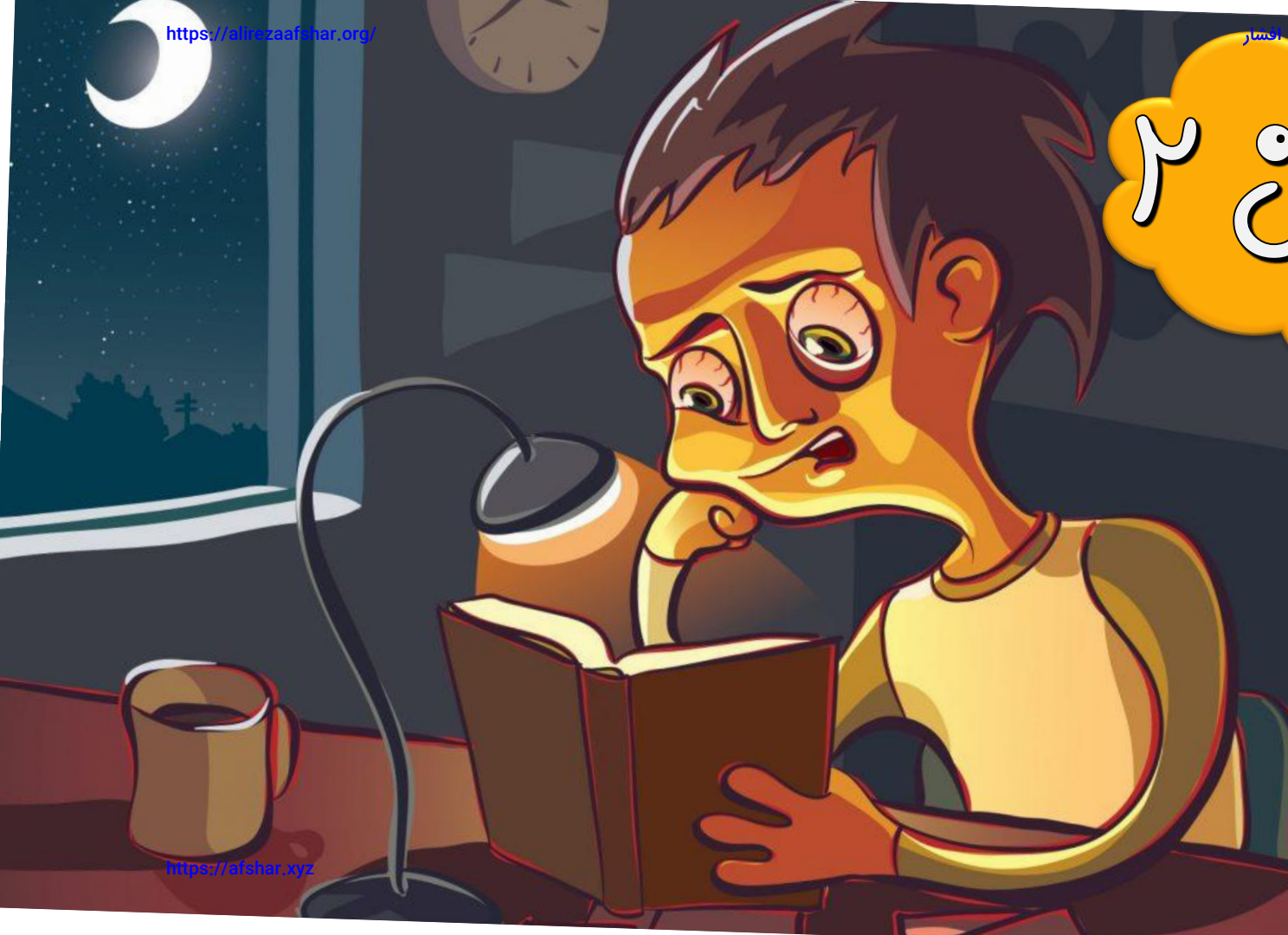


حسابان ۲





فصل ۱ :

تابع

(۷ نمره)

مثال) کار در کلاس الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را با دامنه $[0, 4]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

answer

ب) نمودار تابع $k(x) = f(x - 2)$ و $g(x) = f(x) + 3$ را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

ج) دامنه و برد توابع k و g ، a با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.

answer

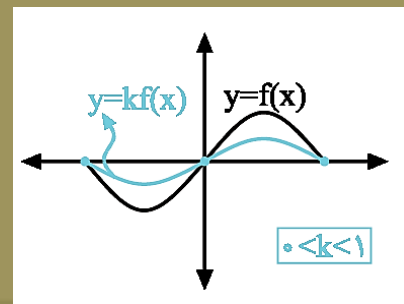
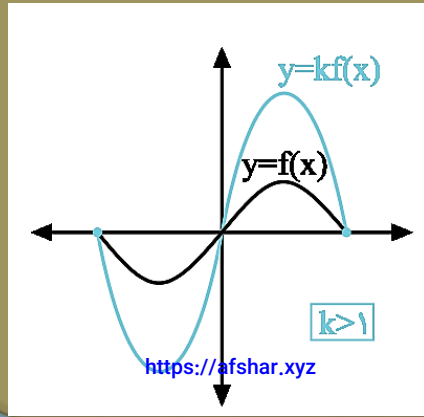
انبساط و انقباض عمودی

۱- رسم نمودار : $y = kf(x)$

اگر $0 < |k| < 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب k به طور عمودی منقبض می شود.

اگر $|k| > 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب k به طور عمودی منبسط می شود.

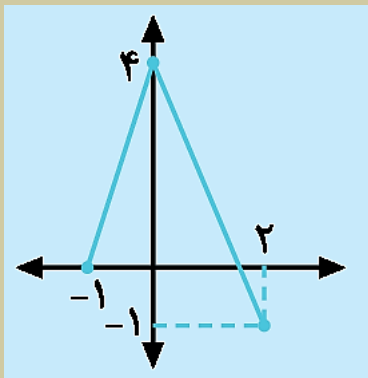
دامنه دو تابع $y = f(x)$ و $y = Af(x) + B$ یکی است، اما هر دو برد آن‌ها صرفاً یکی نیست.



نیم نگاهی به دو نمودار مقابل بیاندازید:

نکته: هواست باشه اگر k منفی بود، اول بدون توجه به علامت منفی، انقباض یا انبساط عمودی رو انجام بده، بعد نسبت به محور x ها قرینه کن!

مثال: در شکل زیر، نمودار $y = f(x)$ داده شده، به کمک آن نمودار $y = -\frac{1}{4}f(x) + 1$ رسم کنید.



answer

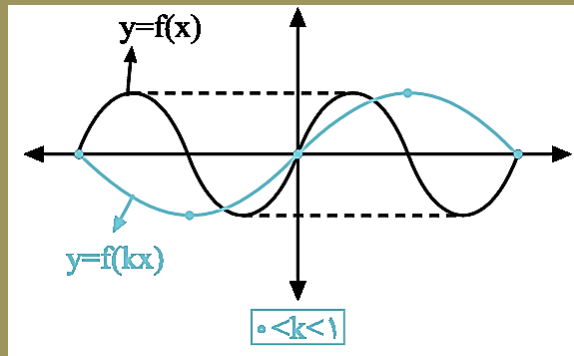
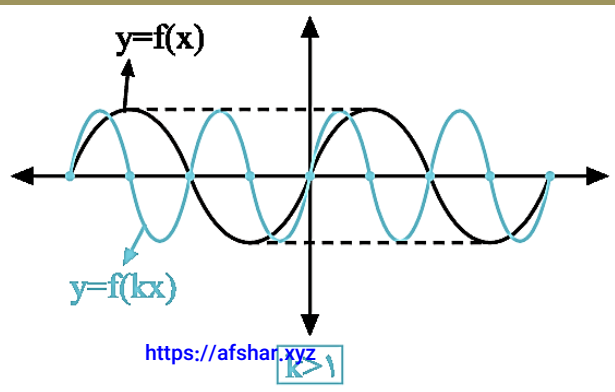
۲- رسم نمودار : $y = f(kx)$

اگر $0 < |k| < 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ به طور عمودی منبسط می شود.

اگر $|k| > 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ به طور عمودی منقبض می شود.

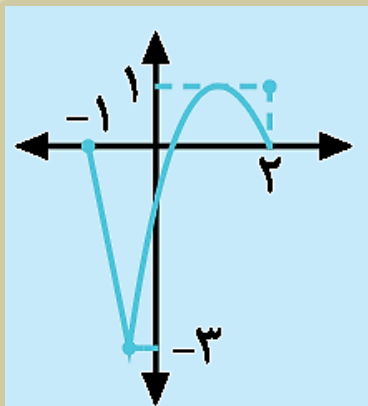
برد دو تابع $y = f(\square)$ و $y = f(\Delta)$ یکی است، اما دامنه آن‌ها صرفاً یکی نیست.

نیم نگاهی به دو نمودار زیر بیاندارید:



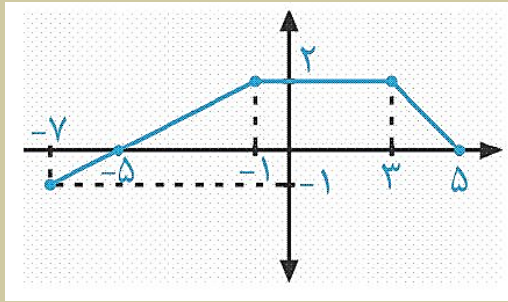
نکته: اگر $k < 0$ ، اول بدون توجه به علامتش انقباض یا انبساط افقی رو بزن، بعد نمودارو نسبت به محور لایها قرینه کن!

مثال: نمودار تابع g داده شده است. به کمک آن نمودار $g(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.



answer

مثال) (مثال کتاب درسی) اگر نمودار تابع $g(x) = f(2x + 1)$ زیر باشد، نمودار تابع f را به کمک آن رسم کنید.



answer

توابع چند جمله‌ای

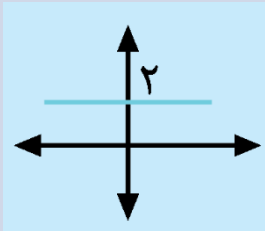
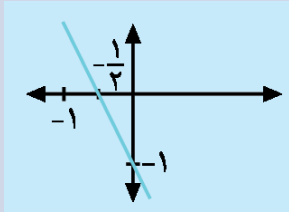
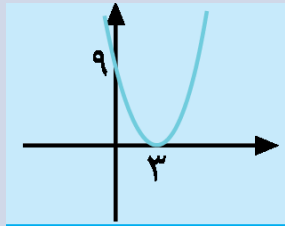
هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ که در آن ضرایب (a_i) از جنس اعداد حقیقی و

توان‌ها از جنس اعداد حسابی اند و $a_n \neq 0$

دامنه این توابع \mathbb{R} است و بزرگترین توان در آن‌ها، درجه‌شان را مشخص می‌کند. مثلاً $y = 4$ یک چندجمله‌ای از

درجه صفر و $y = \sqrt{2}x^3 - 1$ یک چند جمله از درجه ۳ است.

حالات خاص توابع چند جمله‌ای را در جدول زیر ببینید : (مثال کتاب)

درجه تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجه ۲
ضابطه کلی	$f(x) = b ; b \in \mathbb{R}$	$f(x) = ax + b ; a \neq 0$	$f(x) = ax^2 + bx + c ; a \neq 0$
مثال			

مثال (فعالیت) الف) نمودار تابع $f(x) = x^3$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

ب) به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$ ، نشان دهید f وارون‌پذیر است.

پ) نمودار f^{-1} و ضابطه آن را به دست آورید.

answer

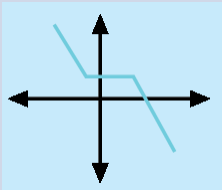
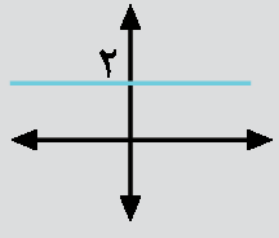
مثال (کار در کلاس کتاب) نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

answer

توابع صعودی و توابع نزولی

صفر تا صد داستان، انتظار تان را می‌کشد!

