فصل اول: آمار و احتمال

درس اول: شمارش

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، به طوری که این دو عمل را نتوانیم با هم انجام دهیم، در این صورت به m+n طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

اصل ضرب

اگر عملی در دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این عمل به n طریق انجام‌پذیر باشد، در کل آن عمل به $m\times n$ طریق انجام‌پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

نماد فاکتوریل

برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگتر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچکتر از خودش از نماد فاکتوریل (!) استفاده می‌کنیم.

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1$$

قرارداد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت ۱=!۰ و ۱=!۱ تعریف می‌کنیم.

عمل فاکتوریل را می‌توانیم هر جایی قطع کنیم، به شرط آنکه در جلوی جمله آخر جملات فاکتوریل را قرار دهیم.

$$\frac{7!}{5!}=\frac{7\times 6\times \cancel{5!}}{\cancel{5!}}=7\times 6=42 \quad , \quad 15!=15\times 14\times 13\times 12!$$

جایگشت

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با !n.

$$\boxed{n}\times\boxed{n-1}\times\boxed{n-2}\times\ldots\times\boxed{2}\times\boxed{1}=n!$$

اگر در محاسبه جایگشت اشیاء بخواهیم چند شیء خاص کنار هم باشند، آنها را داخل یک مجموعه قرار داده و یک شیء در نظر می‌گیریم، سپس جایگشت شیء حاصل را با اشیای دیگر محاسبه می‌کنیم.

روش متمم

اگر در مسأله‌ای از فعل منفی استفاده شود، مثلاً خواسته شود که ۲ نفر خاص کنار هم **نباشند**، در این صورت بهتر است تعداد جایگشت‌هایی که آن ۲ نفر کنار هم باشند را محاسبه کنیم و جوابش را از تعداد کل جایگشت‌ها کم کنیم.

ترتیب

تعداد جایگشت‌های r شیء که ترتیب قرار گرفتن آنها در کنار هم مهم باشد (ترتیب‌های مختلف با هم فرق داشته باشند) را ترتیب r از n می‌گویند و با نماد $p(n,r)$ یا $(n)_r$ نشان می‌دهند که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب

تعداد آرایش‌های مختلف r شیء از n شیء که ترتیب قرار گرفتن آنها در کنار هم مهم نباشد (ترتیب‌های مختلف با هم فرقی نداشته باشند) را ترکیب r از n می‌گویند و با نماد $c(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ یا c_n^r نشان می‌دهند که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$c(n,r)=\frac{n!}{(n,r)!\times r!}$$

خواص مهم ترکیب

$$1)\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{7}{0}=\binom{7}{7}=1$$

$$2)\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{5}{1}=\binom{5}{7}=5$$

$$3)\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{10}{6}=\binom{10}{10-6}=\binom{10}{4}$$

$$4)\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1} \text{ قاعده پاسکال} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{10}{7}+\binom{10}{8}=\binom{11}{8}$$

$$5)p(n,r)=c(c,r)\times r! \xrightarrow{\text{مثال}} p(6,4)=c(6,4)\times 4!$$

نمودار درختی

یکی از راه‌های نمایش فضای حاصل از انجام چند آزمایش که که به دفعات مختلف پشت سر هم انجام شده‌اند، رسم نمودار درختی است. برای رسم این نمودار ابتدا تمام نتایج ممکن آزمایش اول را به صورت شاخه‌های یک درخت رسم می‌کنیم. سپس تمام نتایج ممکن آزمایش‌های بعدی را با توجه به فرض مسأله در انتهای شاخه‌های رسم شده به عنوان شاخه‌های جدید رسم می‌کنیم. در این صورت تعداد شاخه‌های انتهایی این نمودار درختی همان تعداد اعضای فضای نمونه‌ای است.

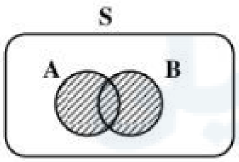
پیشامد تصادفی

هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه S را یک پیشامد می‌گویند.
از آنجا که $\varnothing \subseteq S$ پس $\varnothing$ یک پیشامد روی S است و آن را **پیشامد غیرممکن (نشدنی)** و $S \subseteq S$ را **پیشامد حتمی** می‌نامیم.

