



محل مهر
یا امضاء
مدیر

جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه ۳ تهران

ش صندلی (ش داوطلب):
نام و نام خانوادگی:
نام پدر:

پایه: دوازدهم
رشته: ریاضی

سؤال امتحان درس: گسسته
نام دبیر: خلیلی

ساعت امتحان: ۷:۳۰ صبح/عصر نام واحد آموزشی: روشنگران
وقت امتحان: ۱۰۰ دقیقه سال تحصیلی ۴۰۱-۴۰۰ تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۱۰/۷ نوبت امتحانی: اول ۱۴۰۰
تعداد برگ سوال: ۳ برگ ۵ص

پاسخ سئوالات در روی برگ سؤال نوشته شود نیاز به پاسخنامه سفید ندارد پاسخنامه سفید داده شود

بارم	
۱	۱- معادله سیاله $۱۲ = ۷x - ۵y$ را حل کنید و مجموع جوابها به کدام دسته هم نهشتی قرار دارد؟
۱	۲- ثابت کنید حاصل ضرب <u>۳</u> عدد متوالی مضرب <u>۶</u> است.
۱	۳- اگر a عددی فرد باشد و $a + ۲ b$ ، ثابت کنید: $۱۶ a^۴ - b^۴$
۱	۴- الف) برهان خلف را تعریف کنید: ب) ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y$

۵- ثابت کنید جمع یک عدد گویا با یک عدد گنگ ، حاصل گنگ است؟

۱

(ب) ثابت کنید : $۲۵ | ۱۴n^2 + ۱۹n + ۶ \leftarrow ۵ | ۲n + ۱$

۶- اگر ۱۶ آذر ۲ شنبه باشد ، سومین یکشنبه در ماه بهمن چه تاریخی است؟

۱

۷- الف) باقی مانده تقسیم $۱۵^{۱۰۰}$ بر ۲۸ کدام است؟

۱

$ac \equiv bc \rightarrow \dots$

(ب) جای خالی را پر کنید:

۸- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۴۳ ، باقی مانده مجذور خارج قسمت است. اگر a مضرب ۹ باشد ، چند جواب برای a داریم.

۱

۹- الف) حاصل $(a^4 \text{ و } b^5)$ و $(a^2 \text{ و } a^3)$ کدام است؟

۱

ب) کوچکترین عضو مثبت مجموعه $S = \{x | x = -48 - 5q\}$

۱

۱۰- اگر $ra + sb = 1$ باشد و $a|b \times c$ حاصل $[a \text{ و } c]$ کدام است؟ $a, b \text{ و } c \in \mathbb{N}$

۱

۱۱- در گراف G با رئوس $2, 2, 2, 2, 3, 3$ دو رأس با درجه بزرگتر مجاور نیستند، تعداد دور به طول 4 کدام است؟

۱۲- با 10 رأس و 8 یال حداقل و حداکثر مقدار برای Δ کدام است؟

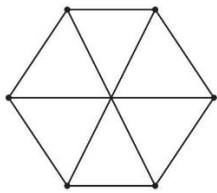
$$V = \{a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d \text{ و } e\} - ۱۳$$

الف) در گرافی با رئوس بالا ، چند گراف با ۲ یال می توان ساخت که ۲ یال رأس مشترک نداشته باشند؟

۱

ب) چند گراف ۲ منتظم با رئوس بالا می توان ساخت؟

۱۴- در گراف روبرو چند دور به طول ۴ داریم؟



۱

۱۵- در گراف با ۸ رأس :

الف) اگر بخواهیم حتماً همبند باشد ، حداقل چند یال دارد؟

۱

ب) اگر ناهمبند با دو بخش و $\delta = ۱$ باشد ، حداکثر چند یال دارد؟

۱۶- گرافی از مرتبه ۸ که ۲ رأس از درجه ۴ دارد ، حداکثر چند یال دارد؟

۱

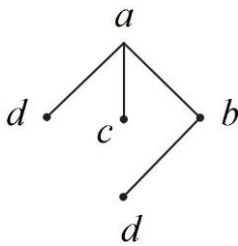
۱۷- چند نوع گراف ۵ منتظم از مرتبه ۸ داریم؟ (در رأسها بر چسب ندارد)

۱

۱۸- در گراف از مرتبه ۵ که یک زیر گراف C_5 دارد و $\Delta + \delta = 6$ و کمترین تعداد یال را داشته باشد ، این گراف چند دور دارد؟