نوع تابع	تعریف فارسی	تعریف ریاضی	مثال
اکیداً صعودی	با افزایش x ، مقدار y افزایش می‌یابد.	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	
اکیداً نزولی	با افزایش x ، مقدار y کاهش می‌یابد.	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$	
صعودی	با افزایش x ، مقدار y زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$	

نوع تابع	تعریف فارسی	تعریف ریاضی	مثال
نزولی	با افزایش x ، مقدار y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند.	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$	
ثابت (هم صعودی هم نزولی)	همواره مقدار y ثابت است.	به ازای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داریم: $f(x_1) = f(x_2)$	

قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

رابطه تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x)$ (درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر است) به صورت

$$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$$

است که در آن $r(x)$ درجه $p(x)$ کمتر است.

توجه: اگر $r(x) = 0$ ، آنگاه چندجمله‌ای f بر چندجمله‌ای p بخش‌پذیر است و بالعکس.

قضیه: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از $r(x) = f\left(-\frac{b}{a}\right)$

مثال) کار در کلاس) باقی مانده تقسیم چند جمله ای $x^3 + x - 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.

answer

آشنایی با ۳ اتحاد چقدر و بدیدن!!

۱- برای n های زوج و فرد داریم : $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$

مثال (فعالیت کتاب) چند جمله‌ای‌های $x^5 - 1$ و $x^6 - 64$ را تجزیه کنید.

answer

۲- برای n های فرد، با تبدیل $a \rightarrow -a$ داریم: $x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$

مثال) کار در کلاس) چند جمله‌ای $x^5 + 1$ را تجزیه کنید.

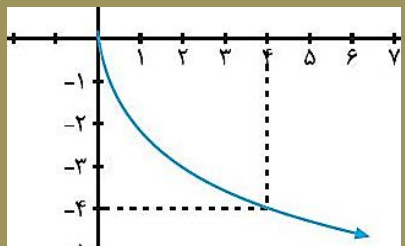
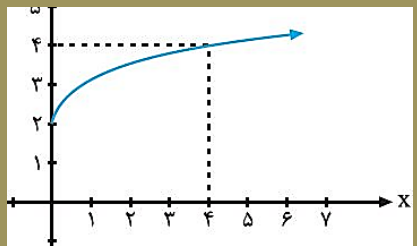
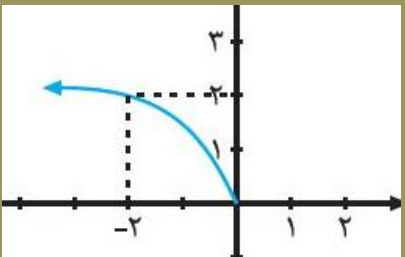
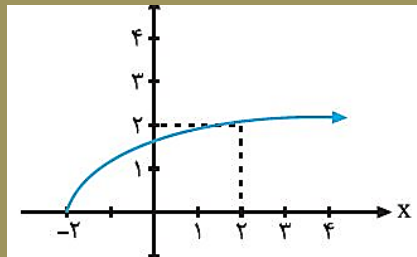
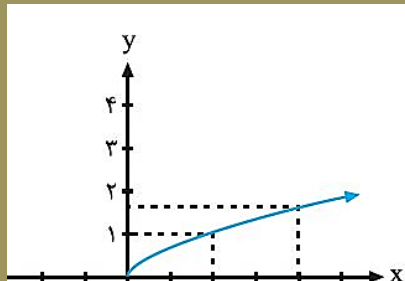
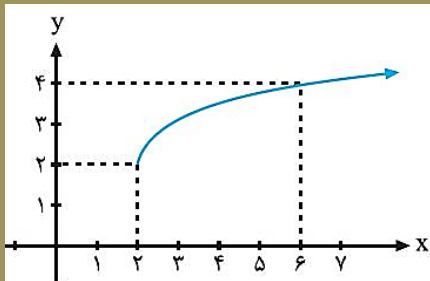
answer

۳- برای n های زوج، با تبدیل $a \rightarrow -a$ داریم: $x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots - a^{n-1})$

(مثال) (کار در کلاس) چند جمله‌ای $x^4 - 16$ را، طوری تجزیه کنید که یک عامل آن باشد.

answer

۱- (تمرین کتاب) توابع زیر، تبدیل یافته‌ی تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هر یک از آن‌ها را به نمودارش نظیر کنید.



الف) $y = \sqrt{2+x}$

ب) $y = 2 + \sqrt{x}$

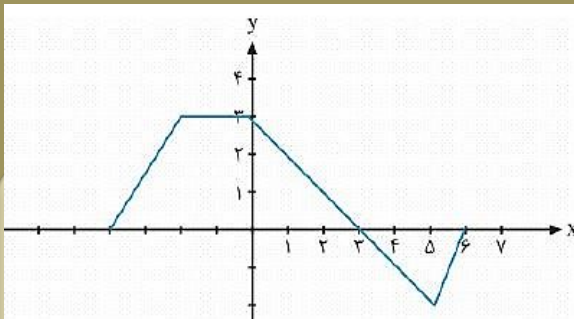
پ) $y = -2\sqrt{x}$

ت) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

ث) $y = 2 + \sqrt{x-2}$

ج) $y = \sqrt{-2x}$

۲- (تمرین کتاب) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



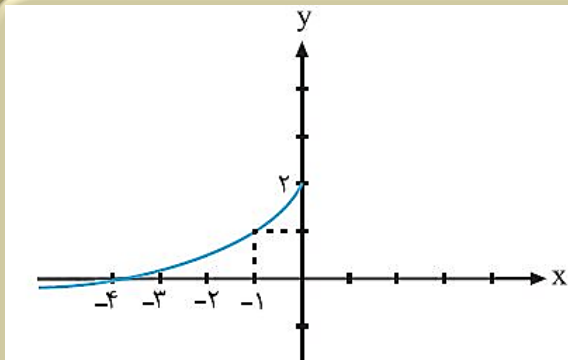
الف) $y = 2f(x - 1)$

ب) $y = f(2x - 1)$

answer

۳- (تمرین کتاب) نمودار تابع زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه‌ی

این تابع را بنویسید.



answer

۴- (تمرین کتاب) تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید. پ) ضابطه f^{-1} را به دست آورید.

answer

۵- (تمرین کتاب درسی) نمودار توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آن‌ها در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنواست؟

الف) $f(x) = \sqrt{2-x}$ ب) $g(x) = 2^{-x}$

answer

۶- (تمرین کتاب) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟

answer

۷- (تمرین کتاب) اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $x^2 + kx + 2$ بر $x - 2$ برابر ۶ باشد، k را تعیین کنید.

answer

۱- (تمرین کتاب) مقدار b و a را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $(x + 1)$ بخش پذیر باشد.

answer

۹- (تمرین کتاب) هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل‌های فواسته شده تجزیه کنید.

ج) $x^5 + 32$ با $x + 2$ عامل

ب) $x^6 - 1$ با $(x + 1)$ عامل

الف) $x^6 - 1$ با $x - 1$ عامل

answer

۱۰) اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \leq \frac{1}{64}$ عدد x را به دست آورید.

answer



فصل ۲ :

مشقات

(۶ نمره)

تناوب و تابع متناوب

تابع f را متناوب می‌گوییم، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم

- $f(x \pm T) = f(x)$ و $x \pm T \in D_f$

(یعنی نمودارش هر T واحد یک بار تکرار می‌شود.) کوچکترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

توابع $y = a \cos bx + C$ و $y = a \sin bx + C$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + C$ و مقدار مینیمم $-|a| + C$

و دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال (مثال کتاب درسی) دوره تناوب و مقادیر \min و \max هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$y = 3 \sin(2x) - 2 \quad (\text{الف})$$

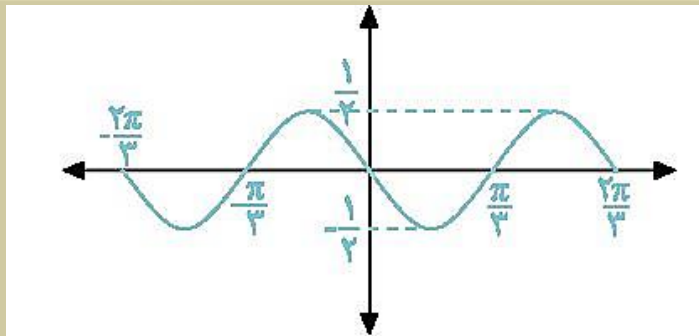
answer

$$y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x) \quad (\text{ب})$$

answer

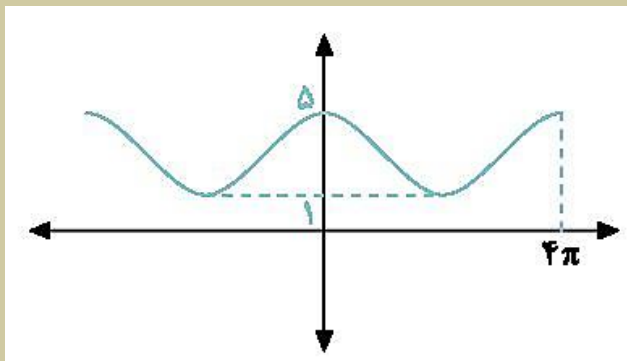
مثال (مثال کتاب) هر یک از نمودارهای زیر مربوط به $y = a \sin bx + C$ یا $y = a \cos bx + C$ است. با تشخیص \max و \min و دوره تناوب، ضابطه هر کدام را مشخص کنید.

الف)



answer

ب)



answer

تانژانت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو، انتهای ضلع متممک زاویه α را امتداد می‌دهیم تا محور عمودی

TAT' را در نقطه M قطع کند. در مثلث قائم‌الزاویه OAM داریم:

$$\tan \alpha = \frac{MA}{OA} \xrightarrow{oa=1} \tan \alpha = MA$$

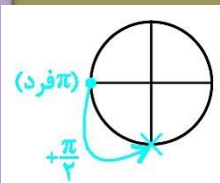
نتیجه: محور قائم TAT'، همان محور \tan هاست (موازی Sin). برای به دست آوردن \tan یک زاویه دلخواه، کافی

است انتهای ضلع متممک آن زاویه را امتداد دهید تا محور \tan ها را قطع کند!

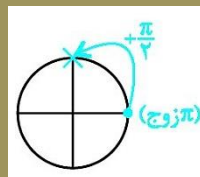
تغییرات tan

قبل از هر چیزی عرض کنم که $\tan x$ در مقادیری که مخرجش صفر است (یعنی $\cos x = 0$) تعریف نمی شود

($x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ که $k \in \mathbb{Z}$). اگر به k اعداد زوج بدهیم،



و اگر k فرد باشد، در پایین دایره قرار می گیرند.



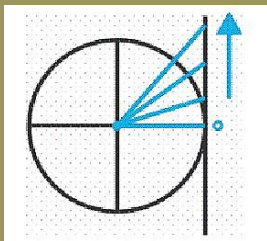
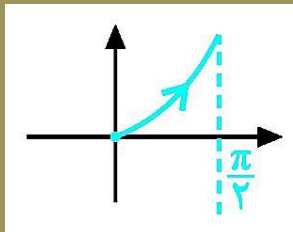
این مقادیر در بالای دایره مثلثاتی قرار می گیرند

لازم به ذکر است که این نقاط مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ هستند $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ و هنگام رسم نمودار، در این طول ها،

یک خط چین قائم رسم می کنیم. (x که به این نقاط میل می کنه، $\tan x$ تشریفشو می بره ∞). فبا با این

مقدمات برویم سراغ بررسی داداش تانژانت در نواحی مختلف و رسم نمودارش!

