



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

فعالیت



۱. فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت درباره روان شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

$$۳۰ + ۲۵ = ۵۵$$

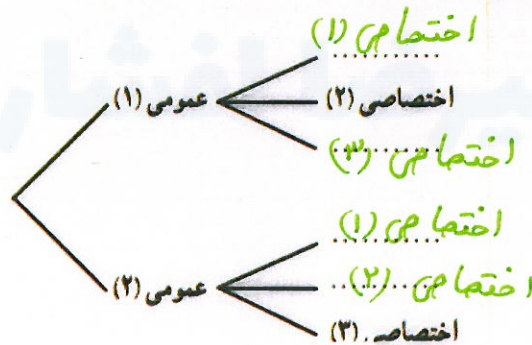
واضح است که او می تواند یکی از ۳۰ کتاب روان شناسی «یا» یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند و در مجموع، $۵۵ = ۳۰ + ۲۵$ راه انتخاب دارد.

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (علیها السلام) است. او می تواند به صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همه حالت های ممکن را که او می تواند به صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسید: $A = \{ \text{اتوبوس، تاکسی، پیاده روی، مترو، رایگان} \}$. او می تواند به صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک شما برای حل کردن هر دو قسمت، از قاعده یا اصلی استفاده کردید که به اصل جمع معروف است و به صورت زیر بیان می شود.

$A = \{ \text{سرویس بیمارستان} \}$

فعالیت

فرض کنید دانشجویی می خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟ با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید:



$$۲ \times ۳ = ۶$$

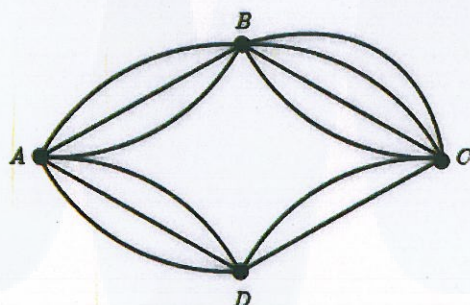


چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

کار در کلاس

مطابق شکل روبه‌رو، میان چهار شهر A, B, C, D راه‌هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می‌توان:
الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟ از A به B سه راه وجود دارد. از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C چهار راه موجود است؛ بنابراین، طبق اصل ضرب به $3 \times 4 = 12$ طریق می‌توان از A به C (از طریق B) سفر کرد.



توجه: درستی الف نصف از ضرب
شهر B سفر کرد

ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟
برای سفر از A به C می‌توان یکی از دو مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$ «یا» $A \rightarrow D \rightarrow C$ را انتخاب کرد (اصل...). بنابراین:
تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر D + تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر B = تعداد راه‌های سفر از A به C

$$= 3 \times 4 + 3 \times 2 = 18$$

$$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{4} C \quad 3 \times 4 = 12$$

$$A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{2} C \quad 3 \times 2 = 6$$

$$+ \\ 12 \\ \hline 18$$



پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟
برای رفتن از شهر B به شهر D می‌توان یکی از دو مسیر $B \rightarrow C \rightarrow D$ «یا» $B \rightarrow A \rightarrow D$ را انتخاب کرد؛ پس داریم:
 D به B مسافت از D به B = تعداد راه‌های مسافت از D به B = $4 \times 2 + 3 \times 3 = 17$

$$B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{2} D \quad 4 \times 2 = 8$$

$$B \xrightarrow{3} A \xrightarrow{3} D \quad 3 \times 3 = 9$$

$$+ \\ 8 \\ 9 \\ \hline 17$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۳- ثابت کنید تعداد کل جایگشت های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با $n!$.
حل: اگر برای هر کدام از این اشیا یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل زیر)، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $n-1$ انتخاب داریم و... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت ها برابر است با، $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$

$$n \quad n-1 \quad n-2 \quad \dots \quad 2 \quad 1$$

کار در کلاس



بنج انتخاب
 $5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$

 $5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 600$

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض اند؛ با این ارقام:

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می توان نوشت؟

بنج انتخاب
 $5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$

 $5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 288$

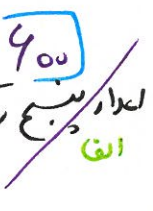
۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟



بنج انتخاب
 $5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$

 $5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 120$
 $4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 96$
 $3 \quad 2 \quad 1 = 96$
 312

روش اول:



روش دوم) اعداد پنج رقمی زوج با همین ارقام = اعداد پنج رقمی فرد با همین ارقام -
 (ب) ۵ رقمی هایی که به ۲ یا ۴ ختم می شوند:
 $4 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 5$
 $4 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 5 = 192$

$$4 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 5 = 192$$

صفرها آید



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و نویسنده (الکترونیک و...) برای نام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



۲. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟
(شروع ۵)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} = 120$$

$$+ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} = 96$$

$$\text{مجموعه آنها} = 216$$

فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ می توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست).

تعداد انتخاب ها $\rightarrow$ $\underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{5} \quad \underline{4}$ اصل ضرب $\rightarrow 7 \times 6 \times 5 \times 4$

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \dots}{3!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$$

(توجه دارید که با جابه جایی هر رقم از این عدد ۴ رقمی با رقم دیگر، یک عدد ۴ رقمی جدید حاصل می شود. به عبارت دیگر، در این جایگشت ها، جابه جایی ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.)

۲. به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

تعداد انتخاب ها $\rightarrow$ $\underline{5} \quad \underline{4} \quad \underline{3}$ اصل ضرب $\rightarrow 5 \times 4 \times 3 = 60$ از طرفی: $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$

۳. در حالت کلی، نشان دهید تعداد انتخاب های r شیء از بین n ($r \leq n$)، که جابه جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد،

برابر است با: $\frac{n!}{(n-r)!}$

تعداد انتخاب ها $\rightarrow$ $\underline{n} \quad \underline{n-1} \quad \underline{n-2} \quad \dots \quad \underline{(n-r+2)} \quad \underline{(n-r+1)}$

طبق اصل ضرب $\rightarrow n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)(n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \times (\dots n-2 \dots 1)}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$





چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای نام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳ جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت های سه تایی از ۴ رقم (انتخاب های سه تایی از بین ۴ رقم) را بر ۶ تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4$$

انتخاب سه رقم	۱,۲,۴	۱,۲,۶	۱,۴,۶	۲,۴,۶
جایگشت های سه رقم انتخاب شده	۱۲۴	۱۲۶	۱۴۶	۲۴۶
	۱۴۲	۱۶۲	۱۶۴	۲۶۴
	۲۴۱	۲۱۶	۴۱۶	۴۲۶
	۲۱۴	۲۶۱	۴۶۱	۴۶۲
	۴۱۲	۶۱۲	۶۱۴	۶۲۴
	۴۲۱	۶۲۱	۶۴۱	۶۴۲
	$A_1 = \{1, 2, 4\}$	$A_2 = \{1, 2, 6\}$	$A_3 = \{1, 4, 6\}$	$A_4 = \{2, 4, 6\}$



$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{24}{6} = 4$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و نشر (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

کار در کلاس

۱. به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

روش اول: $\underline{9} \quad \underline{8} \quad \underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{5} \longrightarrow 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

روش دوم: $P(9, 5) = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 15120$

۲. به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

در ساختن تیم با جابه جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی شود بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم:

$$\text{تعداد تیم های ۶ نفره} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times \cancel{3!}} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!} \times \cancel{3!} \times \cancel{1}} = 84$$

۳. مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

هر سه عضو از این ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می سازد (در مجموعه ها جابه جایی اعضا اهمیت ندارد)؛ بنابراین، داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{\cancel{5!} \times \cancel{3!}} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!} \times \cancel{3!} \times \cancel{2 \times 1}} = 56$$

۴. در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟

در انتخاب مهره های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی خارج شود، اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شده اند. در هر صورت، ۲ قرمز و ۱ آبی خارج شده است) و بنابراین داریم:

$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{\cancel{6!} \times \cancel{3!}} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!} \times \cancel{3!} \times \cancel{2 \times 1}} = 84$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

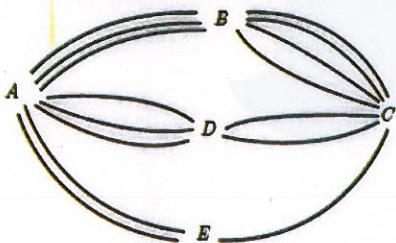
تمرین

۱. می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم؟



$$10 + 11 + 12 = 33$$

۲. بین پنج شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه هایی وجود دارد که همه دو طرفه اند. مشخص کنید به چند طریق می توان:



الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟

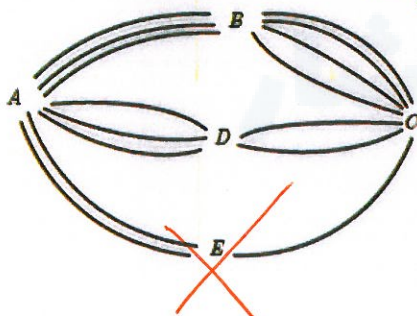
$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{3} E \xrightarrow{4} C \quad 12 \\ A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{2} C \quad 6 \\ A \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} C \quad 2 \\ \hline 20 \end{array}$$

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟



نکته: رفت و برگشت در هم ضرب می شوند

$$\begin{array}{l} \text{رفت: } A \xrightarrow{3} E \xrightarrow{4} C \quad 3 \times 4 = 12 \quad 12 \times 12 = 144 \\ \text{برگشت: } C \xrightarrow{4} E \xrightarrow{3} A \quad 4 \times 3 = 12 \end{array}$$



پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{3} E \xrightarrow{4} C \xrightarrow{2} D \quad 3 \times 4 \times 2 = 24 \\ D \xrightarrow{3} A \quad 3 \\ \hline 27 \end{array}$$



چاپ، انکسار و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



و
ل
ی
ت

۳. با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

$$\boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} = 120 \quad 5! = 120$$

ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

و-ل-ا-ت-ی (شروع)

$$\boxed{1} \boxed{3} \boxed{4} = 12$$

جهت خواندن نامی

ب) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

$$\boxed{1} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{1} = 6$$

۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

$$(روش اول) \quad \boxed{10} \boxed{9} = 90 \quad p(10, 2) = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90$$

۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

$$\cancel{7} \times \cancel{2} \times \cancel{3} = 42$$





چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.



۶. مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است:

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

(شروع) $8 \ 6 \ 4 \ 2 \ 1$

$$5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟ (پ) مجموعه A چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟

نسبت به ۵ رقمی بزرگ تر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟ (پ) مجموعه A چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 20$$

$$2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 9 = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9 = 2592$$

ت) مجموعه A چند زیر مجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟
سه وقتی شامل از بالا و پایین کم می شود

$$\binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$



۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟

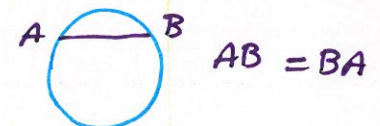
در ساختن مثلث ترتیب اشیاء مهم نمی باشد → با سه نقطه می توان مثلث ساخت

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \times 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 220$$

ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

هر دو نقطه روی محیط دایره را که بهم وصل کنیم - وتر به وجود می آید

ترتیب هم نمی باشد



$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{2! \times 10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2 \times 1 \times 10!} = 66$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و نویسنده (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

$$5 + 6 = 11$$

۸. می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل

دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم: هرگاه بخواهیم:

(الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.



$$\binom{5}{3} \times \binom{6}{3} = 10 \times 20 = 200$$

سرمایه دانش آموز پایه یازدهم و سرمایه دانش آموز پایه دوازدهم
(ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

$$\binom{11-1}{6-1} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \times 5!} = 252$$

همان نکته شامل - از بالا و پایین کم می کنیم

(ب) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.

$$\binom{5}{4} \binom{6}{2} + \binom{5}{3} \binom{6}{3} + \binom{5}{2} \binom{6}{4} + \binom{5}{1} \binom{6}{5} = 150 + 20 + 15 + 6 = 191$$

۴-۵-۶

$$(15 \times 10) + (4 \times 5) + (1 \times 1) = 150 + 20 + 1 = 171$$

(ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.



$$\binom{5}{2} \binom{6}{4} = 10 \times 15 = 150$$

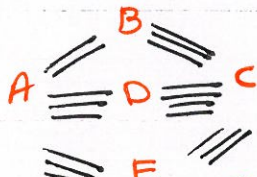
$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = 1$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 2} = 10$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حروفش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

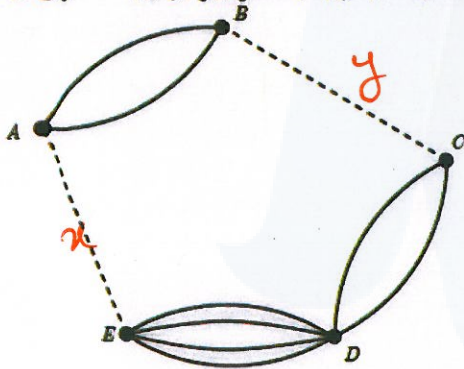
می گیرند.



۹. مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 2)$ باشد.

مطابق شکل روبه رو به چند طریق می توان از شهر A به شهر E رفت (راه ها دو طرفه اند).

۱۰. تعداد راه ها یا جاده ها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{z} D$$

$$4y +$$

$$A \xrightarrow{x} E \xrightarrow{z} D$$

$$\frac{4x}{4y + 4x}$$

$$4y + 4x = 20$$

$$\xrightarrow{\div 4} y + x = 5$$

ساده کردن معادله

x	y
1	4
4	1
2	3
3	2



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

پرتاب سکه - پرتاب تاس



۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.
به آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، آزمایش ها یا پدیده های قطعی می گوئیم.
برای مثال، چنانچه سنگی را به داخل استخر آبی پرتاب کنیم، قبل از اجرای آزمایش می دانیم که سنگ به داخل آب فرو می رود یا پیش از پرتاب یک سکه، می دانیم که سکه روی زمین می نشیند. این گونه پدیده ها، آزمایش هایی قطعی هستند.

۲. چند آزمایش قطعی مثال بزنید.
در شش سالگی از بالا یک سکه را پرتاب می کنیم، سنگ به زمین می خورد و به خورد می لند
انتخاب یک پسر از کلاس دبیرستان متوسطه دوم، پسرانه فرهنگ کرمان

کار در کلاس

۱. کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟

قطعی - زیرا تمام دانش آموزان

(الف) وجود دانش آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم؛

(ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛

(پ) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛

(ت) پیش بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛

(ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه ای پرتاب می شود و به دنبال آن تاسی انداخته می شود. اگر شخصی سکه اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می توان نفر برنده را مشخص کرد؟

خیر - زیرا قبل از انجام بازی نمی توان گفت که چه کسی سکه اش رو و تاسش زوج می آید



۲. از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می کنیم.
(الف) آیا مجموعه دو عضوی {خودکار، مداد} می تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟

خیر - زیرا خودکارها و مدارها نامبر دارند و متفاوت هستند

(ب) به نظر شما چگونه می توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

{مداد ۱، مداد ۲، مداد ۳، خودکار ۱، خودکار ۲، خودکار ۳، خودکار ۴، خودکار ۵} = برآمدها (نتیجه ها)



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

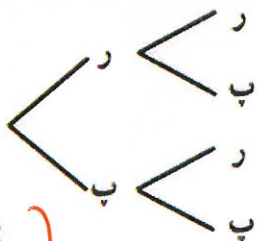
می گیرند.

فعالیت

فضای نمونه هر یک از آزمایش های تصادفی زیر را بنویسید.

پرتاب سکه اول پرتاب سکه دوم

۱. پرتاب دو سکه باهم.



$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

۲. پرتاب سه سکه با هم (پرتاب یک سکه سه بار)

$$S = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (ر, پ, پ), (پ, ر, ر), (پ, ر, پ), (پ, پ, ر), (پ, پ, پ)\}$$

$$\{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (ر, پ, پ), (پ, ر, ر), (پ, ر, پ), (پ, پ, ر), (پ, پ, پ)\}$$

۳. پرتاب یک تاس و یک سکه باهم.

$$کمه تاس = 2 \times 6 = 12$$



$$S = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶)\}$$

پرتاب سه سکه با هم
پرتاب یک تاس و یک سکه



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

کار در کلاس

۱. برای تعیین فضای نمونه بر تاپ دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

 \ 	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
۲	(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
۳	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
۴	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
۵	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
۶	(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

$$n(s) = 6 \times 6 = 36$$



۲. سه دوست با نام های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

چگونه می توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

$$S = \{ (علی, پارسا, محمد), (پارسا, علی, محمد), (محمد, علی, پارسا), (علی, محمد, پارسا), (پارسا, محمد, علی), (محمد, پارسا, علی) \}$$

$$n(s) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

۳. در کیسه ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک جا از کیسه خارج می کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

$$3 + 4 + 4 = 11 \quad \text{تعداد کل}$$

$$\text{تعداد اعضای فضای نمونه} \quad \binom{11}{3} = \frac{11!}{(11-3)! \times 3!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 3 \times 2 \times 1} = 165$$



چاپ، انکسار و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

کار در کلاس

۱. سکه ای را یک بار پرتاب می کنیم؛ می دانیم $\{پ، ر\} = S$. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

$\phi, \{پ\}, \{ر\}, \{پ، ر\}$



۲. مریم، ملیکا و سوگند پول هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان درباره دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هرکسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونه این پدیده تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه های یک عضوی S را مشخص کنید.

$S = \{\text{مریم، سوگند، ملیکا}\}$

$\{\text{مریم}\}, \{\text{ملیکا}\}, \{\text{سوگند}\}$

اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعه کتاب، با هم خلاصه آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید. $\phi, \{\text{سوگند، ملیکا}\}, \{\text{مریم، سوگند}\}, \{\text{مریم، ملیکا}\}, \{\text{سوگند، ملیکا}\}, \{\text{مریم، سوگند، ملیکا}\}$

۳. تاسی را پرتاب می کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده اند؟



الف) $A = \{۳, ۲, ۵\}$ ب) $B = \{۲\}$ پ) $C = \{۲, ۴, ۶\}$
بر این تاس یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از اعدادهای آن در تاس ظاهر شود.
تصادفی به وقوع بپیوندد، نیاز بر این با ظاهر شدن عدد ۲ هیچ پیشامد A, B, C رخ داده است.

۴. دو تاس را پرتاب می کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.
 $A = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۵,۵), (۶,۶)\}$

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.
 $\{(۱,۶), (۲,۵), (۳,۴), (۴,۳), (۵,۲), (۶,۱)\}$

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد. مجموع راس در بیشترین حالت $۶+۶=۱۲$ است، ۱۳ غیر ممکن است پس ϕ است.
ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.
تمام حالت ها را من فوهم زیرا بیشترین حالت $۶ \times ۶ = ۳۶$ است.



$D = \{(۱,۱), (۱,۲), \dots, (۱,۶), (۲,۱), (۲,۲), \dots, (۲,۶), (۳,۱), (۳,۲), \dots, (۳,۶), \vdots, (۶,۱), (۶,۲), \dots, (۶,۶)\}$

$(۳,۱), (۳,۲), \dots, (۳,۶)$

$(۶,۱), (۶,۲), \dots, (۶,۶)$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۵. در یک برنامه کهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشناز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید. الف) سه نفر دانش آموز پیشناز از سه پایه مختلف باشند.

$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$$



ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشناز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

$$\binom{4}{2} \binom{9}{1} + \binom{6}{3} \binom{10}{0} = (15 \times 9) + (20 \times 1) = 135 + 20 = 155$$

۲ دانش آموز یا ۳ دانش آموز

کار در کلاس

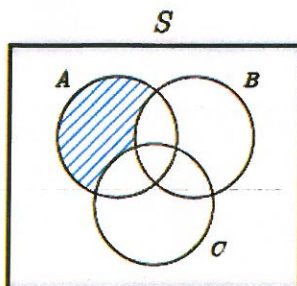
۱. تاسی را پرتاب می کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

- پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج اول باشد. $A = \{2\}$
- پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد. $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
- پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد. $C = \{4, 6\}$
- پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد. $D = \{3, 5\}$
- پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد. $E = \{1, 4, 6\}$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.



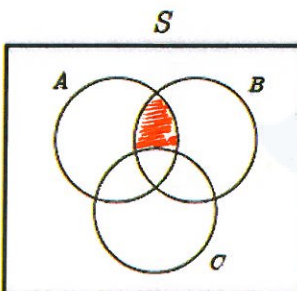
$$A - (B \cup C)$$

۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

- فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.



یادآوری درستی
 $\rightarrow \cap$
 $\rightarrow \cup$

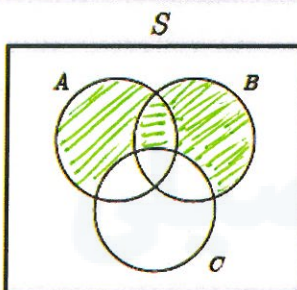


- پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

یعنی C را نمی‌خواهیم

$$A \cap B$$

$$(A \cap B) - C$$



- پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

$$A \cup B$$

$$(A \cup B) - C$$

علیرضا افشار



چاپ، کثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۳. خانواده ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

$$A = \{ (د، د، د) (د، پ، پ) (پ، پ، پ) \}$$



ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

$$B = \{ (د، پ، پ) (پ، د، پ) (پ، پ، د) \}$$

ج) پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

$$C = \{ (د، د، د) (د، د، پ) (د، پ، د) (پ، د، د) \}$$

د	پ	پ
د	د	پ
د	پ	د
پ	د	د
پ	پ	د
پ	د	پ

با توجه به پیشامدهای A و B و C به سؤالات زیر پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟ **بله** $A \cap B = \emptyset$

آیا پیشامدهای B و C ناسازگارند؟ **بله** $B \cap C = \emptyset$

آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟ **خیر** $A \cap C \neq \emptyset$ $A \cap C = \{ (د، د، د) \}$

۴. دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید.



در تیراژ یک تاس

$$A = \{ ۲, ۴, ۶ \}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$B = \{ ۱, ۳, ۵ \}$$



چاپ، انکسار و انتشار این جزوه به هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

فعالیت



۱. چنان که پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A = \emptyset$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

$$A = \emptyset \Rightarrow n(A) = 0 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

۲. در حالتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A = S$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

$$A = S \Rightarrow n(A) = n(S) \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

۳. هرگاه $A \subseteq B$ ، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد، در این صورت داریم:

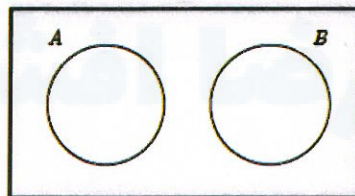
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

زیرمجموعه

$$\emptyset \subseteq A \subseteq S \Rightarrow P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(S) \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

۵. هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

دو مجموعه ناسازگار اشتراک ندارند

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

خسول اصلی:



چاپ، انکسیر و انتشار این جزوه به هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

کار در کلاس



۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم؛ مطلوب

است محاسبه احتمال اینکه: الف) تاس زوج بیاید. $n(S) = 2 \times 6 = 12$

$$A = \{ (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2) \}$$

$n(A) = 6$ (تاس زوج)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ب) سکه پشت بیاید.

$$B = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \} \Rightarrow n(B) = 6$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

$$C = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{12} = 1$$

۱-۱	۲-۲
۱-۲	۲-۳
۱-۳	۲-۴
۱-۴	۲-۵
۱-۵	۲-۶
۱-۶	۳-۱
	۳-۲
	۳-۳
	۳-۴
	۳-۵
	۳-۶

$$D = \{ (1,1), (1,3), (1,5) \}$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

شرط اول شرط دوم
ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

هر دو شرط باید داشته باشد



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و اش (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه

احتمال اینکه: مارتخ صفری است

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

$$P = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{12^5}$$

نفر پنجم نهم چهارم نهم سوم نهم دوم نهم اول

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

مارتخ صفری نیست

$$P = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times 12 = \frac{1}{12^4}$$

پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

ماه های مختلف

$$P = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} = \frac{55}{144}$$

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



پاپ، انگیزه و انگیزه این جزوه به حروفش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی منع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می شود.

الف) احتمال برنده شدن چه شماره ای نسبت به بقیه بیشتر است؟



پسند آمد A برابر مجموع برآمدهای تاس فرغ می کنیم

$$A=2 \Rightarrow \{(1,1)\} \Rightarrow p = \frac{1}{36}$$

$$A=3 \Rightarrow \{(1,2), (2,1)\} \Rightarrow p = \frac{2}{36}$$

$$A=4 \Rightarrow \{(1,3), (2,2), (3,1)\} \Rightarrow p = \frac{3}{36}$$

$$A=5 \Rightarrow \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow p = \frac{4}{36}$$

$$A=6 \Rightarrow \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\} \Rightarrow p = \frac{5}{36}$$

$$A=7 \Rightarrow \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \Rightarrow p = \frac{6}{36}$$

$$A=8 \Rightarrow \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\} \Rightarrow p = \frac{5}{36}$$

$$A=9 \Rightarrow \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} \Rightarrow p = \frac{4}{36}$$

$$A=10 \Rightarrow \{(4,6), (5,5), (6,4)\} \Rightarrow p = \frac{3}{36}$$

$$A=11 \Rightarrow \{(5,6), (6,5)\} \Rightarrow p = \frac{2}{36}$$

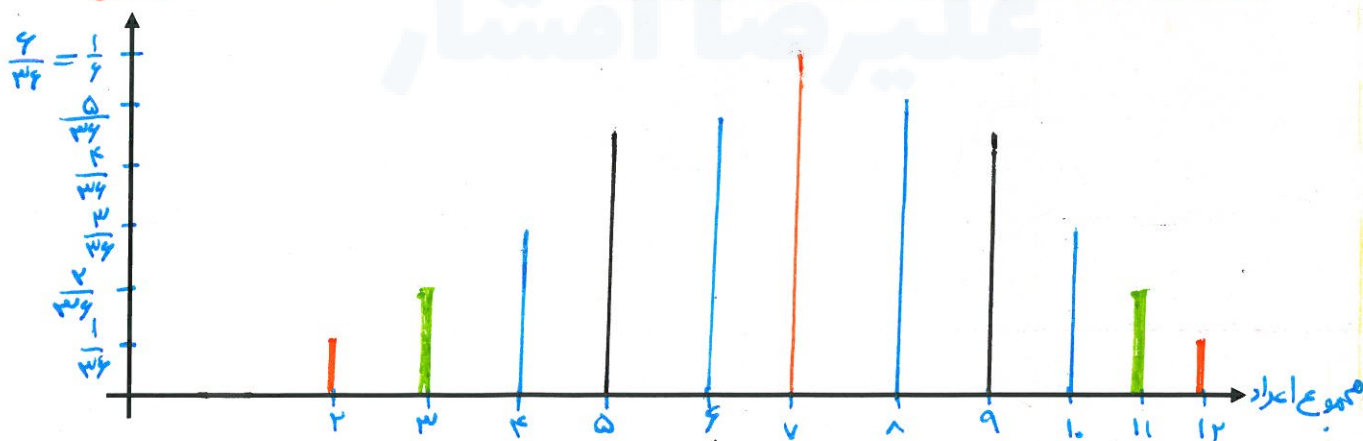
$$A=12 \Rightarrow \{(6,6)\} \Rightarrow p = \frac{1}{36}$$

با احتمال $\frac{6}{36}$ بیشترین شانس دارد
با احتمال $\frac{1}{36}$ کمترین شانس برنده شدن دارد.

ب) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

بله - چون آزمونش در دفتر تصادفی بوده و ممکن است هر اتفاقی رخ دهد - شانس کمتر به معنای برنده شدن نیست.

ت) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید. سپس، نمودار میله ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.





چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

فعالیت

در جعبه ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به طور تصادفی یک شیء خارج می کنیم. مطلوب است محاسبه:

الف) احتمال این را بیایید که شیء انتخابی مداد باشد؛ $P(A)$.

$$P = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{8}{1}} = \frac{3}{8}$$

ب) احتمال این را بیایید که شیء انتخابی خودکار باشد؛ $P(B)$.

$$P(B) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}} = \frac{5}{8}$$

پ) احتمال این را بیایید که شیء انتخاب شده مداد نباشد؛ $P(A')$.

ت) پاسخ های قسمت های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه ای می گیرید؟

با هم برابر هستند.

$$P(A') = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

احتمال مداد نبودن = احتمال مداد بودن



مداد نبودن مداد بودن

$$P(A) + P(A') = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را پیدا کنید.

کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

$$P' = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

۲. احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نرود برابر با 0.01 است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کیارش به مدرسه برود.

$$P' = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

۳. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

$$P' = 1 - \frac{32}{49} = \frac{17}{49}$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

تمرین

۱. کدام یک از پدیده های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟

الف) نام ۲۰ دانش آموز را روی ۲۰ کارت می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می کشیم

تا نام یکی از دانش آموزها استخراج شود. **آزمایش تصادفی**

ب) مقداری آب را حرارت می دهیم تا به بخار تبدیل شود. **قطعی** - **زیر اثر آب احرارت دهیم قطعا بخار می شود**

پ) نتیجه یک آزمون چهار جوابی، که نیمی از سوالات آن را شناسی پاسخ داده ایم. **تصادفی**

ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می دهد.

- عددی را انتخاب می کند.

- سه واحد به آن عدد می افزاید.

- سپس حاصل را دو برابر می کند.

- از عدد حاصل ۲ واحد کم می کند.

- نتیجه به دست آمده را نصف می کند.

- از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می کند.

- در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه کننده پاسخ را اعلام می کند.

جواب این مسئله، برای هر عدد دلخواه ۴ همواره برابر ۲ است. پس این آزمایش قطعی است.

۲. سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گاه تاس را می ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.



$$S = \{ (ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶), (ت, ۱), (ت, ۲), (ت, ۳), (ت, ۴), (ت, ۵), (ت, ۶) \}$$

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید

$$\begin{array}{l} \text{سکه رو} \quad \text{سکه پشت} \\ ۲-۳ \quad | \quad ۱-۲ \\ ۱-۴ \quad | \quad ۱-۳ \\ ۱-۶ \quad | \quad ۱-۴ \end{array}$$

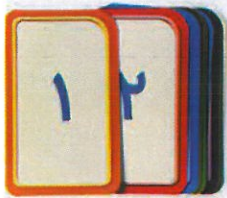
$$A = \{ (ر, ۲), (ر, ۴), (ر, ۶), (ت, ۱), (ت, ۳), (ت, ۵) \}$$



چاپ، انتشار و آثار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک تر از ۲۰ را روی یک کارت می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها به طور تصادفی



یک کارت را برمی داریم؛ مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

$$A = \{3, 9, 15\}$$

ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

$$A \cap B = \{9\}$$

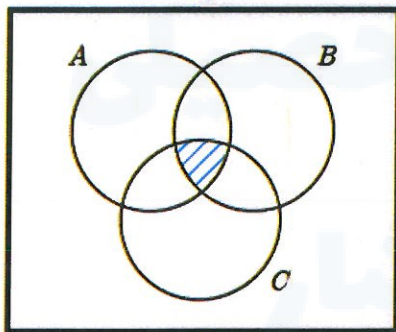
$$A - B = \{3, 15\}$$

$$B = \{1, 9\}$$

ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

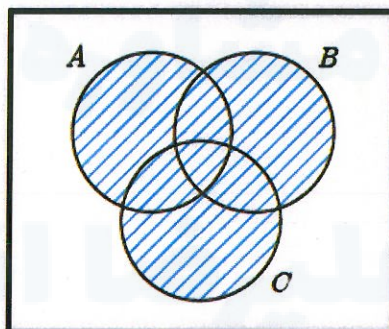
۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه ای بنویسید.

S



(الف)

S



(ب)



عبارت توصیفی: A, B, C رخ دهند

عبارت مجموعه ای: $A \cap B \cap C$

عبارت توصیفی: A یا B یا C رخ دهند.