اعمال روی پیشامدها

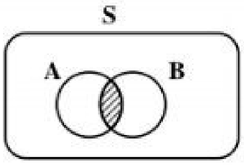
فضای نمونه‌ای و پیشامدهای یک پدیده تصادفی از جنس مجموعه هستند، بنابراین می‌توانیم اعمال اجتماع $(\cup)$، اشتراک $(\cap)$، تفاضل $(-)$ و متمم $(')$ را روی آنها تعریف کنیم.

الف) اجتماع دو پیشامد:



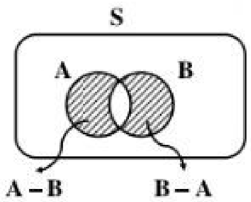
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cup B$، در صورتی اتفاق می‌افتد که **A یا B یا هر دو اتفاق بیفتند**. (حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهند.)

ب) اشتراک دو پیشامد:



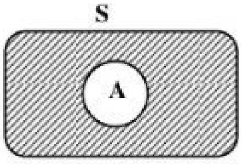
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cap B$، در صورتی اتفاق می‌افتد که **A و B یا هر دو اتفاق بیفتند.**

پ) تفاضل دو پیشامد:



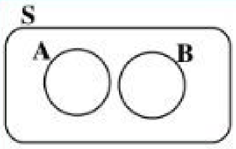
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A - B$، هنگامی اتفاق می‌افتد که **A اتفاق بیفتد اما B اتفاق نیفتند.** (فقط پیشامد A رخ دهند.)

ت) متمم دو پیشامد:



اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه متمم پیشامد A را با A' نشان می‌دهیم. پیشامد A' در صورتی اتفاق می‌افتد که **A اتفاق نیفتد.**

پیشامدهای ناسازگار



دو پیشامد A و B از فضای نمونه S را ناسازگار گوییم **هر گاه اشتراک آنها تهی باشد**، یعنی (پیشامدهای ناسازگار هرگز با هم رخ نمی‌دهند.)

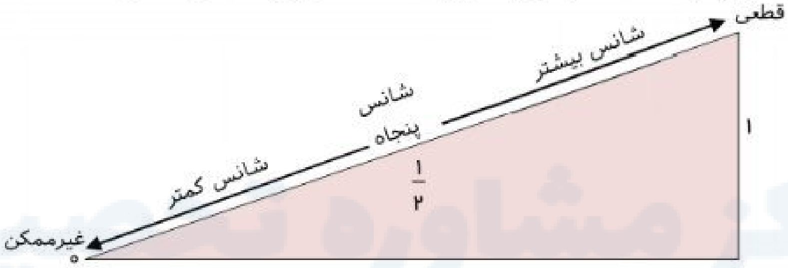
احتمال یک پیشامد

اگر $S \neq \varnothing$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A \subseteq S$ یک پیشامد باشد، آنگاه احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نشان می‌دهیم و برای محاسبه $P(A)$ کافی است تعداد اعضای A یعنی $n(A)$ را بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یعنی $n(S)$ تقسیم می‌کنیم.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

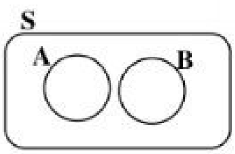
قوانین احتمال

الف) $P(A)$ عددی حقیقی است که همیشه $0 \le P(A) \le 1$ می‌باشد و هر چه مقدار $P(A)$ به عدد ۱ نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد بیشتر و هر چه به عدد صفر نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد آن کمتر است.



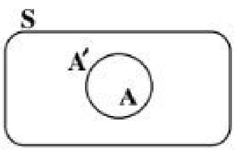
$$0 \le P(A) \le 1 \quad , \quad P(\varnothing)=0 \quad , \quad P(S)=1$$

ب) هر گاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه‌ای S باشند.



$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

پ) اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه‌ای S باشد، در این صورت احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با نمایش $P(A')$ می‌دهیم و داریم:



$$P(A')=1-P(A) \text{ یا } P(A)+P(A')=1$$

در این حالت A و A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم.

