نام و نام خانوادگی:	بسمه تعالی	آزمون درس: ریاضیات گسسته
کلاس:	اداره آموزش وپرورش منطقه۱۸	تعداد صفحه: ۲
پایه:دوازدهم	دبیرستان نمونه دولتی فدک	مدت آزمون: ۱۲۰دقیقه
رشته:ریاضی	امتحانات نوبت اول دی ماه ۱۴۰۱	
نمره به عدد:	نمره به حروف:	امضای دبیر:

۱ ثابت کنید اگر a برابر مجموع مربع‌های ۲ عدد صحیح باشد. $2a$ نیز برابر مجموع مربع‌های دو عدد صحیح است. ۱

۲ گزارهٔ درست را اثبات کنید و برای گزارهٔ نادرست، مثال نقض ارائه دهید.

الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ۰.۵

ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است. ۰.۵

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است. ۱

۴ برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید: ۱

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$$

۵ بزرگ‌ترین مقدار x را بیابید به‌طوری که x هر دو عدد $7n-4$ و $5n+3$ را بشمارد. ۱

۶ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $5|4k+1$، ثابت کنید: $25|16k^2+28k+6$ ۱

۷ ثابت کنید اگر n عددی طبیعی باشد کسر $\frac{21n+4}{14n+3}$ ساده شدنی نیست. ۱

۸ در تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۷ باقیماندهٔ تقسیم ۴ واحد از مربع خارج قسمت کمتر است، بیشترین مقدار ممکن a را بیابید. ۱

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به‌ترتیب ۳ و ۲ باشد؛ باقی‌ماندهٔ تقسیم a را بر ۳۰ بیابید. ۱

۱۰ اگر باقیماندهٔ تقسیم m و n بر ۱۳ به‌ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقیماندهٔ تقسیم عدد $5n-3m$ بر ۱۳ را به‌دست آورید. ۱

۱۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(1000)^{25}\times 9+11$ را بر ۷ بیابید. ۱

۱۲ اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟ ۱

۱۳ ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به‌عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$. ۱

۱۴ معادلهٔ همنهشتی $3x \overset{7}{\equiv} 13$ را حل و جواب عمومی آن را به‌دست آورید. ۱

۱۵ با تبدیل معادلهٔ سیاله خطی $2000x+5000y=29000$ به معادلهٔ همنهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید. ۱

۱۶ تعداد کل گراف‌های ساده را روی مجموعهٔ $V=\{a,b,c,d,e\}$ بیابید. همچنین مطلوب است تعداد گراف‌هایی که: ۱

الف – دارای ۵ یال باشد.

ب – دارای ۷ یال باشد و یال‌های ed, ab, cd را شامل باشد.

۱۷ هرگاه $G=(V,E)$, $V=\{a,b,c,d,e\}$, $E=\{ac,dc,ed,da,bc,ce\}$ 1

الف – مطلوب است: $p+q+\delta+\Delta$.

ب – مطلوب است: $|N_G(a)|+|N_G[e]|$.

۱

۱۸ اگر درجات رئوس گراف G به‌صورت ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۵ باشد، اندازهٔ گراف $\bar{G}$ چقدر است؟ ۱

۱۹ در گراف $K_۵$، بین ۲ رأس دلخواه و متمایز u, v چند مسیر متفاوت وجود دارد؟ ۱

۲۰ گراف $P_۵$ را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید. ۱

پاسخنامه تشریحی

۱ به روش مستقیم ثابت می‌کنیم: (فرض می‌کنیم x و y دو عدد صحیح می‌باشند.)

$$a = x^2 + y^2 \Rightarrow 2a = 2x^2 + 2y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= (x+y)^2 + (x-y)^2$$

۲

نادرست

الف

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^C$$
$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^C$$

درست

ب

$$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1) = 4 \times 2q = 8q$$

۳ از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha - \beta = m \in Q \\ \alpha + \beta = n \in Q\end{array}\right\} \Rightarrow 2\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in Q \ (\text{تناقض با فرض})$$

۴

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است.

۵

$$\left.\begin{array}{l}x \mid 7n - 4 \to x \mid 5\,(7n-4) \\ x \mid 5n + 3 \to x \mid 7\,(5n+3)\end{array}\right\} \Rightarrow x \mid 7\,(5n+3) - 5\,(7n-4) \to x \mid 41$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار x، ۴۱ است.