۱

۱۹- در گراف روبرو چند زیر گراف ۴ رأس داریم که یالهای ab و bd را داشته باشد؟



ب) در گراف r منتظم از مرتبه ۵ ، r چند جواب دارد؟

۱

۲۰- در گراف k_5

الف) چند دور به طول ۴ شامل رئوس a و b داریم؟

۱

ب) بین دو رأس a و b چند مسیر به طول ۳ داریم؟

۲ پاسخ تشریحی ۲

۱) برای حل معادله سیاله خطی ، در طرف معادله لا به هم نشتی به چانه ضرب کوچک تری بریم .

$$7x - 5y = 12 \Rightarrow 7x - 5y \stackrel{5}{=} 12 \stackrel{5}{=} 2 \Rightarrow 2x \stackrel{5}{=} 2 \xrightarrow{\substack{\div 2 \\ (2,5)=1}} x \stackrel{5}{=} 1 \Rightarrow x = 5k + 1$$

حالا لا در معادله اصلی جایگذاری می کنیم تا y بر حسب k بدست بیاید .

$$7(5k+1) - 5y = 12 \Rightarrow y = 7k - 1$$

پاسخ : $x = 5k + 1$ ، $y = 7k - 1$

۲) فرض کنید $t-1$ ، t ، $t+1$ سه عدد صحیح متوالی باشند . با در نظر گرفتن همه حالت ها ثابت می کنیم که $t(t-1)(t+1) = 4q$ است .

$$\textcircled{1} t = 3k \Rightarrow t(t-1)(t+1) = 3k(3k-1)(3k+1) = 3q'$$

$$\textcircled{2} t = 3k+1 \Rightarrow t(t-1)(t+1) = (3k+1)(3k)(3k+2) = 3q'$$

$$\textcircled{3} t = 3k+2 \Rightarrow t(t-1)(t+1) = (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3q'$$

تا اینجا ثابت کردیم که در هر حالت ، حاصل ضرب سه عدد متوالی بر ۳ بخش پذیر است . الان کافی است ثابت کنیم بر ۲ نیز بخش پذیر است .

$$\textcircled{1} t = 2k \Rightarrow t(t-1)(t+1) = 2k(2k-1)(2k+1) = 2q'$$

$$\textcircled{2} t = 2k+1 \Rightarrow t(t-1)(t+1) = (2k+1)(2k)(2k+2) = 2q'$$

و ثابت شد که در هر حالت بر ۲ هم بخش پذیر است . پس بر ۶ بخش پذیر است و حکم اثبات شد .

★ حاصل ضرب n عدد صحیح متوالی بر n! بخش پذیر است . (صفر نباشد)

۳) چون a فرد است، پس $a+2$ هم فرد است. با توجه به اینکه b یا $a+2$ پس b هم فرد است. از طرفی می دانیم مربع یک عدد فرد به صورت $4k+1$ است. زیرا:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4 \underbrace{k(k+1)}_{2q} + 1 = 8q+1$$

لذا داریم: $a^2 = 8q+1$ ، $b^2 = 8q'+1$. طبق اتحاد مزدوج $a^2 - b^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

$$a^2 - b^2 = (8q+1 - 8q'-1)(8q'+1 + 8q'+1) = 8(q-q') \times 2(4q+4q'+1) = 16q''$$

$$\text{لذا } 16 \mid a^2 - b^2$$

۴) الف) در این روش استدلال، فرض می کنیم که حکم نادرست باشد، سپس با استفاده از منطق و قوانین گزاره‌ها و دنباله‌های از استدلال می‌دست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیر ممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \iff x^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \quad \text{ب)}$$

$$\iff x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2y + 1 + x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x-y)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2 \geq 0$$

بدیهی و درست

۵) الف) فرض کنید حاصل جمع گنگ نباشد. پس گویاست. از طرفی می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، یک عدد گویا است.

$$\alpha \in \mathbb{Q}$$

$$\beta \in \mathbb{Q}'$$

$$\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$$

$$(\alpha + \beta) - \alpha = \beta \in \mathbb{Q}$$

گویا گویا گویا

که این یک تناقض با گنگ بودن β است. پس فرض خلف باطل است، حکم ثابت می‌شود.

