

ریاضی تجربی

معادله درجه (۲):

به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ بیان می‌گردد و روش کلی حل آن روش Δ می‌باشد.

۱) $ax^2 + bx + c = 0$

۲) $\Delta = b^2 - 4ac$

۳) $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

اگر $a + b + c = 0$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

اگر $a + c = b$ $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$

بحث در مورد تعداد ریشه‌های یک معادله درجه (۲):
 Δ را حساب کرده یکی از ۳ حالت زیر پیش می‌آید:

- $\Delta > 0$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد
- $\Delta = 0$ معادله ریشه مضاعف دارد
- $\Delta < 0$ معادله ریشه حقیقی ندارد

رابطه بین ریشه‌های یک معادله درجه (۲) بدون حل معادله:

اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، بدون حل معادله داریم:

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$ $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

نکات مهم در مورد تابع معادله درجه (۲)

- ۱- شرط اینکه ۲ ریشه یک معادله درجه ۲ هم باشند این است که $b = 0$
- ۲- شرط اینکه دو ریشه یک معادله عکس هم باشند این است که $a = c$
- ۳- شرط اینکه یکی از ریشه‌های معادله k برابر ریشه دیگر باشد این است که

$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$

۴- طریقه نوشتن یک معادله وقتی ریشه‌های آن معلوم باشد:

یک بار ۲ ریشه را جمع کرده، اسم آن را S می‌گذاریم.

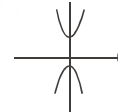
یک بار دو ریشه را ضرب کرده و P می‌نامیم.

معادله همواره به صورت مقابل است:

$x^2 - Sx + P = 0$

۵- اگر یکی از ریشه‌های معادله $m - \sqrt{n}$ باشد ریشه دیگر حتماً $m + \sqrt{n}$ است و بالعکس.

۶- شرط مختلف‌العلامت بودن دو ریشه این است که $\frac{c}{a} < 0$



۷- معادله $ax^2 + bx + c$ مفروض است معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش:

الف) قرینه ریشه‌های معادله فوق باشد:

کافی است b را قرینه کنیم، $ax^2 - bx + c = 0$

ب) معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله فوق باشد:

کافی است جای a و c را عوض کنیم، $cx^2 + bx + a = 0$

ج) معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش عکس و قرینه ریشه‌های معادله فوق باشد:

هر دو عمل بالا را با هم انجام می‌دهیم، $cx^2 - bx + a = 0$

د) معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله فوق باشد کافی است:

$ax^2 + b k x + c k^2$

۸- شرط اینکه یک تابع درجه دوم همواره مثبت باشد این است و یا همواره منفی باشد: (به ازای جمیع مقادیر x مثبت یا منفی باشد)

همواره مثبت $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ همواره منفی $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

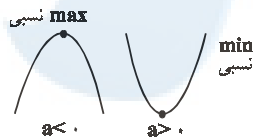
نمودارها

بررسی نمودار توابع:

۱- تابع درجه دوم: به صورت $y = ax^2 + bx + c$ بیان می‌گردد.

I - نام آن سهمی قائم است و نمودار آن به صورت روبرو است.

II - مختصات نقطه اکسترم نسبی در توابع درجه دوم

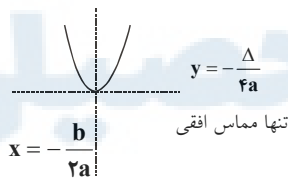


اکسترم نسبی $\begin{cases} -\frac{b}{2a} & \text{(طول اکسترم نسبی)} \\ -\frac{\Delta}{4a} & \text{(مقدار اکسترم نسبی)} \end{cases}$

III - هر تابع درجه دوم دارای یک محور تقارن به

معادله $x = -\frac{b}{2a}$ و خطی که محور تقارن را روی خود منحنی قطع

می‌کند، خط $y = -\frac{\Delta}{4a}$ است.



IV - هر تابع درجه دوم محور y را فقط و فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

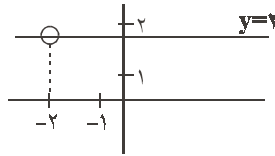
$x = 0 \Rightarrow y = c$ تلاقی با محور y ها

$y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ تلاقی با محور x ها

- $\Delta > 0 \rightarrow$ محور x ها در ۲ نقطه قطع می‌کند
- $\Delta = 0 \rightarrow$ بر محور x ها مماس است
- $\Delta < 0 \rightarrow$ محور x ها را قطع نمی‌کند

ریاضی تجربی

$$ad - bc = 0$$

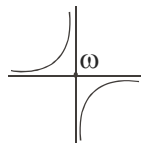


۳- هر تابع هموگرافیک دارای ۲ مجانب است یکی افقی و یکی قائم .