عبارت مجموعه ای: $A \cup B \cup C$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ می توان نوشت، روی کارت هایی می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها



یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم. (الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

$$S = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$$

$$A = \{12, 24, 42\}$$

(ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.

$$B = \{11, 13, 23, 31, 41, 43\}$$

(ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۶. خانواده ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$S = \{ (پ، پ، پ)، (د، د، د)، (پ، پ، د)، (پ، د، پ)، (د، پ، پ)، (د، د، پ)، (پ، د، د)، (د، پ، د) \}$$



ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

$$A = \{ (پ، پ، پ)، (د، د، د) \}$$

پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

$$B = \{ (پ، پ، د)، (پ، د، پ)، (د، پ، پ) \}$$

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند.

$$C = \{ (پ، پ، پ)، (پ، پ، د)، (پ، د، پ)، (د، پ، پ) \}$$

پسر یا پسر
 ↓
 فقط یک دختر

ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

$$D = \{ (پ، د، د)، (د، پ، د)، (د، د، پ)، (د، د، د) \}$$

یک پسر یا هیچ پسر
 ↓
 هیچ پسر



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه بر هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۷. خانواده ای دارای ۴ فرزند است.



الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \quad \underline{2^4 = 16}$$

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

$$A = \{ (د, د, د, د), (د, د, د, پ), (د, د, پ, د), (د, د, پ, پ), (د, پ, د, د), (د, پ, د, پ), (د, پ, پ, د), (د, پ, پ, پ) \}$$

فرزند اول فرزند دوم فرزند سوم فرزند چهارم

د د د د
د د د د
پ پ د د
پ پ د د

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد.

$$C = \{ (د, د, د, د), (د, د, د, پ), (د, د, پ, د), (د, د, پ, پ), (د, پ, د, د), (د, پ, د, پ), (د, پ, پ, د), (د, پ, پ, پ) \}$$

هر چهار فرزند دختر هر چهار فرزند پسر

۳ دختر و ۱ پسر ۲ دختر و ۲ پسر ۱ دختر و ۳ پسر

ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

$$A \cap C \neq \emptyset \quad \text{خیر زیرا}$$

۸. از جعبه ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی برمی داریم. مطلوب است محاسبه

احتمال اینکه: $5 + 12 = 17$ کل

$$P = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{17}{3}} = \frac{\frac{12!}{9! \times 3!}}{\frac{17!}{14! \times 3!}} = \frac{220}{480} = \frac{11}{24}$$

الف) هر سه سیب سالم باشند.

ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد.

$$P = \frac{\binom{12}{2} \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{66 \times 5}{480} = \frac{33}{96}$$

پ) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های لکه دار بیشتر باشد.

$$P = \frac{\binom{12}{2} \binom{5}{1} + \binom{12}{1} \binom{5}{2}}{\binom{17}{3}} = \frac{66 \times 5 + 12 \times 10}{480} = \frac{55}{48}$$

$$\binom{17}{3} = \frac{17!}{14! \times 3!} = \frac{17 \times 16 \times 15 \times 14!}{14! \times 3 \times 2 \times 1} = 480$$

برخی کتب چاپ شده :



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و نشر (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۹. عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می ایستد و عددی را نشان می دهد. چقدر احتمال دارد که:



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ب) عقربه یک عدد اول (یا فرد) را نشان دهد.

$$1 - 3 - 5 - 7 \quad | \quad 2 - 3 - 5 - 7$$

کثیرتر

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{8}$$

$$C = \{3, 6\}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

یعنی صلیب پرجم ها با شمارهای اول
اول در مکان فرد
قرار گیرند.



۱۰. ۷ پرجم مختلف را به هفت میله پرجم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. چنانچه این پرجم ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله پرجم ها با شماره های غیر اول در مکان های زوج باشند.

$$\{1, 4, 6\} = \text{صلیب پرجم ها با شمارهای غیر اول} \quad \{2, 3, 5, 7\} = \text{صلیب پرجم ها با شمارهای اول}$$

۴	۳	۳	۲	۲	۱	۱
---	---	---	---	---	---	---

مکان فرد مکان فرد مکان فرد مکان فرد مکان فرد مکان فرد

$$P = \frac{4! \times 3!}{7!} = \frac{4! \times 3!}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{35}$$

۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

کاپیتان دروازه بان

کاپیتان دروازه بان



انتخاب ۴ نفر از ۹ نفر
باقی مانده به غیر کاپیتان دروازه بان

۹ نفر (بقیه) جایگاه های ۴ نفر دروازه بان

$$P = \frac{9!}{11!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{110}$$

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4! \times 5!} = 126$$



چاپ، انتشار و آثار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

کشی نشان نشاندار
 $5 + 15 = 20$

می گیرند.

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می گیرند و پس از نشان دار کردن، رهاشان می کنند. بعد از مدتی، محیط بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می گیرند و می خواهند تعداد قوچ های نشان دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشاندار باشند.



بی نشان نشاندار بی نشان نشاندار بی نشان نشاندار

$$P = \frac{\binom{5}{0}\binom{15}{2} + \binom{5}{1}\binom{15}{1} + \binom{5}{2}\binom{15}{0}}{\binom{20}{2}} = \frac{(10 \times 350) + (5 \times 500) + 645}{7752} = \frac{6145}{7752}$$

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.



تصویر تصویر تصویر

$$P = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1} + \binom{5}{3}\binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

یعنی سه نفر سه رأی متفاوت داشته باشند
 ممتنع مخالف موافق

$$P = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \times 3 \times 2}{120} = \frac{1}{4}$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه بر حروف (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

فعالیت

❓ دانش آموزان یک مدرسه، روزانه زمان زیادی را به استفاده از تلفن های هوشمند اختصاص می دادند. مشاوران آموزشی مدرسه تصمیم گرفتند دسترسی دانش آموزان به تلفن های هوشمند را در جهت اهداف آموزشی مدرسه هدفمند کنند اما از میزان و چگونگی استفاده دانش آموزان از تلفن های هوشمند اطلاع دقیقی نداشتند و بنابراین، برنامه ریزی برای این هدف ممکن نبود. پس، قبل از هر چیز مسئله مشاوران آموزشی این بود که بفهمند: «دانش آموزان پایه های دهم، بازدهم و دوازدهم این مدرسه به طور متوسط روزانه چه مدت و برای چه فعالیت هایی از تلفن های هوشمند خود استفاده می کنند؟»

● حدس می زنید دانش آموزان کلاس شما به طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت هایی از تلفن های هوشمند خود استفاده می کنند؟

روزانه ۱۰۰ دقیقه و بیشتر برای فعالیت هایی از قبیل شبکه های اجتماعی، بازی و ...
با سالی فیلم استفاده می کنند.

● اگر واحد اندازه گیری مدت استفاده از تلفن هوشمند (دقیقه) در پرسش اول مشخص نمی شد، ممکن بود چه مشکلی پیش بیاید؟

امکان داشت برخی از دانش آموزان، زمان استفاده خود را بر حسب ساعت و برخی بر حسب دقیقه گزارش کنند. در نتیجه به دلیل نبود واحد واحدی نتوانستیم فعالیت های آن ها را از قبیل یا متن میان و دانش بیان چایی را به درستی انجام دهیم.

● ممکن است برخی دانش آموزان نخواهند کسی از جزئیات فعالیت های آنها با تلفن هوشمند باخبر شود. در طراحی پرسش نامه چگونه می توانستیم با احترام به حریم خصوصی افراد، داده های گردآوری شده را به واقعیت نزدیک تر کنیم؟

با بد در قسمت جزئیات فعالیت ها، هورده ها:

□ ترکیبی از فعالیت های ذکر شده { واضح می دریم.
□ نام موارد

● با توجه به چارک های گزارش شده، (تقریباً) چند درصد از دانش آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می کنند؟



ما داریم ۲۵ درصد داره ها بعد از چارک سوم قرار دارند. در نتیجه تقریباً ۲۵ درصد دانش آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می کنند.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه بر هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

● با توجه به نمودار میله‌ای، بیشترین و کمترین فراوانی مربوط به کدام فعالیت‌هاست؟

"کتابخانه‌های مجامع" بیشترین فراوانی را دارد - "خواندن کتاب‌های تقدیر" کمترین فراوانی را دارد.

● چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟

چون برخی از دانش‌آموزان چندین فعالیت را انجام می‌دهند و نام آن‌ها در چندین فعالیت ثبت شده است.

توجه: این نتایج فقط در مورد دانش‌آموزان پایه دهم، یازدهم و دوازدهم این مدرسه (نه مدارس دیگر)

و فقط در مورد حلقه‌های استفاده از تلفن هوشمند (نه وسیله‌های دیگر) صادق می‌باشد.

● با توجه به نمودار میله‌ای صفحه پیش، دانش‌آموزان متوسطه دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت‌هایی از تلفن

هوشمند خود استفاده می‌کنند؟ شبکه‌های اجتماعی

● از میانه و دامنه میان چارکی گزارش شده برای زمان استفاده روزانه از تلفن‌های هوشمند چه نتیجه‌ای می‌گیرید یا به زبان آماری،

آنها را چگونه تفسیر می‌کنید؟

میان برابر ۷۰ دقیقه است، یعنی ۵۰ درصد دانش‌آموزان بیشتر از ۷۰ دقیقه از تلفن‌های هوشمند

استفاده می‌کنند.

با توجه به جاکارت اول رسوم متوجه می‌شویم که ۵۰ درصد افراد بین ۶۵ تا ۱۰۰ دقیقه از تلفن‌های هوشمند

استفاده می‌کنند. بنابراین اگر این فعالیت‌ها را در جهت هدف‌های آموزشی هدفمند کنیم،

قطعاً دانش‌آموزان بیشتر نت خوبی خواهند داشت.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند

کار در کلاس

اکنون که چرخه حل مسئله را می شناسیم، می توانیم در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسیم. (مشاهده نمونه حل شده در سطر سوم می تواند به ما کمک کند).

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح مسئله	راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می کنیم. به نمونه گیری، شیوه اندازه گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می اندیشیم.
۵	مطابق نتیجه گیری	نتایج به دست آمده را تفسیر می کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می کنیم.
۴	تحلیل داده ها	با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموختیم، نتایج را متناسب با هدفهای کارمان، نوع متغیرها و ویژگی های داده ها گزارش می کنیم.
۳	داده ها	داده ها را گردآوری می کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می شویم.



کار در کلاس

۱. در هر قسمت، برای بررسی کدام یک از موارد به اندازه نمونه بزرگ تری نیاز است؟ توضیح دهید.

الف) ☐ سن دانش آموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید.

☒ معدل سال گذشته دانش آموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید.

چون بزرگدلی این صغیر بیشتر از بزرگدلی سن دانش آموزان کی کلاس است.

توج: در کلاس درس معمولاً هم هنر کنند



ب) ☐ بررسی متوسط حقوق معلمان یک مدرسه دولتی

☒ بررسی متوسط حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ خصوصی

زیرا در این بررسی، اندازه جامعه بزرگ تر است.





چاپ، کثیر و انتشار این جزوه بر حروفش (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۲. علی و امید در یک پروژه دانش آموزی می خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه ۲ آبادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت هایی مشغول اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می کنند».

علی پیشنهاد می کند: «برای نمونه گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از آنها بپرسیم به طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند».

امید پیشنهاد می کند: «اگر اداره آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه گیری فهرستی از دانش آموزان متوسطه اول و دوم منطقه ۲ آبادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه نمونه کافی افرادی را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش آموز بپرسیم در اوقات فراغت خود چه فعالیت هایی انجام می دهد و به صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت ها مشغول است».



موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهاد های امید و علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید که اشکال مربوط به پیشنهاد علی است یا امید.

الف) کسانی که اوقات فراغتشان را در خانه می گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند.

مشکل: پیشنهاد علی است.

ب) نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند. **مشکل: پیشنهاد امید است.**

پ) اگر مثلاً به کتابخانه برویم و از نوجوانان بپرسیم به طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند، میانگین داده های به دست آمده (آماره نمونه) بزرگ تر از میانگین آن در جامعه آماری (پارامتر جامعه) می شود؛ چون نوجوانانی که اصلاً به کتابخانه نمی روند، در نظر گرفته نشده اند.

مشکل: پیشنهاد علی است.



دو اشکال دیگر را که به نمونه گیری علی وارد است، مطرح کنید.

۱. برخی از فعالیت ها در نمونه گیری علی در نظر گرفته نشده باشند.

۲. ممکن است که برخی از مکان های تفریحی، مذهبی، ...

منطقه ۲ آبادان برای دسترسی نداشتند.

استاد امیر شیرینی مقدم - 09133979092



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرووش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۳. برای بررسی وضعیت اجتماعی - اقتصادی خانوارهای یک شهر در کدام شیوه نمونه گیری، همه قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟



الف) انتخاب خانوارها بر اساس رقم اول تلفن خانه ها ✓
ب) انتخاب خانوارها بر اساس رقم آخر تلفن خانه ها.

الف) زیرا رقم اول تلفن منازل در هر مقطع از شهر رقم خاصی بود و اگر بر اساس
رقم اول تلفن منازل خانوار را انتخاب کنیم ممکن است هم خانوارها از یک قشر باشند.

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



چاپ، انکسار و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

کار در کلاس

آنچه در جدول زیر نشان داده شده، بخشی از داده‌های گردآوری شده در یک پروژه دانش آموزی پیش از برطرف کردن اشتباهات است.

چون برخی نرم افزارها نمی توانند داده‌های غیر عددی را تحلیل کنند، برای متغیرهای کیفی کد تعیین می کنیم؛ مثلاً در این داده‌ها برای جنسیت دختر کد ۱ و برای پسر کد ۲ تعیین شده است. در متغیر «ورزش مورد علاقه» نیز برای فوتبال، والیبال، بسکتبال و شنا به ترتیب کدهای ۱، ۲، ۳ و ۴ تعیین شده است.

در این داده‌ها هر سطر نشان دهنده یک فرد و هر ستون نشان دهنده یک متغیر است.

نمره ادبیات	متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته	ورزش مورد علاقه	جنسیت	سن	شماره دانش آموز
۱۵	۲	۱	۱	۱۴	۱
۱۴	۰	۱	۲	۱۵	۲
۱۵	۳	۲	۱	۱۴	۳
+	۵	۲۲	۱	۱۵	۴
۱۷	۲۴	۲	۲	۵۱	۵
۱۸	۶	۳	۲	۱۴	۶
	۱۹	۷	۳	۱۵	۷
۱۷	۴	۴	۲	۱۴	۸
۱۵	۳	۳	۱	۱۴	۹
۱۰	۰	۲	۱	۱۴	۱۰
۱۲	۱	۲	۱	۱۴	۱۱
۱۴	۲	۱	۲	۱۴	۱۲
۲۰	۷	۴	۱	۱۵	۱۳
۱۸	۵	۱	۲	۱۳	۱۴

الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالاً اشتباه تایپ شده است؟ چگونه می توانستیم با مرتب کردن داده‌ها در نرم افزار، این داده را از میان تعداد بسیار زیادی سطر پیدا کنیم؟

داره "۵۱" حتماً اشتباه ثبت شده است. در سن دانش آموزان اگر توجه به بزرگ‌تر مرتب کنیم، خواهیم دید که آخرین داره (سنی عدد ۵۱) خیلی از بقیه خاصه دارد و تقریباً نامعقول است.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.



ب) در داده‌های مربوط به کدام دانش آموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده‌های متغیرهای بعدی (ورزش مورد علاقه، متوسط ساعات مطالعه آزاد و نمره ادبیات) به سمت چپ جابه‌جا شده‌اند؟ ورزش مورد علاقه این دانش آموز چیست؛ نمره ادبیات او چند است.

ردیف ۷، نیمی دانش آموز شماره ۱۹. ورزش مورد علاقه این دانش آموز بیگنال است و نمره ادبیات او ۱۹ می باشد.

عدد ۲۲

ب) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به اشتباه نوشته شده است؟ عدد ۲۲
ت) در متغیر «متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته» کدام عدد با الگوی داده‌های دیگر تفاوت دارد؟ آیا می‌توانیم این عدد را بدون بررسی، حذف یا اصلاح کنیم؟



عدد ۴۴، باید حدا بررسی کنیم که این عدد اشتباه ثبت شده یا فرد مورد نظر خیلی اصل مطالع آزاد است

ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده‌های مربوط به کدام دانش آموز با واحد اندازه‌گیری متفاوتی ثبت شده است؟ چگونه می‌توانستیم از این اتفاق جلوگیری کنیم؟

ردیف ۴، نیمی دانش آموز شماره ۴۵، باید در مرحله طرح و برنامه ریزی، واحد ثبت ضوابط
منصفی ما درسم (باید تعیین می کردیم که حدا نمره عددی ثبت شود، نه عبارت‌های مثل "+", "خوب"، ...

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

کار در کلاس



با توجه به داده‌ها جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	داده‌ها	معیارهای پراکندگی			
		میانگین	بازه	IQR	SD (s)
سن (سال)	۱۷ ۱۸ ۱۶ ۱۷ ۱۵ ۱۹ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۵ ۱۹	۱۶,۸	۱۷	۲,۵	۱,۴
میزان تماشای تلویزیون	۴ ۲۹ ۴ ۶ ۷ ۶,۵ ۷ ۸ ۶ ۳۰ ۴ ۵	۹,۷	۶,۲۵	۳	۸,۹۴

راهنمای جدول: میزان تماشای تلویزیون: متوسط ساعات‌های تماشای تلویزیون در هفته؛ IQR: دامنه میان جاری؛ SD: انحراف معیار.

متغیر "سن"

$$\bar{X} = \frac{17+18+16+17+15+19+15+16+17+18+15+19}{12} \approx 16,8$$

نیمه اول: ۱۵ ۱۵ ۱۵ ۱۶ ۱۶ ۱۷ ۱۷ ۱۷ ۱۸ ۱۸ ۱۹ ۱۹

نیمه دوم: ۱۷ ۱۷ ۱۸ ۱۸ ۱۹ ۱۹

درباره ۱۵ داریم: $Q_1 = \frac{15+16}{2} = 15,5$

درباره ۱۶ داریم: $Q_2 = \frac{17+17}{2} = 17$

درباره ۱۸ داریم: $Q_3 = \frac{18+18}{2} = 18$

$$s^2 = \frac{3(15-16,8)^2 + 2(16-16,8)^2 + 3(17-16,8)^2 + 2(18-16,8)^2 + 2(19-16,8)^2}{12} = 19,6 \rightarrow s = 1,4$$

$$D = 19 - 15 = 4$$

متغیر "میزان تماشای تلویزیون"

$$\bar{X} = \frac{4+29+4+6+7+6,5+7+8+6+30+4+5}{12} \approx 9,7$$

نیمه اول: ۴ ۴ ۴ ۵ ۶ ۶ ۶,۵ ۷ ۷ ۸ ۲۹ ۳۰

نیمه دوم: ۶,۵ ۷ ۷ ۸ ۲۹ ۳۰

درباره ۴ داریم: $Q_1 = \frac{4+5}{2} = 4,5$

درباره ۶,۵ داریم: $Q_2 = \frac{6+6,5}{2} = 6,25$

درباره ۸ داریم: $Q_3 = \frac{7+8}{2} = 7,5$

$$s^2 = \frac{3(4-9,7)^2 + (5-9,7)^2 + 2(6-9,7)^2 + (6,5-9,7)^2 + 2(7-9,7)^2 + (29-9,7)^2 + (30-9,7)^2}{12} = 79,97$$

انحراف معیار: $s = \sqrt{79,97} \approx 8,94$

دامنه: $D = \max - \min = 26$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

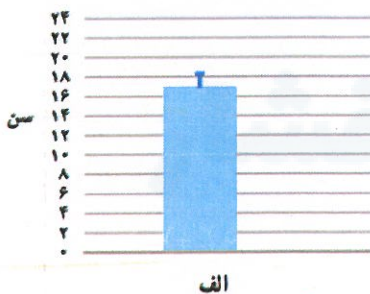
می گیرند.



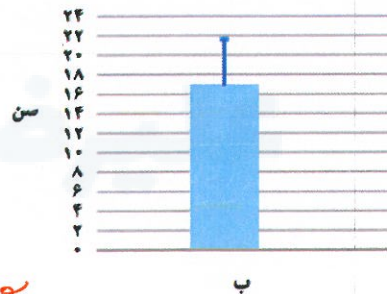
الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده های متغیر «سن» مناسب اند؟ چرا؟
میانگین به عنوان معیار گرایش به مرکز و انحراف معیار به عنوان معیار پراکندگی مناسب تر است. چون داده در افتاده وجود ندارد.

ب) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی، برای توصیف داده های «ساعت های تماشای تلویزیون» مناسب اند؟ چرا؟
میانگین به عنوان معیار گرایش به مرکز و دامنه میان چارگی به عنوان معیار پراکندگی مناسب تر است. زیرا داده در افتاده ندارد.
 پ) انحراف کدام داده ها از میانگین، باعث بزرگ شدن انحراف معیار متغیر «ساعت های تماشای تلویزیون» شده است؟ چگونه؟
داده های ۲۹ و ۳۰ زیرا در فرمول انحراف معیار $(\text{میانگین} - ۴۹)$ و $(\text{میانگین} - ۳۰)$ خیلی بزرگ هستند در اصل این داده ها میزان پراکندگی افزایش می دهند.
 ت) اگر برای توصیف داده های متغیر «ساعت های تماشای تلویزیون» فقط میانگین گزارش می شد، خوانندگانی که به داده های خام دسترسی نداشتند چگونه گمراه می شدند؟
داده های در افتاده ۲۹ و ۳۰، اطلاعات دقیق در اختیار خوانندگان نمی نهد و باعث می شود تا خوانندگان فکر کنند که میانگین تماشای تلویزیون خیلی بالاست.

ث) با توجه به داده های جدول کار در کلاس در صفحه قبل، کدام یک از نمودارهای زیر نشان دهنده میانگین و انحراف معیار سن است؟ نمودار الف یا ب؟



الف



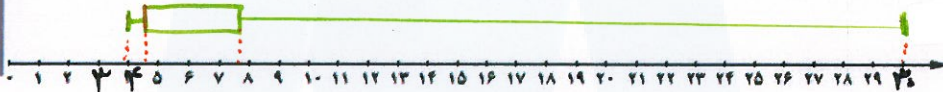
ب

**میانگین $\bar{x} = 16,8$ (نمودار الف)
 انحراف معیار $s = 1,4$**



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

اگر داده‌های دورافتاده داشته باشیم، نمی‌توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسنده کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در این گونه موارد باید از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم. برای داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» در مثال بالا، با استفاده از مقدار چارک‌های اول، دوم (میانه) و سوم، ابعاد جعبه (به ترتیب ابتدا، خط میانی و انتها) را روی محور زیر مشخص کنید. سپس، با توجه به کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌ها، نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.



الف) کدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا پراکنده‌ترند: نمودار نمایش‌دهنده میانگین و انحراف معیار یا نمودار جعبه‌ای؟ **نمودار جعبه‌ای**

ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها و وجود داده‌های دورافتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمتی مطمئن‌تر است؟

نمودار جعبه‌ای

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

کار در کلاس

دو شرکت به نرگس پیشنهاد کار داده اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول، تقریباً ۱/۶ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۴ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از این دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می کند.

اعظم می گوید: «شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت». مریم می گوید «به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکندگی چه فایده ای دارد؟» آنها تصمیم می گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به طور تصادفی انتخاب می کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می کنند.

	حقوق کارمندان								
شرکت اول	۱	۱/۵	۱/۲	۱/۷	۱/۴	۱/۸	۳	۱/۸	۱/۸
شرکت دوم	۰/۷	۱	۸	۱۲/۸	۰/۸	۱/۶	۱۰/۸	۰/۸	۰/۸

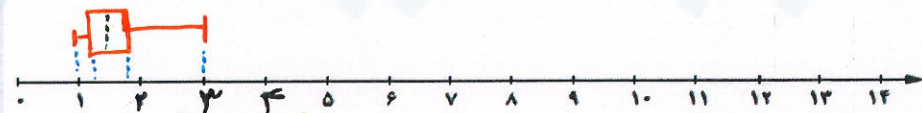
الف) با استفاده از داده های جدول بالا، نمودار جعبه ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.

(شرکت اول)

داده ها مرتب شده: ۱، ۱/۵، ۱/۲، ۱/۴، ۱/۸، ۳، ۱/۸، ۱/۸

$$Q_1 = \frac{1 + 1/2}{2} = 1/15$$

$$Q_3 = \frac{1/8 + 1/8}{2} = 1/8$$



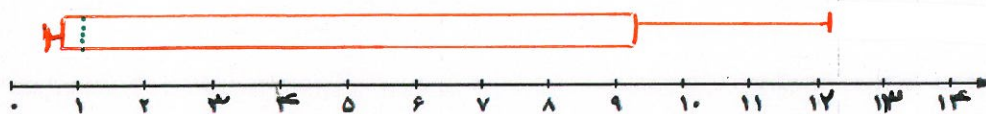
داده ها مرتب شده:

۰/۷، ۱، ۸، ۱۲/۸، ۰/۸، ۱/۶، ۱۰/۸، ۰/۸، ۰/۸

$$Q_1 = \frac{0.7 + 1}{2} = 0.85$$

$$Q_2 = 1$$

$$Q_3 = \frac{8 + 10/8}{2} = 9.125$$



(شرکت دوم)

استاد امیر شریفی مقدم - 09133979092



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

• حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است.

**درست - طبق نمودار هجدهای تقریباً ۵۰ درصد کارکنان شرکت دوم
بیل از میان قرار دارند**

• اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را براساس شایستگی هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است. **درست**

• در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است.

نادرست، چون داده‌ها خیلی پراکنده هستند

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

کار در کلاس

دو مدرسه متوسطه دوم، که تعداد دانش آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه ها و کادر آموزشی شان، وضعیت قبولی دانش آموزان خود را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی هایش ۲۰ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد. فرض می کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟

کیفی

ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می کنید؟

پسندی به تعداد قبولی های مدرسه دارد. همدار مدرسه اول سال گذشته ۷ قبولی دارد باشد، اصل ۲۱ نفر قبولی خواهد بود یعنی ۲۰ درصد و در مدرسه دوم سال گذشته ۵۰ نفر قبولی دارد باشد اصل ۶ نفر قبولی خواهد بود یعنی ۲۰ درصد افزایش بالایی برای مدرسه دوم چهار است. پس با این اطلاعات (یعنی فقط درصد ها) نمی توان مدرسه بهتر را مشخص کرد (پ) افزایش ۲۰ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.



افزایش ۲۰ درصدی یعنی ۲ برابر $(\frac{200}{100} = 2)$ تعداد اولی به دانه ها اولی

افزایش ۲۰ درصدی یعنی ۲۰ درصد یعنی ۱/۲ برابر $(\frac{20}{100} = \frac{1}{5})$

تعداد اولی به دانه های اولی اضافه می شود (یعنی در کل ۳ برابر می شود).

ت) فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی ها قبلاً ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۳ نفر شده است (۲۰۰٪ افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۸۴ نفر شده است (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می کنید؟



مدرسه دوم

ث) در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد، چگونه می تواند گمراه کننده باشد؟

در تعداد اولی کم باشد، درصد بالا هیچ مانده ای نخواهد داشت. پس
در گزارش درصد حتماً باید با گزارش اولی همراه باشد.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به عنوان اثر علمی و... برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

کار در کلاس



۱. برای احداث یک استخر در حاشیه یک کلان شهر، محل مناسبی انتخاب، و با همکاری گروهی متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره برداری از استخر، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی، که شناگر نبودند، به توصیه پزشکی در قسمت کم عمق در حال راه رفتن در آب اند و در قسمت عمیق گاهی فقط چند نفر شنا می کنند.

الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقه احداث استخر، چگونه می توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟

با اطلاع از میانگین سنی افراد منطقه، می شد که غالب افراد منطقه مسن بوده و بنابراین توصیه پزشکان باید در قسمت کم عمق راه بروند. پس بهتر بود که قسمت کم عمق دارای ابعاد بزرگتری باشد.

ب) چه کسانی می توانستند پیش از احداث این استخر، درباره فراوانی افرادی که در آن منطقه شناگر بودند، اطلاع بدهند؟

اداره ورزش منطقه، پزشکان منطقه، افراد بومی منطقه

پ) چگونه مشورت با افراد بومی درباره اطلاعات قسمت الف و ب می توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم عمق و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟

مشورت با افراد بومی به متخصصان کمک می کرد تا متوجه شوند که غالب ساکنان منطقه مسن بوده و بنابراین توصیه پزشکان باید در قسمت کم عمق راه بروند. متخصصان با استفاده از این اطلاعات، قسمت کم عمق را با ابعاد بزرگتری می ساختند.

۲. هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و بر کدام گام های دیگر اثر می گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجرا کنندگان برداشت های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند.

اجرای نادرست گام اول است که روی کلیه مراحل بعدی تأثیر خواهد بود. زیرا در صورتی که مسئله به خوبی تعریف و درک نشود، راه مناسبی برای رسیدن به پاسخ مسئله و روش کار پیدا نمی کنیم و در نتیجه گام طرح و برنامه با شکست مواجه می شود. اگر تعریف مسئله دقیق انجام نگیرد در مرحله گردآوری و پاک سازی داده ها، برخی داده ها به طور نادرست گردآوری و حذف می شوند. در نتیجه تحلیل داده ها، مرتب کردن داده ها و تحلیل آن ها به درستی در راستای رسیدن به پاسخ درست مسئله نخواهد بود. چون نتایج درستی نداشتن نهاده است، قطعاً نتیجه گیری و تفسیر درستی نخواهد داشت.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.
(ب) اندازه گیری وزن افراد غوغه باد و واحد صفات (کیلوگرم و پوند) انجام شده است.

اجرای نادرست گام دوم است. زیرا در طرح و برنامه ریزی واحد اندازه گیری مشخص نشده است.

چون وزن افراد بر اساس دو واحد مختلف ثبت شده است، ممکن است در مرحله گردآوری و

پاک سازی داده ها، برخی از داده ها به دلیل دور بودن از بقیه به نادرستی حذف شوند. با حذف برخی از داده ها،
سختی در تفسیر آن ها نیز برای رسیدن به پاسخ مسئله نادرست خواهد بود.
(پ) تمامی داده های دور افتاده حذف شده اند.

همه اند اجرای نادرست گام سوم باشد. در مرحله گردآوری و ثبت داده ها، داده دور افتاده نامقول به نظر برسد و
بدون بررسی حذف شود، اجرای نادرست لین گام می تواند باشد و در تمام های دیگر تاثیر دارد



(ت) در پژوهشی با موضوع «بررسی قدمت بناهای مسکونی چند روستا»، مجریان
پروژه جلساتی را با حضور کارشناسان برگزار می کنند و پس از تصمیم گیری درباره
طراحی و برنامه ریزی پروژه، برای گردآوری داده ها چند نفر را استخدام می کنند.
آمارگیرها بدون اطلاع از چگونگی شکل گیری مسئله و اهداف این پژوهش، برای
پر کردن پرسش نامه ها به منازل مختلف مراجعه می کنند. هنگام وارد کردن داده ها در

نرم افزار، مشاهده می شود که در چندین پرسش نامه در مقابل متغیر «سن بنا» نوشته اند: «فوت شده است».

همه اند اجرای نادرست گام سوم باشد. به دلیل عدم آگاهی از کلیت واحدها پروژه ممکن است

آمارگیرها صفت «سن بنا» را به درستی خوانده باشند و فقط به کلمه «سن» توجه کرده و در نتیجه حاوی

«سن بنا» به اشتباه «سن افراد» ثبت کرده باشند. اجرای نادرست لین گام در تمام های بعدی تاثیر دارد.

(ث) پس از گردآوری و تحلیل داده ها به شیوه ای که پیش تر در گام «طرح و برنامه ریزی» به تأیید رسیده بود، نتایج مورد انتظار به دست

نیامد. به همین سبب، معیارهای دیگری برای گزارش نتایج انتخاب شده است.

اجرای نادرست گام چهارم است که روی گام پنجم تاثیر دارد.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه بر حروف (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

ج) نتایج را فقط افراد متخصص آمار تفسیر کرده اند. اجرای نادرست گام پنجم است که تلاش
کن گام ها را از بین هر دو باعث حاصل نتایج دایم و درست می شود و به صورت عامیانه بیان کنم.