۱- ناهیه اول : در شروع این ربع مقدار \tan صفر می شود. هر چه مقدار زاویه بیشتر شود، مقدار \tan زاویه هم

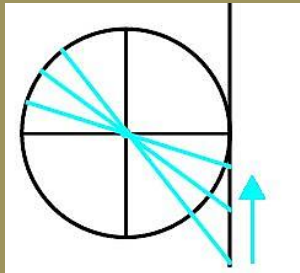
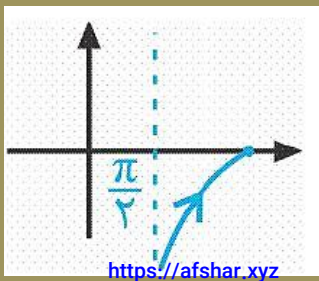


بیشتر می شود تا به $+\infty$ میل کند. نمودارش را ببینید \Leftarrow

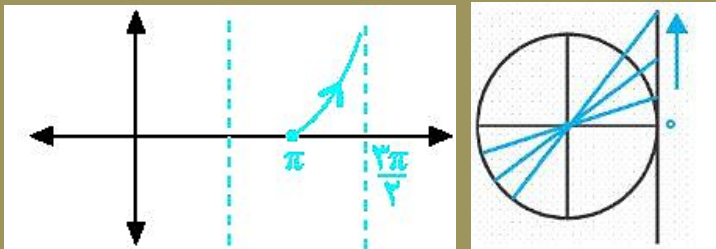
نتیجه : در ربع اول، تابع $\tan x$ یک تابع صعودی است. (البته صعودی آگیرا)

۲- ناهیه دوم : در شروع این بازه، مقدار $\tan x$ ، $-\infty$ است. (منفی بی نهایت چون در ربع دوم $\tan x$ منفی است)

هر چه مقدار کمان بیشتر می شود، $\tan x$ این کمان هم زیادتر می شود تا اینکه بشود صفر. این هم نمودارش \Leftarrow



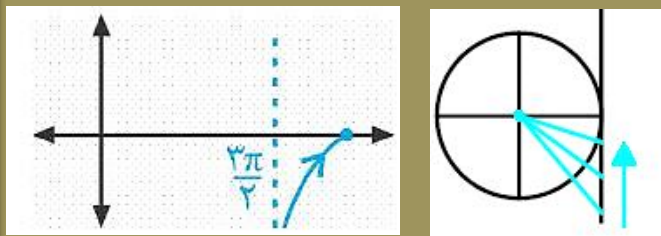
نتیجه: در ربع دوم هم تابع $\tan x$ تابعی صعودی آکید است.



۳- نایه سوم: در شروع این بازه مقدار \tan ، صفر است و رفته رفته

به میل $+\infty$ می‌کند. این هم نمودارش \Leftarrow

نتیجه: در ربع سوم هم $\tan x$ تابعی صعودی آکید است.



۴- نایه چهارم: در شروع این بازه مقدار \tan ، $-\infty$ است. رفته رفته

زیاد و زیادتر می‌شود تا اینکه به صفر برسد. این هم نمودارش \Leftarrow

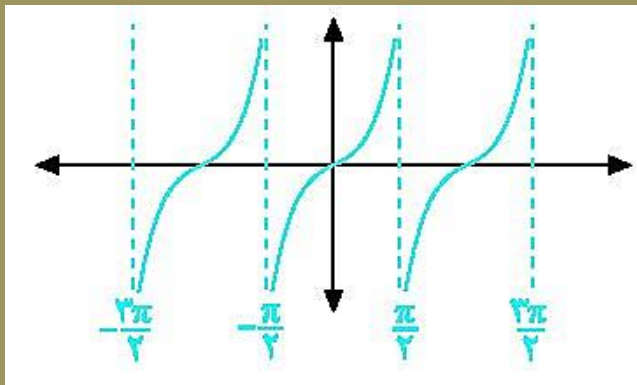
نتیجه: در ربع چهارم هم $\tan x$ تابعی صعودی آکید است.

تابع tan

این تابع به ازای هر زاویه دلفواه در دایره (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ که $k \in \mathbb{Z}$) تعریف شده است. پس دامنه آن

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \leftarrow \text{می شود}$$

اگر تکه‌هایی از نمودار tan را که برایتان رسم کردم، به هم بپسبازید، به نمودار کلی tan می‌رسید:



ویژگی‌هایی از تابع که از نمودار قبل برداشت می‌شوند:

- ۱- این تابع متناوب است با دوره تناوب π . به طور کلی دوره تناوب تابع $y = A \tan(ax) + B$ می‌شود: $T = \frac{\pi}{|a|}$
- ۲- این تابع در کل دامنه‌اش غیر یکنواست.
- ۳- این تابع در بازه‌هایی که ریشه مفرزش در آن بازه نباشد (یعنی بازه‌ها بین دو خط‌چین باشد و خط‌چینی تو بازه نباشد) صعودی اکید است.

نسبت‌های مثلثاتی زاوایی دو برابر کمان

در محاسبات فنی‌ای که جلوتر به آن بپردازیم خواهیم کرد (معادلات مثلثاتی) به ۴ فرمول زیر نیاز داریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \cos 2\alpha \begin{cases} \longrightarrow = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \longrightarrow = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \longrightarrow = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

مثال: (مثال کتاب) مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

answer

معادلاتی اند که مجهول در آن‌ها، کمان نسبت‌های مثلثاتی است. مثلاً $\sin x = 1$ یک معادله مثلثاتی است و منظور از حل آن یعنی یافتن کمان‌هایی که سینوس آن‌ها برابر یک می‌شود. در کتاب شما، فوشبفتانه طراحان دل‌رهمی به فرج داده‌اند و فقط ۲ مدل از این معادلات را زیر ذره‌بین برده‌اند! (فدایشان فیر دها!!)

مدل ۱: معادلات سینوسی به فرم $\sin x = \sin \alpha$ که جوابش می‌شود $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ که $k \in \mathbb{Z}$

مثال: (کار در کلاس کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 2 \sin x - \sqrt{3} = 0$$

answer

نکته: اگر Sin مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید، زاویه α را به دست بیاورید بعد منفی را بپیرید داخل

$$\text{ب) } 4 \text{Sin } x + \sqrt{8} = 0$$

answer

مدل ۲: معادلات کسینوسی به فرم $\cos x = \cos \alpha$ که جوابش می شود $x = 2k\pi \pm \alpha$ که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: (مثال کتاب) معادله $\cos x(2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

answer

نکته: اگر Cos مساوی یک عدد منفی شد، کاری به منفی نداشته باشید و زاویه α را بیابید.
در نهایت جلوی Cos بنویسید $\pi - \alpha$.

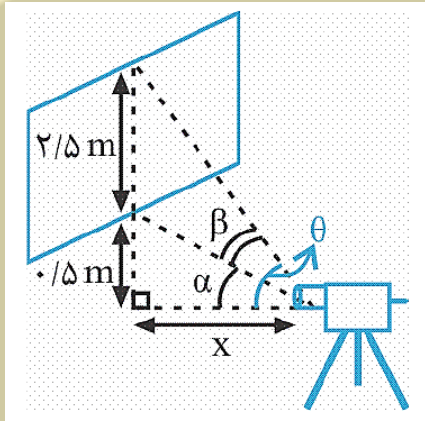
$$\text{ex) } \text{Cos}(2x) = -\frac{1}{2}$$

مدل ۳: معادلات تانژانتي به فرم $\tan x = \tan \alpha$ که جوابشان برابر است با $x = k\pi + \alpha$ که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

answer

مثال) (مثال کتاب) نشان دهید در شکل روبه‌رو، رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن تا تابلو نقاشی، به صورت $\tan \beta = \frac{2 - 5x}{x^2 + 1/5}$ است. سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.



answer

نکته: اگر \tan مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید، زاویه α را به دست بیاورید بعد منفی را بپسندید داخل

مثال: معادله مثلثاتی $\tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای چند جواب است؟

answer

نکته: اگر Cos مساوی یک عدد منفی شد، کاری به منفی نداشته باشید و زاویه α را بپایید.

$$\text{ex) } \text{Cos}(2x) = -\frac{1}{2}$$

در نهایت جلوی Cos بنویسید. $\pi - \alpha$

۱- (تمرین کتاب) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

answer

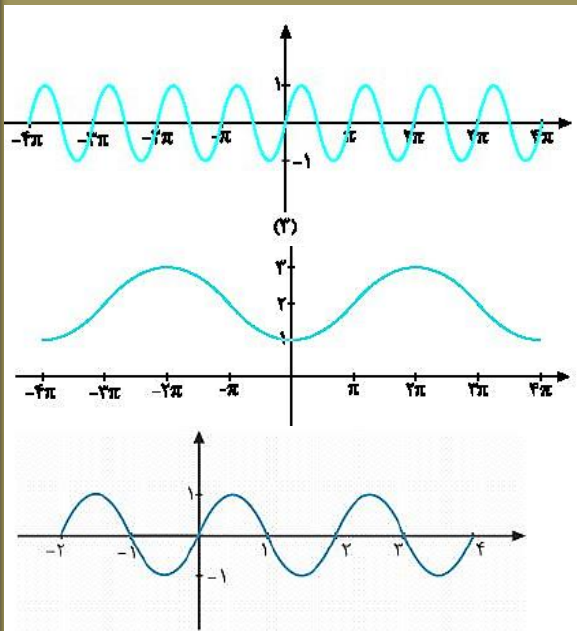
$$y = -\frac{3}{4} \cos 3x \quad (\text{ب})$$

answer

الف) $y = \sin \pi x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2} x$

پ) $y = \sin 2x$



۲- (تمرین کتاب) هر یک از توابع داده شده را به نمودارهای زیر نظیر کنید.

answer

۳- (تمرین کتاب) در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

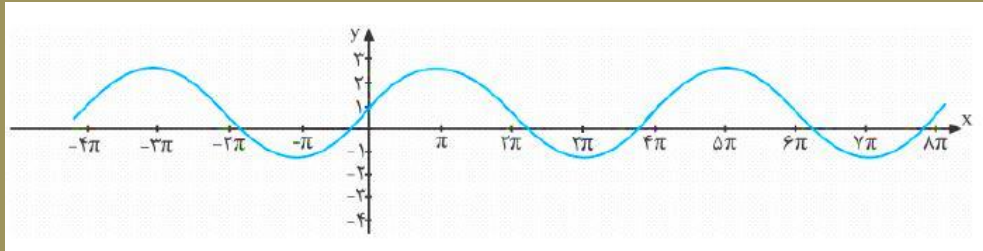
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

answer

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

answer

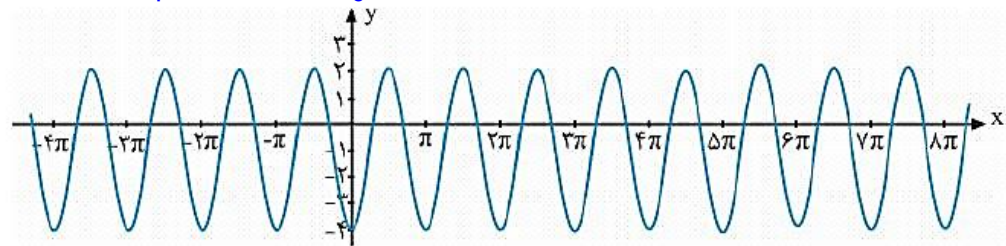
۴- (تمرین کتاب) ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



(الف)

answer

(ب)



answer

۵- (تمرین کتاب) کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

answer

۶- (تمرین کتاب) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

answer

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \quad (\text{ب})$$

answer

۷- (تمرین کتاب) فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

answer

۱- نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

answer

۹- (تمرین کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$

answer

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

answer

پ) $\cos x = \cos 2x$

answer

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

answer

$$\text{ث) } \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

answer

ج) $\tan(2x - 1) = 0$

answer

$$ج) \tan 3x = \tan(\pi x)$$

answer

۱۰- (تمرین کتاب) مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این فاصیبت‌ها می‌توان ساخت؟

answer



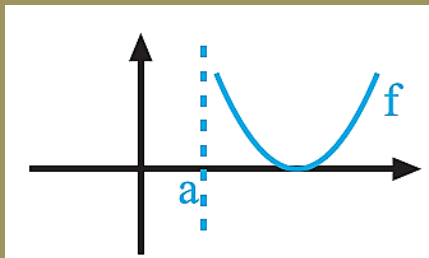
فصل ۳ :

حد

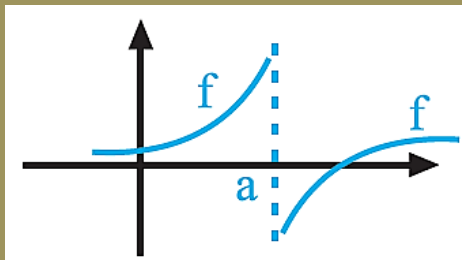
(۷ نمره)

حد نامتناهی

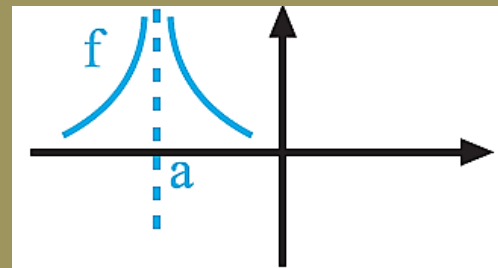
فلاصه و دقیقه نودی عرض کنم اگاهی وقتی $x \rightarrow a$ (یا $x \rightarrow a^-$ یا $x \rightarrow a^+$) میل کند، مقدار تابع به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند! عنایتی به نمودارهای زیر داشته باشید، رفقا!