۶

$$5 | 4k + 1 \to 5^2 | (4k+1)^2 \to 25 | 16k^2 + 8k + 1 \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{l}5 | 4k + 1 \\ 5 | 5\end{array}\right\} \to 25 | 20k + 5 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases}25 | 20k + 5 \\ 25 | 16k^2 + 8k + 1\end{cases} \to 25 | 16k^2 + 28k + 6$$

۷ باید ثابت کنیم $(21n + 4\ ,\ 14n + 3) = 1$ می‌توان نوشت:

$$(21n + 4\ ,\ 14n + 3) = (21n + 4 - 14n - 3\ ,\ 14n + 3) = (7n + 1\ ,\ 14n + 3) = (1\ ,\ 7n + 1) = d$$

در نتیجه $d|1$ بنابراین $d = 1$، یعنی $21n + 4\ ,\ 14n + 3$ هیچ مقسوم علیه مشترکی جز ± 1 ندارند و کسر مورد نظر ساده شدنی نیست.

۸ طبق فرض داریم:

$$a = 27q + q^2 - 4\ ,\quad q^2 - 4 < 27$$

بنابراین $q^2 < 31$ و $q \leq 5$ بنابراین بیشرین مقدار a برابر ۱۵۶ بدست می‌آید.

۹ بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{cases}a = 5q + 2 \\ a = 6q' + 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6a = 30q + 12 \\ 5a = 30q' + 15\end{cases} \Rightarrow a = 30q'' - 3$$

$$\Rightarrow a = 30r + 27$$

۱۰

$$\left.\begin{array}{l}m = 13q_1 + 2 \xrightarrow{\times 3} 3m = 13(3q_1) + 6 \\ n = 13q_2 + 9 \xrightarrow{\times 5} 5n = 13(5q_2) + 45\end{array}\right\} \to 5n - 3m = 13q' + 39 \to 5n - 3m = 13q'' + 0 \to r = 0$$

۱۱

$1000 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \overset{7}{\equiv} (-1)^{25} \times 9 + 11 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow r = 2$

۱۲

روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصلهٔ اول تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$29 + 30 + 30 + 30 + 12 = 131 \to 131 \overset{7}{\equiv} 5$

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد.

۱۳

$a \equiv b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|c(a-b) \Rightarrow m|ac-bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

۱۴

نکته : $ac \overset{m}{\equiv} bc\,,\ (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

$3x \overset{7}{\equiv} 13 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 13 - 7 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow x = 7k + 2$

۱۵

معادلهٔ سیاله $2x + 5y = 29$ دارای جواب است، زیرا:

$\overbrace{(2,5)}^{1}|29$

$2x + 5y = 29 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 29 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow x = 5k + 2$

x را در معادله قرار می‌دهیم:

$2(5k+2) + 5y = 29 \Rightarrow 5y = -10k + 25 \Rightarrow y = -2k + 5$

۱۶

$\binom{5}{2} = 10 \to$ تعداد کل گراف‌ها $= 2^{10} = 1024$

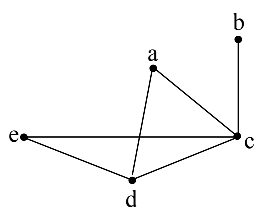
الف –

تعداد گراف‌ها $= \binom{10}{5} = 252$

ب –

$7 - 3 = 4\ ,\ 10 - 3 = 7 \to$ تعداد گراف‌ها $= \binom{7}{4} = 35$

۱۷



$p = 5\ ,\ q = 6\ ,\ \delta = 1\ ,\ \Delta = 4$

$p + q + \delta + \Delta = 16$

$\left.\begin{array}{l} N_G(a) = \{d, c\} \to |N_G(a)| = 2 \\ N_G[e] = \{e, c, d\} \to |N_G[e]| = 3 \end{array}\right\} \to 2 + 3 = 5$

۱۸

$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \Rightarrow 5 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 2q \Rightarrow q = 12$

$q + \bar{q} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 12 + \bar{q} = \frac{8 \times 7}{2} \Rightarrow 12 + \bar{q} = 28 \to q = 16$

۱۹

مسیر به طول ۱   ۱ $u, v \rightarrow$

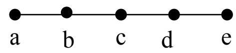
مسیر به طول ۲   ۳ $\rightarrow u\,\underline{۳}\,v$ $u, \boxed{۳}, v \rightarrow$

مسیر به طول ۳   ۶ $\rightarrow u\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,v$ $u, \boxed{۳}, \boxed{۲}, v \rightarrow$

مسیر به طول ۴ $\frac{۶}{۱۶}$ $\rightarrow u\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,\underline{۱}\,v$ $u, \boxed{۳}, \boxed{۲}, \boxed{۱}, v \rightarrow$

---

۲۰   شکل زیر را در نظر بگیرید:



P۵

$abcd \quad , \quad bcde$