نکته مهم: مرکز تقارن در تابع هموگرافیک همان محل تلاقی مجانب‌هاست.

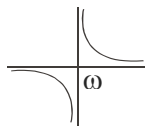
۴- نمودار تابع هموگرافیک: بستگی به $ad - bc$ دارد:

الف) اگر $ad - bc > 0$ مثبت بود تابع در ربع دوم و چهارم مجانب‌ها قرار می‌گیرد.

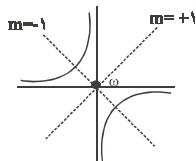


و تابع در یک طرف قائم خود صعودی است.

ب) اگر $ad - bc < 0$ منفی بود تابع در ربع اول و سوم مجانب‌ها قرار می‌گیرد.



۵- هر تابع هموگرافیک دارای ۲ محور تقارن عمود بر هم به شیب‌های ± 1 است. که هر ۲ از مرکز تقارن عبور می‌کنند.



۶- هرگاه مبدأ مختصات را از \circ به مرکز تقارن انتقال دهیم ضابطه

تابع هموگرافیک در دستگاه جدید به صورت $xy = k$ می‌گردد

$$k = -\frac{ad - bc}{c^2}$$

مشقی: هرگاه تابع f در نقطه x_0 پیوسته باشد مشتق آن مطابق فرمول‌های زیر محاسبه می‌گردد:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (h = \Delta x)$$

نکته: تمام تعاریف مشتق منتهی به \circ می‌شود و باید تمام آنها را از راه هوبیتال حل کنید.

مشتق چپ و راست:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \quad \text{مشتق راست}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \quad \text{مشتق چپ}$$

زمانی تابع $f(x)$ در نقطه x_0 مشتق دارد که:

۱ پیوسته باشد

۲ مشتق چپ و راست موجود، **متناهی** و با هم برابر باشد.

بی‌نهایت نشود

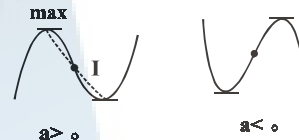
۲- **تابع درجه سوم:** به صورت $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بیان می‌گردد.

۱- هر تابع درجه سوم دارای یک نقطه عطف به طول $x_I = -\frac{b}{3a}$

است. که همان مرکز تقارن منحنی است.

۲- برای بررسی نمودار تابع درجه سوم یکبار مشتق بگیرید مساوی صفر قرار دهید.

الف) مشتق دو ریشه دارد:

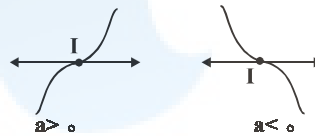


این تابع ۲ اکسترمم و یک نقطه عطف دارد و نقطه عطف وسط پاره‌خط

بین y_{min} و y_{max} است.

$$x_I = \frac{x_{min} + x_{max}}{2}$$

ب) مشتق یک ریشه دارد «ریشه مضاعف»: اکسترمم ندارد و یک عطف دارد.

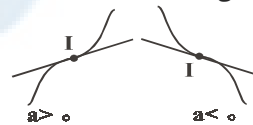


و مماس در عطف موازی محور x ها است «افقی است»

ج) مشتق ریشه ندارد.

اکسترمم ندارد و یک عطف دارد.

مماس در عطف مایل است.

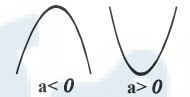


۳- **تابع دو مجذوری:** $y = ax^4 + bx^2 + c$

برای نمودار آن یکبار مشتق بگیرید مساوی صفر قرار دهید.

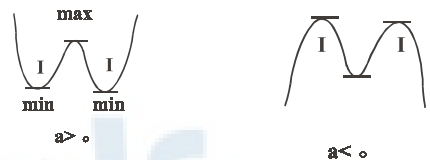
$$y' = 4ax^3 + 2bx = 0$$

$$2x(2ax^2 + b) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$



شکل فقط یک اکسترمم دارد. \rightarrow اگر $a, b > 0$

۲ اکسترمم و ۲ عطف دارد. \rightarrow اگر $a, b < 0$



۴- **تابع هموگرافیک:** به صورت $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ بیان می‌گردد.