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

مثال: (مثال کتاب) نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را رسم کنید و به وسیله آن، حد چپ و راست این تابع $x = 2$ را در بیابید.

answer

نکته: هواست باشد که برای تعیین علامت صفر مخرج، گاهی لازم است مخرج را تعیین علامت کنیم.

قضیه ۳: عدد به روی صفر بی نهایت میشود اما...

مثال (مثال کتاب) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$ را به دست آورید.

answer

مثال (مثال کتاب) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2}$ را به دست آورید.

answer

مثال (مثال کتاب) حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$ را به دست آورید.

answer

قضیه ۴: آقا عدد به روی بی نهایت می شه صغرا فلاص!

مثال (مثال کتاب) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x+1)}{\tan x}$ را به دست آورید.

answer

مثال (مثال کتاب) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$ را به دست آورید.

answer

مثال) آکار در کلاس) حاصل عدد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = ? \text{ (الف)}$$

answer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + x}{x^2} \right) = ? \quad (\text{ب})$$

answer

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+2}{(x^2+4x+4)} = ? \quad (\text{پ})$$

answer

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos 2x}{x} = ? \quad (ت)$$

answer

مجانِب قائم

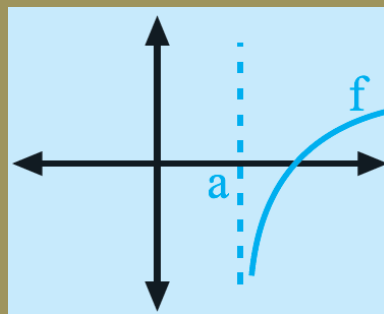
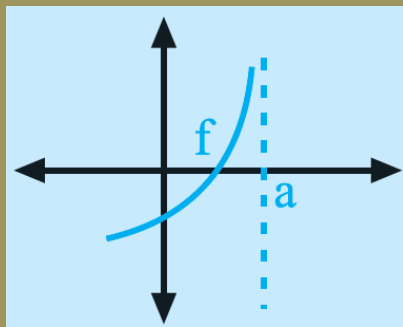
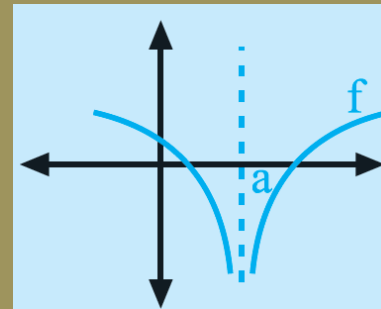
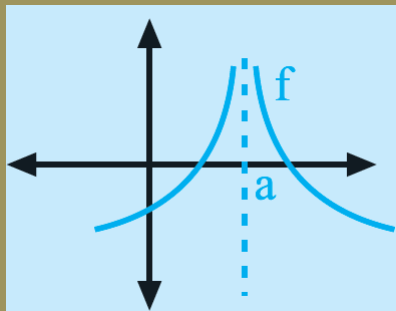
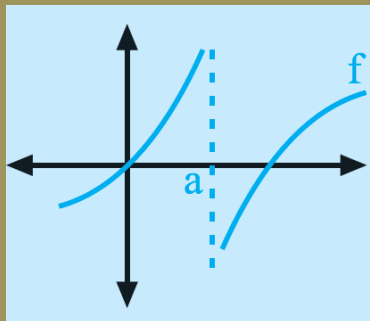
فقط چين قائم $x = a$ را مبانِب قائم تابع $f(x)$ مي گويند، وقتي تابع f از دو طرف $x = a$ ($x \rightarrow a$) يا فقط از يک طرف ($x \rightarrow a^+$ يا $x \rightarrow a^-$) به بي نهايت ميل کند.

اصلا هول نکن، رفیق! وقتي بوقت گفتن آيا فقط مبانِب قائم f هست يا نه، کافيه حد f رو در a حساب کنی.

(هالا $x \rightarrow a$ يا $x \rightarrow a^+$ يا $x \rightarrow a^-$ فرق نداره) اگر حد f حداقل در يک طرف، بي نهايت شد، يعني مبانِب

قائم تابع f است.

مثال (مثال خوب کتاب) در هر کدام از شکل‌های زیر، $x = a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



مثال (مثال کتاب) کدام یک از خطوط $x = -1$ و $x = 3$ مجانب‌های قائم $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می‌باشند.

answer

مثال (مثال کتاب) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

answer

مثال) کار، در کلاس با شیطننت من! ممانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$ را بیابید.

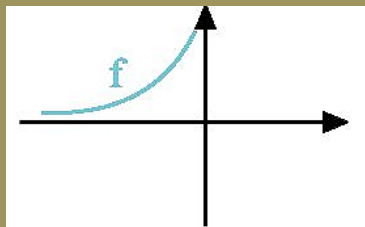
ریشه‌های مفرج توابع کسری، معمولا ممانب قائم‌اند. گفتیم معمولا! چون بعد از مناسبه این ریشه‌ها، باید هر تابع را در آن‌ها بیابید تا مطمئن شوید جواب هر میشود بی‌نهایت!!

answer

حد در پی نهایت

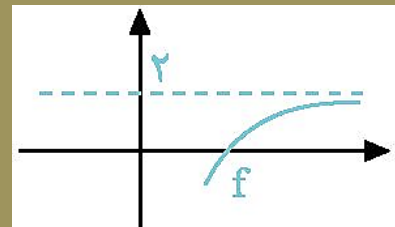
فلاصه عرض کنم، گاهی X به $+\infty$ (انتهای راست محور X ها) و یا به $-\infty$ (انتهای چپ محور X ها) میل می‌کند. در این حالت باید بینیم f (همان عرض تابع) به چه عددی میل فواهد کرد.

به نمودارهای زیر دقت کنید:



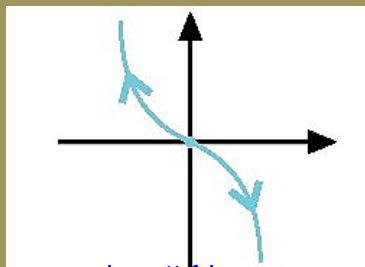
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

(ب)



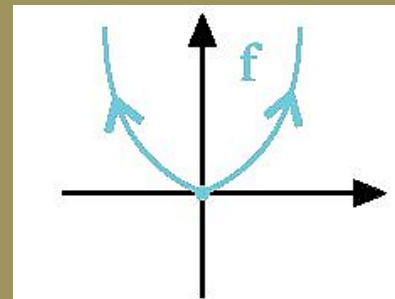
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

(الف)



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

(د)



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^2 - 8x + 1}$$

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$$

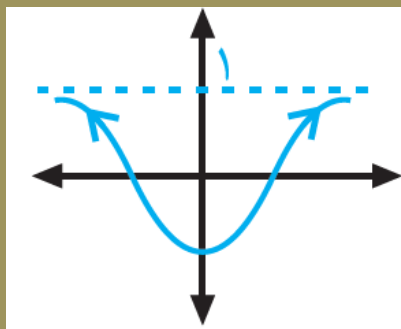
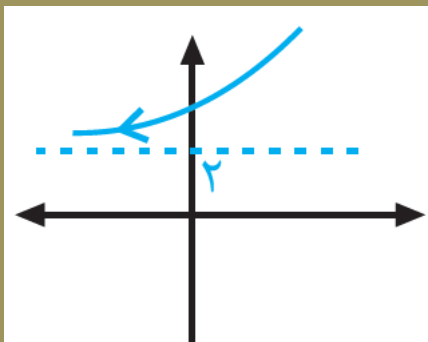
(ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$$

(ج)

مجانب افقی

خط $y = l$ را **مجانب افقی نمودار تابع** $y = f(x)$ می‌نامیم، به شرطی که عدد ∞ (فوقی نمی‌کند) در واقع مقدار تابع f (عرض f) در بی‌نهایت به عرض l میل می‌کند. ۲ نمودار زیر را ببینید.

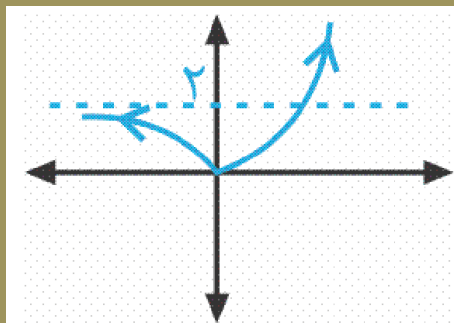
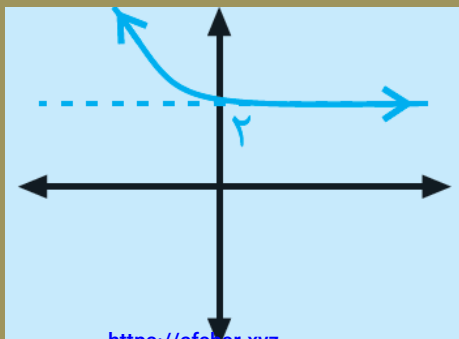
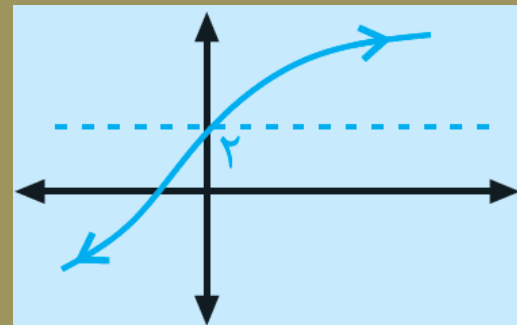
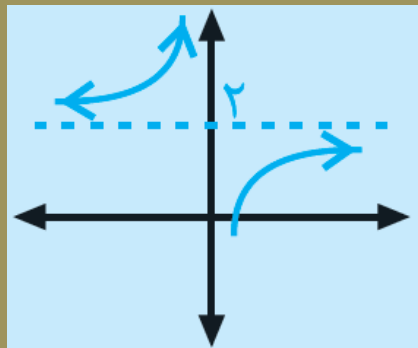
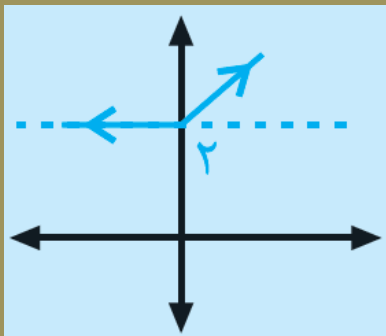


نکته: باز هم هول نشید! هر وقت گفتن **مجانب افقی تابع** f را به دست آورید، کافی است $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ را مناسبه کنید. اگر جوابش عدد l شد، $y = l$ می‌شود معادله **مجانب افقی** f .