درس دوم: چرخه آمار در حل مسائل

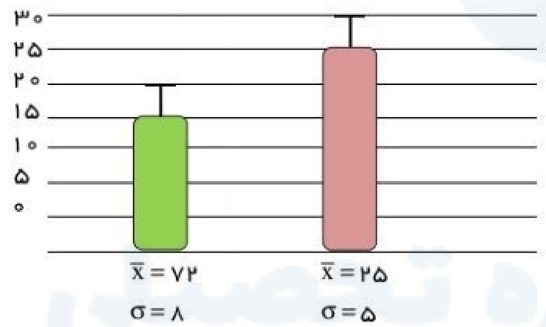
چرخه آمار در حل مسائل

۱. حل مسأله‌های مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های:

۱) بیان مسأله۲) طرح و برنامه‌ریزی ۳) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها ۴) تحلیل داده‌ها ۵) بحث و نتیجه‌گیری

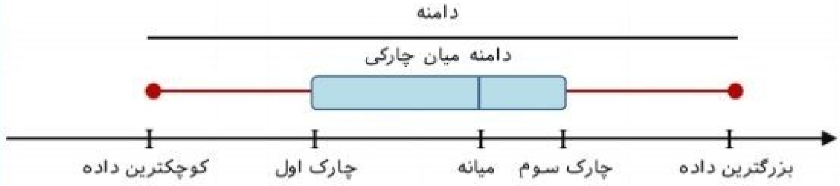
۲. تعداد اعضای جامعه را **اندازه جامعه** و تعداد اعضای نمونه را **اندازه نمونه** می‌نامیم و هر چه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از حضور تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگتری نیاز داریم.

۳. در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف آنها هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی (ارتفاع) مستطیل آن نشان دهنده‌ی میانگین و میله خطای آن به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.



۴. نمودار جعبه‌ای:

روشی سودمند برای نمایش دامنه‌ها و چارک‌های داده‌ها است و بر اساس پنج مقدار کوچکترین داده- چارک اول- میانه- چارک سوم- بزرگترین داده، رسم می‌شود.
نمودار جعبه‌ای به سوالاتی از قبیل آیا داده‌ها به هم نزدیک هستند؟ آیا داده‌ها بیشتر در اطراف میانگین متمرکزند یا بیشتر اطراف کمترین داده یا بیشترین داده متمرکزند، پاسخ می‌دهد و در هر قسمت ۲۵ درصد داده‌ها قرار می‌گیرند. در یک نمودار جعبه‌ای بیش از یک مجموعه داده را می‌توان نشان داد، پس این نمودار برای مقایسه مناسب است.



۵. برای توصیف داده‌های کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد. مثلاً افزایش ۲۰۰ درصدی پذیرفته شدگان کنکور و ۲۰ درصدی دو دبیرستان بدون اعلام تعداد قبولی‌های این دو مدرسه گمراه کننده است.

فصل دوم: الگوهای خطی

درس اول: مدل‌سازی و دنباله

مدل‌سازی

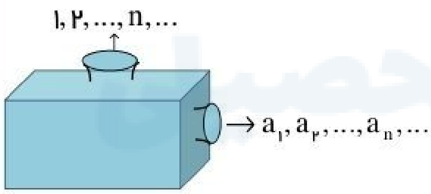
۱. بیان مسائلی از دنیای واقعی به زبان ریاضی را مدل‌سازی می‌گوییم، هر چقدر مفاهیم ریاضی به کار برده شده ساده‌تر و ابتدایی‌تر و نتیجه کار به پدیده موردنظر نزدیک‌تر باشد، مدل‌سازی باارزش‌تر است.)

مثال: محاسبه قبض برق یک خانه، میزان دارو در بدن بیمار، مدل ریاضی چراغ راهنمایی و رانندگی و ...

۲. در تعیین دامنه توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسأله در مرحله، یا گام اول، دوم و ... و nاُم است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم.

۳. اگر a تابعی از N به R باشد اعضای برد این تابع می‌تواند دنباله‌ای از اعداد را می‌تواند تولید کند که به ترتیب جمله اول آن را a(۱) و جمله دوم a(۲) و .... جمله n اُم را a(n) در نظر می‌گیریم.

معمولاً جملات دنباله را به جای a(n) با a_n نشان می‌دهند که آن را جمله n اُم، **جمله عمومی دنباله** یا **ضابطه دنباله** می‌نامند.



۴. **رابطه بازگشتی:** اگر در دنباله‌ای بین هر جمله و جمله یا جملات قبل از آن رابطه‌ای برقرار کنیم و جملات دنباله را به کمک آن رابطه بیان نماییم، رابطه حاصل را رابطه بازگشتی می‌گوییم. در رابطه بازگشتی باید جمله اول و یا گاهی حتی دو جمله اول (یا بیشتر) معلوم باشد.