تمرین

۱. به نظر می رسد کودکانی که زبان مادری شان فارسی نیست، در دوره دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه آماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

بررسی معدل دروس دانش آموزان اول دبستان در یک مدرسه دخترانه خاص در شهر کرمان و بررسی ارتباط
این معدل (میزان یادگیری) با زبان مادری دانش آموزان.

۲. با توجه به تأثیر شیوه های مختلف حمل و نقل، بر محیط زیست، می خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش آموزان، از آنها پرسیم در هفته گذشته، بیشتر به کدام یک از شیوه های زیر به مدرسه آمده اند؟



- ۱- پیاده یا با دوچرخه
- ۲- با وسایل حمل و نقل عمومی
- ۳- با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی.

الف) در این مطالعه، جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

جامعه آماری = دانش آموزان یک کلاس ۲۸ نفره

نمونه آماری = ۹ نفر از دانش آموزان کلاس

اندازه جامعه = ۲۸ نفر

اندازه نمونه = ۹ نفر

ب) داده های این مطالعه را با چه روشی می توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گردآوری این داده ها رخ دهد؟

پرسش نامه - ممکن است دانش آموزان در یک فصل های سال با روش نامی به مدرسه نیایند
(مانند زمان امتحان) در نتیجه عدم آگاهی ما از این موضوع، ممکن است باعث شود پرسش نامه ما
دقیق و جامع نباشد.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه بر جرمش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.



ب) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه گیری (فاصله ای/نسبیتی - اسمی/ترتیبی) آن را مشخص کنید.

متغیر تصادفی مورد بررسی "شیوه های مختلف حل و نقل" است که یک متغیر کیفی اسمی است.

ت) چه نمودارها و آماره هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب اند؟
نمودارهای دایره ای و میله ای بر این متغیر کیفی اسمی مناسب اند.

ث) آیا می توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش آموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل های مختلف یا زمان برگزاری آزمون های پایان نیم سال)؟ توضیح دهید.

خبر - چون ممکن است دانش آموزان در فصل های مختلف سال با روش های متفاوتی

به مدرسه بیایند - مثلاً از زمان انجام تحقیق اردیبهشت ماه باشد، بیشتر دانش آموزان از دو چرخ استفاده می کنند و در فصل زمستان باشد از وسایل حل و نقل عمومی یا ماشین استفاده می کنند



چ) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به طور تصادفی انتخاب می کردیم، آیا لزوماً نتایج مشابهی حاصل می شد؟ توضیح دهید.

خبر - زیرا ممکن بود در نمونه دایره ای افراد روش های دیگری را برای حل و نقل انتخاب می کردند.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۳. در هریک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هریک از موارد چگونه بر نتایج تأثیر می گذارد؟



الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه روزی
نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

چون مدیران ارشد شیفت روز انتخاب شده اند، قطعاً میزان رضایت شغلی بالا خواهد بود.
(شیفت روز مکملات عصره شب به شیفت شب دارد).
برای آنکه نتایج واقعی تر شوند باید در نمونه مورد نظر حتماً افراد کارمند صغول در شیفت شب نیز حضور داشته باشند.



ب) مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایتشان از برنامه های کودک تلویزیون
نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آنها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

چون در این ساعت ممکن است برنامه های کودک در تلویزیون زیاد پخش شود، ممکن است به صورت نادرست میزان رضایت خطی بالا باشد.

پ) مسئله: نظرسنجی از دانش آموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر درباره اینکه به طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می دهند.

نمونه: دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده اند.

امکان دارد افرادی که داوطلبانه در این مطالعه شرکت می کنند، دانش آموزان درس خوانی باشند و ساعت زیادی را در روز به انجام تکالیف اختصاص دهند که در این صورت نتایج غیر واقعی خواهد بود.
بهتر است دانش آموزان به طور تصادفی انتخاب کنیم.

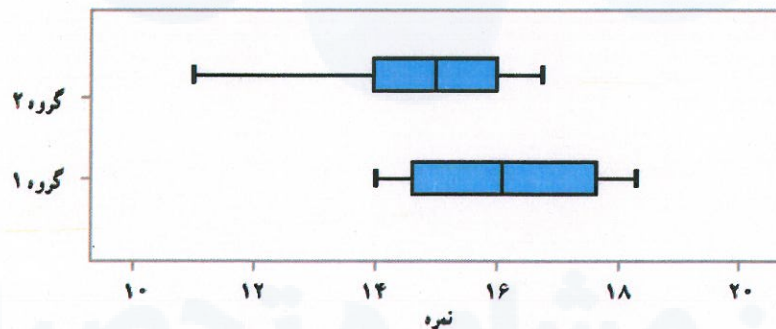


چاپ، انتشار و فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

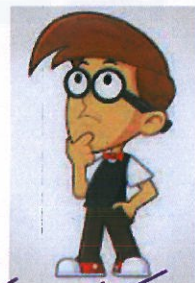
می گیرند.

۴. «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم زمان چند فعالیت ساخته نشده است و هر بار که ما گمان می کنیم مشغول انجام دادن چند کار به صورت هم زمان هستیم، در واقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می پرد. مغز انسان تشنه خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می شنویم، مغز ما، که بی تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می دهد که مثلاً اگر دانش آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت و گویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به جای اینکه به قسمت حقایق و ایده ها برود، به قسمت مهارت ها فرستاده می شود.»

سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در تشریفه مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی صدا قرار می دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه ای می گیرید؟
 ۵۰ درصد دانش آموزان گروه یک، نمره بالاتری از ۷۵ درصد دانش آموزان گروه دوم دارند.



ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید.
 دامنه تغییرات نمره های گروه دوم بیشتر از دامنه تغییرات نمره های گروه اول است. (پراکندگی بیشتر دامنه میان چارکی گروه دوم کمتر از دامنه میان چارکی گروه اول است، یعنی نمرات گروه دوم حول میانه متمرکزتری باشند.)
 پ) از مقایسه کمینه گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه ای می گیرید؟

تقریباً ۲۵ درصد دانش آموزان گروه دوم، کمتر از کمینه نمره دانش آموزان گروه یک است.

استاد امیر شیرینی مقدم - 09133979092



چاپ، انکشاف و انتشار این جزوه به درخواست (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می تواند همراه کننده باشد؟

سگروه دوم، چون داده ها خیلی پراکنده تر بوده و برخی از آن ها حالت داده دور افتاده دارند.

ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک ترند؟

سگروه یک، زیرا پراکندگی داده ها کمتر بوده و توزیع آن ها حول میانه تقریباً متقارن است.

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه ای می توان تعمیم داد؟

به کل دانش آموختگان پایه دوازدهم هجری

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



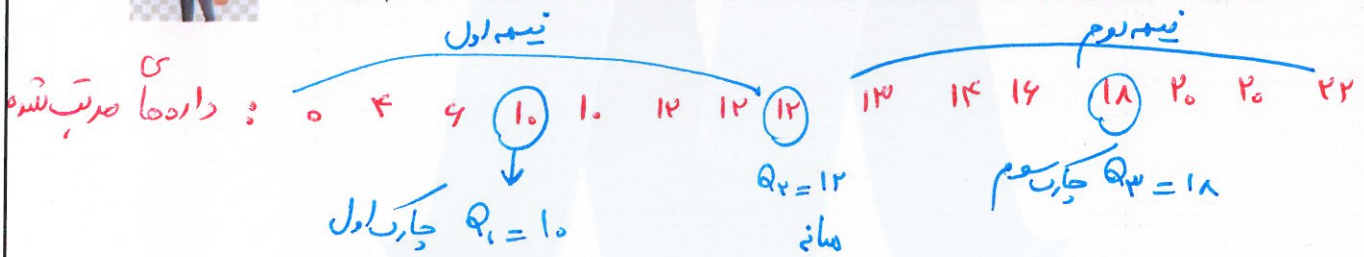
چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش آموز علوم انسانی پایه یازدهم یک مدرسه پرسیده ایم که به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده های گردآوری شده به این شرح است:

۱۲ ۱۴ ۲۰ ۲۲ ۱۸ ۲۰ ۰ ۴ ۶ ۱۳ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۶

الف) این داده ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.



$$\bar{X} = \frac{0 + 4 + 6 + 10 + 10 + 12 + 12 + 12 + 13 + 14 + 16 + 18 + 20 + 20 + 22}{15} = 12,6$$

$$S^2 = \frac{(0-12,6)^2 + (4-12,6)^2 + (6-12,6)^2 + 2(10-12,6)^2 + 3(12-12,6)^2 + (13-12,6)^2 + (14-12,6)^2 + (16-12,6)^2 + (18-12,6)^2 + 2(20-12,6)^2 + (22-12,6)^2}{15}$$

انحراف معیار واریانس

۱۵

۱۸ ۲۰ ۲۰ ۲۲

۱۸-۱۲,۶ ۲(۲۰-۱۲,۶) ۲۲-۱۲,۶

۳۵/۴۰۲۵

۱۵

۵,۹۵

تغییرات! به صورت جدول زیر انجام می دهیم.

داده ها قبلی	۰	۴	۶	۱۰	۱۰	۱۲	۱۲	۱۲	۱۳	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۰	۲۲
داده های جدید	۰	۴	۶	۱۰	۱۰	۱۲	۱۲	۱۲	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸	۲۳	۲۳	۲۳

$$\bar{X} = \frac{0 + 4 + 6 + 10 + 10 + 12 + 12 + 12 + 16 + 17 + 17 + 18 + 23 + 23 + 23}{15} = 14$$

$$S^2 = \frac{(0-14)^2 + (4-14)^2 + (6-14)^2 + 2(10-14)^2 + 3(12-14)^2 + (16-14)^2 + 2(17-14)^2 + (18-14)^2 + 3(23-14)^2 + (23-14)^2}{15}$$

انحراف معیار واریانس

۱۵

۵۷/۳۰۴۹

۷,۵۷



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرووش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

ب) فرض کنید می خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

$$\bar{X} = 12,6 \quad \text{میانگین داده های اولیه}$$

$$189 = 15 \times \text{میانگین} \quad \text{مجموع داده ها اولیه}$$

$$\bar{X} = \frac{189 + x + y}{17} \Rightarrow 12,6 = \frac{189 + x + y}{17}$$

$$189 + x + y = 17 \times 12,6$$

$$x + y = 214,2 - 189$$

$$x + y = 25,2$$

در صورت تساوی گفته میانگین تغییر نکند

پس برای این باید مجموع داده (مجموع شده برابر ۲۵٫۲ باشد، یکی از داده ها کمتر از ۱۲ و دیگری بیشتر از ۱۲ باشد تا میانه تغییر نکند.

دو داده ای صدگ ۱۱ و ۱۴٫۵ به دو نگاه و توزیعی انتخاب می کنیم. در نتیجه داده ها جدید به صورت زیر می باشند.

۰ ۴ ۶ ۱۰ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۴٫۵ ۱۶ ۱۸ ۲۰ ۲۰ ۲۲

↓ داده جدید

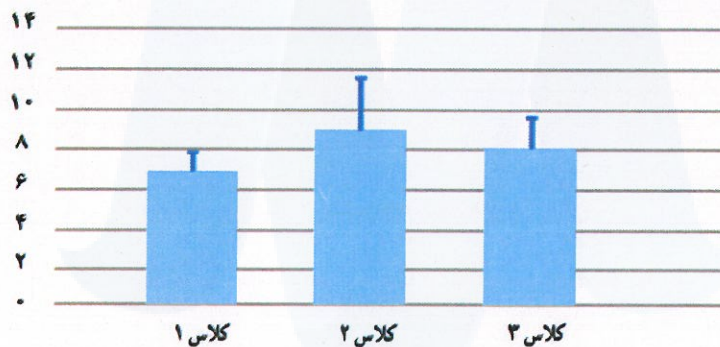
↓ داده جدید



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۶. با توجه به تأثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و آوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس پایه دهم، میانگین میزان خواب این دانش‌آموزان را در هفته گذشته بر حسب ساعت پرسیدند و ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن را به صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهنده میانگین و میله خط نشان‌دهنده انحراف معیار است.)



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می پرسیم آیا آن‌ها می توانند به درستی به یاد آورند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می کنید؟)

۱. ممکن است بعضی از دانش‌آموزان در سخنان پاهوش باشند که مقدار خواب در یک هفته را یادآور شده باشند.

۲. اطلاعات جمع‌آوری شده فقط در مورد کیفیت خواب دانش‌آموزان است و در مورد کیفیت خواب آنها هیچ صحبتی نشده است.

۳. ممکن است برخی از دانش‌آموزان اطلاعات نادرستی در اختیار آن حاضرین دهند.

۴. ممکن است یادگیری نامناسب برخی از دانش‌آموزان به خاطر کم‌بیماری خاص باشد که کمبود خواب.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

(ب) نوع (کفی/کیفی) و مقیاس اندازه گیری (فاصله ای/نسبتی - اسمی/ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید. **کمی نسبی**
(پ) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.



	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	۲٫۷	۱٫۷

(ت) چه عواملی می تواند بر نتایج این مطالعه تأثیر بگذارد؟ چگونه می توانیم با بیان مسئله ای جدید، پاسخ دقیق تری برای این مسئله پیدا کنیم؟

۱. رسیدن به پاسخ دقیق تر، علاوه بر کمیت خواب، باید کیفیت خواب نیز بررسی شود.

به عنوان مثال باید مشخص شود ۱. چه میزان خواب در شب و چه میزان خواب در شب بیدار است.

**۲. آیا شخص مورد نظر دارای بیماری خاصی است که کیفیت خواب او را تحت تأثیر قرار می دهد؟
در نتیجه در مرحله طرح و برنامه ریزی نیز پرسش نامه کامل تری طراحی شود.**

(ث) چه کسانی می توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

۱. افراد اسبق در باب (برخی از دانش آموزان به دلیل

اسبق در یادگیری، کمترین تأثیر عواملی مانند خواب قرار می گیرند)



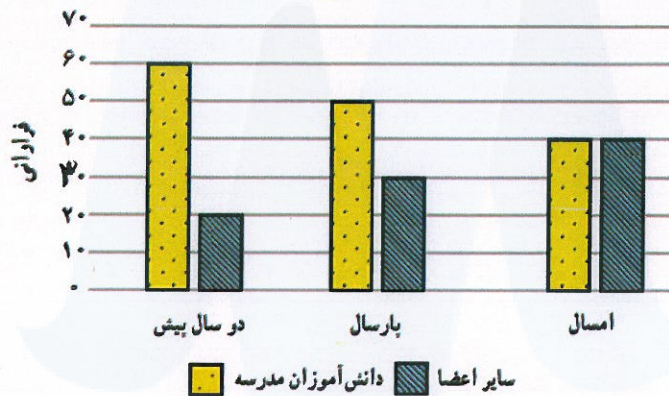
۲. نرسند (برای بعضی از بیماری ها در کیفیت و کمیت خواب تأثیر ندارد)



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه بر عهده حروروش (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۷. مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.



۳ نفر

الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

سه ساله ۱۰ نفر از دانش‌آموزان مدرسه از کتابخانه طرح می‌شوند. بنابراین سال آینده ۳ نفر از دانش‌آموزان مدرسه عضو کتابخانه می‌شوند.

پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هر یک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

دو سال پیش: ۲۰ = سایر اعضا، ۶۰ = دانش‌آموزان مدرسه

کل دانش‌آموزان = ۸۰

دو سال پیش

$$\text{زاویه مربوط به سایر اعضا} = \frac{20}{80} \times 360^\circ = 90^\circ$$



پارسال: ۳۰ = سایر اعضا، ۵۰ = دانش‌آموزان مدرسه

کل = ۸۰

$$\alpha = \frac{50}{80} \times 360^\circ = 225^\circ$$

$$\alpha = \frac{30}{80} \times 360^\circ = 135^\circ$$

$$\alpha = \frac{40}{80} \times 360^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{40}{80} \times 360^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{40}{80} \times 360^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{40}{80} \times 360^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{40}{80} \times 360^\circ = 180^\circ$$

ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

۱! ممکن است ورود سایر اعضا موجب مزاحمت برای دانش‌آموزان مدرسه شده و دانش‌آموزان مدرسه تصمیم به خروج از کتابخانه گرفته باشند
۲! ممکن است عملکرد خوب سایر اعضا باعث شده باشد که مدرسه تصمیم

بگیرد تا هر سال سهم دانش‌آموزان کم شده و سهم سایر اعضا بیشتر شود.

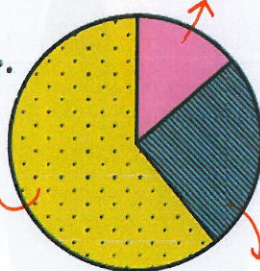


پاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه های سنی مختلف در نمودار دایره ای زیر نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)

۴۰ تا ۶۰ سال ۲۰ تا ۴۰ سال کمتر از ۲۰ سال



$$144^\circ - (54^\circ + 90^\circ) = 216^\circ$$

$$\text{درصد افراد بین ۴۰ تا ۶۰ سال} = \frac{216}{340} \times 100 = 63.5\%$$

الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

۶۰ درصد (در بالا و کنار شکل توضیح داده شده است)

ب) مسئول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، آن را غیر واقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می تواند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهید.

- بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ گویی به سؤالات پرسشگر نداشته اند.
- می توانند تاثير گذار باشند (چون باعث می شود تا تعداد افراد زیر ۴۰ سال کمتر حساب شوند)
- گردآوری داده ها در ساعات اداری انجام شده است و باز نشستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته اند.
- می توانند تاثير گذار باشند (چون در ساعات اداری بیشتر افراد زیر ۴۰ سال در اداره بوده و نتوانستند به سالن نمایش بروند)
- هنگام گردآوری داده ها، دانش آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته اند.

می توانند تاثير گذار باشند (چون اگر تعداد دانش آموزان یعنی افراد زیر ۲۰ سال زیاد باشد، این راه نتایج به واقعیت نزدیک تر می شوند).



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۹. جدول زیر نشان دهنده تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

سرعت (کیلومتر در ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد خودروهای تصادف کرده	۴۰	۳۰	۲۱۰	۲۵۰	۳۵۰	۲۴۰	۱۵۰	۷۰	۴۰	۲۰	۲۰	۱۰

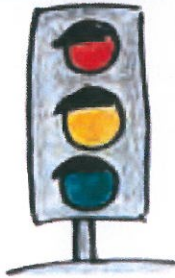


همان طور که دیده می شود، تعداد تصادف خودروهای که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس: «هرچه سریع تر بروید، مطمئن تر و امن تر است.» نتیجه گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

این نتیجه گیری ها بدون اطلاع از شرایط، مکان، زمان، سن افراد راننده و... می تواند نادرست باشد. مثلاً اگر در شهر با سرعت بالای ۹۰ رانندگی کنیم، خطر تصادف خیلی زیاد می شود و اگر در اتوبان ها و بزرگراه ها با سرعت ۵۰-۴۰ کیلومتر در ساعت رانندگی کنیم، خطر تصادف بالا می رود. ممکن است افراد با سرعت بالای ۹۰ رانندگی می کردند افراد ماهری بودند و ماشین با کیفیت داشتند ولی افرادی که با سرعت کمتر رانندگی می کردند تازه کار و ناایده در رانندگی بوده و ما این استفاده شده توسط آنها بی کیفیت باشد. بنابراین بدون اطلاع از شرایط نمی توان نتیجه گیری درستی انجام داد.



فعالیت



۱. یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه شروع به کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۴۵ ثانیه اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.
اگر چراغ روشن سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد و $f(t)$ عدد چراغ روشن در ثانیه t ام، با توجه به فرض:

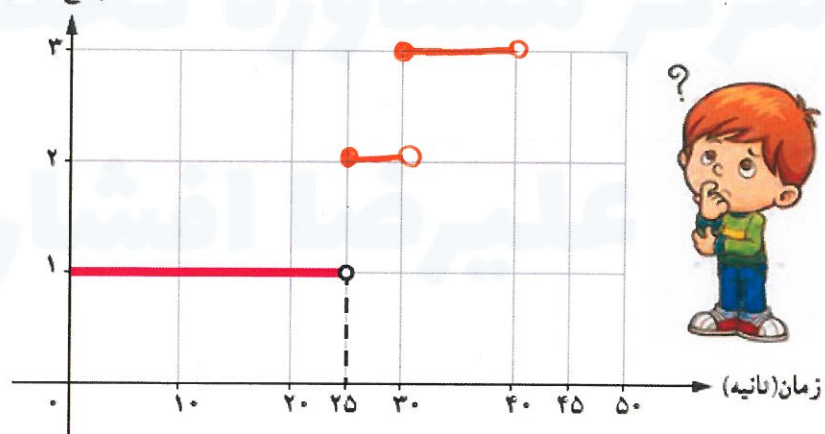
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ 2 & 25 \leq t < 30 \\ 3 & 30 \leq t < 45 \end{cases}$$

$$D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 45\}, R_f = \{1, 2, 3\}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ 2 & 25 \leq t < 30 \\ 3 & 30 \leq t < 45 \end{cases}$$

$$D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 45\}, R_f = \{1, 2, 3\}$$

عدد چراغ روشن

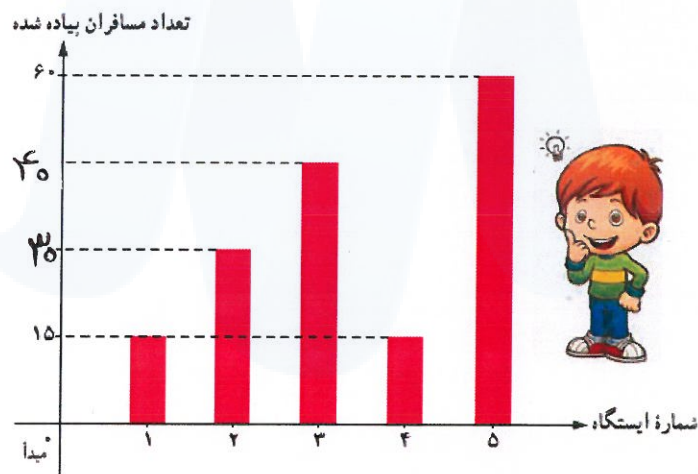




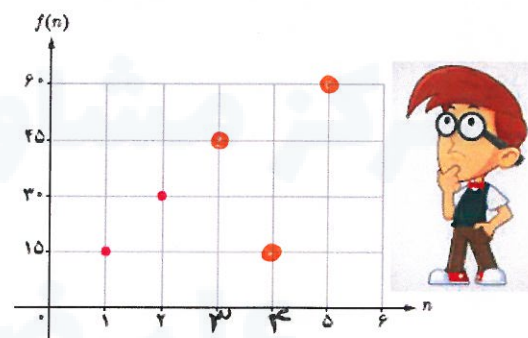
چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۲. نمودار میله ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می دهد. اگر n ، شماره ایستگاه و $f(n)$ تعداد مسافران پیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰	۴۵	۱۵	۶۰



استاد امیر شریفی مقدم - 09133979092

$$f(n) = \begin{cases} 15n & 1 \leq n \leq 3 \\ 15 + 45(n-4) & 4 \leq n \leq 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

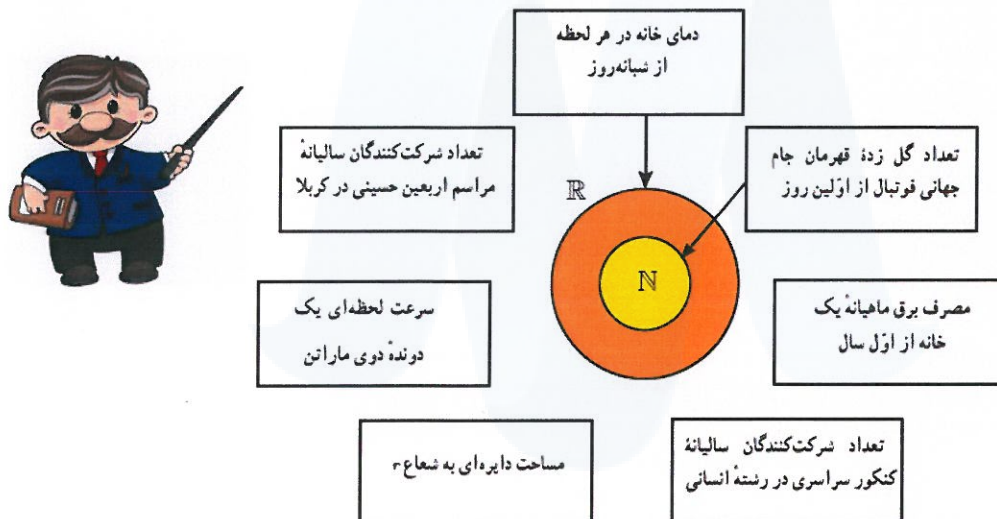
$$D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 5\} \quad R_f = \{15, 30, 45, 60\}$$

استاد امیر شریفی مقدم - 09133979092

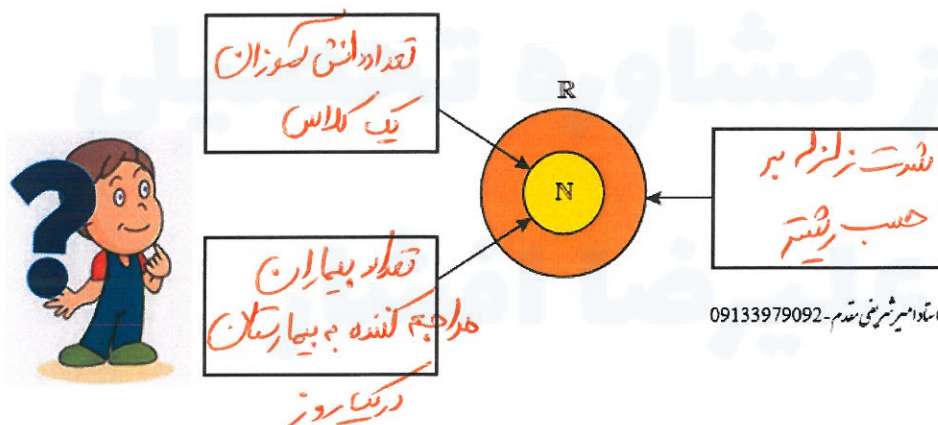


چاپ، کثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱. اگر تابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



۲. داخل هر کدام از مستطیل های زیر مسئله ای را بنویسید که دامنه مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد :



استاد امیر شریفی مقدم - 09133979092

در تعیین دامنه تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و n ام است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می کنیم.

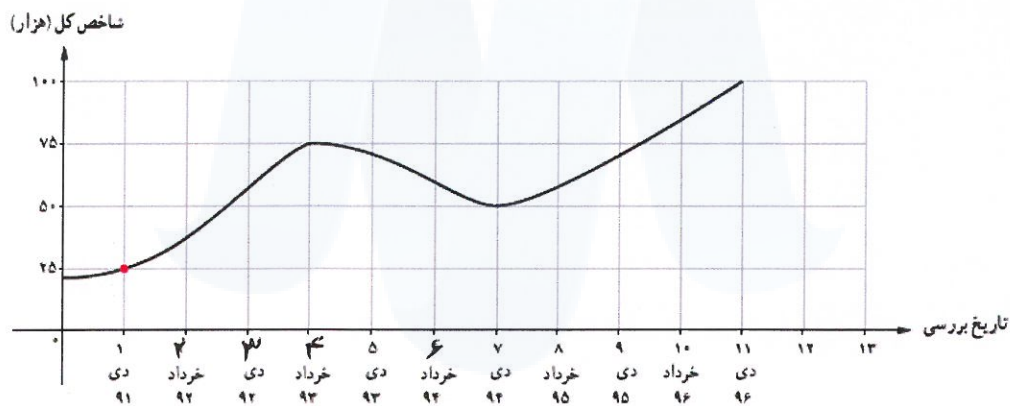
استاد امیر شیرینی مقدم - 09133979092



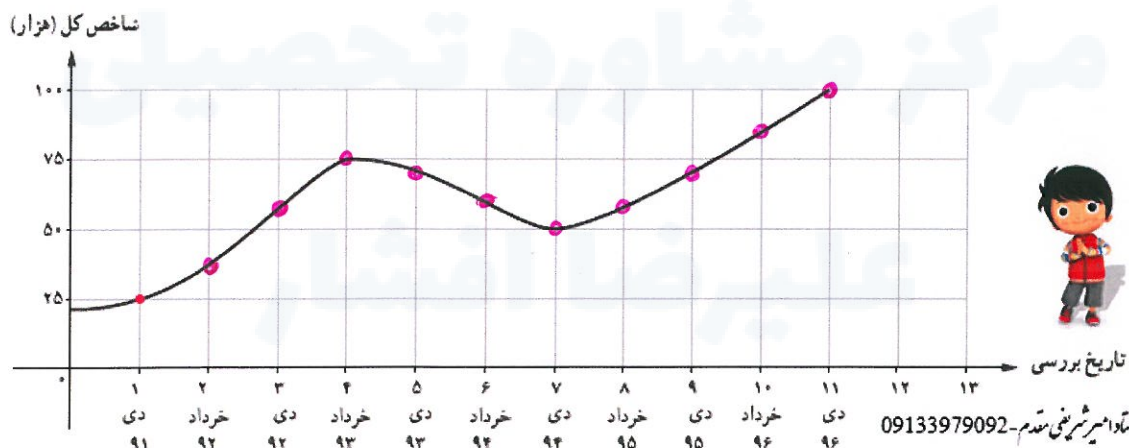
چاپ، کثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی منع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

فعالیت

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران^۱ (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۶ به طور تقریبی نشان می دهد:



الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام را در تاریخ های نوشته شده معلوم کند. در سری زمانی بالا، شاخص کل در چه فاصله ای روند کاهشی و در چه فاصله ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟



استاد امیر شیرینی مقدم - 09133979092

تایم ریزه دی ماه ۹۱ تا خرداد ۹۳ صعودی (چون هر چه به سمت راست می رویم مقدار تایم افزایش می یابد).
در خرداد ۹۳ تا دی ۹۴ نزولی (چون هر چه به سمت راست می رویم مقدار تایم کاهش می یابد)
دی ۹۴ تا دی ۹۶ صعودی است.

استاد امیر شیرینی مقدم - 09133979092



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و... و دی ۱۳۹۶ را یازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

n امین تاریخ بررسی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$f(n)$ مقدار شاخص کل (هزار)	۲۵	۳۰۷	۵۷	۷۵	۷۰	۶۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۵	۱۰۰

ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۴ تا دی ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(۱۳)$ است؟ چرا؟



۸۵,۰۰۰ (۱) ۱۰۵,۰۰۰ (۲) ۱۱۲,۵۰۰ (۳) ۱۰۰,۰۰۰ (۴) ۱۲۵,۰۰۰ (۵) ✓

از دی ماه ۹۴ تا دی ماه ۹۶ به ازاء هر ساله افزایش یارنج،

هزاران شاخص حدوداً ۱۲,۵ واحد افزایش می یابد. پس از $f(۱۱)$ تا $f(۱۳)$ ،

هزاران شاخص حدود ۲۵ = $۲ \times ۱۲,۵$ واحد افزایش خواهد یافت. یعنی چون $f(۱۱) = ۱۰۰$ است پس $f(۱۳)$ تقریباً برابر ۱۲۵ خواهد بود. (صورت ۵).

د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به دست آمده برای دی ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

بر عهده دانش آموز عزیز می باشد.