مثال) (مثال کتاب) ممابنهای افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را به دست آورید.

answer

مثال) آکار در کلاس کتاب) کدام یک از نمودارهای توابع زیر مبنای افقی دارند؟



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$$

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$$

(ت)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - 5x}{x^2 - 9}$$

(ث)

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2 - 4}$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$$

(ج)

$$\lim \tan x$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$$

(ح)

$$\lim \tan x$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$$

(خ)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

(د)

۲- (تمرین کتاب) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن $\{1\} - [-2, 2]$ بوده و دارای مبنای قائم باشد.

answer

۳- مبنای قائم‌های تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

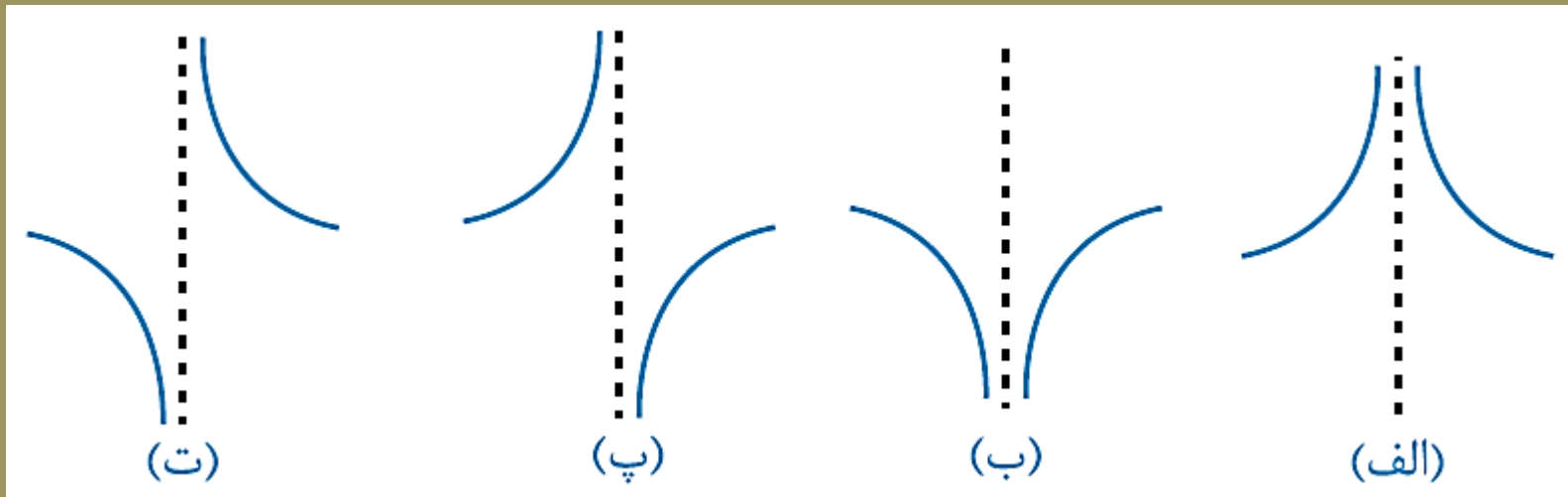
$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$$

answer

۴- (تمرین کتاب) نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x - |x|}$ در مجاورت میانجی قائم خود چگونه است؟

answer

۵- (تمرین کتاب) کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ را در همسایگی $x = 1$ نشان می‌دهد؟ چرا؟



الف)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$$

پ)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

ت)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$$

۷- (تمرین کتاب) مبنایهای افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

الف) $y = \frac{2x - 1}{x - 3}$

answer

$$\text{ب) } y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

answer

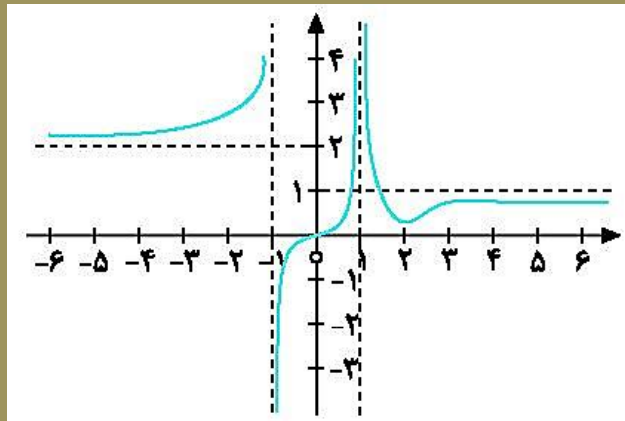
$$پ) y = \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2}$$

answer

$$\text{ت) } y = \frac{2x}{1+x^2}$$

answer

۱- نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. هر دو خواسته شده را بنویسید.



$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

(ب)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(الف)

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

(ت)

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

(پ)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ج)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

(ث)

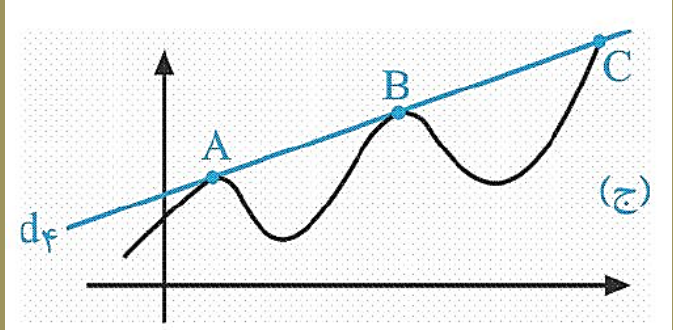
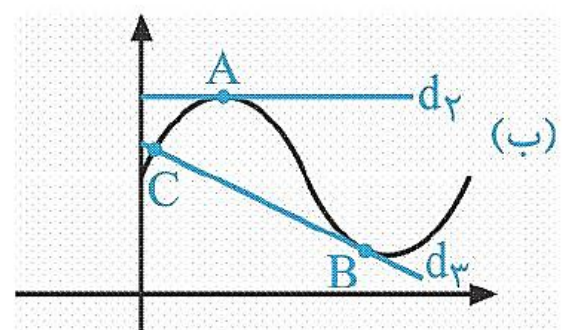
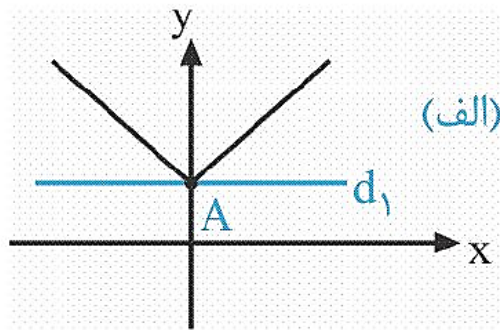


فصل ۴ :

مستوی

خط مماس بر یک منحنی به روایت تصویر!

به سه شکل زیر دقت کنید. در شکل الف، خط d_1 بر منحنی در A مماس نیست. در شکل ب، خط d_2 در A و خط d_3 در B بر منحنی مماس است. در همین شکل اما، خط d_3 در C بر منحنی مماس نیست، متقاطعند. در شکل ج، خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس است. اما در C مماس نیست، متقاطعند!

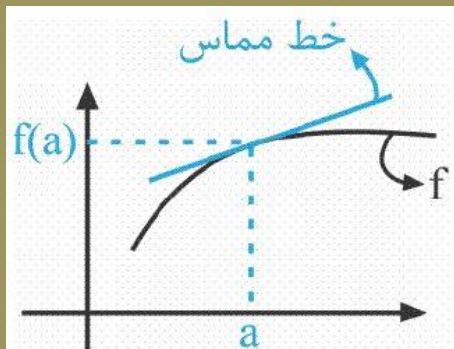


مشتق تابع f در نقطه $A(a, f(a))$

مشتق تابع f در نقطه $x = a$ را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهند، که برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

نکته: زمانی f' در $x = a$ تعریف می‌شود که هر فوق موجود و متناهی باشد.



نکته: مشتق تابع f در $x = a$ برابر است با:

شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه A

مثال: (مثال کتاب) معادله خط مماس بر منحنی $y = -x^2 + 10x$ را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ واقع بر منحنی بیابید.

answer

تعریف دیگر برای مشتق f در $x = a$

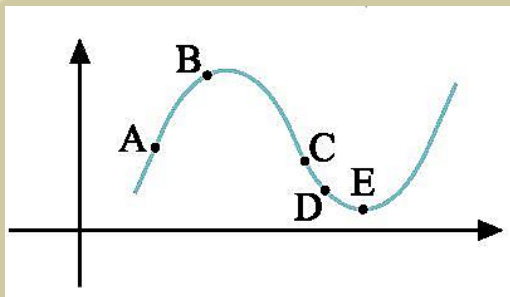
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \iff \text{می شود؛}$$

در صورتی که حد گفته شده موجود و متناهی باشد، مشتق f در a وجود خواهد داشت.

نکته: هیچ تفاوتی بین ۲ تعریف گفته شده وجود ندارد و استفاده از هر کدام، دلفواه است.

نکته: علامت مشتق (یا همان شیب خط مماس) با وضعیت یکنوایی تابع، به این صورت در ارتباط است که اگر در نقطه داده شده، تابع در حال صعود بود، $f' > 0$ ، اگر در حال نزول بود $f' < 0$ و اگر در نوک قله یا قعر نمودار بود، مقدار f' برابر صفر است.

مثال: فرض کنید شیب نقاط مشخص شده در منحنی زیر، -5 ، -1 ، 0 ، 2 ، 4 هستند. مشخص کنید کدام شیب مربوط به کدام نقطه است؟



answer

مشتق چپ و راست f در $x = a$

مشتق چپ و راست تابع f در $x = a$ را با نمادهای $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شروط مشتق‌پذیری f در $x = a$

مشتق‌پذیری f در $x = a$ ، ۲ شرط لازم دارد:

۱- f در $x = a$ پیوسته باشد.

۲- شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست برابر باشند. یعنی $f'_-(a) = f'_+(a)$

مثال: (مثال کتاب) مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

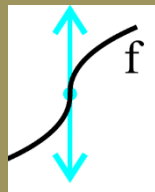
answer

مثال: (مثال کتاب) مشتق پذیری توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ را در صفر بررسی کنید.

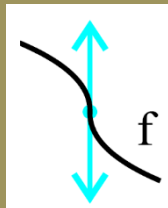
answer

مماس قائم

اگر f در $x = a$ پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند، f در a مشتق پذیر نیست، اما خط مماس در این نقطه موجود است، که به آن مماس قائم می‌گویند.



(مثبت شد چون صعودی است) $f'_-(a) = f'_+(a) = +\infty$



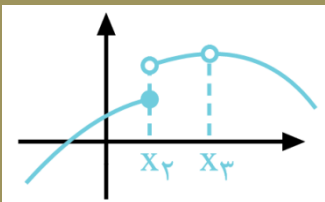
(منفی شد چون نزولی است) $f'_-(a) = f'_+(a) = -\infty$

مثال: (مثال کتاب) آیا تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ دارای فط مماس است؟

answer

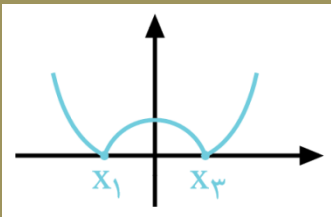
مثال: آیا تابع $y = \sqrt[3]{x^2}$ در $x = 0$ دارای فط مماس است؟

answer

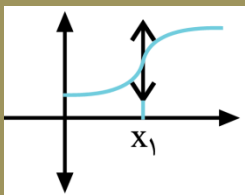


در نمودار یک تابع، نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق ناپذیر است عبارتند از:

۱- نقاط ناپیوستگی: مثلا نقاط x_2 و x_3 در نمودار مقابل \Leftarrow



۲- نقاط تیزی (زاویه‌دار): مثلا x_3 و x_1 در نمودار مقابل \Leftarrow



۳- نقاطی که در آن‌ها مماس قائم تولید می‌شود: مثلا x_1 در دو نمودار مقابل \Leftarrow

تابع مشتق $(f'(x))$

برابر است با $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ مشروط بر آن که این حد موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از

دامنه f که f' برای آن‌ها موجود باشد را $D_{f'}$ می‌گوییم.

مثال (مثال کتاب) اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. سپس $f'(3)$ را بیابید.

چند فرمول مشتق کبیری مشتق بینیم صفا کنیم!