درس دوم: دنباله حسابی

دنباله حسابی

۱. دنباله حسابی (عددی) دنباله‌ای است که در آن هر جمله با اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله قبلی به دست می‌آید.

۲. در دنباله حسابی (اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی مقدار ثابتی است. آن مقدار ثابت را «**اختلاف مشترک**» می‌نامیم و با d نشان می‌دهیم.

$$d = a_n - a_{n-1}$$

این رابطه بین دو جمله متوالی را رابطه بازگشتی دنباله حسابی می‌نامیم.

۳. اگر دو جمله دلخواه از یک دنباله حسابی را داشته باشیم، اختلاف مشترک برابر است با: $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

۴. اگر d مثبت باشد، دنباله حسابی افزایشی و اگر d منفی باشد، دنباله کاهشی و اگر d صفر باشد، دنباله ثابت است.

۵. نکته: شرط اینکه جمله‌های $a_1, a_2, a_3, \dots$ تشکیل دنباله حسابی دهند، این است که اختلاف هر دو جمله متوالی برابر باشد، یعنی: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots$

۶. اگر a، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، عدد b را واسطه (میانگین) حسابی دو عدد a و c می‌نامیم و داریم: $b = \frac{a+c}{2}$ یا $2b = a + c$

۷. اگر بین دو عدد دلخواه a و b بخواهیم n واسطه حسابی درج کنیم، اختلاف مشترک برابر است با:

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

۸. اگر a_1 جمله اول دنباله حسابی و d اختلاف مشترک دنباله باشد، جمله‌های دنباله به صورت زیر است:

$$a_1\ ,\ a_1 + d\ ,\ a_2 + d\ , \dots$$

و به همین صورت جمله n اُم یا جمله عمومی دنباله برابر است با: $a_n = a_1 + (n-1)d$

۹. اگر x جمله دلخواهی از دنباله حسابی و d اختلاف مشترک آنها باشد، داریم:

$$\dots, x - 2d, x - d, \overset{+d}{\underset{-d}{x, x}} + d, x + 2d, \dots$$

۱۰. اگر a_m جمله دلخواه m اُم و d اختلاف مشترک دنباله حسابی باشد، داریم: $a_n = a_m + (n - m)d$

۱۱. معادله هر تابع خطی، جمله عمومی یک دنباله حسابی است که در آن شیب خط همان اختلاف مشترک است و بالعکس یعنی جمله عمومی هر دنباله حسابی، معادله یک خط است.

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

درس اول: دنباله هندسی

دنباله هندسی

۱. دنباله حسابی دنباله‌ای است که در آن به‌جز جمله اول هر جمله برابر با حاصل‌ضرب جمله قبلا از آن در یک عدد ثابت است.

۲. در هر دنباله هندسی حاصل تقسیم هر جمله به جمله قبل از آن، مقدار ثابتی است که آن را نسبت مشترک می‌نامیم و با r نشان می‌دهیم.

$$r = \frac{\text{جمله}}{\text{جمله قبلی}} \Rightarrow r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

این رابطه را ضابطه بازگشتی دنباله هندسی می‌نامیم.

۳. اگر دو جمله دلخواه از یک دنباله هندسی را داشته باشیم، نسبت مشترک دنباله برابر است با:

$$r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \quad (n > m)$$

۴. در یک دنباله هندسی:

- اگر $r > 1$ باشد، دنباله افزایشی است.
- اگر $0 < r < 1$ باشد، دنباله کاهشی است.
- اگر $r = 1$ باشد، دنباله ثابت است.
- اگر $r < 0$ باشد، دنباله نوسانی است.

۵. شرط اینکه جمله‌های $a_1, a_2, a_3, \ldots$ تشکیل دنباله هندسی دهند، این است که نسبت هر دو جمله متوالی برابر باشد، یعنی: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots$

۶. اگر a، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، عدد b را واسطه (میانگین) حسابی دو عدد a و c می‌نامیم و داریم: $b^2 = ac$ یا $b = \mp\sqrt{ac}$

۷. اگر a_1 جمله اول دنباله هندسی و r نسبت مشترک دنباله باشد، جمله‌های دنباله به صورت زیر است:

$$a_1, \ a_1 r, \ a_2 r, \ldots$$

و به همین صورت جمله n اُم یا جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

۹. اگر در دنباله هندسی $|r| < 1$ باشد، مجموع بی‌شمار جمله از این دنباله هندسی (حد مجموع) برابر است با:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

۱۰. دنباله‌ای که هم حسابی باشد و هم هندسی، دنباله ثابت است.