استاد امیر شیرینی مقدم - 09133979092

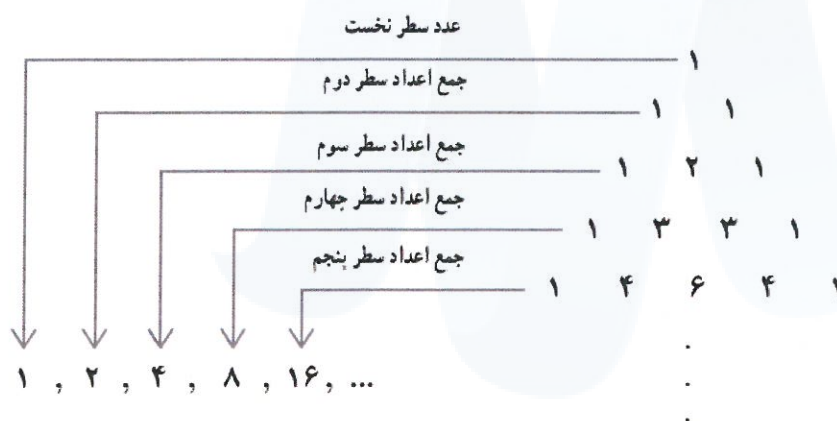
استاد امیر شیرینی مقدم - 09133979092



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به درخواست (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

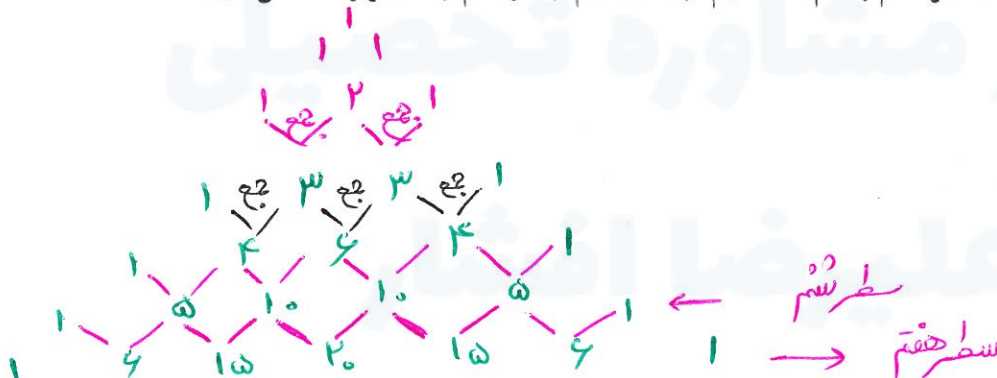
فعالیت

برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث خیام^۲، اعداد هر سطر را به صورت زیر با یکدیگر جمع می کنیم:

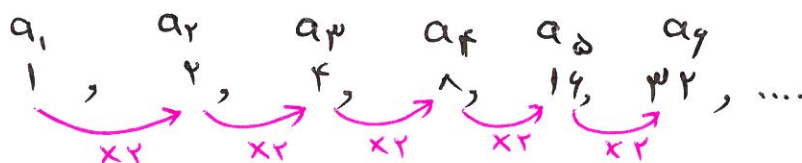


اگر n شماره هر سطر و a_n (جمله n ام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

الف) با محاسبه مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.



ب) بر اساس رابطه میان a_1, a_2 و رابطه میان a_2, a_3 و نیز a_3, a_4 می توان مقادیر a_6 و a_7 را مشخص کرد؟ چگونه؟



هر جمله، دو برابر جمله قبل خود است.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و نشر (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

ج) آیا به کمک قسمت ب، می توانیم رابطه میان هر دو جمله متوالی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به دست می آید؟ چرا؟

رابطه بازگشتی

$$a_{n+1} = 2 a_n, \quad a_1 = 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

بله، با این رابطه فقط جملات این الگو به دست می آید.

دو برابر جمله قبلی می شود جمله بعدی

د) رابطه ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطه بازگشتی می نامیم. برای دنباله اعداد بالا رابطه ای بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنباله بالا را مشخص کند.



جواب :

$$a_{n+1} = 2 a_n, \quad a_1 = 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

ه) رابطه ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. ($n \in \mathbb{N}$)

$$1 = 2^0 \quad 2 = 2^1 \quad 4 = 2^2 \quad 8 = 2^3 \quad 16 = 2^4 \quad 32 = 2^5$$

$$a_n = 2^{n-1}$$



و) رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت «د» چه تفاوتی با ضابطه به دست آمده از قسمت «ج» دارد؟

در قسمت «د» مقدار هر جمله به جمله قبلی وابسته است یعنی مقدار a_{n+1} به مقدار a_n وابسته است.

ولی در قسمت «و» مقدار هر جمله فقط به شماره آن جمله وابسته است.

مقدار a_n فقط به شماره آن جمله وابسته است (مقدار a_n فقط به مقدار n وابسته است)

استاد امیر شیرینی مقدم - 09133979092



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به درخواست (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

کار در کلاس

با توجه به ضابطه دنباله داده شده، جاهای خالی را پر کنید.



جمله n ام	پنج جمله اول دنباله
$a_n = 3n - 2$	۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳
$b_n = n^2 - 1$	۰, ۳, ۸, b_4 , ۲۴
$c_n = \frac{1}{n}$	$c_1, \dots, \frac{1}{p}, \dots, c_{30}, \dots, c_4, \dots, c_5$
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1, d_2, -\frac{1}{3}, d_4, \dots, d_5$

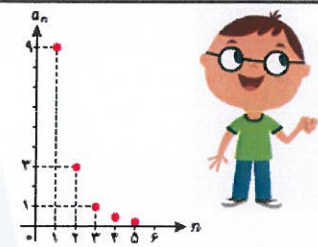
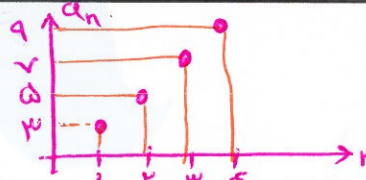
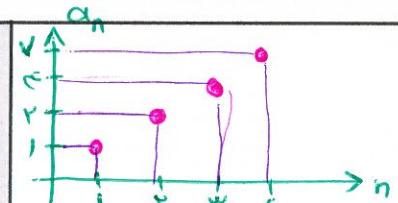
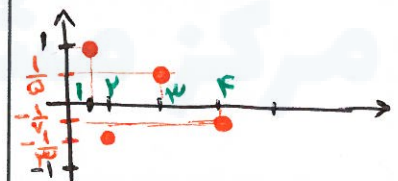
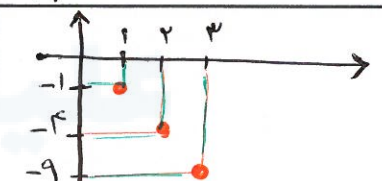
$$\begin{aligned} b_4 &= 4^2 - 1 = 15 \\ c_1 &= \frac{1}{1} = 1 \quad c_3 = \frac{1}{3} \\ c_4 &= \frac{1}{4} \quad c_5 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$d_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \quad d_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} \quad d_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$$

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

جدول زیر را کامل کنید.

نمودار دنباله	ضابطه دنباله	فرمول بازگشتی	جملات دنباله
	$a_n = 3^{2-n}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 9$	$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
	$a_n = ar^{n-1}$ $a_n = 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$ $a_1 = 1$ $r = \frac{1}{2}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ (دنباله هندسی) $r = \frac{1}{2}$
	$a_n = 2n + 1$	$a_{n+1} = 2 + a_n$ $a_1 = 3$	$3, 5, 7, 9, \dots$ (دنباله حسابی) $d = 2$
		$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$	$1, 3, 6, 10, 15, \dots$
	$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$		$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
	$a_n = -n^2$		$-1, -4, -9, -16, \dots$
		$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1$	دنباله فیبوناچی $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ درجه اول یک و از جمله سوم

هر جمله از مجموع دو جمله قبلی به دست می آید



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

تمرین

۱. برای محاسبه قبض آب^۱ (آب بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می شود و بر اساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب بها محاسبه می شود:

هزینه هر متر مکعب با توجه به طبقه مصرف $\times$ میانگین مصرف = آب بها^۱

جدول ۱. محاسبه آب بها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

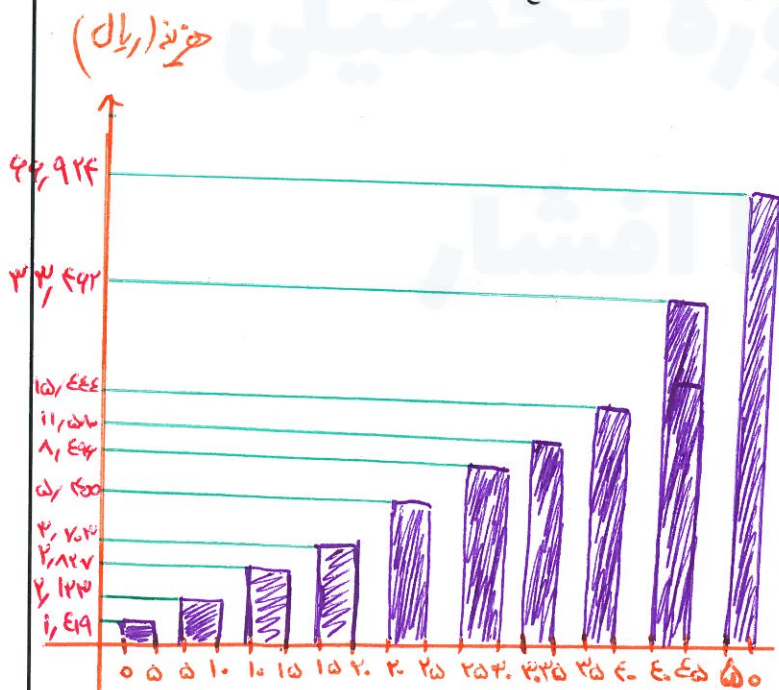
طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)
$0 \leq x < 5$	۱/۴۱۹	$25 \leq x < 30$	۸/۴۹۶
$5 \leq x < 10$	۲/۱۲۳	$30 \leq x < 35$	۱۱/۵۸۰
$10 \leq x < 15$	۲/۸۲۷	$35 \leq x < 40$	۱۵/۴۴۴
$15 \leq x < 20$	۳/۷۰۳	$40 \leq x < 50$	۳۳/۴۶۲
$20 \leq x < 25$	۵/۴۰۰	$x \geq 50$	۶۶/۹۲۴

الف) نمودار «طبقه مصرف - آب بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

$$D_f = [0, +\infty) \quad R_f = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1,419x & 0 \leq x < 5 \\ 2,123x & 5 \leq x < 10 \\ 2,827x & 10 \leq x < 15 \\ 3,703x & 15 \leq x < 20 \\ 5,400x & 20 \leq x < 25 \\ 8,496x & 25 \leq x < 30 \\ 11,580x & 30 \leq x < 35 \\ 15,444x & 35 \leq x < 40 \\ 33,462x & 40 \leq x < 50 \\ 66,924x & x \geq 50 \end{cases}$$

طبقه مصرف
(متر مکعب)



استاد امیر شیرینی مقدم - 09133979092



چاپ، کثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی^۱ در تهران در یک ماه $20/49 m^3$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب بها را مشخص می کند؟
سطح زیر منحنی به شیب نمودار، میزان آب بها را مشخص می کند.

$$\text{پای} \quad 100/646 = 20/94 \times 5/400 = \text{میزان آب بها}$$



- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| ☐ N | ☒ R |
| ☐ N | ☒ R |
| ☐ N | ☒ R |
| ☐ N | ☒ R |
| ☐ N | ☒ R |

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر

ب) میزان استفاده دانش آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت

ج) حجم مکعبی به ضلع x

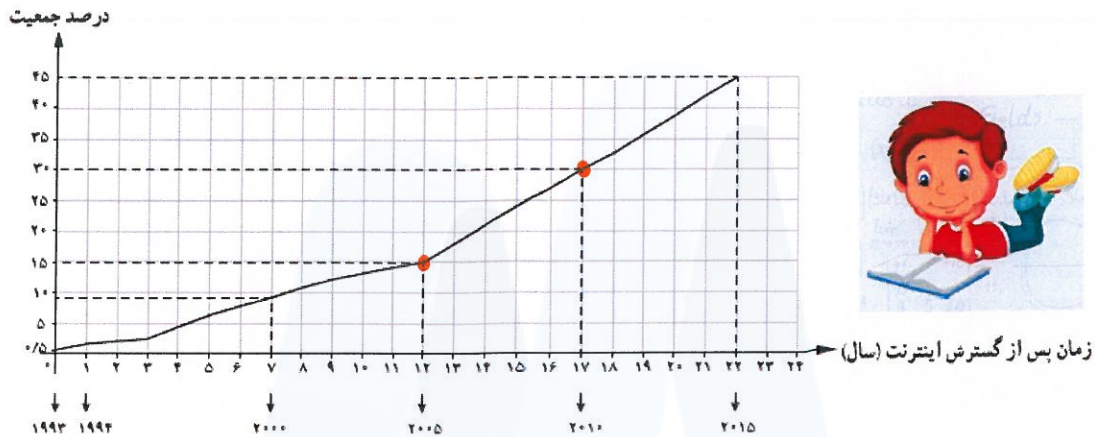
د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر

ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

۳. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده‌اند :



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(1)$ و $f(7)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

همانطور که در نمودار بالا مشاهده می‌شوید، $f(1) = 2$ ؛ یعنی ۱ سال پس از گسترش اینترنت، ۲ درصد جمعیت جهان از اینترنت استفاده کرده‌اند.

$f(7) = 9$ ؛ یعنی ۷ سال پس از گسترش اینترنت، ۹ درصد جمعیت جهان از اینترنت استفاده کرده‌اند.



ب) با توجه به مدل خطی استفاده کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

طبق نمودار بالا در سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵ نقطه $(17, 30)$ و $(12, 15)$

که با نقاط تاریخی مشخص شده‌اند استفاده می‌کنیم و تابع خطی

اینی نامه را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \text{شیب خط} &= \frac{15 - 30}{12 - 17} = \frac{-15}{-5} = 3 \\ \text{نقطه اختیاری} & \begin{cases} y = 3x + b \\ 15 = 3 \cdot 12 + b \\ 15 = 36 + b \\ 15 - 36 = b \\ -21 = b \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) = 3x + b \Rightarrow f(x) = 3x - 21$$

برای محاسبه درصد استفاده کنندگان از اینترنت در سال ۲۰۳۰ باید

$f(27)$ را محاسبه کنیم.

$$f(x) = 3x - 21 \Rightarrow f(27) = 3 \cdot 27 - 21 = 81 - 21 = 60$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و نشر (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله :

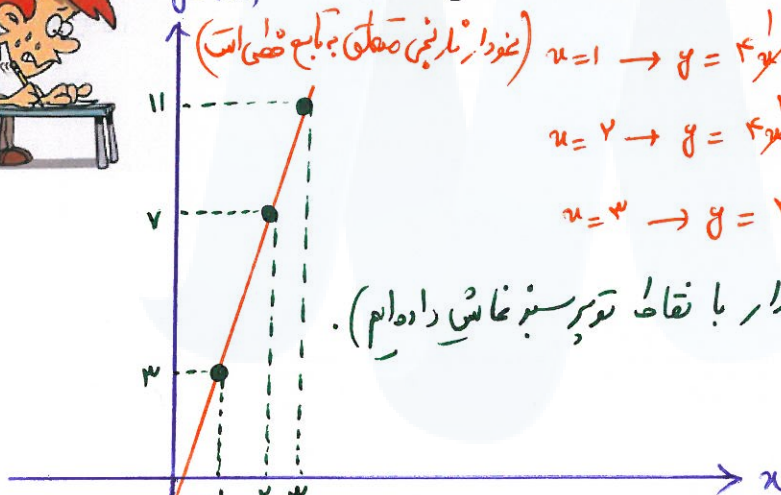
الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

$$y = f(x) \quad (نمودار تابعی به تابع خاص است)$$

$$x=1 \rightarrow y = 4 \cdot 1 - 1 = 3$$

$$x=2 \rightarrow y = 4 \cdot 2 - 1 = 7$$

$$x=3 \rightarrow y = 4 \cdot 3 - 1 = 11$$



(نمودار دنباله روی نمودار با نقاط تصویر سبز خاص داده ام).

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

همان نامه (د)
یا اختلاف صریح
است.

(تابع خاص همان دنباله حسابی با شیب دامنه انداز طبیعی است)

$$a_1 = 3 \quad \xrightarrow{+d=4} \quad a_2 = 7 \quad \xrightarrow{+d=4} \quad a_3 = 11 \quad \dots$$

نمایش تابعی دنباله $a_n = 4n - 1 \quad n \in \mathbb{N}$

رابطه بازگشتی $a_{n+1} = 4 + a_n, \quad a_1 = 3$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه بر هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



۵. با توجه به دنباله های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ ، $d_n = n^2 - 1$ ، حاصل عبارت های خواسته شده را به دست آورید.

الف) $a_2 + b_1$

ب) $c_2 - d_1$

ج) $b_4 + d_2$

الف) $a_2 = 3^2 = 9$ / $b_1 = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ / $9 + \frac{1}{4} = \frac{36}{4} + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$

ب) $c_2 - d_1 = ?$ $c_2 = \frac{1}{3^{(2)-1}} = \frac{1}{3}$ / $d_1 = 1^2 - 1 = 0$ / $c_2 - d_1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

ج) $b_4 + d_2 = ?$ $b_4 = (-\frac{1}{2})^{4+1} = (-\frac{1}{2})^5 = -\frac{1}{32}$ / $d_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
 $-\frac{1}{32} + 3 = \frac{95}{32}$



جمله قبلی $\uparrow$ جمله بعدی $\uparrow$
 الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ ، $a_1 = -2$
 رابطه بازگشتی (دنباله هندسی)

۶. جمله پنجم دنباله های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

مسئله کتو ۹۹ داخل $\rightarrow$ ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ، $a_1 = 1$

$a_1 = 1$ $a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ / $a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ / $a_4 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$ / $a_5 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$

$a_4 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$ / $a_5 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$

ج) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ ، $a_1 = 1$

$a_1 = 1$ $a_2 = 1 + (-1)^1 = 0$ $a_3 = 0 + (-1)^2 = 1$ $a_4 = 1 + (-1)^3 = 0$ $a_5 = 0 + (-1)^4 = 1$

مضی $(-1)^n$:
 $(-1)^1 = -1$
 $(-1)^2 = 1$
 $(-1)^3 = -1$
 $(-1)^4 = 1$
 $(-1)^5 = -1$
 $(-1)^6 = 1$
 $(-1)^7 = -1$
 $(-1)^8 = 1$
 $(-1)^9 = -1$
 $(-1)^{10} = 1$
 $(-1)^{11} = -1$
 $(-1)^{12} = 1$
 $(-1)^{13} = -1$
 $(-1)^{14} = 1$
 $(-1)^{15} = -1$
 $(-1)^{16} = 1$
 $(-1)^{17} = -1$
 $(-1)^{18} = 1$
 $(-1)^{19} = -1$
 $(-1)^{20} = 1$
 $(-1)^{21} = -1$
 $(-1)^{22} = 1$
 $(-1)^{23} = -1$
 $(-1)^{24} = 1$
 $(-1)^{25} = -1$
 $(-1)^{26} = 1$
 $(-1)^{27} = -1$
 $(-1)^{28} = 1$
 $(-1)^{29} = -1$
 $(-1)^{30} = 1$
 $(-1)^{31} = -1$
 $(-1)^{32} = 1$
 $(-1)^{33} = -1$
 $(-1)^{34} = 1$
 $(-1)^{35} = -1$
 $(-1)^{36} = 1$
 $(-1)^{37} = -1$
 $(-1)^{38} = 1$
 $(-1)^{39} = -1$
 $(-1)^{40} = 1$
 $(-1)^{41} = -1$
 $(-1)^{42} = 1$
 $(-1)^{43} = -1$
 $(-1)^{44} = 1$
 $(-1)^{45} = -1$
 $(-1)^{46} = 1$
 $(-1)^{47} = -1$
 $(-1)^{48} = 1$
 $(-1)^{49} = -1$
 $(-1)^{50} = 1$
 $(-1)^{51} = -1$
 $(-1)^{52} = 1$
 $(-1)^{53} = -1$
 $(-1)^{54} = 1$
 $(-1)^{55} = -1$
 $(-1)^{56} = 1$
 $(-1)^{57} = -1$
 $(-1)^{58} = 1$
 $(-1)^{59} = -1$
 $(-1)^{60} = 1$
 $(-1)^{61} = -1$
 $(-1)^{62} = 1$
 $(-1)^{63} = -1$
 $(-1)^{64} = 1$
 $(-1)^{65} = -1$
 $(-1)^{66} = 1$
 $(-1)^{67} = -1$
 $(-1)^{68} = 1$
 $(-1)^{69} = -1$
 $(-1)^{70} = 1$
 $(-1)^{71} = -1$
 $(-1)^{72} = 1$
 $(-1)^{73} = -1$
 $(-1)^{74} = 1$
 $(-1)^{75} = -1$
 $(-1)^{76} = 1$
 $(-1)^{77} = -1$
 $(-1)^{78} = 1$
 $(-1)^{79} = -1$
 $(-1)^{80} = 1$
 $(-1)^{81} = -1$
 $(-1)^{82} = 1$
 $(-1)^{83} = -1$
 $(-1)^{84} = 1$
 $(-1)^{85} = -1$
 $(-1)^{86} = 1$
 $(-1)^{87} = -1$
 $(-1)^{88} = 1$
 $(-1)^{89} = -1$
 $(-1)^{90} = 1$
 $(-1)^{91} = -1$
 $(-1)^{92} = 1$
 $(-1)^{93} = -1$
 $(-1)^{94} = 1$
 $(-1)^{95} = -1$
 $(-1)^{96} = 1$
 $(-1)^{97} = -1$
 $(-1)^{98} = 1$
 $(-1)^{99} = -1$
 $(-1)^{100} = 1$

$a_1 = 1$ ، $a_2 = 1$ ، $a_3 = 1$ ، $a_4 = 1 + 1 + 1 = 3$ ، $a_5 = 1 + 1 + 3 = 5$

از جمله سوم به بعد (از جمله اول - دوم سوم) است
 از مجموع سه جمله قبلی آن به دست می آید



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و نویسنده (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و همچنین تحت هرگونه قانونی قرار می گیرد.

$$a_n = 5 + (n-1) \times 3$$

$$a_n = 5 + 3n - 3$$

۷. جدول زیر را کامل کنید. $a_n = 3n + 2$

دنباله دو ضابطه ای	ضابطه دنباله	رابطه بازگشتی	جملات دنباله
	$a_n = 3n + 2$	$a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 5$	۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...
$a_n = \begin{cases} 4 & \text{زوج } n \\ 1 & \text{فرد } n \end{cases}$		$a_{n+1} = a_n + 3 \times (-1)^n$ $a_1 = 4$	۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...
$a_n = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$			۱, $\frac{1}{2}$, ۳, $\frac{1}{4}$, ۵, $\frac{1}{6}$, ...
	$a_n = \frac{n}{n+1}$		$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$



صورت یکم واحد است

منی: سه برابر جمله قبلی به علاوه ۱

مثال: ۱۴۰

دنباله دو ضابطه ای بازگشتی: برای بدست آوردن جملات با اندیس زوج از ضابطه فرد $(3a_n + 1)$ استفاده می کنیم و برای بدست آوردن جملات با اندیس فرد از ضابطه زوج $(\frac{1}{n} a_n)$ استفاده می کنیم.

۸. شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت های زیر بنویسید. نصف جمله قبلی $a_1 = 11$



$$a_1 = 11 \quad a_2 = 3(11) + 1 = 34 \quad a_3 = \frac{1}{2} \times 34 = 17$$

$$a_4 = 3(17) + 1 = 52 \quad a_5 = \frac{1}{2} \times 52 = 26$$

$$a_6 = 3(26) + 1 = 79$$

$$a_1 = 25 \quad a_2 = 3(25) + 1 = 76 \quad a_3 = \frac{1}{2} \times 76 = 38$$

$$a_4 = 3(38) + 1 = 115 \quad a_5 = \frac{1}{2} \times 115 = \frac{115}{2} = 57.5$$

$$a_6 = 3(57.5) + 1 = 173.5$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و... (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۹. نمودار دنباله های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.



الف) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$

ب) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$a_1 = -\frac{1}{2}(1) + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \times 2 + 3 = 2$$

$$a_3 = -\frac{1}{2} \times 3 + 3 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2} \times 4 + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$a_5 = -\frac{1}{2} \times 5 + 3 = -\frac{5}{2} + 3 = \frac{1}{2}$$

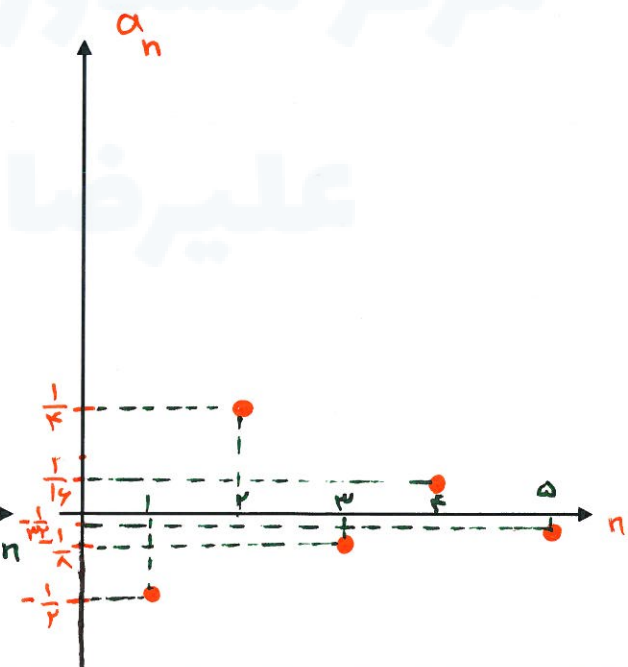
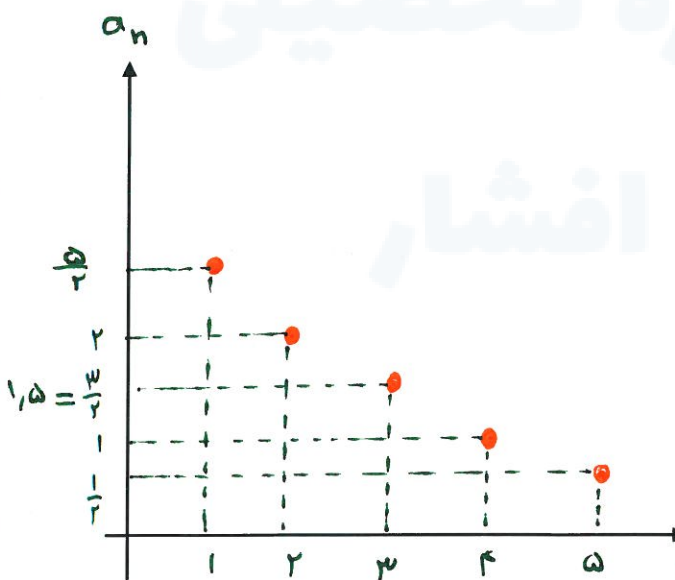
$$a_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

$$a_4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$a_5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

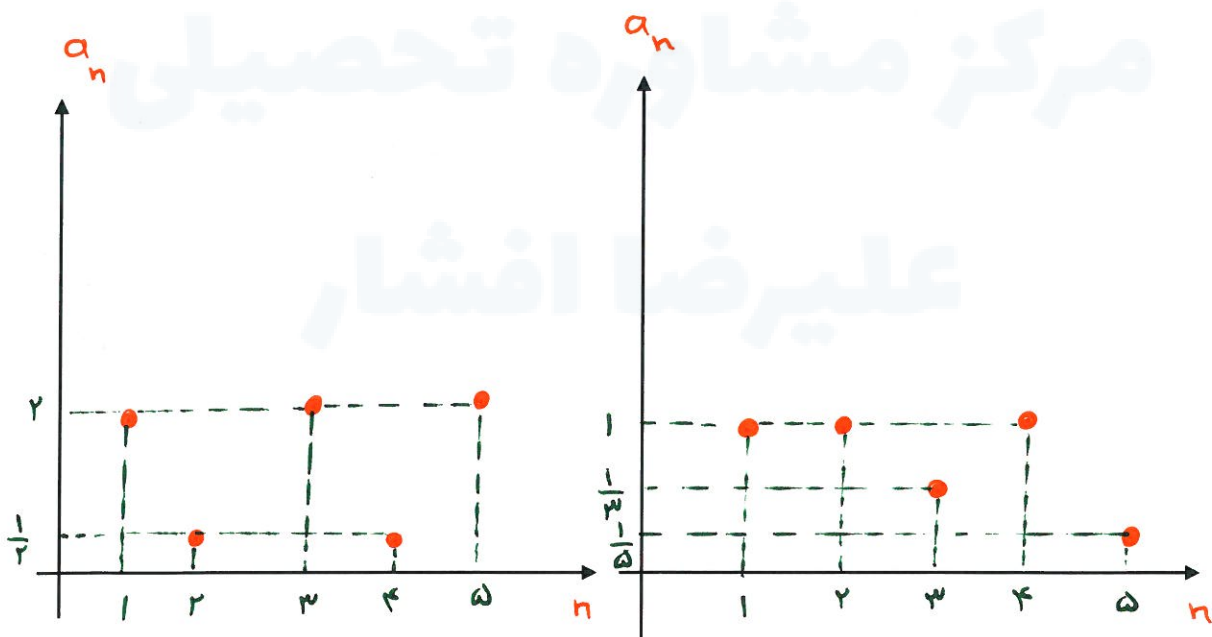


معنی : جمله قبلی را معکوس می کنیم تا جمله بعدی بدست آید

ج) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

د) $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$

$a_1 = 2$ $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_3 = 2$ $a_4 = \frac{1}{2}$ $a_5 = 2$
 $a_6 = \frac{1}{2}$ $a_7 = 2$ $a_8 = \frac{1}{2}$ $a_9 = 2$ $a_{10} = \frac{1}{2}$
 (فرد: $a_1 = 1$) $a_3 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ $a_5 = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$
 (زوج: $a_2 = 1$) $a_4 = 1$





چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و نشر (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

سوال 10- با استفاده از فرمول بازگشتی در زمان تمدن بابل حاصل رادیکال های زیر را به دست آورید.



$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right)$$

در این روش: عدد زیر رادیکال را جای k قرار می دهیم
مثلاً برای $\sqrt{2}$ است $k=2$ جای k
حرر می دهیم

$\sqrt{2}$

$\sqrt{3} \rightarrow k=3$

$\sqrt{5} \rightarrow k=5$

حل در این صفحه

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right), a_1 = k$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{1}{2} (2+1) = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{17}{6} \right) = \frac{17}{12} \approx 1.4166$$

کند ری ۱۴۰۱

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right), a_1 = 3$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{3}{3} \right) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4} \approx 1.75$$

...

$$\sqrt{5} = ? \rightarrow k=5$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{5}{a_n} \right), a_1 = 5$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{5}{5} \right) = \frac{1}{2} (5+1) = 3$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.33$$

...

هم: هر چه جلالت ستری به استا دریم
به صدرا $\sqrt{2}$ نزدیک تر می شویم



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

رابطه بازگشتی دنباله صلیبی

۱۱. جملات دنباله بازگشتی $a_1=1$ ، $a_{n+1}=a_n+(n+1)$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می کنند؟

الف)

ب)

Handwritten notes for (a):
 $a_1=1$
 $a_2=3$
 $a_3=6$
 $a_{n+1} = (n+1) + a_n$
 $a_1=1$
 $1, 3, 6, 10, 15, \dots$

Handwritten notes for (b):
 $a_1=4$
 $a_2=9$
 $a_3=16$
 $a_{n+1} = (n+1) + a_n$
 $a_1=4$
 $4, 9, 16, 25, \dots$

۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پسماندهای صنعتی کارخانه ها به یک دریاچه، ۲۵۰ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالانه ۱۰٪ فاضلاب صنعتی را به صورت طبیعی خنثی و بی اثر می کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است. اگر $P_1=250$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.