مشتق کبیری! (صفر تا صد)

۱ $y = a (a \in \mathbb{R}) \rightarrow y' = 0$

۲ $y = a x \rightarrow y' = a$

۳ $y = a \Delta^n \rightarrow y' = a n (\Delta)^{n-1} \cdot \Delta'$

رمز

- نما در ضرب ضرب همیشه!
- یکی از نما کم همیشه!
- در مشتق پایه ضرب همیشه!

ex $y = \frac{-2}{x^4}$

ex $y = \frac{1}{5} (-5x)^{12}$

۴ $y = f \pm g \pm \dots \rightarrow y' = f' \pm g' \pm \dots$

۵ $y = f \cdot g \rightarrow y' = f' \cdot g + g' \cdot f$

ex $y = \frac{6}{x^3} - x^2 \sqrt[3]{x} + 4x$

۶

$$y = \sqrt{\Delta} \rightarrow y' = \frac{\Delta'}{2\sqrt{\Delta}}$$

۷

$$y = \frac{f}{g} \rightarrow y' = \frac{f'g - gf'}{g^2}$$

ex

$$y = \frac{(2x-1)\sqrt{x}}{x^3}$$

۸

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

۹

$$y = \frac{1}{U} \rightarrow y' = \frac{-U'}{U^2}$$

ex

if $f(x) = \left(\frac{2x-1}{2+3x}\right)^2 \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = ?$

بفوانید : مشتقِ داخلش در اف پریم داخلش! تمام :

$$y = f(\Delta) \longrightarrow y = \Delta' \cdot f'(\Delta)$$

(کنکور ۹۲)

اگر $f(x) = \frac{x^2 - 2}{1 + x^2}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \times g'(x)$ کدام است؟

$$\frac{x-3}{x^2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3x} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{x^2} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{x} \quad (۱)$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{-2x}$ و $g(x) = (2x+1)^2$ ، آنگاه مشتق تابع $g \circ f(x)$ در $x = -2$ را با استفاده از قاعده زنجیری به دست بیاورید.

answer

مثال: (کار در کلاس) مشتق‌های توابع زیر را به دست آورید.

$$g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5} \right)^8 \quad \text{ب)}$$

$$f(x) = (x^2+1)^3 (5x-1) \quad \text{الف)}$$

answer

مشتق پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد. همچنین تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد، در a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

نکته (کار در کلاس) تابع f روی $[a, b]$ $((a, b))$ مشتق پذیر است هرگاه در (a, b) مشتق پذیر باشد و در a مشتق راست (در b مشتق چپ) داشته باشد.

را رسم کنید و مشتق پذیری آن را روی بازه‌های

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases} \quad \text{مثال : (مثال کتاب) نمودار}$$

$[-2, 1]$ ، $(1, +\infty)$ و $[1, 2]$ بررسی کنید.

answer

مشتق مرتبه دوم

اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به صورت $y'' = f''(x)$ (فوانده شود) ایگرگ زگونء) می نویسیم و برای مناسبه آن از تابع y' مشتق می گیریم.
مثال: (مثال کتاب) اگر $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ ، آنگاه تابع y' و y'' را بیابید.

answer

مثال: (مثال کتاب با تغییر) رابطه $h(t) = -5t^2 + 40t$ ، ارتفاع جسم $(h(t))$ را t ثانیه پس از پرتاب از سطح زمین نشان می‌دهد.

الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[0, 2]$ را بر حسب $\frac{m}{s}$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه $t = 2$ چقدر است؟

ج) جسم چند ثانیه پس از پرتاب، به نقطه اوج می‌رسد؟

answer

کاربردی دیگر از آهنگ تغییرات تابع: آهنگ رشد

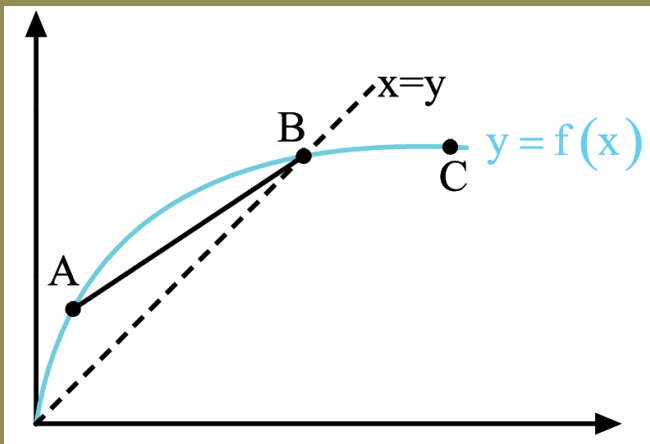
مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را x ماه پس از تولد، بر حسب $\frac{\text{cm}}{\text{month}}$ مشخص می‌کند. آهنگ متوسط رشد یک کودک را از ۱ ماهگی تا ۳۶ ماهگی بیابید.

answer

۱- (تمرین کتاب) اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

answer

۲- (تمرین کتاب) برای نمودار $y = f(x)$ ، شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



$m_1 \leftarrow$ A (الف) شیب نمودار در نقطه

$m_2 \leftarrow$ B (ب) شیب نمودار در نقطه

$m_3 \leftarrow$ C (پ) شیب نمودار در نقطه

$m_4 \leftarrow$ AB (ت) شیب قط

$m_5 \leftarrow$ (ث) شیب قط

$m_6 \leftarrow$ (ج) شیب قط

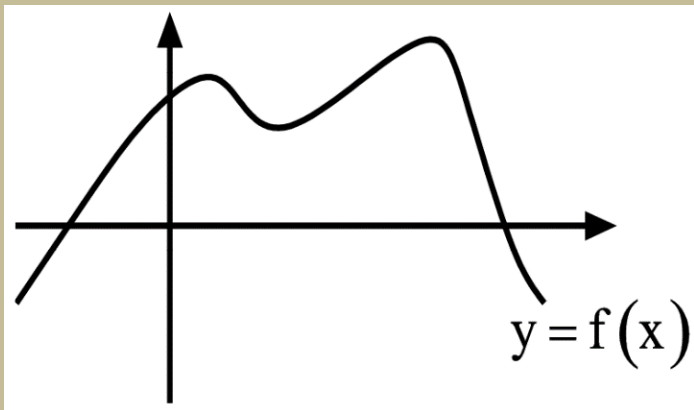
۳- (تمرین کتاب) نقاطی مانند **A, B, C, D, E, F** و **G** را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری

که:

الف نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن با صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

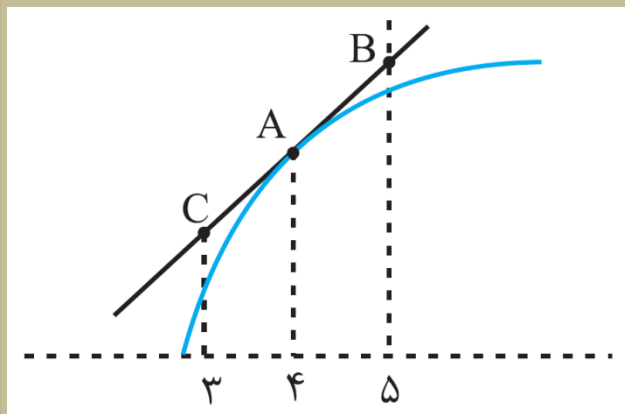


ت نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن با صفر است.

ث نقاط **F** و **E**، نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

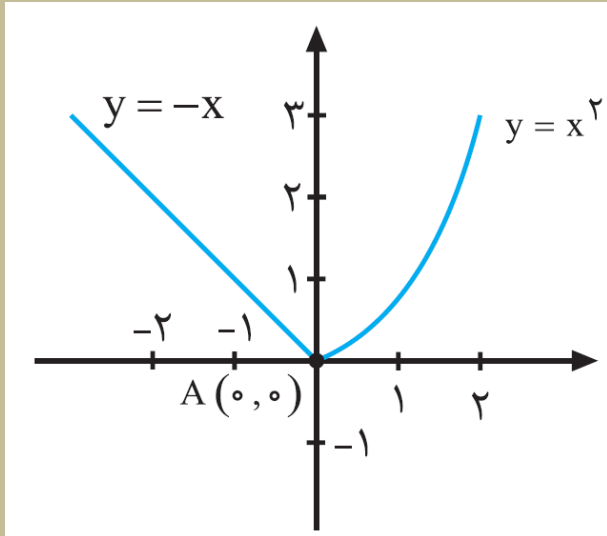
ج نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن با مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

۵- (تمرین کتاب) برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل، مفتضات نقاط A و B و C را بیابید.



answer

۶- (تمرین کتاب) با مناسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع داده شده در نقطه A نشان دهید که این تابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



answer

۱- (تمرین کتاب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود. ب) در $x=2$ برابر ۳ شود. پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد. ث) در تمام نقاط منفی باشد.

answer

۹- (تمرین کتاب) مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

answer

۱۰- (تمرین کتاب) اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاطی به طول های ۲ و ۲- بررسی کنید.

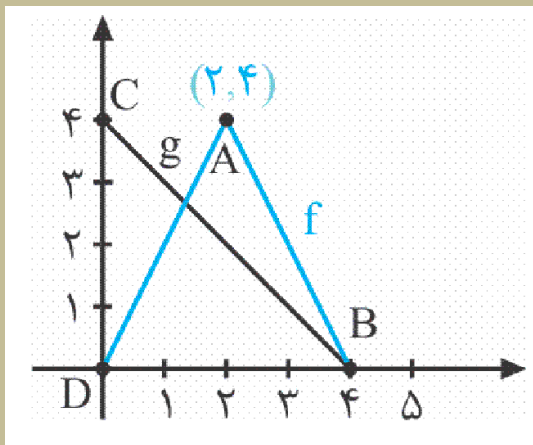
answer

۱۲- (تمرین کتاب) اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f + g)'(1)$ و $(3f + 2g)'(1)$.

answer

۱۳- (تمرین کتاب) نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

اگر $h(x) = f(x).g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ و $h'(2)$ ، $h'(3)$.



۱۴- (تمرین کتاب) اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ ، نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی مشتق موجود نیست.

answer

۱۵- (تمرین کتاب) مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$

answer

$$\text{ب) } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$$

answer

۱۷- (تمرین کتاب) معادله حرکت متمرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$

داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

answer

۲۰- (تمرین کتاب) کتابتیش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم

مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟

مشتق توابع مثلثاتی:

۱- $(\sin \Delta)' = \Delta' \cos \Delta$

۲- $(\cos \Delta)' = -\Delta' \sin \Delta$

۳- $(\tan \Delta)' = \Delta' (1 + \tan^2 \Delta)$

نکته: در کتاب درسی صرفی از مشتق تابع \cot زده نشده! ما هم کاری بهوش نداریم! فقط آگه تو امتحان

\cot دیدی نترس! به باش بنویس $\frac{1}{\tan}$ و بعد محاسبات مشتق رو انجام بده!

مثال) (کار در کلاس) مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin x \cdot \tan x$

answer

$$\text{ب) } g(x) = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x}$$

answer

پ) $h(x) = \cos^3 x$

answer

(تمرین کتاب) مشتق توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^2 x$$

answer

ب) $f(x) = \tan^2(x) - 2\cos(x)$

answer

$$پ) f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

answer

ت) $f(x) = \sin x \cos 2x$

answer



فصل ۵ :

کاربرد مشتق

آزمون یکنوایی توابع

برای تابع مشتق‌پذیر f داریم:

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی صعودی آکید و در چه بازه‌هایی نزولی آکید است؟

answer

اکسترم‌های نسبی توابع

نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی یک تابع را نقاط اکسترمم نسبی آن تابع می‌گویند. ماکزیمم نسبی: نقطه $A \in D_f$ ، نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است، هرگاه یک همسایگی اطراف A وجود داشته باشد، به طوری که عرض A از عرض تمام نقاط همسایگی بیشتر یا مساوی باشد. مقدار ماکزیمم نسبی، همان مقدار عرض این نقطه است.

مینیمم نسبی: نقطه $A \in D_f$ نقطه مینیمم نسبی تابع f است، هرگاه یک همسایگی اطراف A وجود داشته باشد، به طوری که عرض A از عرض نقاط همسایگی کمتر یا مساوی باشد. مقدار ماکزیمم نسبی، همان مقدار عرض این نقطه است.