۱۱. هر تابع نمایی، جمله عمومی یک دنباله هندسی است که در آن پایه همان نسبت مشترک است و بالعکس، یعنی جمله عمومی هر دنباله هندسی، به صورت یک تابع نمایی است.

درس دوم: ریشه n ام و توان گویا

ریشه‌ی n ام و توان گویا

۱. برای عدد طبیعی n بزرگتر از ۱ اگر $b^n = a$ باشد، عدد a را توان n ام عدد b و عدد b را ریشه n ام عدد a می‌نامیم.

۲. هر عدد حقیقی a دارای یک ریشه فرد به صورت $\sqrt[n]{a}$ است.

۳. هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه زوج به صورت $\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$ است که قرینه یکدیگر هستند.

۴. اعداد منفی ریشه زوج ندارند.

۵. تمام ریشه‌های زوج و فرد عدد صفر برابر صفر است. $\sqrt[n]{0} = 0$

۶. ریشه‌های n اُم عدد a در واقع ریشه‌های معادله $x^n = |a|$ هستند.

۷. اگر n عددی فرد باشد: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

اگر n عددی زوج باشد: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ یعنی: $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{(n زوج)} \\ a & \text{(n فرد)} \end{cases}$

۸. رابطه $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ همواره برقرار نیست.

۹. اگر n عدد طبیعی بزرگتر از ۱ باشد، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی و مثبت a برابر است با: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

۱۰. اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، توان گویای عدد حقیقی و مثبت a برابر است با:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad , \quad x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

۱۱. برای اعداد حقیقی و مثبت a و اعداد طبیعی m داریم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

۱۲. اگر m و n اعداد صحیح باشند، روابط زیر برای اعداد حقیقی a و b برابر هستند.

۱) $a^m . a^n = a^{m+n}$

۲) $a^m . b^m = (a.b)^m$

۳) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$

۴) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b} = 1\right)^m \quad (b \neq 0)$

۵) $(a^m)^n = a^{mn}$

۶) $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

۷) $a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (a \neq 0)$

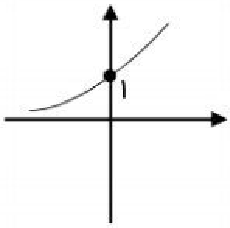
۱۳. در مورد توان‌های گویا، $(m, n \in Q)$ روابط بالا فقط برای اعداد حقیقی مثبت برقرار خواهد بود.

درس سوم: تابع نمایی

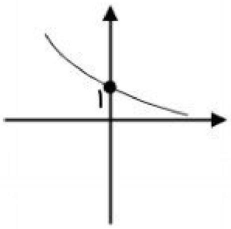
تابع نمایی

۱. برای هر عدد حقیقی مثبت و مخالف یک $(a \neq ۱)$ تابع $y = a^x$ را یک **تابع نمایی** می‌نامیم که در آن a پایه و x **توان** یا **نما** نامیده می‌شود. (متغیر تابع باید در توان باشد)

۲. اگر پایه بزرگتر از ۱ باشد $(a > ۱)$ نمودار تابع به صورت مقابل است که یک تابع افزایشی (صعودی) است.



۳. اگر پایه بین ۰ و ۱ باشد $(۰ < a < ۱)$ نمودار تابع به صورت مقابل است که یک تابع کاهشی (نزولی) است.



۴. در هر دو حالت تابع (نزولی یا صعودی) دامنه تابع نمایی برابر تمام اعداد حقیقی یعنی R و برد آن برابر اعداد حقیقی مثبت یعنی R^+ یا $\{x | x \in R \ , \ x > ۰\}$ است.

۵. عرض نقطه تقاطع منحنی تابع نمایی با محور y ها (عرض از مبدأ) همواره برابر ۱ است و تابع از نقطه $(۰,۱)$ می‌گذرد.

۶. اگر مقدار اولیه یک تابع برابر c و میزان تغییرات (رشد) آن در زمان t برابر r باشد، مقدار نهایی آن برابر است با: $f(t) = c(۱+r)^t$

۷. تابع $f(t) = c(۱+r)^t$ را معادله **زوال نمایی** می‌نامیم که در آن c مقدار اولیه، r میزان نزول بر حسب اعشار و t زمان است.