در هر سال ۱۰ درصد فاضلاب صنعتی خنثی شود، ۹۰ درصد آن باقی می ماند

معادله بازگشتی: $P_{n+1} = \frac{90}{100} P_n + 15$ ، $P_1 = 250$

$P_2 = \frac{90}{100} \times 250 + 15 = 240$

$P_3 = \frac{90}{100} \times 240 + 15 = 231$ دو سال بعد

$P_4 = \frac{90}{100} \times 231 + 15 = 222,9$

$P_5 = \frac{90}{100} \times 222,9 + 15 = 215,61$

$P_6 = \frac{90}{100} \times 215,61 + 15 = 209,049$ پنج سال بعد

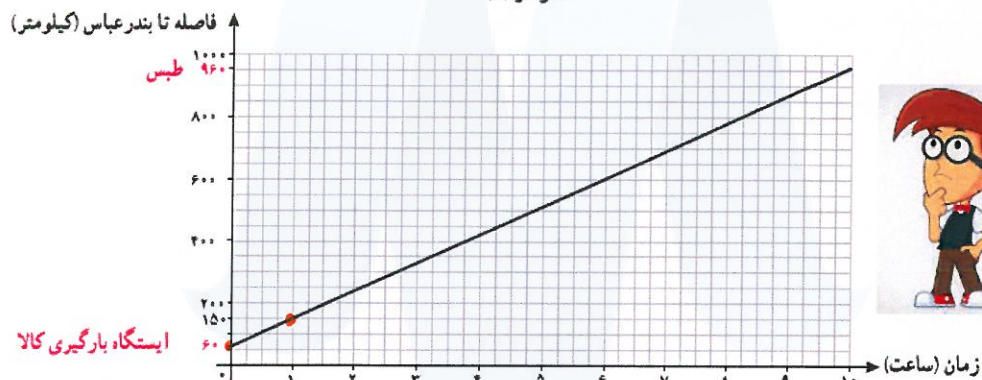


چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان - زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طیس حرکت می کند.

نمودار (۱)



عرض از صدار

الف) ضابطه تابع و دامنه و برد آن را به دست آورید. برای بدست آوردن ضابطه تابع از دو نقطه اختیاری از نقاط روی خط استفاده می کنیم.

$$f(x) = 90x + 60 \Rightarrow f(x) = 90x + 60$$

$$D = [0, 10] \text{ دامنه}$$

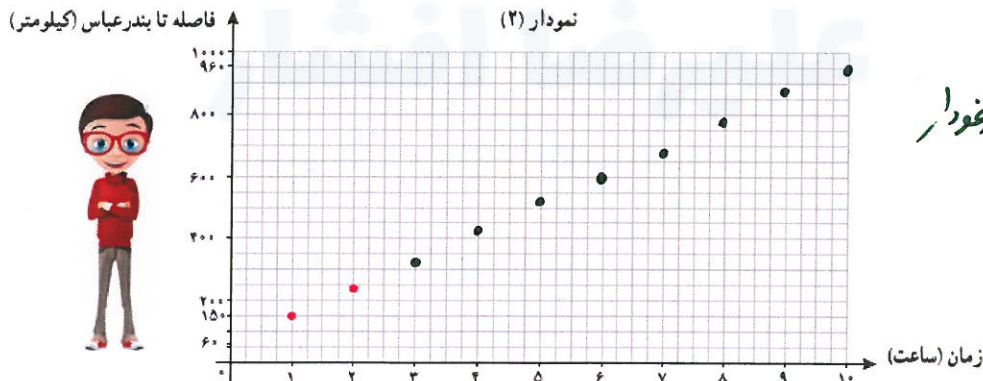
$$R = [60, 960] \text{ برد}$$

$$(0, 60) \quad (1, 150)$$

$$m = \frac{150 - 60}{1 - 0} = \frac{90}{1} = 90$$

ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی شده در هر «یک ساعت» را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.

نمودار (۲)



نقاط منتهی در نمودار



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$f(n) = 90n + 60$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$$

$$f(1) = 90(1) + 60 = 150$$

$$f(2) = 90(2) + 60 = 240$$

$$f(3) = 90(3) + 60 = 330$$

$$f(4) = 90(4) + 60 = 420$$

$$f(5) = 90(5) + 60 = 510$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

ج) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

$$f(6) = 90(6) + 60 = 600$$

$$f(7) = 90(7) + 60 = 690$$

$$f(8) = 90(8) + 60 = 780$$

$$f(9) = 90(9) + 60 = 870$$

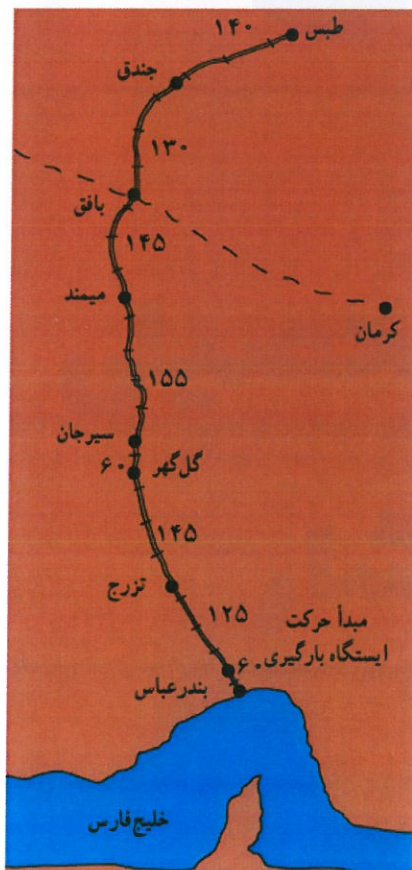
$$f(10) = 90(10) + 60 = 960$$

$$R = \{150, 240, 330, 420, 510, 600, 690, 780, 870, 960\}$$

برد

(د) جدول ۱ را به کمک نقشه داده شده کامل کنید.

جدول ۱



نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندرعباس
ایستگاه بارگیری - تزرچ	۱۲۵	$60 + 125 = 185$
تزرچ - گل گهر	۱۴۵	$185 + 145 = 330$
گل گهر - سیرجان	۶۰	$330 + 60 = 390$
سیرجان - میمند	۱۵۵	$390 + 155 = 545$
میمند - بافق	۱۴۵	$545 + 145 = 690$
باقف - جندق	۱۳۰	$690 + 130 = 820$
جندق - طبس	۱۴۰	$820 + 140 = 960$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

هـ) با فرض اینکه a_n مسافت طی شده قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

جدول ۲



$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$a_1 = 60 + 90 = 150$	$a_2 = a_1 + 90 = 150 + 90 = 240$	$a_3 = a_2 + 90 = 240 + 90 = 330$	$a_4 = a_3 + 90 = 330 + 90 = 420$	$a_5 = a_4 + 90 = 420 + 90 = 510$
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$a_6 = a_5 + 90 = 510 + 90 = 600$	$a_7 = a_6 + 90 = 600 + 90 = 690$	$a_8 = a_7 + 90 = 690 + 90 = 780$	$a_9 = a_8 + 90 = 780 + 90 = 870$	$a_{10} = a_9 + 90 = 870 + 90 = 960$

و) با مقایسه جدول های ۱ و ۲، کدام ایستگاه ها محل تماس راهبر قطار بوده اند؟ چرا؟
ایستگاه های ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، ۲۹، ۳۱، ۳۳، ۳۵، ۳۷، ۳۹، ۴۱، ۴۳، ۴۵، ۴۷، ۴۹، ۵۱، ۵۳، ۵۵، ۵۷، ۵۹، ۶۱، ۶۳، ۶۵، ۶۷، ۶۹، ۷۱، ۷۳، ۷۵، ۷۷، ۷۹، ۸۱، ۸۳، ۸۵، ۸۷، ۸۹، ۹۱، ۹۳، ۹۵، ۹۷، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۳، ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۱، ۱۱۳، ۱۱۵، ۱۱۷، ۱۱۹، ۱۲۱، ۱۲۳، ۱۲۵، ۱۲۷، ۱۲۹، ۱۳۱، ۱۳۳، ۱۳۵، ۱۳۷، ۱۳۹، ۱۴۱، ۱۴۳، ۱۴۵، ۱۴۷، ۱۴۹، ۱۵۱، ۱۵۳، ۱۵۵، ۱۵۷، ۱۵۹، ۱۶۱، ۱۶۳، ۱۶۵، ۱۶۷، ۱۶۹، ۱۷۱، ۱۷۳، ۱۷۵، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۳، ۱۸۵، ۱۸۷، ۱۸۹، ۱۹۱، ۱۹۳، ۱۹۵، ۱۹۷، ۱۹۹، ۲۰۱، ۲۰۳، ۲۰۵، ۲۰۷، ۲۰۹، ۲۱۱، ۲۱۳، ۲۱۵، ۲۱۷، ۲۱۹، ۲۲۱، ۲۲۳، ۲۲۵، ۲۲۷، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۳۳، ۲۳۵، ۲۳۷، ۲۳۹، ۲۴۱، ۲۴۳، ۲۴۵، ۲۴۷، ۲۴۹، ۲۵۱، ۲۵۳، ۲۵۵، ۲۵۷، ۲۵۹، ۲۶۱، ۲۶۳، ۲۶۵، ۲۶۷، ۲۶۹، ۲۷۱، ۲۷۳، ۲۷۵، ۲۷۷، ۲۷۹، ۲۸۱، ۲۸۳، ۲۸۵، ۲۸۷، ۲۸۹، ۲۹۱، ۲۹۳، ۲۹۵، ۲۹۷، ۲۹۹، ۳۰۱، ۳۰۳، ۳۰۵، ۳۰۷، ۳۰۹، ۳۱۱، ۳۱۳، ۳۱۵، ۳۱۷، ۳۱۹، ۳۲۱، ۳۲۳، ۳۲۵، ۳۲۷، ۳۲۹، ۳۳۱، ۳۳۳، ۳۳۵، ۳۳۷، ۳۳۹، ۳۴۱، ۳۴۳، ۳۴۵، ۳۴۷، ۳۴۹، ۳۵۱، ۳۵۳، ۳۵۵، ۳۵۷، ۳۵۹، ۳۶۱، ۳۶۳، ۳۶۵، ۳۶۷، ۳۶۹، ۳۷۱، ۳۷۳، ۳۷۵، ۳۷۷، ۳۷۹، ۳۸۱، ۳۸۳، ۳۸۵، ۳۸۷، ۳۸۹، ۳۹۱، ۳۹۳، ۳۹۵، ۳۹۷، ۳۹۹، ۴۰۱، ۴۰۳، ۴۰۵، ۴۰۷، ۴۰۹، ۴۱۱، ۴۱۳، ۴۱۵، ۴۱۷، ۴۱۹، ۴۲۱، ۴۲۳، ۴۲۵، ۴۲۷، ۴۲۹، ۴۳۱، ۴۳۳، ۴۳۵، ۴۳۷، ۴۳۹، ۴۴۱، ۴۴۳، ۴۴۵، ۴۴۷، ۴۴۹، ۴۵۱، ۴۵۳، ۴۵۵، ۴۵۷، ۴۵۹، ۴۶۱، ۴۶۳، ۴۶۵، ۴۶۷، ۴۶۹، ۴۷۱، ۴۷۳، ۴۷۵، ۴۷۷، ۴۷۹، ۴۸۱، ۴۸۳، ۴۸۵، ۴۸۷، ۴۸۹، ۴۹۱، ۴۹۳، ۴۹۵، ۴۹۷، ۴۹۹، ۵۰۱، ۵۰۳، ۵۰۵، ۵۰۷، ۵۰۹، ۵۱۱، ۵۱۳، ۵۱۵، ۵۱۷، ۵۱۹، ۵۲۱، ۵۲۳، ۵۲۵، ۵۲۷، ۵۲۹، ۵۳۱، ۵۳۳، ۵۳۵، ۵۳۷، ۵۳۹، ۵۴۱، ۵۴۳، ۵۴۵، ۵۴۷، ۵۴۹، ۵۵۱، ۵۵۳، ۵۵۵، ۵۵۷، ۵۵۹، ۵۶۱، ۵۶۳، ۵۶۵، ۵۶۷، ۵۶۹، ۵۷۱، ۵۷۳، ۵۷۵، ۵۷۷، ۵۷۹، ۵۸۱، ۵۸۳، ۵۸۵، ۵۸۷، ۵۸۹، ۵۹۱، ۵۹۳، ۵۹۵، ۵۹۷، ۵۹۹، ۶۰۱، ۶۰۳، ۶۰۵، ۶۰۷، ۶۰۹، ۶۱۱، ۶۱۳، ۶۱۵، ۶۱۷، ۶۱۹، ۶۲۱، ۶۲۳، ۶۲۵، ۶۲۷، ۶۲۹، ۶۳۱، ۶۳۳، ۶۳۵، ۶۳۷، ۶۳۹، ۶۴۱، ۶۴۳، ۶۴۵، ۶۴۷، ۶۴۹، ۶۵۱، ۶۵۳، ۶۵۵، ۶۵۷، ۶۵۹، ۶۶۱، ۶۶۳، ۶۶۵، ۶۶۷، ۶۶۹، ۶۷۱، ۶۷۳، ۶۷۵، ۶۷۷، ۶۷۹، ۶۸۱، ۶۸۳، ۶۸۵، ۶۸۷، ۶۸۹، ۶۹۱، ۶۹۳، ۶۹۵، ۶۹۷، ۶۹۹، ۷۰۱، ۷۰۳، ۷۰۵، ۷۰۷، ۷۰۹، ۷۱۱، ۷۱۳، ۷۱۵، ۷۱۷، ۷۱۹، ۷۲۱، ۷۲۳، ۷۲۵، ۷۲۷، ۷۲۹، ۷۳۱، ۷۳۳، ۷۳۵، ۷۳۷، ۷۳۹، ۷۴۱، ۷۴۳، ۷۴۵، ۷۴۷، ۷۴۹، ۷۵۱، ۷۵۳، ۷۵۵، ۷۵۷، ۷۵۹، ۷۶۱، ۷۶۳، ۷۶۵، ۷۶۷، ۷۶۹، ۷۷۱، ۷۷۳، ۷۷۵، ۷۷۷، ۷۷۹، ۷۸۱، ۷۸۳، ۷۸۵، ۷۸۷، ۷۸۹، ۷۹۱، ۷۹۳، ۷۹۵، ۷۹۷، ۷۹۹، ۸۰۱، ۸۰۳، ۸۰۵، ۸۰۷، ۸۰۹، ۸۱۱، ۸۱۳، ۸۱۵، ۸۱۷، ۸۱۹، ۸۲۱، ۸۲۳، ۸۲۵، ۸۲۷، ۸۲۹، ۸۳۱، ۸۳۳، ۸۳۵، ۸۳۷، ۸۳۹، ۸۴۱، ۸۴۳، ۸۴۵، ۸۴۷، ۸۴۹، ۸۵۱، ۸۵۳، ۸۵۵، ۸۵۷، ۸۵۹، ۸۶۱، ۸۶۳، ۸۶۵، ۸۶۷، ۸۶۹، ۸۷۱، ۸۷۳، ۸۷۵، ۸۷۷، ۸۷۹، ۸۸۱، ۸۸۳، ۸۸۵، ۸۸۷، ۸۸۹، ۸۹۱، ۸۹۳، ۸۹۵، ۸۹۷، ۸۹۹، ۹۰۱، ۹۰۳، ۹۰۵، ۹۰۷، ۹۰۹، ۹۱۱، ۹۱۳، ۹۱۵، ۹۱۷، ۹۱۹، ۹۲۱، ۹۲۳، ۹۲۵، ۹۲۷، ۹۲۹، ۹۳۱، ۹۳۳، ۹۳۵، ۹۳۷، ۹۳۹، ۹۴۱، ۹۴۳، ۹۴۵، ۹۴۷، ۹۴۹، ۹۵۱، ۹۵۳، ۹۵۵، ۹۵۷، ۹۵۹، ۹۶۱، ۹۶۳، ۹۶۵، ۹۶۷، ۹۶۹، ۹۷۱، ۹۷۳، ۹۷۵، ۹۷۷، ۹۷۹، ۹۸۱، ۹۸۳، ۹۸۵، ۹۸۷، ۹۸۹، ۹۹۱، ۹۹۳، ۹۹۵، ۹۹۷، ۹۹۹، ۱۰۰۱، ۱۰۰۳، ۱۰۰۵، ۱۰۰۷، ۱۰۰۹، ۱۰۱۱، ۱۰۱۳، ۱۰۱۵، ۱۰۱۷، ۱۰۱۹، ۱۰۲۱، ۱۰۲۳، ۱۰۲۵، ۱۰۲۷، ۱۰۲۹، ۱۰۳۱، ۱۰۳۳، ۱۰۳۵، ۱۰۳۷، ۱۰۳۹، ۱۰۴۱، ۱۰۴۳، ۱۰۴۵، ۱۰۴۷، ۱۰۴۹، ۱۰۵۱، ۱۰۵۳، ۱۰۵۵، ۱۰۵۷، ۱۰۵۹، ۱۰۶۱، ۱۰۶۳، ۱۰۶۵، ۱۰۶۷، ۱۰۶۹، ۱۰۷۱، ۱۰۷۳، ۱۰۷۵، ۱۰۷۷، ۱۰۷۹، ۱۰۸۱، ۱۰۸۳، ۱۰۸۵، ۱۰۸۷، ۱۰۸۹، ۱۰۹۱، ۱۰۹۳، ۱۰۹۵، ۱۰۹۷، ۱۰۹۹، ۱۱۰۱، ۱۱۰۳، ۱۱۰۵، ۱۱۰۷، ۱۱۰۹، ۱۱۱۱، ۱۱۱۳، ۱۱۱۵، ۱۱۱۷، ۱۱۱۹، ۱۱۲۱، ۱۱۲۳، ۱۱۲۵، ۱۱۲۷، ۱۱۲۹، ۱۱۳۱، ۱۱۳۳، ۱۱۳۵، ۱۱۳۷، ۱۱۳۹، ۱۱۴۱، ۱۱۴۳، ۱۱۴۵، ۱۱۴۷، ۱۱۴۹، ۱۱۵۱، ۱۱۵۳، ۱۱۵۵، ۱۱۵۷، ۱۱۵۹، ۱۱۶۱، ۱۱۶۳، ۱۱۶۵، ۱۱۶۷، ۱۱۶۹، ۱۱۷۱، ۱۱۷۳، ۱۱۷۵، ۱۱۷۷، ۱۱۷۹، ۱۱۸۱، ۱۱۸۳، ۱۱۸۵، ۱۱۸۷، ۱۱۸۹، ۱۱۹۱، ۱۱۹۳، ۱۱۹۵، ۱۱۹۷، ۱۱۹۹، ۱۲۰۱، ۱۲۰۳، ۱۲۰۵، ۱۲۰۷، ۱۲۰۹، ۱۲۱۱، ۱۲۱۳، ۱۲۱۵، ۱۲۱۷، ۱۲۱۹، ۱۲۲۱، ۱۲۲۳، ۱۲۲۵، ۱۲۲۷، ۱۲۲۹، ۱۲۳۱، ۱۲۳۳، ۱۲۳۵، ۱۲۳۷، ۱۲۳۹، ۱۲۴۱، ۱۲۴۳، ۱۲۴۵، ۱۲۴۷، ۱۲۴۹، ۱۲۵۱، ۱۲۵۳، ۱۲۵۵، ۱۲۵۷، ۱۲۵۹، ۱۲۶۱، ۱۲۶۳، ۱۲۶۵، ۱۲۶۷، ۱۲۶۹، ۱۲۷۱، ۱۲۷۳، ۱۲۷۵، ۱۲۷۷، ۱۲۷۹، ۱۲۸۱، ۱۲۸۳، ۱۲۸۵، ۱۲۸۷، ۱۲۸۹، ۱۲۹۱، ۱۲۹۳، ۱۲۹۵، ۱۲۹۷، ۱۲۹۹، ۱۳۰۱، ۱۳۰۳، ۱۳۰۵، ۱۳۰۷، ۱۳۰۹، ۱۳۱۱، ۱۳۱۳، ۱۳۱۵، ۱۳۱۷، ۱۳۱۹، ۱۳۲۱، ۱۳۲۳، ۱۳۲۵، ۱۳۲۷، ۱۳۲۹، ۱۳۳۱، ۱۳۳۳، ۱۳۳۵، ۱۳۳۷، ۱۳۳۹، ۱۳۴۱، ۱۳۴۳، ۱۳۴۵، ۱۳۴۷، ۱۳۴۹، ۱۳۵۱، ۱۳۵۳، ۱۳۵۵، ۱۳۵۷، ۱۳۵۹، ۱۳۶۱، ۱۳۶۳، ۱۳۶۵، ۱۳۶۷، ۱۳۶۹، ۱۳۷۱، ۱۳۷۳، ۱۳۷۵، ۱۳۷۷، ۱۳۷۹، ۱۳۸۱، ۱۳۸۳، ۱۳۸۵، ۱۳۸۷، ۱۳۸۹، ۱۳۹۱، ۱۳۹۳، ۱۳۹۵، ۱۳۹۷، ۱۳۹۹، ۱۴۰۱، ۱۴۰۳، ۱۴۰۵، ۱۴۰۷، ۱۴۰۹، ۱۴۱۱، ۱۴۱۳، ۱۴۱۵، ۱۴۱۷، ۱۴۱۹، ۱۴۲۱، ۱۴۲۳، ۱۴۲۵، ۱۴۲۷، ۱۴۲۹، ۱۴۳۱، ۱۴۳۳، ۱۴۳۵، ۱۴۳۷، ۱۴۳۹، ۱۴۴۱، ۱۴۴۳، ۱۴۴۵، ۱۴۴۷، ۱۴۴۹، ۱۴۵۱، ۱۴۵۳، ۱۴۵۵، ۱۴۵۷، ۱۴۵۹، ۱۴۶۱، ۱۴۶۳، ۱۴۶۵، ۱۴۶۷، ۱۴۶۹، ۱۴۷۱، ۱۴۷۳، ۱۴۷۵، ۱۴۷۷، ۱۴۷۹، ۱۴۸۱، ۱۴۸۳، ۱۴۸۵، ۱۴۸۷، ۱۴۸۹، ۱۴۹۱، ۱۴۹۳، ۱۴۹۵، ۱۴۹۷، ۱۴۹۹، ۱۵۰۱، ۱۵۰۳، ۱۵۰۵، ۱۵۰۷، ۱۵۰۹، ۱۵۱۱، ۱۵۱۳، ۱۵۱۵، ۱۵۱۷، ۱۵۱۹، ۱۵۲۱، ۱۵۲۳، ۱۵۲۵، ۱۵۲۷، ۱۵۲۹، ۱۵۳۱، ۱۵۳۳، ۱۵۳۵، ۱۵۳۷، ۱۵۳۹، ۱۵۴۱، ۱۵۴۳، ۱۵۴۵، ۱۵۴۷، ۱۵۴۹، ۱۵۵۱، ۱۵۵۳، ۱۵۵۵، ۱۵۵۷، ۱۵۵۹، ۱۵۶۱، ۱۵۶۳، ۱۵۶۵، ۱۵۶۷، ۱۵۶۹، ۱۵۷۱، ۱۵۷۳، ۱۵۷۵، ۱۵۷۷، ۱۵۷۹، ۱۵۸۱، ۱۵۸۳، ۱۵۸۵، ۱۵۸۷، ۱۵۸۹، ۱۵۹۱، ۱۵۹۳، ۱۵۹۵، ۱۵۹۷، ۱۵۹۹، ۱۶۰۱، ۱۶۰۳، ۱۶۰۵، ۱۶۰۷، ۱۶۰۹، ۱۶۱۱، ۱۶۱۳، ۱۶۱۵، ۱۶۱۷، ۱۶۱۹، ۱۶۲۱، ۱۶۲۳، ۱۶۲۵، ۱۶۲۷، ۱۶۲۹، ۱۶۳۱، ۱۶۳۳، ۱۶۳۵، ۱۶۳۷، ۱۶۳۹، ۱۶۴۱، ۱۶۴۳، ۱۶۴۵، ۱۶۴۷، ۱۶۴۹، ۱۶۵۱، ۱۶۵۳، ۱۶۵۵، ۱۶۵۷، ۱۶۵۹، ۱۶۶۱، ۱۶۶۳، ۱۶۶۵، ۱۶۶۷، ۱۶۶۹، ۱۶۷۱، ۱۶۷۳، ۱۶۷۵، ۱۶۷۷، ۱۶۷۹، ۱۶۸۱، ۱۶۸۳، ۱۶۸۵، ۱۶۸۷، ۱۶۸۹، ۱۶۹۱، ۱۶۹۳، ۱۶۹۵، ۱۶۹۷، ۱۶۹۹، ۱۷۰۱، ۱۷۰۳، ۱۷۰۵، ۱۷۰۷، ۱۷۰۹، ۱۷۱۱، ۱۷۱۳، ۱۷۱۵، ۱۷۱۷، ۱۷۱۹، ۱۷۲۱، ۱۷۲۳، ۱۷۲۵، ۱۷۲۷، ۱۷۲۹، ۱۷۳۱، ۱۷۳۳، ۱۷۳۵، ۱۷۳۷، ۱۷۳۹، ۱۷۴۱، ۱۷۴۳، ۱۷۴۵، ۱۷۴۷، ۱۷۴۹، ۱۷۵۱، ۱۷۵۳، ۱۷۵۵، ۱۷۵۷، ۱۷۵۹، ۱۷۶۱، ۱۷۶۳، ۱۷۶۵، ۱۷۶۷، ۱۷۶۹، ۱۷۷۱، ۱۷۷۳، ۱۷۷۵، ۱۷۷۷، ۱۷۷۹، ۱۷۸۱، ۱۷۸۳، ۱۷۸۵، ۱۷۸۷، ۱۷۸۹، ۱۷۹۱، ۱۷۹۳، ۱۷۹۵، ۱۷۹۷، ۱۷۹۹، ۱۸۰۱، ۱۸۰۳، ۱۸۰۵، ۱۸۰۷، ۱۸۰۹، ۱۸۱۱، ۱۸۱۳، ۱۸۱۵، ۱۸۱۷، ۱۸۱۹، ۱۸۲۱، ۱۸۲۳، ۱۸۲۵، ۱۸۲۷، ۱۸۲۹، ۱۸۳۱، ۱۸۳۳، ۱۸۳۵، ۱۸۳۷، ۱۸۳۹، ۱۸۴۱، ۱۸۴۳، ۱۸۴۵، ۱۸۴۷، ۱۸۴۹، ۱۸۵۱، ۱۸۵۳، ۱۸۵۵، ۱۸۵۷، ۱۸۵۹، ۱۸۶۱، ۱۸۶۳، ۱۸۶۵، ۱۸۶۷، ۱۸۶۹، ۱۸۷۱، ۱۸۷۳، ۱۸۷۵، ۱۸۷۷، ۱۸۷۹، ۱۸۸۱، ۱۸۸۳، ۱۸۸۵، ۱۸۸۷، ۱۸۸۹، ۱۸۹۱، ۱۸۹۳، ۱۸۹۵، ۱۸۹۷، ۱۸۹۹، ۱۹۰۱، ۱۹۰۳، ۱۹۰۵، ۱۹۰۷، ۱۹۰۹، ۱۹۱۱، ۱۹۱۳، ۱۹۱۵، ۱۹۱۷، ۱۹۱۹، ۱۹۲۱، ۱۹۲۳، ۱۹۲۵، ۱۹۲۷، ۱۹۲۹، ۱۹۳۱، ۱۹۳۳، ۱۹۳۵، ۱۹۳۷، ۱۹۳۹، ۱۹۴۱، ۱۹۴۳، ۱۹۴۵، ۱۹۴۷، ۱۹۴۹، ۱۹۵۱، ۱۹۵۳، ۱۹۵۵، ۱۹۵۷، ۱۹۵۹، ۱۹۶۱، ۱۹۶۳، ۱۹۶۵، ۱۹۶۷، ۱۹۶۹، ۱۹۷۱، ۱۹۷۳، ۱۹۷۵، ۱۹۷۷، ۱۹۷۹، ۱۹۸۱، ۱۹۸۳، ۱۹۸۵، ۱۹۸۷، ۱۹۸۹، ۱۹۹۱، ۱۹۹۳، ۱۹۹۵، ۱۹۹۷، ۱۹۹۹، ۲۰۰۱، ۲۰۰۳، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷، ۲۰۰۹، ۲۰۱۱، ۲۰۱۳، ۲۰۱۵، ۲۰۱۷، ۲۰۱۹، ۲۰۲۱، ۲۰۲۳، ۲۰۲۵، ۲۰۲۷، ۲۰۲۹، ۲۰۳۱، ۲۰۳۳، ۲۰۳۵، ۲۰۳۷، ۲۰۳۹، ۲۰۴۱، ۲۰۴۳، ۲۰۴۵، ۲۰۴۷، ۲۰۴۹، ۲۰۵۱، ۲۰۵۳، ۲۰۵۵، ۲۰۵۷، ۲۰۵۹، ۲۰۶۱، ۲۰۶۳، ۲۰۶۵، ۲۰۶۷، ۲۰۶۹، ۲۰۷۱، ۲۰۷۳، ۲۰۷۵، ۲۰۷۷، ۲۰۷۹، ۲۰۸۱، ۲۰۸۳، ۲۰۸۵، ۲۰۸۷، ۲۰۸۹، ۲۰۹۱، ۲۰۹۳، ۲۰۹۵، ۲۰۹۷، ۲۰۹۹، ۲۱۰۱، ۲۱۰۳، ۲۱۰۵، ۲۱۰۷، ۲۱۰۹، ۲۱۱۱، ۲۱۱۳، ۲۱۱۵، ۲۱۱۷، ۲۱۱۹، ۲۱۲۱، ۲۱۲۳، ۲۱۲۵، ۲۱۲۷، ۲۱۲۹، ۲۱۳۱، ۲۱۳۳، ۲۱۳۵، ۲۱۳۷، ۲۱۳۹، ۲۱۴۱، ۲۱۴۳، ۲۱۴۵، ۲۱۴۷، ۲۱۴۹، ۲۱۵۱، ۲۱۵۳، ۲۱۵۵، ۲۱۵۷، ۲۱۵۹، ۲۱۶۱، ۲۱۶۳، ۲۱۶۵، ۲۱۶۷، ۲۱۶۹، ۲۱۷۱، ۲۱۷۳، ۲۱۷۵، ۲۱۷۷، ۲۱۷۹، ۲۱۸۱، ۲۱۸۳، ۲۱۸۵، ۲۱۸۷، ۲۱۸۹، ۲۱۹۱، ۲۱۹۳، ۲۱۹۵، ۲۱۹۷، ۲۱۹۹، ۲۲۰۱، ۲۲۰۳، ۲۲۰۵، ۲۲۰۷، ۲۲۰۹، ۲۲۱۱، ۲۲۱۳، ۲۲۱۵، ۲۲۱۷، ۲۲۱۹، ۲۲۲۱، ۲۲۲۳، ۲۲۲۵، ۲۲۲۷، ۲۲۲۹، ۲۲۳۱، ۲۲۳۳، ۲۲۳۵، ۲۲۳۷، ۲۲۳۹، ۲۲۴۱، ۲۲۴۳، ۲۲۴۵، ۲۲۴۷، ۲۲۴۹، ۲۲۵۱، ۲۲۵۳، ۲۲۵۵، ۲۲۵۷، ۲۲۵۹، ۲۲۶۱، ۲۲۶۳، ۲۲۶۵، ۲۲۶۷، ۲۲۶۹، ۲۲۷۱، ۲۲۷۳، ۲۲۷۵، ۲۲۷۷، ۲۲۷۹، ۲۲۸۱، ۲۲۸۳، ۲۲۸۵، ۲۲۸۷، ۲۲۸۹، ۲۲۹۱، ۲۲۹۳، ۲۲۹۵، ۲۲۹۷، ۲۲۹۹، ۲۳۰۱، ۲۳۰۳، ۲۳۰۵، ۲۳۰۷، ۲۳۰۹، ۲۳۱۱، ۲۳۱۳، ۲۳۱۵، ۲۳۱۷، ۲۳۱۹، ۲۳۲۱، ۲۳۲۳، ۲۳۲۵، ۲۳۲۷، ۲۳۲۹، ۲۳۳۱، ۲۳۳۳، ۲۳۳۵، ۲۳۳۷، ۲۳۳۹، ۲۳۴۱، ۲۳۴۳، ۲۳۴۵، ۲۳۴۷، ۲۳۴۹، ۲۳۵۱، ۲۳۵۳، ۲۳۵۵، ۲۳۵۷، ۲۳۵۹، ۲۳۶۱، ۲۳۶۳، ۲۳۶۵، ۲۳۶۷، ۲۳۶۹، ۲۳۷۱، ۲۳۷۳، ۲۳۷۵، ۲۳۷۷، ۲۳۷۹، ۲۳۸۱، ۲۳۸۳، ۲۳۸۵، ۲۳۸۷، ۲۳۸۹، ۲۳۹۱، ۲۳۹۳، ۲۳۹۵، ۲۳۹۷، ۲۳۹۹، ۲۴۰۱، ۲۴۰۳، ۲۴۰۵، ۲۴۰۷، ۲۴۰۹، ۲۴۱۱، ۲۴۱۳، ۲۴۱۵، ۲۴۱۷، ۲۴۱۹، ۲۴۲۱، ۲۴۲۳، ۲۴۲۵، ۲۴۲۷، ۲۴۲۹، ۲۴۳۱، ۲۴۳۳، ۲۴۳۵، ۲۴۳۷، ۲۴۳۹، ۲۴۴۱، ۲۴۴۳، ۲۴۴۵، ۲۴۴۷، ۲۴۴۹، ۲۴۵۱، ۲۴۵۳، ۲۴۵۵، ۲۴۵۷، ۲۴۵۹، ۲۴۶۱، ۲۴۶۳، ۲۴۶۵، ۲۴۶۷، ۲۴۶۹، ۲۴۷۱، ۲۴۷۳، ۲۴۷۵، ۲۴۷۷، ۲۴۷۹، ۲۴۸۱، ۲۴۸۳، ۲۴۸۵، ۲۴۸۷، ۲۴۸۹، ۲۴۹۱، ۲۴۹۳، ۲۴۹۵، ۲۴۹۷، ۲۴۹۹، ۲۵۰۱، ۲۵۰۳،



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه بر حرر و روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

کار در کلاس

۱. ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید. $(a_1 \text{ جمله اول})$
 $a_{n+1} = a_n + d$

۲. مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک»، d ، چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟

اگر d مثبت باشد، با افزایش n جملات دنباله بزرگتر خواهد شد و دنباله افزایشی است.
 اگر d منفی باشد، با افزایش n جملات دنباله کوچکتر خواهد شد و دنباله کاهشی است.
 اگر $d=0$ باشد، جملات دنباله ثابت میمانند.
 ۳. جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	اختلاف مشترک	پنج جمله اول	a_n
a	d	$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$	$a_n = a + (n-1)d$
۲	۳	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴	$a_n = 2 + 3(n-1)$
۴	-۳	۴, ۱, -۲, -۵, -۸	$a_n = 4 + (-3)(n-1)$
۴	$-\frac{1}{2}$	۴, $\frac{7}{2}$, ۳, $\frac{5}{2}$, ۲	$a_n = 4 + (-\frac{1}{2})(n-1)$
-۳	۵	-۳, ۲, ۷, ۱۲, ۱۷	$a_n = -3 + 5(n-1)$



مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

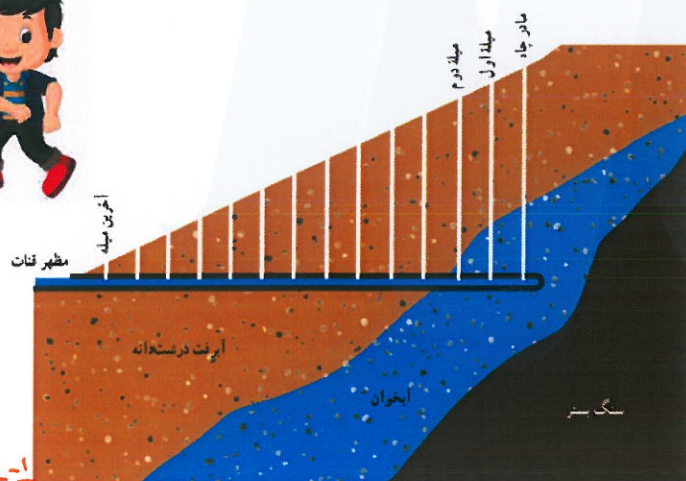


چاپ، انکسیر و انتشار این جزوه بر حروش (الکترونیک و...) برای نام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تکثیرین تحت پیکرو قانونی قرار

می گیرند.

