi}{7}\\ \alpha=\dfrac{2k\pi}{9}\end{cases}$$

باید $\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$؛ یعنی $\alpha\neq 2k\pi$، پس ریشه‌ها در بازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ عبارتند از:

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{2\pi}{7}\ ,\ \dfrac{4\pi}{7}\ ,\ \dfrac{6\pi}{7}\ ,\cdots,\ \dfrac{12\pi}{7} & \text{۶ جواب}\\ \alpha=\dfrac{2\pi}{9}\ ,\ \dfrac{4\pi}{9}\ ,\ \dfrac{6\pi}{9}\ ,\cdots,\ \dfrac{16\pi}{9} & \text{۸ جواب}\end{cases}$$

پس معادله در بازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$، ۱۴ جواب دارد.

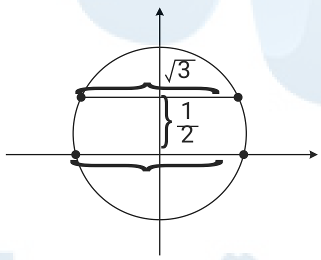
۲۴۷ . گزینه ۴

$$\frac{3\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-2\sin\theta=0\Rightarrow\sin\theta\left(\frac{3\sin\theta}{\cos^2\theta}-2\right)=0\Rightarrow 2\sin\theta=0\quad \text{یا}\quad 3\sin\theta=2cos^2\theta$$

معادلهٔ دوم را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$3\sin\theta=2(1-\sin^2\theta)\Rightarrow 2\sin^2\theta+3\sin\theta-2=(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)=0\quad\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=-2\ \text{غ‌ق‌ق}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

مطابق شکل زیر، چهارضلعی حاصل ذوزنقه است.



مساحت این ذوزنقه برابر است با:

$$S=\frac{(2+\sqrt{3})\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

۲۴۸ . گزینه ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(\pi\sin^2x)+\sin(\pi(1-\sin^2x))=\sqrt{2}\Rightarrow\sin(\pi\sin^2x)+\sin(\pi-\pi\sin^2x)=\sqrt{2}$$

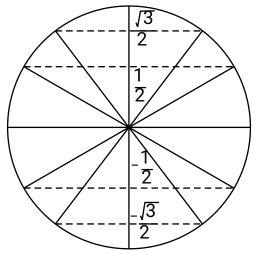
از رابطهٔ $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin(\pi\sin^2x)+\sin(\pi\sin^2x)=\sqrt{2}\Rightarrow 2\sin(\pi\sin^2x)=\sqrt{2}\Rightarrow\sin(\pi\sin^2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون $0\leq\sin^2x\leq 1$ پس، $0\leq\pi\sin^2x\leq\pi$ و در بازهٔ $[0,\pi]$ فقط در $\dfrac{\pi}{4},\ \pi-\dfrac{\pi}{4}$ مقدار سینوس برابر $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ است، پس:

$$\begin{cases}\pi\sin^2x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sin^2x=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{1}{2}\\ \pi\sin^2x=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\sin^2x=\frac{3}{4}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

طبق دایره مثلثاتی مقابل در $(۰ , ۲\pi)$ در دو نقطه، $\sin x = \frac{۱}{۲}$ و همچنین در دو نقطه $\sin x = -\frac{۱}{۲}$ است. به همین طریق $\sin x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در بازهٔ $(۰ , ۲\pi)$ دارای چهار جواب است، پس در کل معادله ۸ جواب دارد.



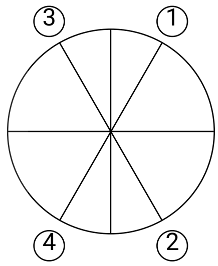
۲۴۹ . گزینه ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\cos ۲x - \frac{۱}{۶}\tan^۲ x = -۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ - \frac{۱}{۶}\tan^۲ x = -۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ x = \frac{۱}{۶}\tan^۲ x \Rightarrow ۱۲\cos^۲ x = \tan^۲ x$$

$$\Rightarrow ۱۲\cos^۲ x + ۱ = \tan^۲ x + ۱ \Rightarrow ۱۲\cos^۲ x + ۱ = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۱۲\cos^۴ x + \cos^۲ x = ۱ \Rightarrow ۱۲\cos^۴ x + \cos^۲ x - ۱ = ۰$$

از تغییر متغیر $\cos^۲ x = t$ استفاده می‌کنیم.