$$a \mid 2n+1 \xrightarrow{2 \times} 2a \mid 4n^2 + 4n + 1$$

$$a \mid 5n^2 \Rightarrow a \mid 10n^2$$

$$\oplus \left. \begin{array}{l} 2a \mid 4n^2 + 4n + 1 \\ a \mid 10n^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid 4n^2 + 4n + 1$$

$$a \mid 10n^2 + 5$$

* اگر $a \mid b$ ، $a \mid c$ ، آنگاه $a \mid mb \pm nc$

۶) در مسائل تقویم نگاری، فاصله روزها را حساب می‌کنیم و سپس به هم نشتی به پیمانه ۷ می‌بریم. عدد نهایی برابر تعداد روزی است که باید جلو برویم. (فاصله ۱۴ آذر تا ۱ بهمن)

$$\text{فاصله} = \underbrace{۱۴}_{\text{آذر}} + \underbrace{۳۰}_{\text{کل دی}} \equiv ۲$$

پس چهارشنبه برابر ۱ بهمن است. اولین یکشنبه بهمن می‌شود ۵ بهمن. حالا ۴ روز جلوتر بروم می‌شود ۱۹ بهمن که سیزدهم یکشنبه ماه است.

$$۱۵^2 \equiv ۲۲۵ \equiv ۱ \pmod{۱۵^2} \Rightarrow (۱۵^2)^{۵۰} \equiv ۱^{۵۰} \equiv ۱ \pmod{۱۵^2} \quad \checkmark$$

$$ac \equiv bc \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{\gcd(m,c)}}$$

۷) ب)

* موقع تقسیم دو طرف هم نشتی به یک عدد، پیمانه هم بر (m, c) تقسیم می‌شود.

$$\begin{array}{r} a \overline{) 43} \\ \underline{q} \\ q^2 \end{array}$$

۸) تقسیم را بنویسیم:

می‌دانیم یک شرط مهم در قضیه تقسیم این است که $a < b$ یعنی $q^2 < 43$. پس $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ است.

حالا باید امتحان کنیم به ازای کدام مقادیر q ، a مقرب q خواهد بود.

$$q = 1 \Rightarrow a = 44 \quad \times \qquad q = 2 \Rightarrow a = 90 \quad \checkmark$$

$$q = 3 \Rightarrow a = 138 \quad \times \qquad q = 4 \Rightarrow a = 184 \quad \times$$

$$q = 5 \Rightarrow a = 245 \quad \times \qquad q = 6 \Rightarrow a = 294 \quad \times$$

که پس فقط $q = 2$ قابل قبول است. $a = 90$

$$\left. \begin{array}{l} (a^2, a^3) = |a^2| = a^2 \\ [a^4, b^5] \end{array} \right\} \Rightarrow (a^2, [a^4, b^5]) = a^2 \quad \checkmark$$

۹) الف)

دقت کنید که حاصل کم a^4 و b^5 یک عدد مقرب a^4 به شکل $a^4 q$ است. پس اینگونه برچورد کنیم.

$$-41 - 5q > 0 \Rightarrow q < -9.4 \xrightarrow[q=-10]{q \in \mathbb{Z}} x_{\min}^+ = 2 \quad \checkmark$$

ب)

۱۱۱) می دانیم اگر دو پارامتر a و b داشته باشیم: اگر $ra + sb = 1$ باشد، یعنی a و b نسبت به هم اول اند، چون $a | b \times c$ پس حتماً $a | c$. لذا حاصل $[a, c]$ برابر c خواهد بود.

۱۱۲) ابتدا گراف را رسم می کنیم.



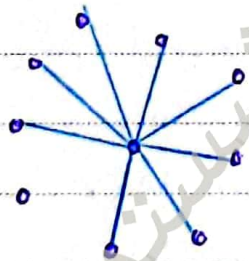
★ به گراف های این مدلی، گراف دو بخشی می گوئیم.

★ در گراف دو بخشی، دور به طول فرد نداریم.

در این مسئله چون رئوس بدون نام هستند، پس فقط رنجیت دورها مهم است.

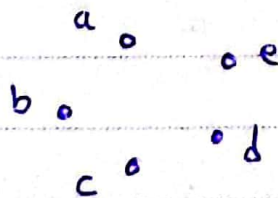


۱۱۳)



در گراف مقابل $\Delta_{max} = 8$ داریم.
★ به گراف های این مدلی، ستاره می گوئیم.

در گراف مقابل $\Delta_{min} = 2$ داریم.