کار در کلاس

قنات یا کاریز، راه آب یا کانالی است که در زیر زمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادر چاه» به دست آمده است، به منطقه ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل زیر، از چاه های کمکی به نام «میل» استفاده می کنند. میل ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقنی^۱ در خارج کردن خاک های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می شوند.



در یک منطقه، مقنی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه های کمکی در فاصله های یکسان از هم، عمق میل اول ۲۹/۵ متر و میل دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میل ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میل ۱/۵ متر باشد، این مقنی در مجموع چند

بی. دنیالو

چاه حفر کرده است؟ $(n=?)$ تعداد $\rightarrow ۱, ۵, \dots, ۲۹, ۲۹, ۵, ۳۰$

$$n=1 \Rightarrow \text{چاه اول} \Rightarrow \text{عمق چاه اول} = a_1 = 30$$

$$n=2 \Rightarrow \text{چاه دوم} \Rightarrow \text{عمق چاه دوم} = a_2 = 30 + 1(-\frac{1}{4}) = 29.5$$

$$n=3 \Rightarrow \text{چاه سوم} \Rightarrow \text{عمق چاه سوم} = a_3 = 30 + 2(-\frac{1}{4}) = 29$$

$$\vdots$$

$$n=n \Rightarrow \text{چاه nام} \Rightarrow \text{عمق چاه nام} = a_n = 30 + (n-1)(-\frac{1}{4})$$

اگر فرض کنیم که عمق چاه nام برابر ۵/۱ است، آن ماه داریم:

$$\frac{1}{5} = 30 + (n-1)(-\frac{1}{4})$$

$$\frac{1}{5} = 30 - \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{b} \quad n = \frac{\frac{1}{5} - 30 + \frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} + 1 = \frac{-\frac{149}{20} + \frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} + 1 = \frac{-\frac{149}{20} + \frac{5}{20}}{-\frac{1}{4}} + 1 = \frac{-\frac{144}{20}}{-\frac{1}{4}} + 1 = \frac{144}{5} + 1 = 28.8 + 1 = 29.8 \approx 30$$

$$29 = \frac{1}{4}n \Rightarrow n = \frac{29}{\frac{1}{4}} = 116$$

در نتیجه مقنی در مجموع ۵۸ چاه حفر کرده است.

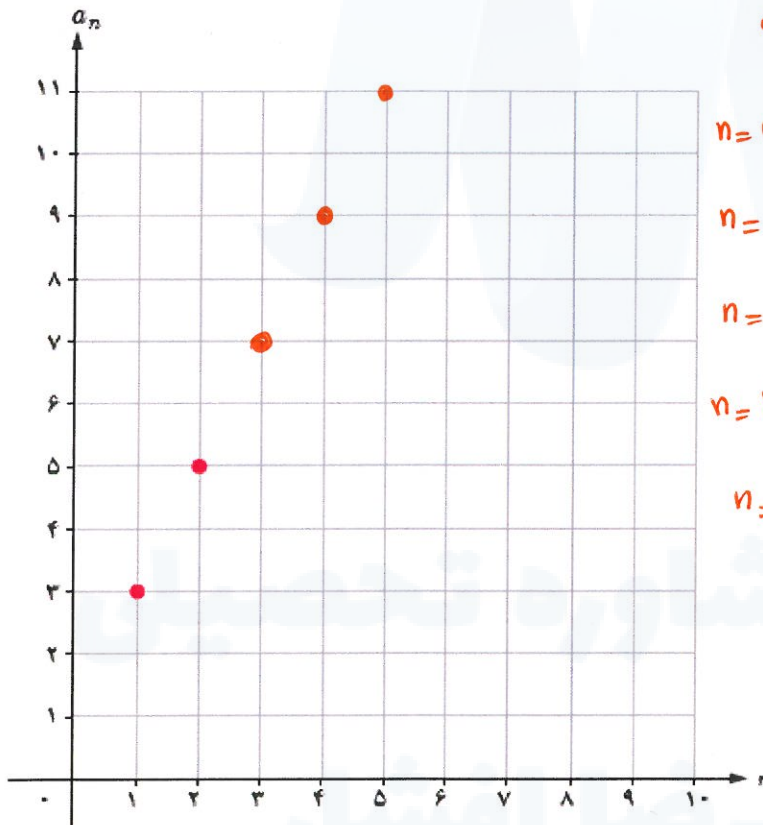


چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

فعالیت

دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

الف) با محاسبه سه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.



$$a_n = 3 + 2(n-1)$$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 3 + 2(1-1) = 3$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 3 + 2(2-1) = 5$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = 3 + 2(3-1) = 7$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = 3 + 2(4-1) = 9$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = 3 + 2(5-1) = 11$$

ب) معادله خطی را که از دو نقطه اول و دوم می گذرد، به دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط به دست آمده صدق

می کنند؟

$$(1, 3) \quad (2, 5)$$

$$\text{شیب} = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$y = mx + b \Rightarrow 3 = 2 + b \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow y = 2x + 1$$

$x=3 \rightarrow y=7$
$x=4 \rightarrow y=9$
$x=5 \rightarrow y=11$

ج) شیب خط به دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟

شیب خط با مقدار d برابر است $\rightarrow$ سوال اصلاً بخار!



استاد اسیر شریفی مقدم - 09133979092

پاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

نمودار دنباله	چهار جمله اول دنباله	دنباله ساخته شده از تابع	ضابطه تابع
	۱, ۳, ۵, ۷	$a_n = 2n - 1$	$y = 2x - 1$
	۳, ۲, ۱, ۰	$a_n = -n + 4$	$y = -x + 4$
	۲, ۱, ۰, ۱, ۲	$a_n = n - 2$	$y = x - 2$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = -1 + n - 1$$

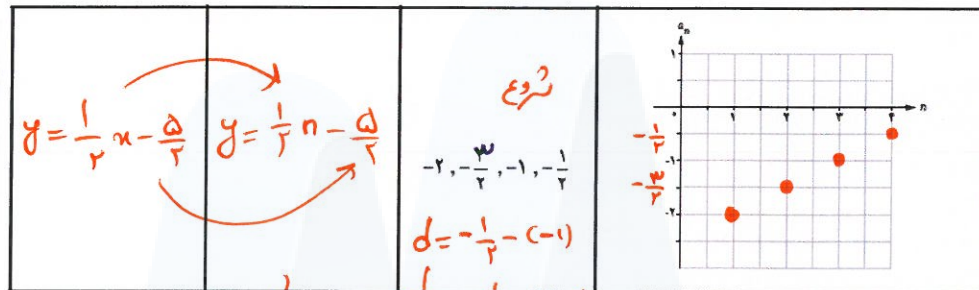
$$a_n = n - 2$$

استاد امیر شیرینی مقدم - 09133979092



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.



تفاضل دو جمله متوالی

$$d = -\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{r}$$

$$a_n = -2 + (n-1) \cdot \frac{1}{r}$$

$$a_n = -2 + \frac{1}{r}n - \frac{1}{r}$$

$$a_n = \frac{1}{r}n - \frac{5}{r}$$

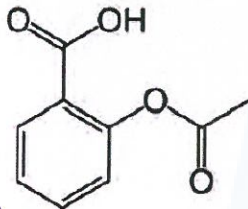
مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



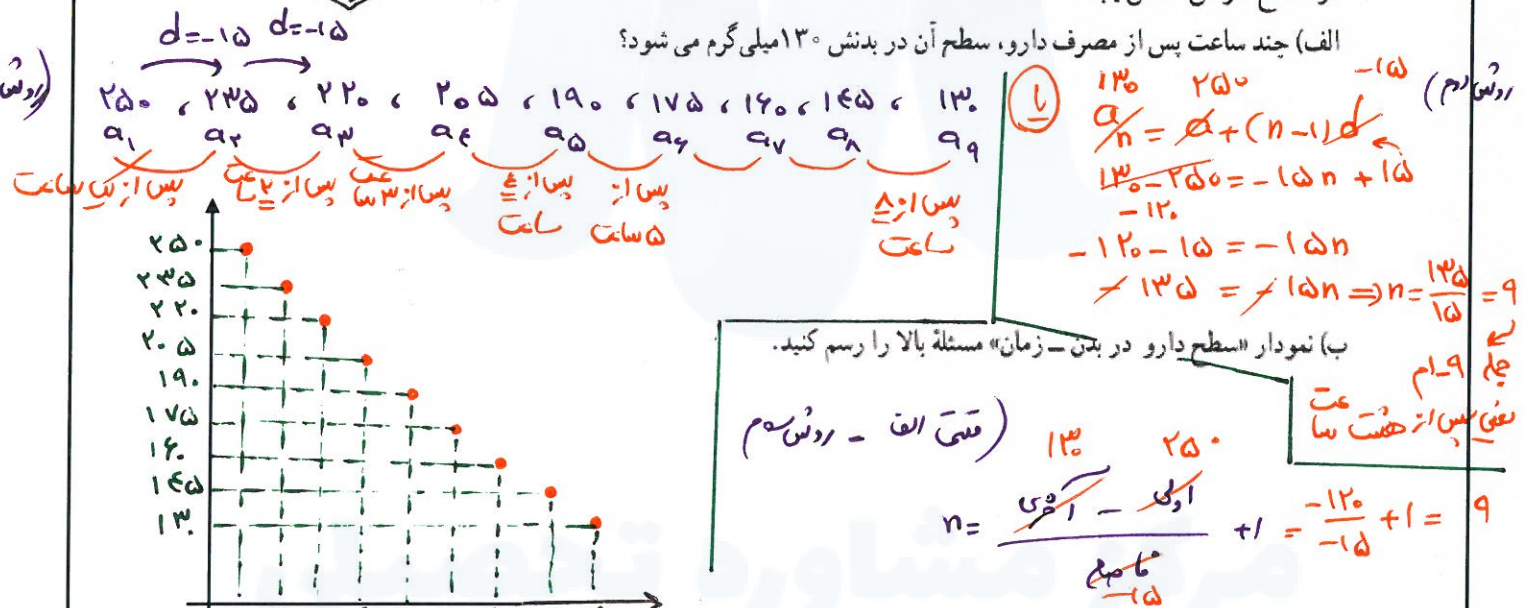
چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی منع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تکثیر تحت پیکر و قانونی قرار می گیرند.

فعالیت



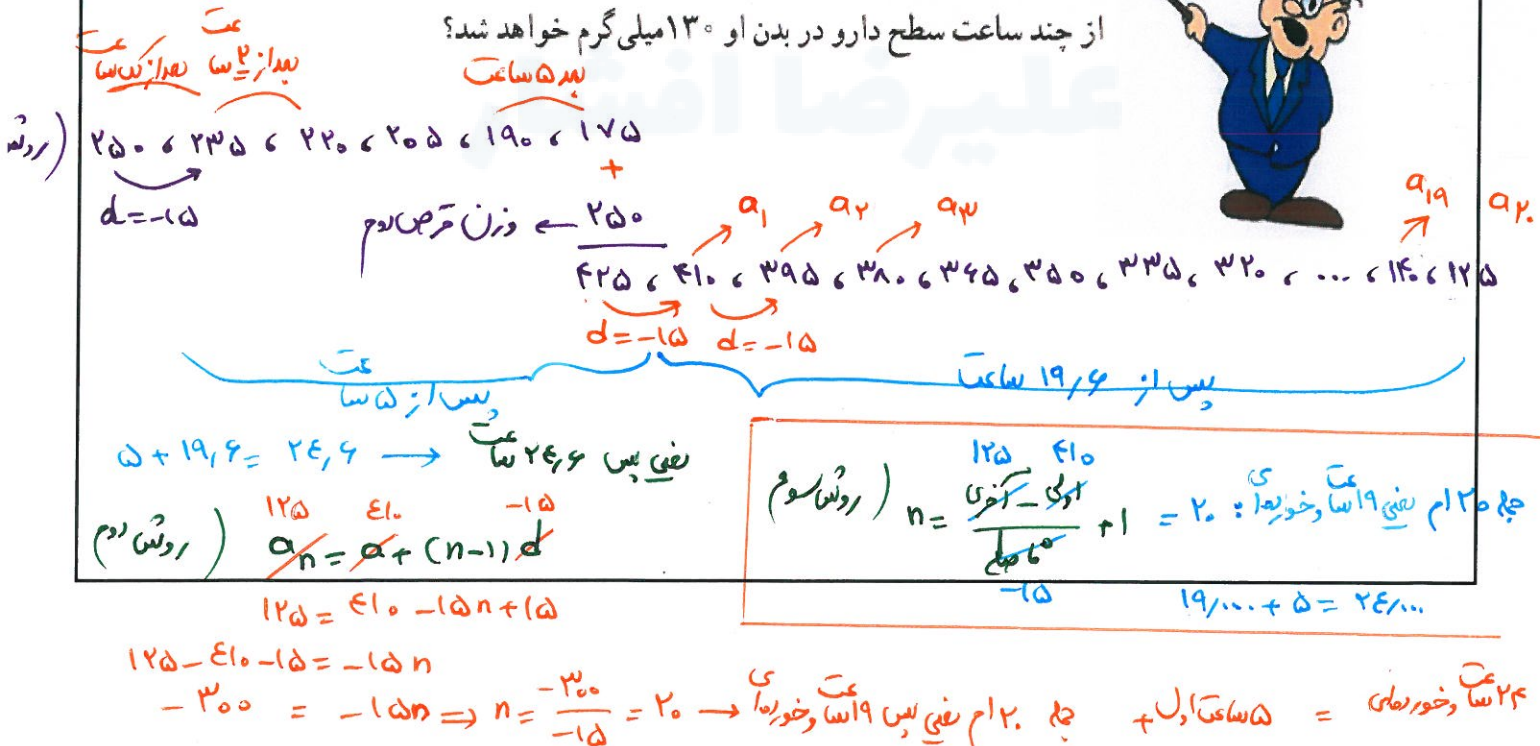
پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می شود. اگر شخصی که سابقه سکته قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی گرم دارو در سطح خونس کاهش یابد:

الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدن ۱۳۰ میلی گرم می شود؟



ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس

از چند ساعت سطح دارو در بدن او ۱۳۰ میلی گرم خواهد شد؟





چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

یعنی ۹۰٪ حقوق باقی می ماند

کار در کلاس



درآمد یک کارمند در یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۲,۶۰۰,۰۰۰ تومان است که ۱۰٪ آن به عنوان مالیات کسر می شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۱ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهیانه او ۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را ۳۰ روزه در نظر بگیرید.)

این شخص روزانه x ساعت اضافه کاری کند، آن ماه حقوق ماهیانه او برابر است با:

$$2,600,000 \times \frac{90}{100} = (2,340,000 + 11,000 \times x \times 30) = 2,340,000 + 330,000x$$

$$2,340,000 + 330,000x = 3,000,000$$

$$330,000x = 3,000,000 - 2,340,000$$

$$330,000x = 660,000 \rightarrow x = \frac{660}{330} = 2$$

یعنی این شخص باید روزی ۲ ساعت اضافه کاری کند

کار در کلاس



۱. مجموع دنباله های حسابی زیر را به دست آورید.

۱۹۹ و ۱ و ۴ و ۱- (الف)

$$d = 9 - 4 = 5$$

$$n = \frac{\frac{199}{5} - \frac{-1}{5}}{1} + 1 = \frac{200}{5} + 1 = 41$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{41}{2} \times 199 = 41 \times 99$$

$$= 41 \times 99 = 4059$$

$$d = 5$$

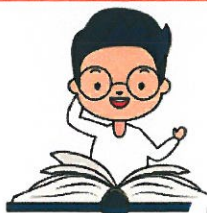
$$a_{n+1} = 5 + a_n, a_1 = -2$$

$$S_{10} = ?$$

رایج باز نشی دنباله حسابی

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2a + (10-1)d] = \frac{10}{2} [2(-2) + 9 \times 5] = 5 [-4 + 45] = 5 \times 41 = 205$$

۲. مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.



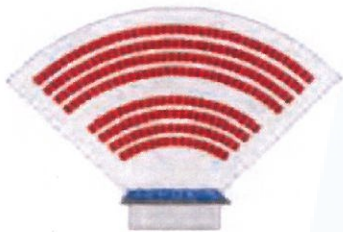
۱، ۳، ۵، ۷، ...

کتاب دنباله حسابی یا $d = 2$

$$S_{30} = \frac{30}{2} [2 \times 1 + (30-1) \times 2] = 15 (2 + 58) = 900$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟
 $S = 870$



$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

۱۵، ۱۸، ۲۱، ...

رابطه های $d=3$

$$870 = \frac{n}{2} (30 + 3n - 3)$$

طرفین دوطرفه

$$870 \times 2 = n (3n + 27)$$

$$1740 = 3n^2 + 27n$$

$$0 = 3n^2 + 27n - 1740$$

برای ساده کردن $\div 3$

$$0 = n^2 + 9n - 580$$

یعنی ۲۰ ردیف

$$n - 20 = 0 \Rightarrow n = 20$$

$$(n - 20)(n + 29) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} n + 29 = 0 \Rightarrow n = -29 \\ \text{غ- غ- غ} \end{array} \right)$$

معادله استاندارد $a=1 \quad b=9 \quad c=-580$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4(1)(-580) = 2401$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{2401}}{2} = \frac{-9 \pm 49}{2} \quad \left(\begin{array}{l} 20 \\ -29 \end{array} \right)$$



چاپ، کثیر و انتشار این جزوه به حرر و (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند

تمرین ؟

۱. با نوشتن جملات رابطه های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.



الف) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

معنی: هر جمله معکوس جمله قبلی

$2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots$

دنباله حسابی نیست

ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ $a_1 = -1$

معنی: جمله قبلی بعلاوه ۵ می شود جمله بعدی

$-1, -1+5=4, 4+5=9, 9+5=14, 14+5=19, \dots$

دنباله حسابی است

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$ $a_1 = -1$

معنی: هر جمله قبلی بعلاوه ۱ می شود ۵ برابر جمله بعدی

$-1, -1+1=0, 0+1=1, 1+1=2, 2+1=3, \dots$
دنباله حسابی نیست

د) $a_{n+1} - a_n = n$

$a_{n+1} = n + a_n$
 $1, 2, 3, 4, \dots$

جمله قبلی ابتدا بعلاوه ۱ بعد ۲، ۳، ۴، ... می شود

دنباله حسابی نیست

۲. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

$a_n = 555$ $n = ?$

$d = 8$

$a = -5$



$a_n = a + (n-1)d$

$555 = -5 + 8n - 8$

$555 + 5 + 8 = 8n$

$568 = 8n \rightarrow n = \frac{568}{8} = 71$

$n = \frac{568}{8} + 1 = 71$

۳. یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی ام این دنباله را مشخص کنید.

$a_{11} = 52$

$a_{19} = 92$

$d = \frac{a_{19} - a_{11}}{19 - 11} = \frac{92 - 52}{8} = \frac{40}{8} = 5$

$a_{30} = a + 29d$

$a_{30} = 52 + 145 = 197$



$a_{11} = 52 \rightarrow \frac{52}{9} = a + 10d$

$52 = a + 50$

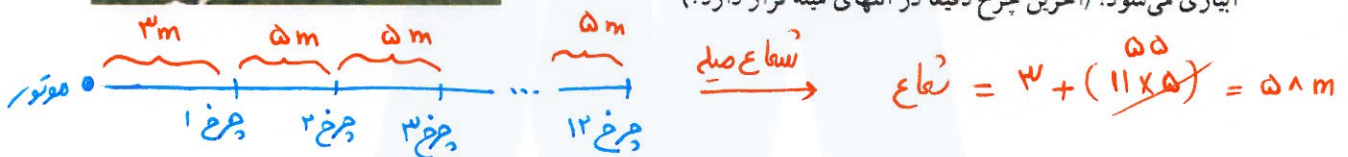
$a = 2$



چاپ، انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی منع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره ای استفاده می شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ هایی برای بخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)



$$S = \pi \times \text{نوع} \times \text{نوع} = \pi \times ۵۸ \times ۵۸ = ۱۰۵۶۲,۹۶ m^2$$

۳/۱۴



۵. در یک کارخانه سنگ بری برای صیقل دادن سنگ ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

پس از شش هفته ۱۲۵۰۰ ۱۰۶۲۵ ۸۷۵۰ ۶۸۷۵ ۵۰۰۰ ۳۱۲۵ ۱۲۵۰

پس از شش هفته ۱۲۵۰۰ ۱۰۶۲۵ ۸۷۵۰ ۶۸۷۵ ۵۰۰۰ ۳۱۲۵ ۱۲۵۰

پس از شش هفته ۱۲۵۰۰ ۱۰۶۲۵ ۸۷۵۰ ۶۸۷۵ ۵۰۰۰ ۳۱۲۵ ۱۲۵۰

پس از شش هفته ۱۲۵۰۰ ۱۰۶۲۵ ۸۷۵۰ ۶۸۷۵ ۵۰۰۰ ۳۱۲۵ ۱۲۵۰

پس از شش هفته ۱۲۵۰۰ ۱۰۶۲۵ ۸۷۵۰ ۶۸۷۵ ۵۰۰۰ ۳۱۲۵ ۱۲۵۰

پس از شش هفته ۱۲۵۰۰ ۱۰۶۲۵ ۸۷۵۰ ۶۸۷۵ ۵۰۰۰ ۳۱۲۵ ۱۲۵۰

پس از شش هفته ۱۲۵۰۰ ۱۰۶۲۵ ۸۷۵۰ ۶۸۷۵ ۵۰۰۰ ۳۱۲۵ ۱۲۵۰

پس از شش هفته ۱۲۵۰۰ ۱۰۶۲۵ ۸۷۵۰ ۶۸۷۵ ۵۰۰۰ ۳۱۲۵ ۱۲۵۰



۶. میان دو عدد a و b ، عدد n را به گونه ای قرار می دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $d = \frac{b-a}{n+1}$ به دست می آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

a b $n+2$ جمله است

n واسه

$$a_{n+2} = a + (n+1)d$$

$$a_{n+2} = a + (n+1)d$$

طرف معلوم ضرب مجهول

$$b - a = (n+1)d \Rightarrow d = \frac{b-a}{n+1}$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۷. براساس رابطه به دست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به گونه ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

$$\begin{array}{c}
 a \qquad \qquad \qquad n=3 \qquad \qquad \qquad b \\
 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 18 \\
 d = \frac{b-a}{n-1} = \frac{18-10}{3-1} = \frac{8}{2} = 4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 +2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \\
 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18
 \end{array}$$

۸. مجموع عددهای زیر را به دست آورید.

جواب آخر داریم $d = 5 - 1 = 4$

۴۰۱ و و ۹ و ۵ و ۱ (الف)

$$n = \frac{401 - 1}{4} + 1 = \frac{400}{4} + 1 = 101$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{101}{2} \times 402 = 20301$$



جواب آخر داریم $d = 81 - 85 = -4$

۱۳ و و ۸۱ و ۸۵ و ۸۹ (ب)

$$n = \frac{13 - 89}{-4} + 1 = 19 + 1 = 20$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = 10 (102) = 1020$$

مرکز مشاوره
علیرضا افشار

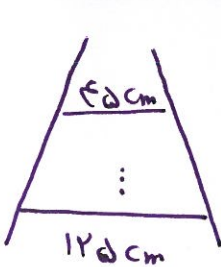


پاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



۹. باغ داران برای چیدن میوه ها از نردبان هایی استفاده می کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می شود، برای جابه جایی آسان تر و تکیه گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نردبان ۱۲۵ سانتی متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی متر کوتاه تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟



$$d = -10$$

$$125, 115, 105, \dots, 45$$

$$n = \frac{45 - 125}{-10} + 1 = 9$$

نردبان ۹ پله دارد.

$$S_9 = \frac{9}{2} (2a + nd)$$

$$S_9 = \frac{9}{2} (2 \cdot 125 + 9 \cdot (-10)) = 745 \text{ cm}$$

$$\frac{a_n}{n} = a + (n-1)d$$

$$45 = 125 - 10n + 10$$

$$45 - 125 - 10 = -10n$$

$$-90 = -10n$$

$$n = 9$$

۱۰. ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی ترین قنات ایران - عمق مادرچاه قنات زارچ ۸۴/۶ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۱۵۵م) ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله) ۱۲۰ سانتی متر در نظر گرفته شود:

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

$$a_1 = 84.6 \quad a_{56} = 78$$

$$a_{56} = a + 55d$$

$$78 = 84.6 + 55d$$

$$78 - 84.6 = 55d$$

$$-6.6 = 55d$$

عمق آخرین چاه قنات = ۱۲۰ cm است

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$1.2 = 84.6 - 12n + 12$$

$$1.2 - 84.6 + 12 = -12n$$

$$d = \frac{-6.6}{55} = -0.12$$

$$-83.4 = -12n$$

$$n = \frac{-83.4}{-12} = 6.95 \text{ چاه (مادر چاه ۶۹۵ میله)}$$

یعنی هر شاخه قنات دارای



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

ب) مجموع طول چاه های حفر شده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه های حفر شده در کل قنات چقدر است؟

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_{494} = \frac{494}{2} (84/6 + 12) = 29858/4 \text{ m}$$

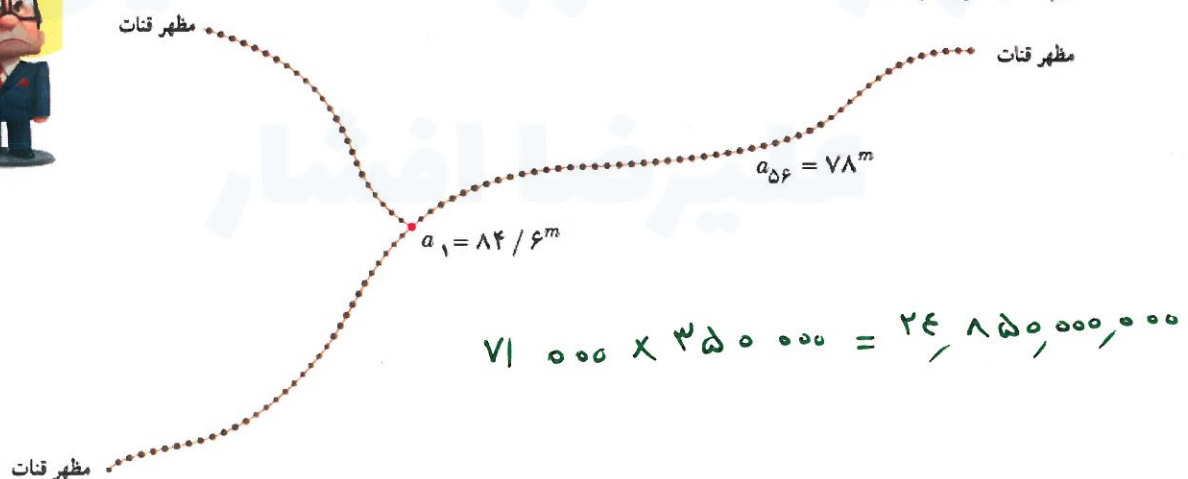
مجموع طول چاه های حفر شده در کل شامل قنات برابر ۲۹۸۵۸/۴ متر و مجموع طول چاه های حفر شده در کل سه قنات برابر ۸۹۴۰۶ = ۲ × ۸۴/۶ + ۳ × ۲۹۸۵۸ متر است. (در عبارت ۳ × ۲۹۸۵۸/۴ ، عمق مادر چاه ۳ بار حساب شده که ۲ بار آن باید حذف شود).



ج) اگر میانگین هزینه حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵۰ هزار تومان باشد، هزینه حفر چاه های قنات در حال حاضر چقدر است؟

$$250000 \times 89406 = 22,351,500,000 \text{ تومان}$$

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه ۲۵۰ هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی: a_n را عمق چاه n ام تا کانال قنات و a_1 را عمق مادر چاه در نظر بگیرید.)