(۱) باید $C \neq 0$ باشد اگر $C = 0$ شود تابع تبدیل به خط راست به

معادله $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ می‌گردد.

(۲) باید $ad - bc \neq 0$ باشد، اگر $ad - bc = 0$ گردد تابع تبدیل به تابع ثابت می‌شود. که در ریشه مخرج تو خالی است.

$$y = \frac{2x + 4}{x + 2} = \frac{2(x + 2)}{(x + 2)} \Rightarrow y = 2$$

ریاضی تجربی

فرمول‌های مشتق

۱- مشتق توابع جبری :

$$1) y = a \rightarrow y' = 0$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$2) y = ax \rightarrow y' = a$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x}} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3) y = ax^n \rightarrow y' = nax^{n-1}$$

$$y = 2x^5 \rightarrow y' = 10x^4$$

$$4) y = u^n \rightarrow y' = nu'u^{n-1}$$

$$y = (2x^2 - 1)^4 \rightarrow y' = 4(2x)(2x^2 - 1)^3$$

$$5) y = \sqrt[n]{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$y = \sqrt[5]{x^2 - x^2} \rightarrow y' = \frac{2x - 2x}{5\sqrt[5]{(x^2 - x^2)^4}}$$

$$6) y = \sqrt[n]{u^m} \rightarrow y' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

$$y = \sqrt{x^2} \rightarrow y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}}$$

قضایا :

$$I) y = f \pm g \pm h \pm \dots$$

$$y' = f' \pm g' \pm h' \pm \dots$$

$$II) y = f \times g \rightarrow y' = f'g + g'f$$

$$III) y = \frac{f}{g} \rightarrow y' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

هر جا گفتیم u یعنی یک تابع بر حسب x

۳- مشتق توابع براکتی :

ابتدا حتماً پیوستگی را بررسی کنید تابع از هر طرفی که پیوسته نباشد از آن طرف مشتق پذیر نیست و برای محاسبه مشتق آن فقط مقدار براکت را در نقطه داده شده به دست آورید و سپس از تابع مشتق بگیرید.

نکته مهم: تابع $y = g(x)[x]$ در $x_0 \in Z$ زمانی مشتق پذیر است که x_0 ریشه مضاعف $g(x)$ باشد.

۴- مشتق توابع چند ضابطه‌ای

ابتدا حتماً پیوستگی را بررسی کنید تابع از هر طرفی که پیوسته نباشد از آن طرف مشتق پذیر نیست و برای مشتق گیری با توجه به دامنه روبروی آنها حتماً مشتق چپ و راست را جداگانه حساب کنید.

۵- مشتق توابع مرکب

$$1) y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$$

$$y = f(\sin x) \rightarrow y' = \cos x f'(\sin x)$$

$$I) y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x) f'(g(x))$$

$$II) y = g \circ f(x) \Rightarrow y' = f'(x) g'(f(x))$$

مشتق تابع ضمنی: هر تابع به صورت $f(x, y) = 0$ را ضمنی گویند که مشتق آن به صورت زیر است :

$$y'_x = -\frac{\text{مشتق نسبت به } x}{\text{مشتق نسبت به } y}$$

۶- مشتق تابع نامی و لگاریتمی

$$1) y = e^u \rightarrow y' = u' \times e^u$$

$$2) y = \ln |u| \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

نکات مهم در مشتق :

نکته ۱: هر تابع را می‌توانید قبل از مشتق گیری تا حد امکان ساده کنید.

نکته ۲: اگر تابع داده شده بین جملاتش فقط ضرب یا تقسیم باشد و مشتق در یک نقطه را بخواهند اگر به ازای نقطه داده شده فقط یکی از جملات صفر شود فقط از جمله صفر شده در جای خود مشتق بگیرید و بقیه جملات در جای خود نوشته شود.

مثال: اگر $f(x) = x^2(x^2 + 1)(2x - 2)$ مطلوبست $f'(1)$

$$f'(x) = x^2(x^2 + 1) \times 2$$

$$f'(1) = 1(1+1) \times 2 = 4$$

«مشتق مرتبه n ام»

$$y' \rightarrow y'' \rightarrow y''' \rightarrow y^{(4)} \rightarrow \dots y^{(n)}$$

$$1) y = \frac{k}{ax+b} \rightarrow y^{(n)} = \frac{k(-1)^n \times n! \times a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$2) y = \sin ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$$

$$y = \cos ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2})$$

نکته: برای مشتق مرتبه n ام Sin، Cos، a^n را می‌نویسیم و برای نسبت مشتق n ام کافیست n را بر ۴ تقسیم کنید و به تعداد باقی‌مانده مشتق بگیرید.