$$۱۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \Rightarrow (۳t+۱)(۴t-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{۱}{۳} \\ t = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$



$\cos^۲ x = -\frac{۱}{۳}$ غیرقابل قبول , $\cos^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{۱}{۲}$

$$\cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \to x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad (I)$$

$$\cos x = -\frac{۱}{۲} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) \to x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \quad (II)$$

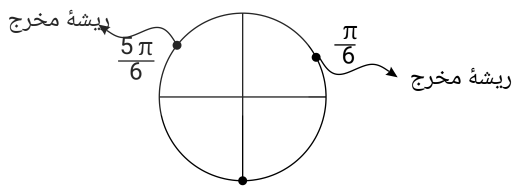
جواب‌های I در دایره مثلثاتی نقاط (۱) و (۲) و جواب‌های II در دایره مثلثاتی نقاط (۳) , (۴) هستند که همگی را می‌توان به‌صورت $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ نوشت.

۲۵۰ . گزینه ۱ با توجه به رابطهٔ $\cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$، صورت معادله را ساده کرده و حل می‌کنیم:

$$\frac{\sin x - (\cos^۲ x - \sin^۲ x)}{۲\sin x - ۱} = \frac{\sin x - \cos ۲x}{۲\sin x - ۱} = ۰ \to \sin x = \cos ۲x$$

$$\xrightarrow{\cos ۲x = \sin(\frac{\pi}{۲} - ۲x)} \sin x = \sin(\frac{\pi}{۲} - ۲x) \to \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۲x \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} + ۲x \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ x = -۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = ۲k'\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$



اما می‌دانیم معادله در ریشه‌های مخرج تعریف نشده است. ریشه‌های مخرج عبارتند از:

$$۲\sin x - ۱ = ۰ \to \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \to \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

با کمی تأمل می‌بینیم $\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ زیرمجموعه‌ای از $2k\pi+\frac{\pi}{6}\cup 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ است.

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی بالا، جواب کلی معادلهٔ موردنظر به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

۲۵۱. گزینه ۴ می‌دانیم $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ و $\tan x-\cot x=-2\cot 2x$، بنابراین:

$$\frac{\tan x+\cot x}{\tan x-\cot x}=\frac{\frac{2}{\sin 2x}}{-2\cot 2x}=\frac{\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sin 2x}}}{\frac{\cancel{-2}\cos 2x}{\cancel{\sin 2x}}}=-\frac{1}{\cos 2x}=4\sin 2x\rightarrow 4\sin 2x\cos 2x=1$$

$$\rightarrow 2(\underbrace{2\sin 2x\cos 2x}_{\sin 4x})=-1\rightarrow 2\sin 4x=-1$$

$$\rightarrow \sin 4x=-\frac{1}{2}=\sin x(-\frac{\pi}{6})\rightarrow\begin{cases}4x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\\ 4x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\\ x=\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{24}\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\rightarrow\begin{cases}k=1\rightarrow\frac{11\pi}{24}\checkmark\\ k=2\rightarrow\frac{23\pi}{24}\checkmark\end{cases}$$

$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{24}\rightarrow\begin{cases}k=0\rightarrow\frac{7\pi}{24}\checkmark\\ k=1\rightarrow\frac{19\pi}{24}\checkmark\end{cases}$$

معادله در بازهٔ $[0,\pi]$ دارای چهار جواب است.

۲۵۲. گزینه ۳ لازم است $\cos x-\sin x\geq 0$ و $\cos 2x\geq 0$ باشد. حال دو طرف را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\cos x-\sin x)^2=2\cos 2x$$

$$\Rightarrow(\cos x-\sin x)^2=2(\cos^2 x-\sin^2 x)=2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

بنابراین یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:

$$(1)\ \cos x-\sin x=0\Rightarrow\cos x=\sin x\ \Rightarrow\tan x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{5\pi}{4}$$

$$(2)\ \cos x-\sin x=2(\cos x+\sin x)\ \Rightarrow -3\sin x=\cos x\Rightarrow\tan x=-\frac{1}{3}$$

معادلهٔ دوم هم در بازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ دو ریشهٔ α و β (متمایز با $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$) دارد. با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر α در شرط اولیهٔ معادله صدق نمی‌کند ولی β صدق می‌کند؛ پس معادله در بازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ مجموعاً سه ریشه دارد: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ و β.