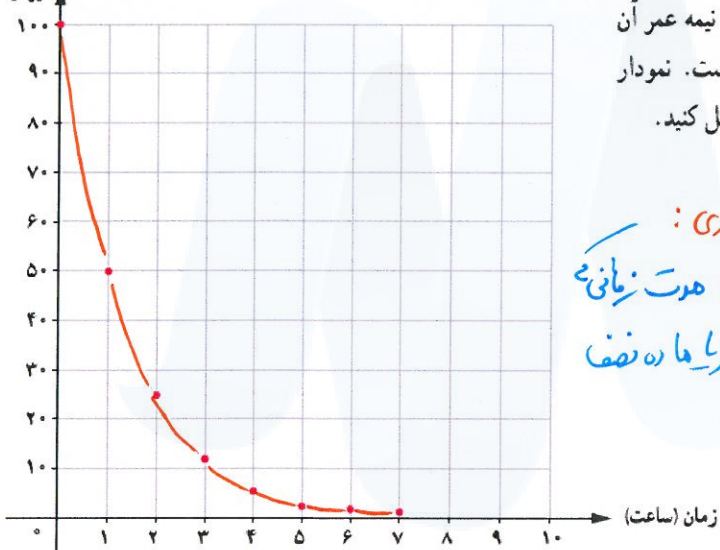


چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

فعالیت

میزان دارو در خون (mg)



شخصی ۱۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون - زمان» را کامل کنید.

یادآوری: نیمه عمر: مدت زمانی که مقدار دارو در خون نصف می شود



الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟ آیا می توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

۱۰۰ میلی گرم $\div 2 = 50$ پس از ۱ نیمه عمر
 $50 \div 2 = 25$ پس از ۲ نیمه عمر
 $25 \div 2 = 12.5$ پس از ۳ نیمه عمر

چنین با میزان دارو در بدن شخص صفر نمی شود زیرا دنباله هندسی است.

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه

مائل نیمه عمر در دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ است.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n, a_1 = 50$$



ج) ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$$a_n = ar^{n-1} = 50 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	نسبت مشترک	پنج جمله اول	ضابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{3}$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{81}$	$r = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{54}, \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16}$	$a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$ $a_1 = \frac{1}{81}$	$a_n = ar^{n-1} = \frac{1}{81} \times (\frac{3}{2})^{n-1}$
$a_1 = 4$	$r = -\frac{1}{2}$	$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$a_{n+1} = (-\frac{1}{2}) a_n$ $a_1 = 4$	$a_n = 4 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{5}$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$a_n = \frac{1}{5} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$
$a_1 = 100$	$r = \frac{1}{4}$	$100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$ $a_1 = 100$	$a_n = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

۲. با توجه به جدول بالا، در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ با فرض $a_1 > 0$:



- | | | | | |
|---------------------------------------|---|---|--|------|
| الف) اگر $0 < r < 1$ ، دنباله a_n ، | ☐ افزایشی | ☒ کاهشی | ☐ ثابت | است. |
| ب) اگر $r > 1$ ، دنباله a_n ، | ☒ افزایشی | ☐ کاهشی | ☐ ثابت | است. |
| ج) اگر $r = 1$ ، دنباله a_n ، | ☐ افزایشی | ☐ کاهشی | ☒ ثابت | است. |

کار در کلاس

ضابطه بازگشتی دنباله هندسی $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ را مشخص کنید.

$$a_{n+1} = r a_n \quad (a_1 = a)$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تکثیرین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

توجه: مسائل استهلاک، دنباله هندسی گاهسی

کار در کلاس



(هزینه استهلاک) = شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این یخچال هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر v ارزش یخچال فریزر در سال n ام باشد:

باقی مانده $\frac{90}{100} = \frac{100 - 10}{100} = 90\%$ یعنی ۱۰ درصد ارزش را از دست می دهد و ۹۰ درصد ارزش حفظ می شود.
الف) ضابطه تابعی دنباله v را به دست آورید.

$$v_1 = 960000 \quad v_2 = 960000 \times \frac{90}{100} = 864000 \quad v_3 = 864000 \times \frac{90}{100} = 777600$$

$$v_n = a r^{n-1} = 960000 \left(\frac{90}{100}\right)^{n-1} \rightarrow 960000 \times \frac{1}{100} = 9600$$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟

کمترین کاهش قیمت یخچال، زمانی رخ می دهد که قیمت یخچال در سال قبل کمترین حالت داشته باشد، با توجه به کاهش ده درصدی سالانه قیمت یخچال و اینکه هیچ گاه قیمت یخچال به صفر نمی رسد، نمی توان سالی را که قیمت یخچال در کمترین حالت است تعیین کرد پس نمی توان کمترین حالت کاهش قیمت یخچال را به دست آورد.

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می شود؟ ضابطه v

را به گونه ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنباله v در این حالت حساسی است یا هندسی؟

چون قیمت یخچال فریزر در هر سال ۹۰ درصد سال قبل خود است، بنابراین قیمت یخچال هیچ گاه به صفر نخواهد رسید (چون هیچ گاه قیمت سال قبل صفر نخواهد بود).

$$v_n = 960000 - 960000n + 960000 = -960000n + 1056000$$

اگر بخواهیم پس از ده سال ارزش یخچال صفر شود دنباله حسابی است.

د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد،

چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

(روش اول)

$$960000 \div 2 = 480000$$

$$960000 \times \frac{90}{100} \rightarrow 864000 \times \frac{90}{100} \rightarrow 777600 \times \frac{90}{100} \rightarrow 699840 \times \frac{90}{100} \rightarrow 629856 \times \frac{90}{100} \rightarrow 566870.4 \times \frac{90}{100} \rightarrow 510183.36 \times \frac{90}{100} \rightarrow 459165.024$$

پس از هفت سال

(روش دوم)

$$a_n = 960000 \left(\frac{90}{100}\right)^{n-1} < 480000 \rightarrow \left(\frac{90}{100}\right)^{n-1} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < \frac{1}{2} \rightarrow n \geq 7$$

پس از هفت سال

ه) با توجه به قسمت های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کسر شود، با حالتی که k درصد از آن

کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

در حالتی که در هر مرحله k واحد کسر شود (دنباله حسابی) در نهایت قیمت یخچال به صفر خواهد رسید.

در حالتی که در هر مرحله k درصد کسر شود (دنباله هندسی) هیچ گاه قیمت یخچال به صفر نخواهد رسید.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تکثیرین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

معنی هر شش ساعت ماده کافئین در بدن نصف می شود

کار در کلاس



طبق آزمایش های انجام شده، نیمه عمر ماده کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۵٪ میلی گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی شود.)

پس از ۶ ساعت	پس از ۶ ساعت	پس از ۶ ساعت	پس از ۶ ساعت	پس از ۶ ساعت	پس از ۶ ساعت	پس از ۶ ساعت	پس از ۶ ساعت
۸۰ میلی گرم	۴۰	۲۰	۱۰	۵	۲.۵	۱.۲۵	۰.۶۲۵
۰.۳۱۲۵							

معنی: پس از ۸ نیمه عمر شخص می تواند چای یا قهوه مصرف کند
 $6 \times 8 = 48$ ساعت

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص های آنتی بیوتیک حامل 80 میلی گرم آنتی بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه عمر این آنتی بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.

الف) اگر « S_n » میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض های مسئله :

S_n (میلی گرم)	زمان مصرف	تاریخ مصرف	n تعداد مصرف
$S_1 = 80 \text{ mg}$	۰۰:۰۰ بامداد	۱۵ بهمن	۱
$S_2 = \frac{1}{4}S_1 + 80 = 40 + 80 = 120$	۰۸:۰۰ صبح	۱۵ بهمن	۲
$S_3 = \frac{1}{4}S_2 + 80 = 60 + 80 = 140$	۰۴:۰۰ بعد از ظهر	۱۵ بهمن	۳
$S_4 = \frac{1}{4}S_3 + 80 = 70 + 80 = 150$	۰۰:۰۰ بامداد	۱۶ بهمن	۴
$S_5 = \frac{1}{4}S_4 + 80 = 75 + 80 = 155$	۰۸:۰۰ صبح	۱۶ بهمن	۵
$S_6 = \frac{1}{4}S_5 + 80 = 77.5 + 80 = 157.5$	۰۴:۰۰ بعد از ظهر	۱۶ بهمن	۶

ب) با یک «رابطه بازگشتی» میزان آنتی بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

ب) با توجه به نحوه کامل کردن جدول بالا، رابطه بازگشتی میزان آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطه زیر مشخص می شود :

$$S_{n+1} = \dots 80 + \frac{1}{4}S_n, \quad S_1 = 80$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تحتلین تحت پیکر و قانونی قرار می گیرند.

(ج) آیا می توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه ای مشخص کنید؟ (ضابطه تابعی دنباله)

(ج) برای نوشتن ضابطه تابعی دنباله S_n بر حسب n ، اگر میزان آنتی بیوتیک هر قرص را A میلی گرم در نظر بگیریم (در این مسئله $A = 800 \text{ mg}$ است)، با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت ب:

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A + \frac{1}{4} S_1 = A + \frac{1}{4} A$$

$$S_3 = A + \frac{1}{4} S_2 = A + \frac{1}{4} (A + \frac{1}{4} A) = A + \frac{1}{4} A + (\frac{1}{4})^2 A$$



به همین صورت برای محاسبه S_n :

$$S_n = A + \frac{1}{4} A + (\frac{1}{4})^2 A + \dots + (\frac{1}{4})^{n-1} A$$

پس برای محاسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف:

$$S_n = A + \frac{1}{4} A + (\frac{1}{4})^2 A + \dots + (\frac{1}{4})^{n-1} A \quad (1)$$

اگر طرفین رابطه (1) را در ضریب $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم:

$$\frac{1}{4} S_n = \frac{1}{4} A + (\frac{1}{4})^2 A + (\frac{1}{4})^3 A + \dots + (\frac{1}{4})^n A \quad (2)$$

با تفاضل رابطه (1) از (2) رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n - \frac{1}{4} S_n = A - (\frac{1}{4})^n A \Rightarrow \frac{3}{4} S_n = A(1 - (\frac{1}{4})^n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{4}{3} A(1 - (\frac{1}{4})^n)$$

بنابراین، با فرض این مسئله $A = 800 \text{ mg}$ ، مجموع میزان آنتی بیوتیک پس از n بار مصرف:

$$S_n = 1600(1 - (\frac{1}{4})^n)$$

(د) با جای گذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطه به دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.



$$S_1 = 1600(1 - (\frac{1}{4})^1) = 1600 \times \frac{3}{4} = 1200$$

$$S_2 = 1600(1 - (\frac{1}{4})^2) = 1440$$

$$S_3 = 1600(1 - (\frac{1}{4})^3) = 1520$$

$$S_4 = 1600(1 - (\frac{1}{4})^4) = 1560$$

$$S_5 = 1600(1 - (\frac{1}{4})^5) = 1580$$

$$S_6 = 1600(1 - (\frac{1}{4})^6) = 1590$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حروف (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \dots \frac{1}{4} \dots$	$r = \dots \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{64}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$S_p = \frac{\frac{1}{4} (1 - (\frac{1}{4})^4)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{85}{256}$ $S_\infty =$
--	---------------------------------	--	--

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{4} (1 - (\frac{1}{4})^\infty)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} (1 - \frac{1}{4^\infty}) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{21845}{65536} = \frac{21845}{65536}$$

مکمل صفر

$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$a_1 = \dots \frac{2}{5} \dots$	$r = \dots \frac{1}{2} \dots$	$S_p = \frac{\frac{2}{5} (1 - (\frac{1}{2})^p)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$ $S_q = ?$
---	---------------------------------	-------------------------------	--

$$r = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$S_q = \frac{\frac{2}{5} (1 - (\frac{1}{5})^q)}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} (1 - \frac{1}{5^q}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{511}{125} = \frac{511}{625}$$

مکمل صفر

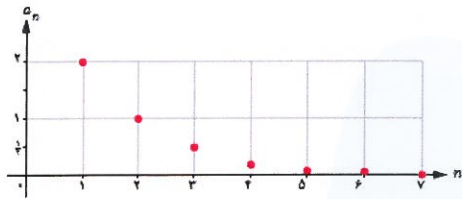
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \dots \frac{2}{5} \dots$	$r = \dots 5 \dots$	$S_p = \frac{\frac{2}{5} (1 - 5^p)}{1 - 5} = \frac{1812}{5}$
-----------------------------	---------------------------------	---------------------	--

$$r = \frac{2}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{2} = 5$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و نشر (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۲. نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی: الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.



$$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$a_n = ar^{n-1} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$



ب) حاصل S_{10} را به دست آورید.

$$S_{10} = \frac{2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times 2 \times \left(1 - \frac{1}{1024}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2} \times \cancel{2}} \times \frac{1023}{1024} = \frac{1023}{256}$$

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می دهد.

۱) $a_{n+1} = (a_n)^2$ $a_1 = \frac{1}{2}$

دنباله هندسی نیست

معنی: جمله قبلی بر توان ۲ می شود

$a_1 = \frac{1}{2}$ $a_2 = \frac{1}{4}$ $a_3 = \frac{1}{16}$ $a_4 = \frac{1}{64}$

۲) $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ $a_1 = \frac{1}{2}$

دنباله هندسی است

جمله قبلی ضرب ۲/۳ می شود

$a_1 = \frac{1}{2}$ $a_2 = \frac{1}{3}$ $a_3 = \frac{2}{9}$ $a_4 = \frac{4}{27}$

۳) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ $a_1 = 1$

دنباله هندسی نیست

$a_1 = 1$ $a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ $a_4 = \frac{3}{5}$

۴) $a_{n+1} = 2a_n$ $a_1 = 1$

دنباله هندسی است

دو برابر جمله قبلی می شود

$a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_3 = 4$ $a_4 = 8$

۲. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه $a \times c = b^2$. (را واسطه هندسی میان a و c می نامند).



a, b, c

① $r = \frac{b}{a}$ تقسیم درجه صدوی

② $r = \frac{c}{b}$ تقسیم درجه صدوی

① = ② $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac$

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

$b^2 = ac \Rightarrow (x+2)^2 = x(x+3)$

$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x$

$4x - 3x = -4$

$x = -4$

④ $x, x+2, x+3$

تقسیم درجه صدوی $\frac{x+2}{x} = \frac{x+3}{x+2}$

طرفین دین $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x$

$x = -4$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.



۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول ها در بدن ایجاد می شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول های سرطانی استفاده می شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می شود و هر بار درصدی از سلول های سرطانی از بین می رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می ماند؟

هر بار ۶۰ درصد سلول های سرطانی از بین رفته و ۴۰ درصد آن ها باقی می ماند

$$10^{12} \times \frac{40}{100} = 10^{12} \times \left(\frac{40}{100}\right)^1 \xrightarrow{\times \frac{40}{100}} 10^{12} \times \left(\frac{40}{100}\right)^2 \xrightarrow{\times \frac{40}{100}} 10^{12} \times \left(\frac{40}{100}\right)^3$$

بعد از یک بار شیمی درمانی بعد از دو بار شیمی درمانی بعد از سه بار شیمی درمانی

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول های سرطانی اش به کمک شیمی درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی مانده سلول های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

$$10^{12} \times \left(\frac{40}{100}\right)^n = \text{تعداد سلول های سرطانی بعد از } n \text{ بار شیمی درمانی}$$

$$10^{12} \times \left(\frac{40}{100}\right)^n < 7 \times 10^6$$

$$10^{12} \times \frac{4^n}{10^n} < 7 \times 10^6$$

$$\xrightarrow{\div 10^6} 10^6 \times \frac{4^n}{10^n} < 7$$

$$10^{6-n} \times 4^n < 7$$

با عدد نزاری صواب می شود که باید $n \geq 13$ باشد. بنابراین شیمی درمانی نیاز است.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۵. میان دو عدد a و b و n عدد را طوری قرار می دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله های هندسی از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

POINT

$$a \xrightarrow[n \text{ واسه } a]{b} \quad \text{یعنی } n+2 \text{ جمله}$$

$$a_{n+2} = ar^{n+1} \Rightarrow \frac{b}{a} = r^{n+1} \Rightarrow b = a \times r^{n+1}$$

$$\Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a}$$



۶. جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

$$a_3 = 27 \quad a_5 = 243$$

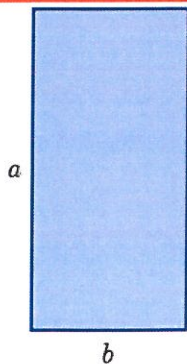
$$r = \frac{a_m}{a_n} \Rightarrow r = \frac{a_5}{a_3} = \frac{243}{27} = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ or } r = -3$$

در جمله اختیاری

$$a_3 = 27 \Rightarrow a_3 = ar^2 = 27 \Rightarrow a = \frac{27}{9} = 3$$

$$a_5 = ar^4 = 243 \Rightarrow a = \frac{243}{81} = 3$$

توابع زوج و فرد
از این صیغه ها



مساحت مربع = مساحت مستطیل

$$ab = x^2$$

۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می دهند؟

- الف) a و b
- ب) a و x ✓
- پ) x و a و b

صورتی $x^2 = ab$ a, x, b



چاپ، تکثیر و انتشار این پژوهش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱۵ درصد از وزن سنگ ۱۵ درصد در دقیقه ۸۵ درصد وزن باقی می ماند

۸. یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می ماند؟



$$\begin{aligned} & \text{بعد از دو دقیقه} \quad 15000 \times \left(\frac{85}{100}\right)^2 \\ & \text{بعد از یک دقیقه} \quad 15000 \times \left(\frac{85}{100}\right)^1 \\ & \text{بعد از چهار دقیقه} \quad 15000 \times \left(\frac{85}{100}\right)^4 \\ & \text{بعد از پنج دقیقه} \quad 15000 \times \left(\frac{85}{100}\right)^5 = 6655158 \\ & \text{یعنی تقریباً } 6655158 \text{ کیلوگرم از جرم شهاب سنگ باقی می ماند} \end{aligned}$$

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و ... دارد. (الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)



$$\left. \begin{aligned} 2^1 = 2 &= 2^1 = 2^1 \\ 2^2 = 4 &= 2^2 = 2^2 \\ 2^3 = 8 &= 2^3 = 2^3 \\ &\vdots \\ 2^n = 2^n &= 2^n = 2^n \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{بنابراین نیاکان این شخص در ده} \\ &\text{نسل قبل برابر } 2^{10} = 1024 \\ &\text{تقریباً است.} \end{aligned}$$

(ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

$$\begin{aligned} & 2 + 4 + 8 + \dots + 1024 \quad r=2 \\ & S_{10} = \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = \frac{2(1-1024)}{-1} = 2 \times 1023 = 2046 \end{aligned}$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حروف (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

۱۰. مجموع های زیر را به دست آورید.

$$r = \frac{4}{1} = 4$$

$$1 + 4 + 16 + \dots + 4096$$

ابتدا باید مشخص کنیم ۴۰۹۶ جمله چندام است.

$$S_n = \frac{1(1-4^n)}{1-4} = \frac{16383}{3} = 5491$$



$$a_n = ar^{n-1}$$

$$4096 = 1 \times 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$4 = 4^{n-1}$$

$$r = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$S_n = \frac{1(1-(\frac{1}{4})^n)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1(1-\frac{1}{256})}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{255}{3} = \frac{51}{128}$$

۱۱. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{4}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع



$$1536 \times \frac{1}{4} = 384 \times \frac{1}{4} = 96 \times \frac{1}{4} = 24 \times \frac{1}{4} = 6$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$6 = 1536 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$1 = 256 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$1 = n-1$$

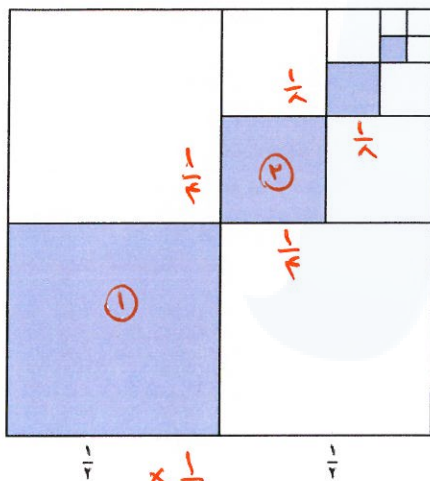
$$[n=2]$$

$$S_9 = \frac{1536(1-(\frac{1}{4})^9)}{1-\frac{1}{4}} = 1536 \times \frac{1}{4} \left(1-\frac{1}{256}\right) = 1536 \times \frac{1}{4} \times \frac{255}{256} = 6 \times 255 = 1530$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حروف (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی منع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می کنیم. از مربع های باقی مانده، مربعی را که با مربع رنگ آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ آمیزی می کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می دهیم.



الف) چرا دنباله مساحت های مربع های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می دهد؟

$$\textcircled{1} \text{ مساحت } S_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

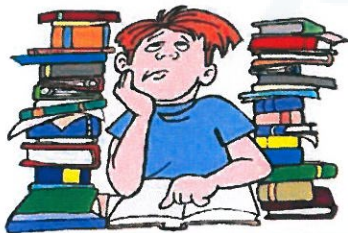
$$\textcircled{2} \text{ مساحت } S_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\textcircled{3} \text{ مساحت } S_3 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

دنباله هندسی است با $r = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ و جمله اول $a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

ب) اگر روند رنگ آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت های مربع های رنگی از چه رابطه ای به دست می آید؟

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \quad S_n = \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$



پ) پس از شش مرحله رنگ آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می شود؟

$$S_6 = \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4096}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{4095}{4096}\right) = \frac{1365}{1366}$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

فعالیت

۱. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$2^3 = 8$$

$$(2)^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$$

$$7^3 = 343$$

توان بزرگ صغری را قدرتمی کنند

$$(-3)^6 = 729$$

$$-2^6 = -729$$

هو در به توان صغری می شوند

$$(1/10)^5 = (10^{-1})^5 = 10^{-5} = \frac{1}{100000}$$

۲. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت عدد توان دار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید. m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند

توان ها مساوی - پایه ها به هم تقسیم می شوند

$$(-26)^7 \div 9^7 = \left(-\frac{26}{9}\right)^7 = \left(-\frac{26}{9}\right)^7 \times \left(\frac{9}{9}\right)^7 = \left(-\frac{26}{9}\right)^7 \times \left(\frac{9}{1}\right)^7 = \left(-\frac{26}{1}\right)^7 = (-26)^7$$



توان ها در هم ضرب می شوند

$$(-2)^3 \times (-5)^3 = 2^3 = 8$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 \div \left(\frac{4}{5}\right)^8 = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}$$

توان ها جمع می شوند (پایه ها مساوی)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)^6 \times \left(\frac{1}{1}\right)^4 = \left(\frac{2}{1}\right)^{10} = 2^{10}$$

توان ها کم می شوند

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 \div \left(\frac{4}{5}\right)^8 = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}$$

پایه ها در هم ضرب می شوند

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$(-4)^3 \times (-5)^3 = 20^3$$

پایه ها به هم تقسیم می شوند

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(-26)^7 \div 9^7 = \left(-\frac{26}{9}\right)^7$$

توان ها در هم ضرب می شوند

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(10^6)^8 = 10^{48}$$





چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه ها یا مثال های زیر، رابطه یا مثال متناظر بنویسید.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^2 \times 5^8 = 5^{2+8} = 5^{10}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$9^{10} \div 9^6 = 9^{10-6} = 9^4$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$(-2)^4 \times 5^4 = (-10)^4$
$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$\frac{10^3}{10^7} = 10^{3-7} = 10^{-4}$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$



۳. همان طور که می دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، ریشه های دوم عدد a همان ریشه های معادله درجه دوم $x^2 = a$ هستند. برای مثال، ریشه های دوم عدد ۱۶ ریشه های معادله $x^2 = 16$ می باشند و چون $4^2 = 16$ و $(-4)^2 = 16$ ، پس ۴ و -۴ یا $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ ریشه های دوم عدد ۱۶ هستند. همچنین، ریشه سوم عدد حقیقی مانند a ، ریشه معادله $x^3 = a$ است. برای مثال، ریشه سوم عدد ۲۷، ریشه معادله $x^3 = 27$ است که برابر ۳ می باشد. با همین استدلال، ریشه پنجم عدد -۳۲، پاسخ معادله $x^5 = -32$ است که برابر -2 و ریشه های ششم عدد ۶۴، ریشه های معادله $x^6 = 64$ هستند که برابر ۲ و -۲ می باشند.

علیرضا افشار



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حروفش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

عدد (a)	۶۴	-۶۴
ریشه های چهارم	$\sqrt[4]{64}, -\sqrt[4]{64}$	وجود ندارد
$\sqrt[4]{a}$ جواب آریال	$\sqrt[4]{64}$	وجود ندارد
ریشه پنجم	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[5]{-64}$
$\sqrt[5]{a}$ جواب آریال	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[5]{-64}$
ریشه های ششم	$\sqrt[6]{64}, -\sqrt[6]{64}$	وجود ندارد
$\sqrt[6]{a}$	$\sqrt[6]{64}$	وجود ندارد
.....		
.....		



$$a \geq 0 \text{ زوج است و } n: a=25, n=8 \Rightarrow \text{ریشه های } 8 \text{ ام عدد } 25 = \sqrt[8]{25} = 1/495, -\sqrt[8]{25} = -1/495$$

$$a \geq 0 \text{ فرد است و } n: a=32, n=5 \Rightarrow \text{ریشه پنجم } 5 \text{ عدد } 32 = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$a < 0 \text{ زوج است و } n: a=-10, n=4 \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

$$a < 0 \text{ فرد است و } n: a=-8, n=3 \Rightarrow \text{ریشه سوم } 3 \text{ عدد } -8 = \sqrt[3]{-8} = -2$$

۲. با توجه به اینکه $\sqrt{a^2} = |a|$ و $\sqrt[3]{a^3} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است؛ یعنی:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج است} \\ a & n \text{ فرد است} \end{cases}$$

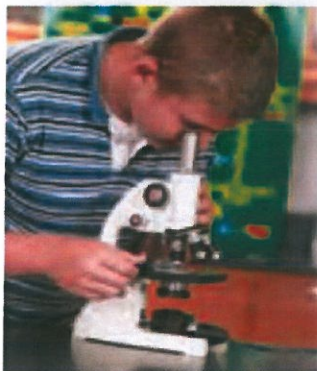
$$\text{برای مثال، } \sqrt[3]{(-15)^3} = -15 \text{ و } \sqrt[4]{(-\frac{8}{3})^4} = -\frac{8}{3} \text{ و همچنین } \sqrt[4]{(-3)^4} = \frac{1-31}{4} \text{ و } \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$





چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

فعالیت



۱. پدر محمد زیست شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری ها کار می کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشان داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیه باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	___	z
جرم (گرم)	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	___	2^z

حالا شما مانند محمد جرم باکتری ها را در زمان های داده شده به دست آورید.

$$\frac{1}{6} = \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}} \quad \text{پس از } 10 \text{ دقیقه } \left(\frac{1}{6} \text{ ساعت}\right) = 2^{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{1}{3} = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \quad \text{پس از } 20 \text{ دقیقه } \left(\frac{1}{3} \text{ ساعت}\right) = 2^{\frac{1}{3}}$$



اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} \quad 6^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{6^7}$$

$$12^{-\frac{2}{11}} = \sqrt[11]{12^{-2}} = \sqrt[11]{\frac{1}{12^2}} = \sqrt[11]{\frac{1}{144}}$$

$$\left(2\frac{1}{3}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{7}\right)^4}$$

فرم دو اینم بنویسم



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه بر عروش (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

کار در کلاس



۱. هر یک از عبارت های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3^1} \quad \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[4]{2/7} = (2/7)^{\frac{1}{4}} \quad (0.3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{0.3} \quad \sqrt[4]{1} = 1^{\frac{1}{4}} = 1$$

می توان همه همان را نوشت

۲. با توجه به مسئله بیان شده در ابتدای معرفی توان های گویا، سرمایه شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان های خواسته شده به دست آورید.

$$3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

۶ ماه (۱/۲ سال) بعد: $100 \times (1/2)^{\frac{1}{2}} = 100 \times \sqrt[2]{1/2}$

۳ سال و ۶ ماه بعد: $100 (1/2)^{\frac{3}{2}} = 100 \times \sqrt[2]{(1/2)^3}$

۲۰۰ روز بعد: $100 \times (1/2)^{\frac{5}{9}} = 100 \times \sqrt[9]{(1/2)^5}$

۱ سال و ۲ ماه بعد: $100 \sqrt[6]{(1/2)^7}$

$$1 + \frac{1}{13} = 1 + \frac{1}{13} = \frac{14}{13}$$

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد توان دار زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2 \times 1}{2}} = 2$$

$$125^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$32^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2^{5 \times \frac{1}{5}} = 2$$

۱۰۰ توان ۱/۲ یعنی جذر

$$100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$$

۴. هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$(2 \times 8)^{\frac{1}{2}} = (16)^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{2}} = 2^2 = 4 \quad 4 \times \frac{1}{4} = 1 \quad 2 - 4(1000)^{\frac{1}{3}} = -4(10^3)^{\frac{1}{3}} = -4(10)^1 = -4 \times 10 = -40$$



$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 3^1 = 3 \quad \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \times \sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8} \times \frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{135}{32}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8} \times \frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \times \sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \times \sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$$

$$125^{\frac{2}{3}} \div 125^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5 \quad 8^{\frac{2}{3}} \times (1/5)^{\frac{2}{3}} = (8 \times 1/5)^{\frac{2}{3}} = (8/5)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(8/5)^2} = \sqrt[3]{64/25} = \sqrt[3]{128/125} = \sqrt[3]{128}/\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{128}/5$$

$$= 125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25 \quad 24 \times \frac{5}{13} = \frac{120}{13} = \sqrt[3]{\frac{120}{13}} = \sqrt[3]{\frac{8 \times 15}{13}} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{\frac{15}{13}} = 2 \sqrt[3]{\frac{15}{13}}$$

۵. دانش آموزی $\sqrt[3]{-8}$ را به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[3]{-8}$ به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نادرست است.

$(-8)^{\frac{1}{3}}$ چون $\frac{1}{3}$ فزونی است و نه فزینی توان کلفیف ضعیف عدد ۸ را ضعیف کرد



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

تمرین



۱. با استفاده از تعریف توان های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[4]{5^2}$ ، $\sqrt[5]{5^3}$ با هم برابرند.

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= 5^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[4]{5^2} &= 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[5]{5^3} &= 5^{\frac{3}{5}} = 5^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

۲. حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (a ، m و n اعداد حقیقی مثبت اند.)

$$\begin{aligned}3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} &= 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} \\ 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{(-\frac{1}{4})} &= 5^0 = 1 \\ 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} &= (8 \times 2)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4 \\ (2^6)^{\frac{1}{3}} &= 2^{6 \times \frac{1}{3}} = 2^2 = 4\end{aligned}$$

توان ها جمع توان ها جمع توان $\frac{1}{3}$ بقی ضرب



$$\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{81}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{8}$$

توان $\frac{1}{2}$ بقی ضرب

$$3^{0.26} \times 3^{0.74} = 3^{0.26+0.74} = 3^1 = 3$$

$$3^1 = 3$$

مساوی قسمتی از لکلو ۹۸

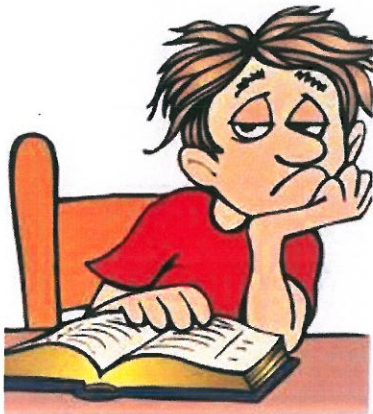


چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و اش (الکترونیک و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی منع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تکثیر و انتشار تحت پیکر و قانونی قرار

می گیرند.