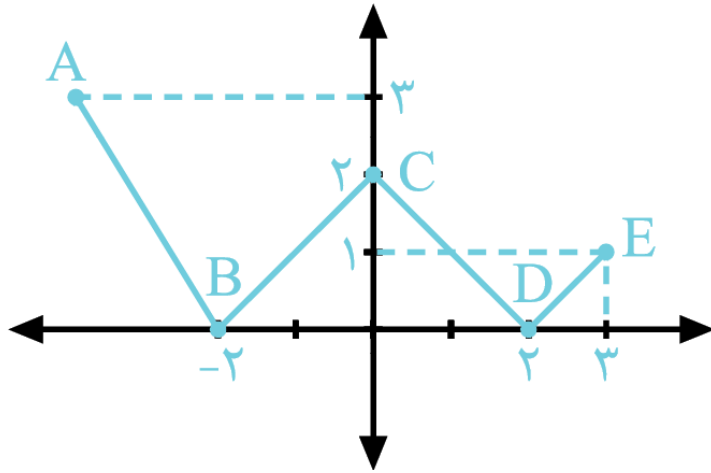
نکته: وجود همسایگی (هم چپ، هم راست) برای این که یک نقطه اکسترمم نسبی شود، شرطی لازم است. (یعنی مثلا نقاط ابتدا و انتهای یک بازه هیچ وقت نمی‌تونن اکسترمم نسبی بشن)

نکته: برای اکسترمم نسبی شدن یک نقطه، نه پیوستگی اهمیت دارد نه مشتق‌پذیری!

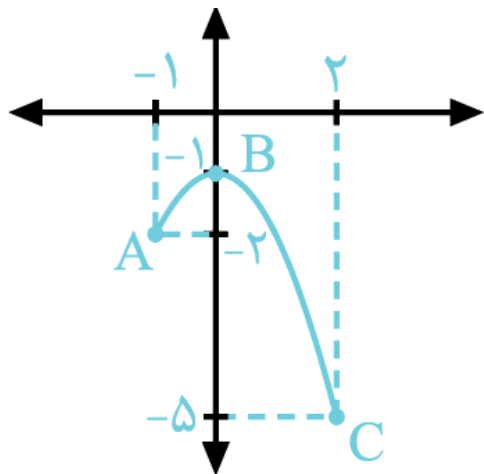
مثال: (کار در کلاس) برای نقاط مشخص شده در هر یک از توابع زیر، نوع اکسترمم نسبی، مقدار اکسترمم نسبی و

مقدار مشتق را در آن نقطه مناسبه کنید.

$$f(x) = ||x| - 2|; x \in [-5, 3] \quad (\text{الف})$$



(ب) $g(x) = -x^2 - 1; x \in [-1, 2]$



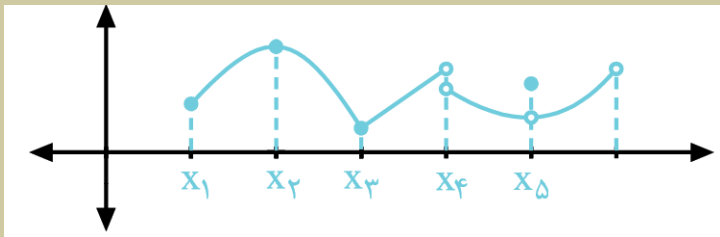
answer

نکته: نقاط روی توابع ثابت (به شرط وجود همسایگی) هم \max نسبی به حساب می آیند هم \min نسبی.

نقطه بحرانی تابع

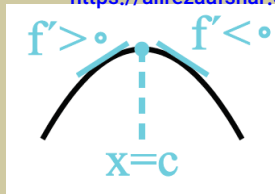
فرض کنید $c \in D_f$ در این صورت c یک نقطه بحرانی f است، هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال: کدام یک از نقاط مشخص شده در نمودار زیر بحرانی اند، کدام نیستند؟ (با ذکر دلیل)

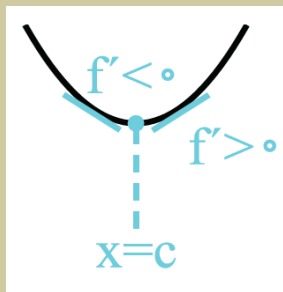


قضیه فرما: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول C اکسترمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ است.
نتیجه: هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی f ، حتماً بحرانی نیز هست، اما هر نقطه‌ی بحرانی، اکسترمم نسبی نیست.

آزمون مشتق اول

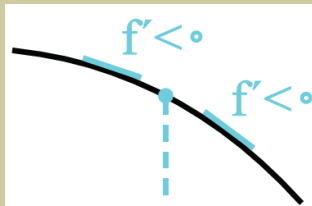


الف) اگر علامت f' قبل از $x=c$ مثبت و بعد از آن منفی باشد، آنگاه C طول \max نسبی f است.

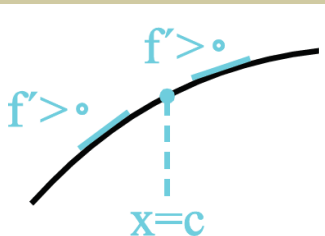


ب) اگر علامت f' قبل از $x=c$ منفی و بعد از آن مثبت باشد، آنگاه C طول \min نسبی f است.

پ) اگر علامت f' قبل و بعد از $x=c$ تغییر نکند، آنگاه C ، نه طول



یا



\min نسبی f است نه طول \max نسبی آن.

مثال: با استفاده از آزمون مشتق اول، نقاط اکسترمم نسبی و مقادیر آنها را برای تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$ به دست آورید.

answer

اکسترمم مطلق توابع

به \max و \min مطلق توابع، اکسترمم مطلق آن‌ها می‌گوییم.

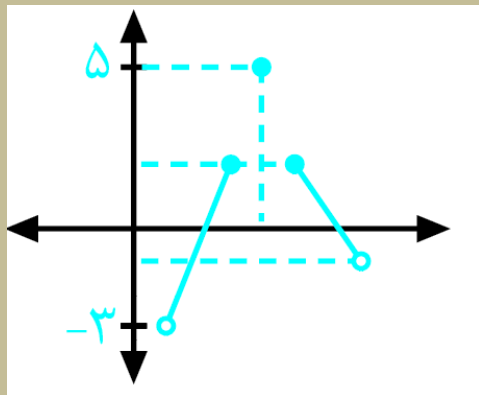
ماکزیمم مطلق: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ یک نقطه \max مطلق برای تابع f است، هرگاه عرض این نقطه از عرض تمام نقاط دامنه f بیشتر یا مساوی باشد. مقدار \max مطلق همان مقدار عرض این نقطه، یعنی $f(c)$ است.

مینیمم مطلق: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ یک نقطه \min مطلق برای تابع f است، هرگاه عرض این نقطه از عرض تمام نقاط دامنه f کمتر یا مساوی باشد. مقدار \min مطلق همان مقدار عرض این نقطه یعنی $f(c)$ است.

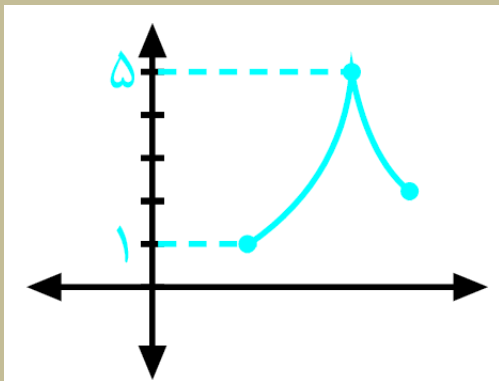
نکته: وجود همسایگی برای این که یک نقطه اکسترمم مطلق شود، نه شرط لازم است نه کافی! یعنی اصلا وجود همسایگی این با هم مهم نیست! برعکس اکسترمم‌های نسبی که وجود همسایگی و آشنون شرط لازم بودن.

مثال: در هر مورد از نمودارهای زیر، مقادیر و مطلق را بیابید.

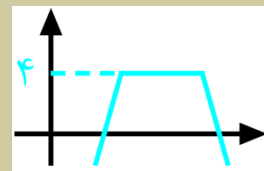
الف



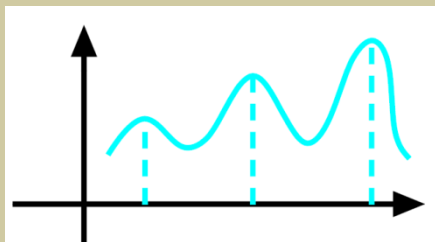
ب



نکته: یک تابع می تواند در بی نهایت نقطه دارای اکسترمم مطلق باشد، اما مقدار آن ها یکتاست.



مانند که بی شمار نقطه \max مطلقند و مقدار آن ها ۴ است. اما یک تابع می تواند



بی شمار نقطه اکسترمم نسبی با مقادیر مختلف داشته باشد. مانند

تفسیه: فرض کنید f در $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت در این بازه هم \max مطلق دارد هم مطلق.

مثال (فعالیت کتاب) آیا تابع $y = |x^2 - 1|$ در $[-2, 3]$ دارای اکسترمم مطلق است؟ در صورت وجود با رسم نمودار مقادیر آن‌ها را بیابید.

answer

روش محاسبه اکسترم‌های مطلق تابع f در بازه بسته $[a, b]$

گام اول: مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

گام دوم: مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم.

گام سوم: در گام دوم، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار \max مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها، \min مطلق.

مثال: (مثال کتاب) نقاط اکسترم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1, 3]$ تعیین کنید.

بهینه‌سازی یا optimization

یعنی پیدا کردن بهترین حالت! مثل کمترین مقدار برای زمان، هزینه، فاصله یا بیشترین مقدار برای سود
مسائل یا مباحث مسائل بهینه‌سازی معمولا با بیان فارسی و کلمات کمترین یا بیشترین همراهند!

روش حل مسائل بهینه‌سازی با استفاده از رمز **نقتم** !!

۱ ن : نمادگذاری، رسم شکل (در صورت نیاز) و قرار دادن معلوم‌ها و نمادهای مجهولات X و Y ←

۲ ف : ضابطه‌ی تابعی که قرار است بهینه شود را بنویسید

۳ ت : تک‌متغیرش کن! آگه f دو متغیره بود، تک‌متغیرش کن! (با استفاده از یه رابطه از دل سوال!)

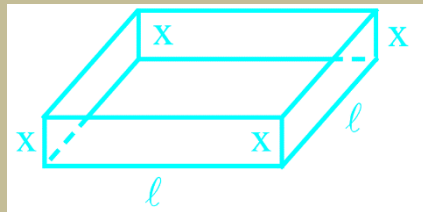
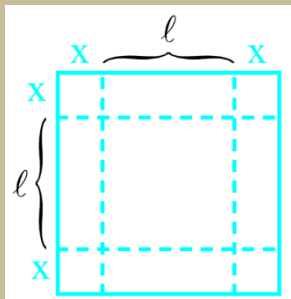
۴ م : $\max-\min$ عرض اکسترمم (عالا یا ماکزیمم یا مینیمم) تابع تک‌متغیره رو بدست بیار!

مثال: (مثال کتاب) نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت 14 سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن با هم برابر باشند.

answer

مثال (مثال کتاب) مطابق شکل، ورقی فلزی به طول 30cm ، را در نظر بگیرید. می‌فواهیم از گوشه آن

مربع‌هایی کوچک به ضلع x ، برداشتنیم و سپس با تا کردن ورق در امتداد فخط‌چین‌ها، جعبه‌ای در باز



بسازیم. مقدار x مقدر باشد تا حجم قوطی حداکثر شود؟

۱- (تمرین کتاب) بزرگ‌ترین بازه از \mathbb{R} که تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ در آن نزولی آکید باشد، کدام است؟ چرا؟

answer

مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی
 $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

۲- (تمرین کتاب) با تشکیل جدول تغییرات تابع
صعودی آید و در کدام بازه‌ها نزولی آید است؟

answer

۳- (تمرین کتاب) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

answer

ب) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

answer

پ) $h(x) = \sqrt[3]{x}$

answer

۴- (تمرین کتاب) در تابع زیر ابتدا نقاط بحرانی را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

answer

۵- (تمرین کتاب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \quad ; \quad x \in [-1, 2]$$

answer

۶- (تمرین کتاب) اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

answer

۸- (تمرین کتاب الف) می‌فواهیم کنار رودخانه، یک موهه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟ (ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مساله را حل کنید.