۱۱۴) الف) این گراف ظرفیت داشتن $10 = \frac{5 \times 4}{2}$ یال دارد.
حالا ما باید ۲ یال را از آنها انتخاب کنیم، و سپس یال های دارای رأس مشترک را از آن کم کنیم.

$$k = 10 - 10 = 0 = 10 - 10 = 0$$

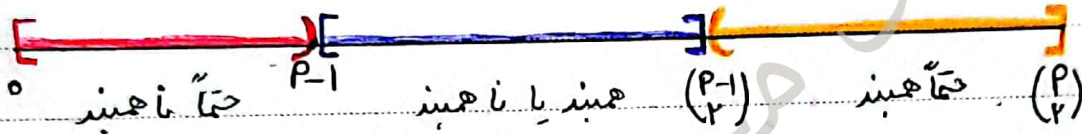


ب) فقط یکی . یک پنج ضلعی

تا ۹

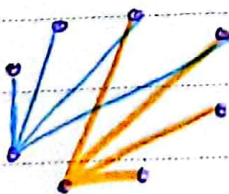
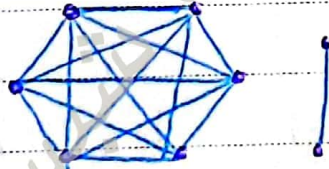
۱۴ دورهای به شکل \triangleleft که سوراخ هستند .
دورهای به شکل \triangle که شش تا هستند .

۱۵ الف ا



اگر ۹ در هر بازه محور بالا قرار بگیرد، وضعیت همبندی یا ناهمبندی گراف مشخص است .
پس برای اینکه حتماً همبند باشد باید حداقل $21 = \binom{7}{2}$ یال داشته باشد .

ب) گراف مطلوب

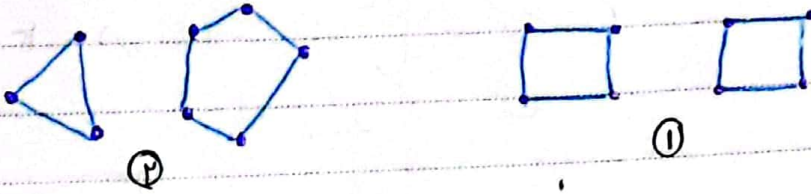


۱۶ ابتدا دو رأسی که چهار یال دارند را رسم می کنیم .
حالا برای همه رئوس دیگر جز این دو تا ، ما می توانیم همه یال های ممکن را رسم کنیم و در نظر بگیریم . اشکال یک گراف K_4 داریم .
که $15 = \binom{7}{2}$ یال دارد .

پس روی هم رفته $23 = 15 + 4 + 4$ یال داریم .

۱۷) اگر ما به تعداد n تا گراف G به شکل ۵- منظم از مرتبه ۸ داشته باشیم، آنگاه به تعداد n تا هم گراف \bar{G} داریم.

مکمل گراف ۵- منظم از مرتبه ۸، می شود گراف ۲- منظم از مرتبه ۸. پس



۱۸) گراف ما به صورت زیر است

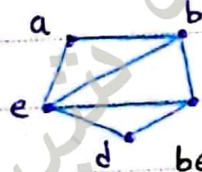


اما تعدادی یال اضافه روی این باید باشد.

وقتی $\Delta + \delta = 6$ است، پس دو حالت داریم

① $\delta = \Delta = 3$ یعنی درجه هر رأس ۳ باشد. این امکان ندارد. زیرا

* گراف فرد - منظم از مرتبه فرد نداریم.



② حالت $\Delta = 4, \delta = 2$ است، گراف مطلوب است.
دوره ها: C_5 , $becb$, $aebe$, $ecde$, $bedcb$.

۱۹) الف) باید یک رأس دیگر از بین c, d انتخاب کنیم. یال هم می تواند باشد یا نباشد.
① رأس c با یال ac رأس c بدون یال ac ② رأس d با یال ad ③ رأس d بدون یال ad
ب) ۲، ۴ می تواند مورد قبول باشد.

۲۰) الف) دو تا از سه رأس c, d, e لازم است. $\binom{3}{2} = 3$. آن دو رأس به ۲ طریق جایگشت دارند و خود a به دو طریق جایگشت می شوند. پس $3 \times 2 \times 2 = 12$ دور داریم.
ب) دو رأس انتخاب می کنیم و به ۲ جایگشت دارند. پس $2 \times 2 = 4$ مسیر داریم.