تداین ها در هم نهد، می شوند

بایه ها و تداین ها که می شوند



$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}} \right)^{-4} = \frac{a^{-\frac{1}{2} \times -4}}{a^{-\frac{1}{4} \times -4}} = \frac{a^2}{a^1} = a^{2-1} = a^1$$

$$\begin{aligned} (m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 n^3)^{\frac{1}{2}} &= m^{\frac{3}{2} \times 2} \times n^{\frac{1}{2} \times 2} \times m^{2 \times \frac{1}{2}} \times n^{3 \times \frac{1}{2}} \\ &= m^{\frac{3}{2} \times 2} \times n^{1 \times 2} \times m^1 \times n^{\frac{3}{2}} \\ &= m^{\frac{3}{2} + 1} \times n^{1 + \frac{3}{2}} \\ &= m^{\frac{5}{2}} \times n^{\frac{5}{2}} = (mn)^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

۳. در هر یک از تساوی های زیر، مقدار x را مشخص کنید.
 در این مثال ها باید کای کنیم در طرفین تساوی بایه ها و تداین ها مساوی شوند

$$8^x \times 9^5 = 72^5$$

$$8^x = \frac{72^5}{9^5}$$

طرف معلوم

نویسید مجهول

$$8^x = 8^5$$

تداین ها و بایه ها تقسیم

$$\boxed{x=5}$$

$$(0.36)^x \times (0.36)^2 \times (0.36)^{-4} = (0.36)^7$$

بایه ها و تداین ها جمع

$$(0.36)^{-2+x} = (0.36)^7$$

$$-2 + x = 7$$

$$x = 7 + 2$$

$$\boxed{x=9}$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حروف (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

در توانی از صفر به صورت بیاید و برعکس، توان قرینه می شود. توان ها دهم ضرب.



$$(2^x)^6 = \frac{1}{3^2}$$

$$2^{6x} = 3^{-2}$$

$$6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3^1} = 5^1$$

$$\Rightarrow \frac{x^5 \times 15^3}{3^8} = 5^1$$

باید همدای - توان ها جمع

طرفین و طرفین

$$x^5 \times 15^3 = 3^8 \times 5^1$$

$$x^5 \times 15^3 = 15^8$$

$$x = \frac{15^8}{15^3} = 15^5$$

$$x = 15^5 \Rightarrow x = 15$$

۴. همان طور که می دانید، حجم کره ای به شعاع r با استفاده از فرمول $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (حجم کره) به دست می آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می توان با استفاده از مفهوم ریشه گیری و توان های گویا، شعاع کره ای به حجم V را از فرمول زیر

به دست آورد.

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \xrightarrow{\div \pi} \frac{V}{\pi} = \frac{4}{3}r^3$$

$$\times \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{4} \times \frac{V}{\pi} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} r^3$$

$$\frac{3V}{4\pi} = r^3$$

$$\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (r^3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = r$$



برای حذف توان طرفین را به توان معکوس آن توان می رسانیم

ب) شعاع این تانکر کره ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.

$$\frac{32\pi}{3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \frac{32\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$8 = r^3$$

ساده می شود

$$r^3 = 8$$

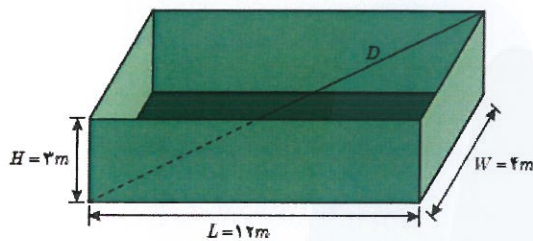
$$\boxed{r=2}$$

در سادگی دیگر، صورت با صورت وضوح یا سنج



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۵. اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ طول L ، عرض W و ارتفاع جعبه H به دست می آید.



الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.



$$D = \sqrt{\text{طول}^2 + \text{عرض}^2 + \text{ارتفاع}^2} = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$$

ب) اگر اندازه $L=W=H=1\text{m}$ باشد، اندازه D را به دست آورید.

$$D = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

ب) همین کار را برای جمعیت گربه ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

زمان	جمعیت گربه ها
بعد از ۱ سال	$f(1) = 160701$
بعد از ۲ سال	$f(2) = 1635914$
بعد از ۳ سال	$f(3) = 1665378$
بعد از ۴ سال	$f(4) = 1695372$
بعد از ۵ سال	$f(5) = 1725818$
بعد از ۶ سال	$f(6) = 1756914$
بعد از ۷ سال	$f(7) = 1788517$
بعد از ۸ سال	$f(8) = 1820716$
بعد از ۹ سال	$f(9) = 1853574$
بعد از ۱۰ سال	$f(10) = 18869$

تابع جمعیت گربه ها بعد از t سال

$$f(t) = 15786(1 + 0.18)^t$$

$$f(t) = 15786(1.18)^t$$

پ) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه ها بیشتر از موش ها می شود؟ طبق جدول بعد از ۱۰ سال

ت) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش ها و گربه ها با یکدیگر برابر می شود؟

در زمان $t = 9, 3$

$$23576(1.975)^{9,3} = 15786(1.18)^{9,3} = 18630$$

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه ها و موش ها چه اتفاقی می افتد؟

جمعیت موش ها کاهش یافته و به عدد صفر نزدیک می شود اما هیچگاه صفر نمی شود و جمعیت گربه ها دائماً در حال افزایش است.



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱. فکر می کنید در مرحله ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت؟
برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۱

تعداد مراحل بازی	میزان امتیازهای کسب شده
۰	$3^0 = 1$
۱	$3^1 = 3$
۲	$3^2 = 9$
۳	$3^3 = 27$
۴	$? = 81$
$? = 5$	243
۶	$? = 729$
۷	$? = 2187$
۸	$? = 6561$
۹	$? = 19683$
۱۰	$? = 59049$



$$3^8 = 6561 = 3^4 \Rightarrow 3^4 = 81$$

$n=8$ یعنی در مرحله هشتم.

۲. در کدام مرحله، میزان امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟

۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، رابطه ای به دست آورید.

۴. با توجه به رابطه به دست آمده در قسمت قبل، آیا می توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله ۱۰۰ام را به دست آورید؟



$$3^{10} = \text{امتیازات کسب شده در مرحله ۱۰ام}$$

$$3^{20} = \text{امتیازات کسب شده در مرحله بیستم}$$

$$3^n = \text{میزان امتیازات کسب شده در مرحله nام}$$



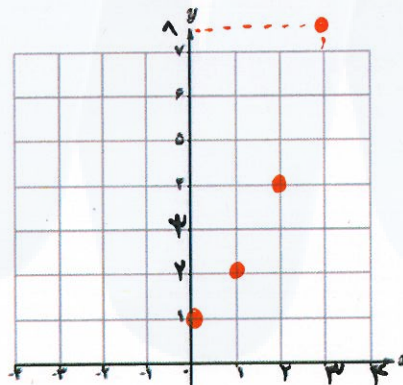
چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

فعالیت

در بخش دنباله ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به دست آوردیم که به عنوان تابع از ضابطه $f(n) = 2^n$ پیروی می کرد. دوباره به این فعالیت برمی گردیم:

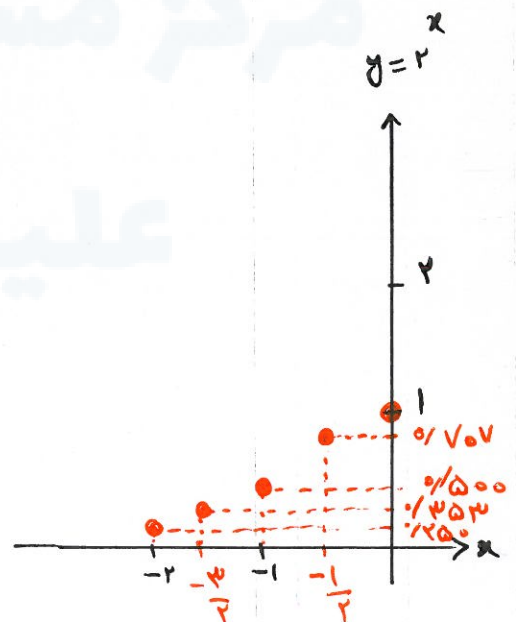
۱. مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.



$$\begin{aligned} n=0 &\Rightarrow f(0) = 2^0 = 1 \\ n=1 &\Rightarrow f(1) = 2^1 = 2 \\ n=2 &\Rightarrow f(2) = 2^2 = 4 \\ n=3 &\Rightarrow f(3) = 2^3 = 8 \end{aligned}$$

۲. جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

x	2^x
۰	۱
$-\frac{1}{2}$	۰/۷۰۷
-۱	۰/۵۰۰
$-\frac{3}{2}$	۰/۳۵۳
-۲	۰/۲۵۰

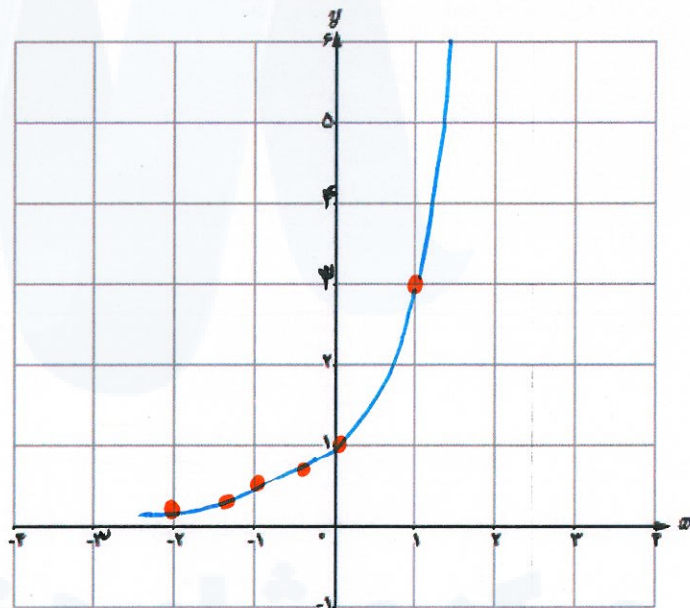




چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حروفش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

فعالیت

الف) در فعالیت ابتدای این درس با تابع نمایی $y = 3^x$ آشنا شدید. نقاط y حاصل شده در جدول صفحه بعد را روی محورهای مختصات به دست آورید. سپس آنها را به هم وصل کنید.



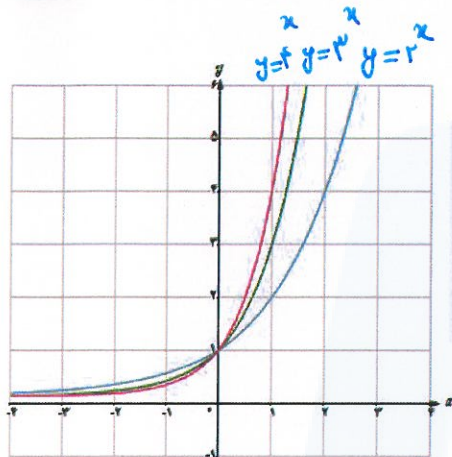
ب) با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$ ، مقدار تقریبی عدد $3^{\frac{5}{2}}$ را به دست آورید.

$$3^{\frac{5}{2}} \approx 15.6$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به حرر و ش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.



ب) نمودار توابع $y=2^x$ ، $y=3^x$ و $y=4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت ها و شباهت های بین این سه تابع را بیان کنید.

$$x > 0 \Rightarrow 4^x > 3^x > 2^x$$

$$x = 0 \Rightarrow 2^0 = 3^0 = 4^0 = 1 \rightarrow \text{(ارده)}$$

← عرض از صبراه

$$x < 0 \Rightarrow 4^x < 3^x < 2^x$$

توضیح: هر چه عدد پایه بزرگ تر شود لبه بالایی نمودار به محور y ها نزدیک تر می شود (x > 0)

و لبه پایینی نمودار (x < 0) به محور x ها نزدیک تر می شود.

علیرضا افشار



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

فعالیت

یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت اولیه است. در جدول ۳ چگونگی تغییر مساحت ناحیه هایی که بر اثر تا زدن های متوالی ایجاد می شوند، نشان داده شده است.

جدول ۳

تعداد تا زدن ها	میزان مساحت هر یک از ناحیه ها
۰	۱
۱	$\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{4}$
۳	$\frac{1}{8}$
۴	$\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}$
۵ = ؟	$\frac{1}{32}$
...	...
۸	$\frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{2^8}$
۱۰ = ؟	$\frac{1}{1024}$



با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می توانید پیشنهاد دهید؟

در تعداد تا زدن ها n فرض کنیم، آن گاه:

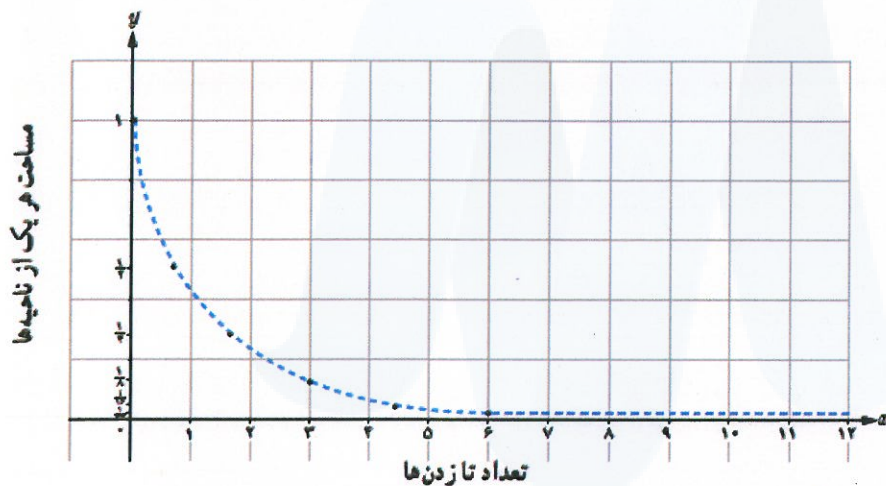
$$\text{میزان مساحت هر یک از ناحیه ها} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

استاد امیر شریفی مقدم - 09133979092



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

در نمودار زیر، رابطه تعداد تازدن ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه ها نمایش داده شده است.



نقطه تقاطع منحنی با محور y ها چیست؟

در این نقطه تعداد تازدن ها برابر صفر ($x=0$) است و مساحت ناحیه برابر یک ($y=1$) است.

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



چاپ، کثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



فعالیت

۱. تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب، جدول زیر را کامل کنید.

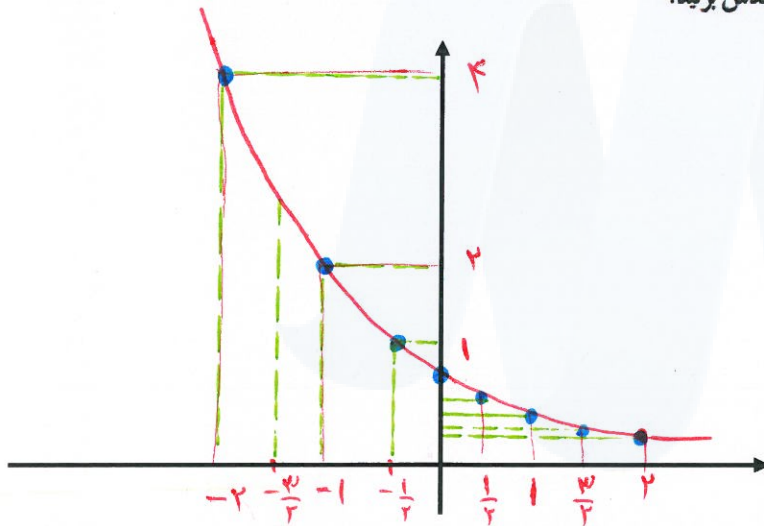
x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	y	محاسبه y با ماشین حساب تا ۳ رقم اعشار
-۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	۴	۴
$-\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{2} = \sqrt[2]{2^3}$	۲٫۸۲۸
-۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	۲	۲
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} = \sqrt{2}$	۱٫۴۱۴
۰	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	۱	۱
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	۰٫۷۰۷
۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{1}{2}$	۰٫۵
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt[2]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{1}{8}}$	۰٫۳۵۳
۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}$	۰٫۲۵



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

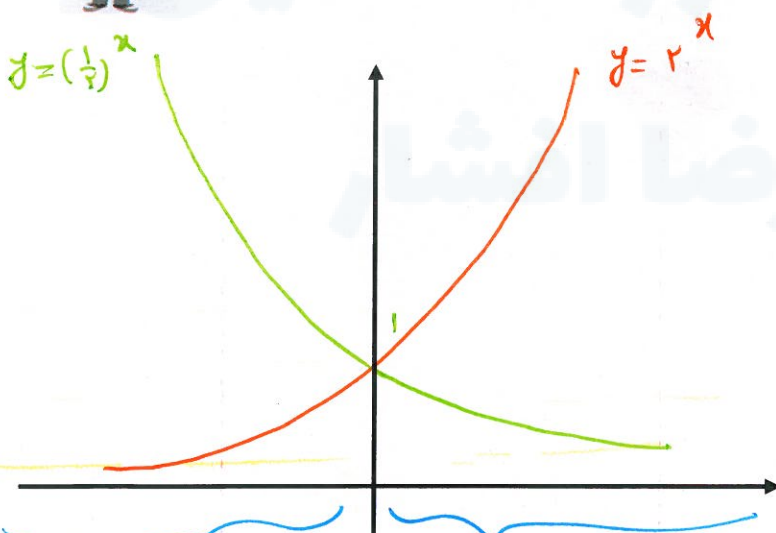
۲. نقاط به دست آمده در جدول بالا را روی صفحه مختصات به دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می توانید به کمک نمودار،

مقدار تابع $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟



۳. نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را با نمودار تابع $y = 2^x$ مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین

این دو نمودار ملاحظه می کنید؟



$y = 2^x \rightarrow$ صعود - افزایش

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow$ نزول - کاهش

$$x < 0 \Rightarrow 2^x < \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

نمودار 2^x پایین نمودار $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ است.

$$x > 0 \Rightarrow 2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

نمودار 2^x بالای نمودار $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ است

$$x = 0 \Rightarrow 2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

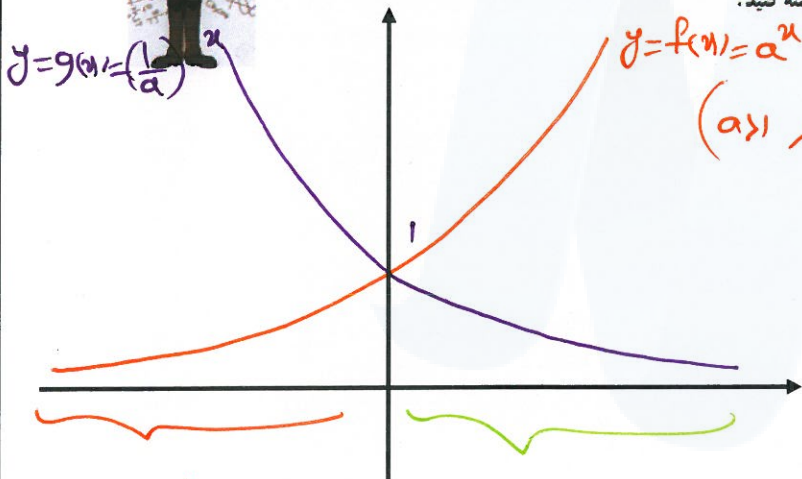


چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به هر روش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

کار در کلاس



تابع نمایشی $f(x) = a^x$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد a ($a > 1$)، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x) = (\frac{1}{a})^x$ را در همان صفحه مختصات رسم کنید. دو نمودار حاصل را با هم مقایسه کنید.



$$(a > 1) \quad f(x) = a^x \xrightarrow{a=3} f(x) = 3^x$$

صعودی یا افزایشی

$$g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x \xrightarrow{a=3} g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

نزولی یا کاهشی

$$x < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$$

نمودار f یا g صعودی است

نمودار f یا g نزولی است

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = g(0) = 1$$

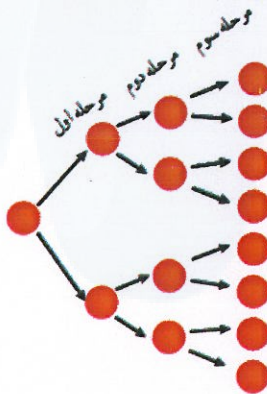
مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار



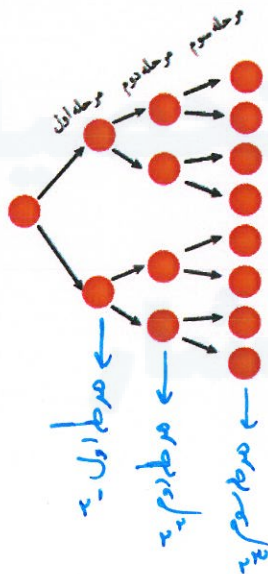
چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

تمرین

۱. در پژوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول های بنیادی جنین انسان تولید می شود. این سلول ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می توانند تمام انواع سلول های بدن نظیر عصب و ماهیچه قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند :
الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟



اگر بعد از n مرحله تعداد سلول ها برابر ۲۰۴۸

شود، این گام با توجه به الگوی مقابل داریم :

$$2^n = 2048 \Rightarrow n = 11$$

پ) آیا می توانید الگویی برای تکثیر سلول ها مشخص کنید؟
ب) در مرحله هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

$$2^8 = 256$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به جرم فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۲. یک نمونه واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

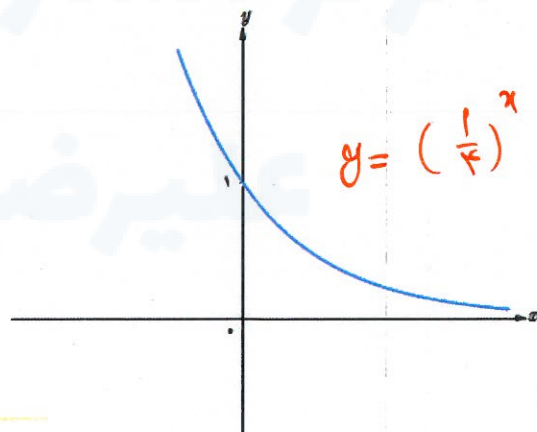
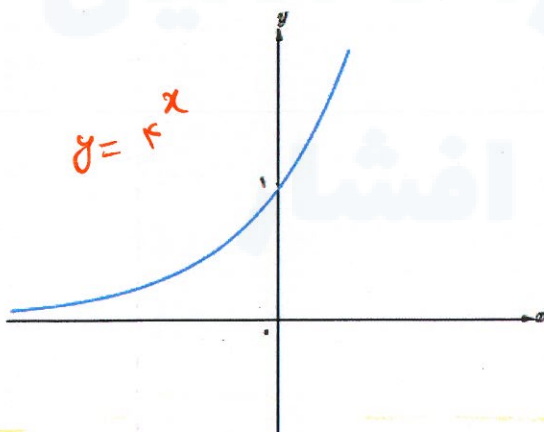


تقسیم روایتی بالندی ها به حدیث این الله است.



۳. در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y = 4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.

فردی - ماهی
صمیمی - آخر (نمی)

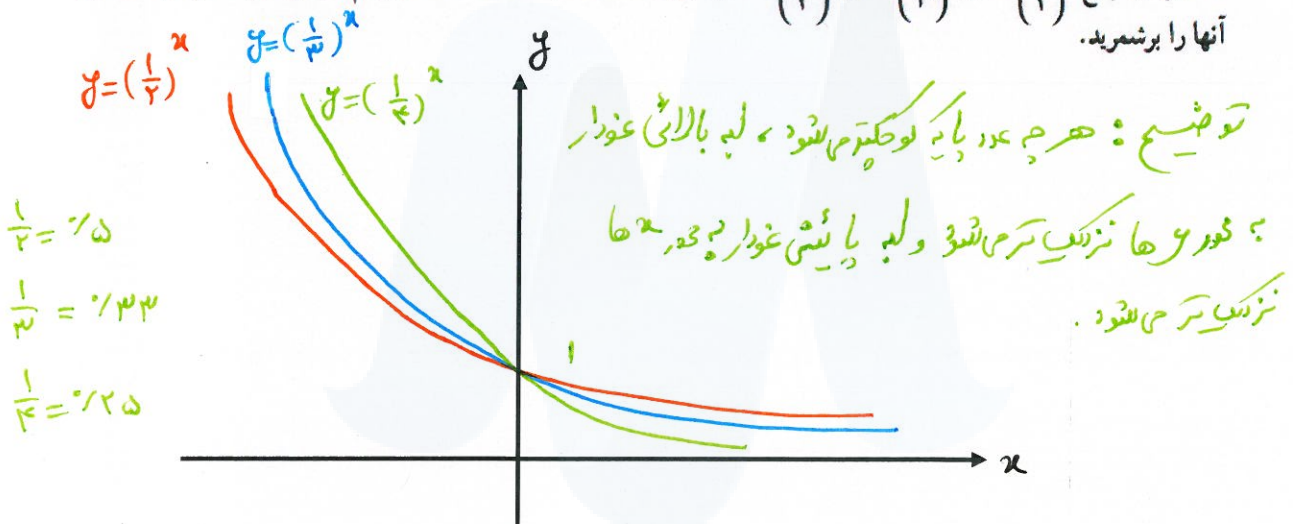




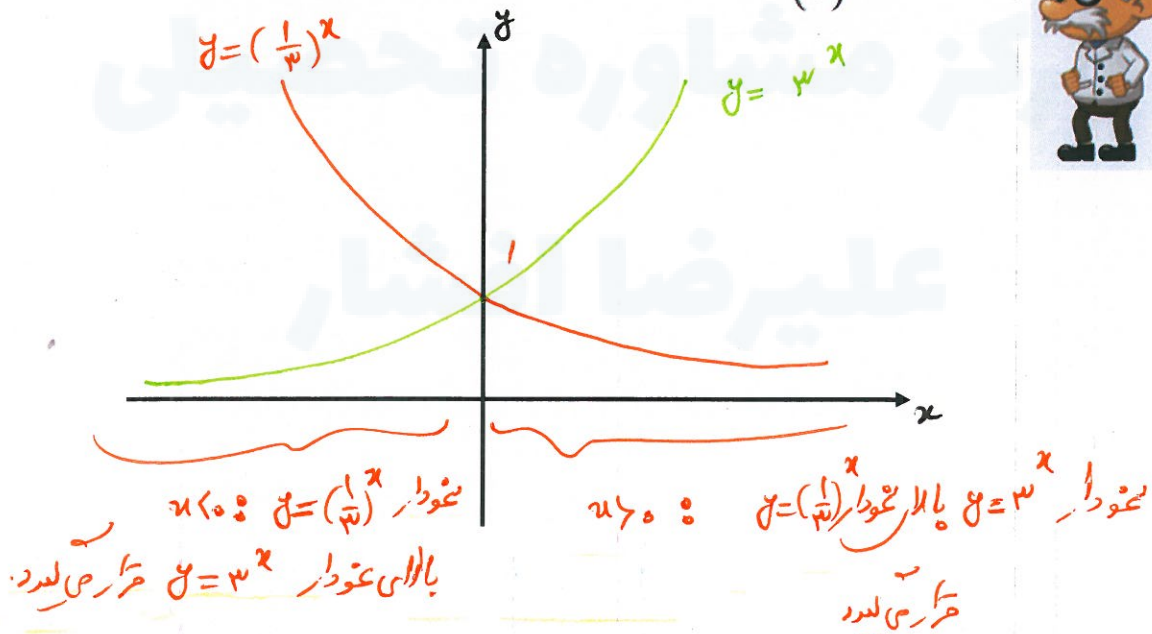
چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند

۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و تفاوت ها و شباهت های آنها را برشمرید.



۵. نمودار توابع $y = 3^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.



$$x = 0 : 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$$

در نقطه $x = 0$ از یک نقطه عبور کرده و با هم می دهند



چاپ، کثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار

می گیرند.

فعالیت



احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه گذاری کند. او با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ به فرموده رهبر معظم انقلاب اسلامی سال «حمایت از کالای ایرانی» نام گذاری شده است، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولید کننده کالای ایرانی سرمایه گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در پاسخ به اعتماد سرمایه گذاران به فعالیت های تولیدی اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد.

جدول زیر را در نظر بگیرید:

جدول ۵



سن احسان	مبلغ سرمایه گذاری شده در شرکت تولیدی
۱۷	۱۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان
۱۸	۱۱,۴۰۰,۰۰۰ تومان
۱۹	۱۲,۹۹۶,۰۰۰ تومان
⋮	⋮
۲۳	۲۱,۹۴۹,۷۲۶ / ۲۳۹۳۶ تومان

$$\text{مبلغ سرمایه گذاری در سن ۱۸ سالگی} = ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ + \left(۱۰,۰۰۰,۰۰۰ \times \frac{۱۴}{۱۰۰} \right)$$

$$= ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ + ۱,۴۰۰,۰۰۰ = ۱۱,۴۰۰,۰۰۰$$

$$\text{مبلغ سرمایه گذاری در سن ۱۹ سالگی} = ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ + \left(۱۱,۴۰۰,۰۰۰ \times \frac{۱۴}{۱۰۰} \right)$$

$$= ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ + ۱,۵۹۶,۰۰۰ = ۱۲,۹۹۶,۰۰۰$$

$$\text{مبلغ سرمایه گذاری در سن ۲۳ سالگی} = ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (۱,۱۴)^۶ = ۲۱,۹۴۹,۷۲۶ / ۲۳۹۳۶$$

$$f(t) = c(1+r)^t \quad \begin{matrix} \text{از ۱۸ سالگی تا ۲۳ سالگی} \\ \text{سن } t = 6 \end{matrix}$$



چاپ، تکثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و تخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



کار در کلاس

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کره زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره زمین چه میزان خواهد شد؟ با توجه به محاسبات بالا، آیا می توانید وضع جمعیت کره زمین را در هر دوره زمانی ۳۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

$$f(t) = 5.2 (1 + 0.02)^t = 5.2 \times (1.02)^t$$

جمعیت کره زمین بعد از ۳۰ سال (بر حسب میلیارد) = $5.2 \times (1.02)^{30} = 9.419$

جمعیت کره زمین بعد از ۳۵ سال (بر حسب میلیارد) = $5.2 \times (1.02)^{35} = 10.349$

جمعیت کره زمین بعد از ۷۰ سال (بر حسب میلیارد) = $5.2 \times (1.02)^{70} = 37.797$

جمعیت کره زمین بعد از ۱۰۵ سال (بر حسب میلیارد) = $5.2 \times (1.02)^{105} = 41.593$

مجموعه آگفت که
جمعیت کره زمین بعد از
هر دوره ۳۵ ساله تقریباً
دو برابر می شود
یعنی $(1.02)^{35} \approx 2$



تمرین

۱. در یکی از فعالیت های بخش اول این درس، به یک شرکت تولید کننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهام دار اضافه خواهد شد؟

$$f(t) = 40 (1 + 0.2)^t$$

$$f(t) = 40,000,000 (1 + 0.2)^t$$

$$f(10) = 40,000,000 (1.2)^{10} = 247,469,456 / 199$$

$$247,469,456 / 199 - 40,000,000 = 207,469,456 / 199$$

مبلغی اضافه شده به سرمایه
تخمین بعد از ۱۰ سال



چاپ، کثیر و انتشار این جزوه به فروش (الکترونیکی و...) برای تمام اشخاص حقوقی و خصوصی ممنوع است (حتی با ذکر منبع و نویسنده) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

$$f(t) = c(1+r)^t$$

$$f(t) = 1,000,000(1+0.06)^t = 1,000,000(1.06)^t$$



$$\text{جمعیت شهر پس از ۱۰ سال} = f(10) = 1,000,000(1.06)^{10} = 1,790,847.69 \approx 1,790,848$$

۳. جزیره ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه ها با موش ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید. **جمعیت موش ها** **زمان**

۱ سال بعد	$f(1) = 23986.6$
۲ سال بعد	$f(2) = 22411.9$
۳ سال بعد	$f(3) = 21851.6$
۴ سال بعد	$f(4) = 21305.3$
۵ سال بعد	$f(5) = 20772.7$
۶ سال بعد	$f(6) = 20253.3$
۷ سال بعد	$f(7) = 19747$
۸ سال بعد	$f(8) = 19253.3$
۹ سال بعد	$f(9) = 18772$
۱۰ سال بعد	$f(10) = 18302.7$

$$f(t) = 23576(1-0.025)^t \quad \text{باج جمعیت موش ها}$$

$$f(t) = 23576(1.0175)^t \quad \text{پس از t سال}$$