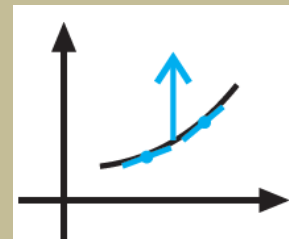
answer

۹- (تمرین کتاب) هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب چیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت ۳۲ فواید بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است ماشیه‌های بالا و پایین هر صفحه ۲ و ماشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

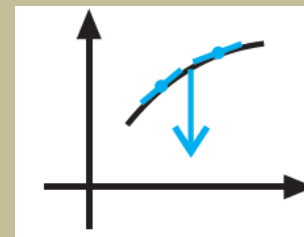
answer

جهت تقعر

اگر مماس‌های مرسوم بر نمودار f ، زیر نمودارش قرار بگیرند، جهت تقعر f رو به بالاست. مانند



و اگر بالای نمودار قرار بگیرند، جهت تقعر رو به پایین است.



مانند:

تشخیص جهت تقعر یا محاسبات

در بازهای نظیر آنکه f'' در تمام نقاط آن موجود باشد، داریم:

۱- اگر در این بازه $f'' > 0$ ، جهت تقعر نمودار f در f رو به بالا است.

۲- اگر در این بازه $f'' < 0$ ، جهت تقعر نمودار f در f رو به پایین است.

۳- در حالتی که $f''(x) = 0$ ، آزمون بی نتیجه است.

مثال) (مثال کتاب) جهت تقعر توابع زیر را در دامنه تعریفشان به دست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{الف})$$

answer

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 1 \quad \text{ب)}$$

answer

نقطه عطف نمودار یک تابع

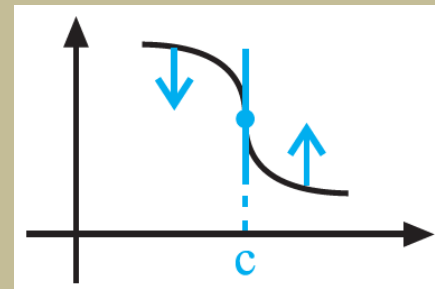
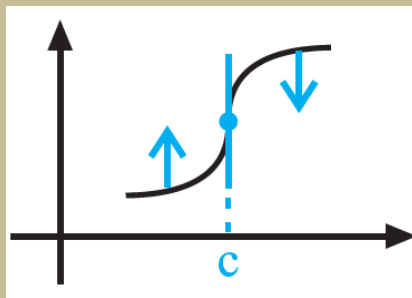
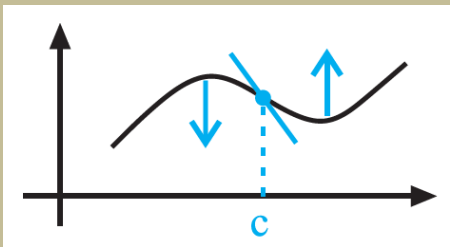
فرض کنید f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع f

است، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ فقط مماس داشته باشد.

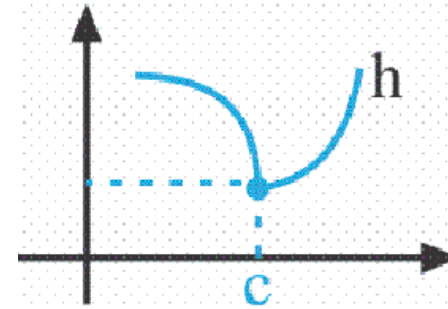
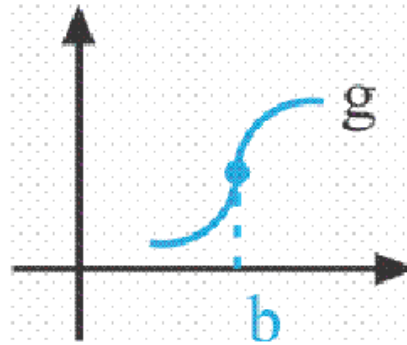
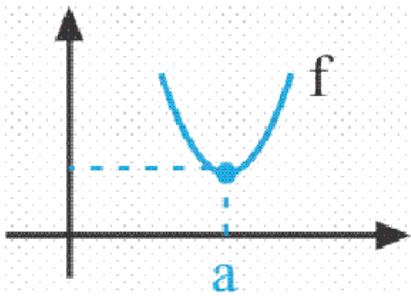
ب) جهت تقعر f در $(c, f(c))$ تغییر کند.

کارت زرد: راجع به شرط الف بگوییم، وجود خط مماس در $x = c$ ، یعنی این که یا تابع آن جا مشتق پذیر باشد، یا در حالت عدم وجود مشتق، مشتق چپ و راست، هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند. در این حالت مشتق موجود نیست، اما خط مماس موجود است، آن هم مماس قائم! در ۳ مثال زیر، نقاط عطف را دنبال کنید.



مثال) (مثال کتاب) در هر یک از نمودارهای زیر، نقطه عطف را در صورت وجود، مشخص و خط مماس بر منحنی را

رسم کنید



مثال) (مثال کتاب) جهت تقعر نمودار تابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آن‌ها را به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 15 \quad (\text{الف})$$

answer

۱- دامنه تابع را به دست می‌آوریم.

۲- محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم. (در صورت وجود)

۳- f' را به دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن، بازه‌هایی که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.

۴- نقاط بحرانی و اکسترم‌های نسبی تابع را می‌یابیم. (در صورت وجود)

۵- f'' را به دست آورده و با تعیین علامت آن، جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.

۶- نقطه عطف را می‌یابیم. (در صورت وجود)

۷- بررسی رفتار تابع در بی‌نهایت (در صورت وجود)

۸- معادله‌های جانبی تابع را به دست می‌آوریم. (در صورت وجود)

۹- در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.

حالا جدول رفتار تابع (متشکل از f و f' و f'') را تشکیل داده و بعد نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = (x - 1)^2 (x + 3) \quad f(x) = x^3$$

مثال) (مثال کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید.

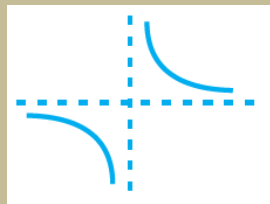
answer

تابع هموگرافیک

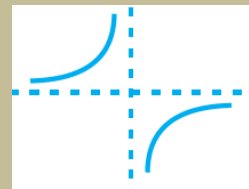
تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که $c \neq 0$ ، را یک تابع هموگرافیک می‌گوییم. این تابع دارای یک مبانب قائم

به معادله $x = -\frac{d}{c}$ (ریشه مفرج) و یک مبانب افقی به معادله $y = \frac{a}{c}$ (نسبت ضرایب X ها) است. شکل

(شافک‌ها نزولی) است.



(شافک‌ها صعودی) یا



کلی آن به دو صورت

نکته: شرط $c \neq 0$ فیلدی مهمه ها! چون اگه $c = 0$ باشه، یک تابع قطبی به معادله $y = \frac{ax + b}{d}$ داریم

که دیگه تابع هموگرافیک نیست! یک فطه.

نکته: در شرایطی که $c \neq 0$ و $ad = bc$ ، این تابع به یک تابع ثابت به معادله $y = \frac{a}{c}$ که $x \neq -\frac{d}{c}$

تبدیل میشود.

مثال) (مثال کتاب) جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{3x+4}{-2x+1}$ را رسم کنید.

answer

۱۲- (تمرین کتاب) نمودار تابع **f** را به گونه ای رسم کنید که در نقطه ای مانند **a** بهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطه ی عطف نباشد.

answer

۱۳- (تمرین کتاب) جهت تقعر توابع زیر را در دامنه‌ی آن‌ها بررسی کرده و نقطه‌ی عطف آن‌ها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

answer

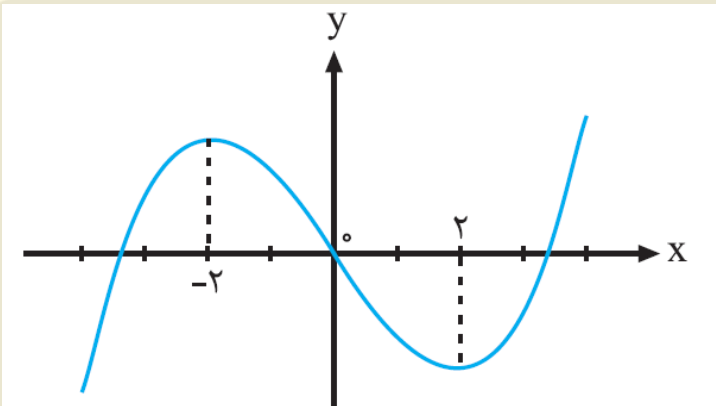
ب) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

answer

پ) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

answer

۱۵- (تمرین کتاب) اگر $(0,0)$ نقطه عطف تابع درجه سوم $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، $c \gg b, a$ را بیابید.

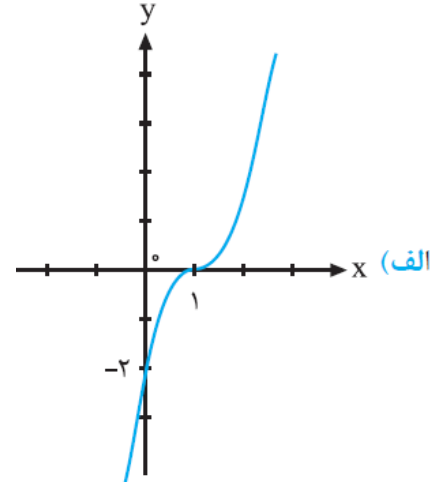
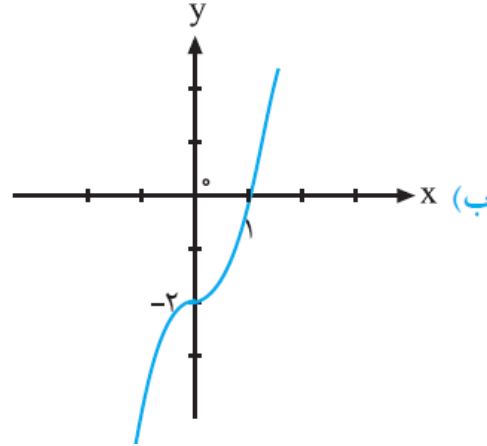
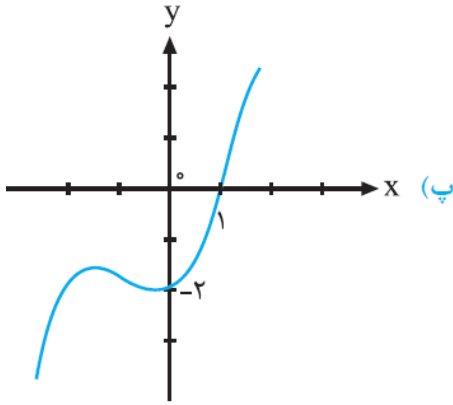
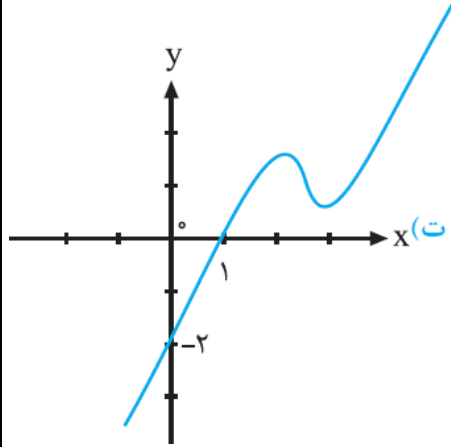


answer

۱۷- (تمرین کتاب) فرض کنید $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ و محل تقاطع میانب‌های آن نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطه‌ی $(0, -1)$ بگذرد، ضابطه‌ی تابع را به دست آورید.

answer

۱۸- (تمرین کتاب) کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به $f(x) = x^3 + x - 2$ است؟





مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

راه‌های ارتباطی مرکز مشاوره

تلگرام

اینستاگرام

وبسایت




AlirezaAfsharOfficial

AlirezaAfsharOriginal

www.AlirezaAfshar.org

رزور مشاوره خصوصی علیرضا افشار

برای رزور مشاوره خصوصی تک جلسه و ماهانه
به شماره ۰۹۳۵۸۹۶۰۵۰۳ در واتساپ  پیام دهید

Afshar.xyz

آدرس تمام رسانه ها :