۲- مشتق توابع مثلثاتی:

$$1) y = \sin u \rightarrow y' = u' \cos u$$

$$2) y = \cos u \rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$3) y = \tan u \rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$$

$$4) y = \cot u \rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$$

$$5) y = \sin^n u \rightarrow y' = nu' \cos u \sin^{n-1} u$$

$$6) y = \cos^n u \rightarrow y' = -nu' \sin u \cos^{n-1} u$$

$$7) y = \tan^n u \rightarrow y' = nu'(1 + \tan^2 u) \tan^{n-1} u$$

$$8) y = \cot^n u \rightarrow y' = -nu'(1 + \cot^2 u) \cot^{n-1} u$$

نکته: هرگاه کمان خود یک تابع مثلثاتی باشد بهترین روش برای مشتق گیری اینست که از داخل به بیرون مشتق بگیرید.

۳- مشتق تابع قدر مطلق

$$y = |u| \rightarrow y' = \frac{u' \times u}{|u|}$$

نکته: هرگاه مشتق تابع قدر مطلق را در یک نقطه بخواهیم ابتدا نقطه را داخل قدر مطلق جایگذاری کنید اگر داخل قدر مطلق مثبت شد خود عبارت و اگر منفی شد قرینه عبارت را بیرون می‌آوریم و سپس مشتق می‌گیریم و اگر صفر شد باید در آن نقطه مشتق چپ و راست جداگانه تحلیل گردد.

نکته مهم: توابع قدر مطلق به ازای ریشه‌های ساده، (توان یک) داخل قدر مطلق مشتق پذیر نیستند مگر آنکه به ازای این ریشه ضرب قدر مطلق صفر شود.

ریاضی تجربی

کاربرد مشتق :

معادله مماس و قائم بر نمودار f از نقطه‌ای روی منحنی: نیاز به اطلاعات زیر داریم:

I : نقطه روی منحنی: $A(x_0, y_0)$

II : شیب خط که همواره داریم در نقطه تماس $m = y'$ مماس و معادله خط به صورت $y - y_0 = m(x - x_0)$

توجه: $m = -\frac{1}{m}$ قائم

نکته: هرگاه گفته شود خط مماس بر منحنی موازی محور X هاست یعنی

$m = y' = 0$

نکته: هرگاه گفته شود خط مماس بر منحنی موازی محور Y ها یعنی

$m = y' = \infty$ مخرج = 0

وضعیت دو منحنی نسبت به هم دو منحنی را با هم تلاقی می‌دهیم.

الف) معادله تلاقی ریشه ندارد. در این حالت دو منحنی همدیگر را قطع نمی‌کنند.

ب) معادله تلاقی ریشه مضاعف دارد. در این حالت دو منحنی بر هم مماسند.

ج) معادله تلاقی ریشه ساده دارد در این حالت دو منحنی همدیگر را قطع می‌کنند.

نکته خیلی مهم: هرگاه تستی گفته شود دو منحنی بر هم مماسند یا خط بر منحنی مماس است معادله تلاقی آنها باید ریشه مضاعف داشته باشد.

از طرفین مشتق بگیرید.

1) ریشه مضاعف از درجه 2 می‌توانید $\Delta = 0$ قرار دهید.

زاویه بین دو منحنی یا یک خط و یک منحنی :

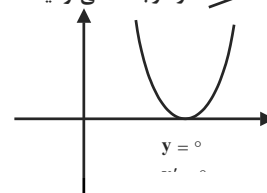
1) ابتدا دو تابع را تلاقی می‌دهیم تا طول نقطه تلاقی بدست آید.

2) شیب هر کدام را در نقطه تلاقی حساب می‌کنیم m_1, m_2 می‌نامیم.

3) از رابطه $\text{tg}\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ زاویه بین دو منحنی α بدست می‌آید.

نکته: هرگاه گفته شود منحنی بر محور X ها مماس است. $y = 0$ باید ریشه مضاعف داشته باشد.

مشتق بگیرید در درجه 2 می‌توانید $\Delta = 0$ قرار دهید.



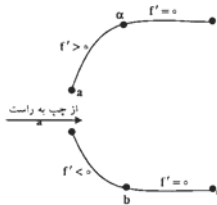
توابع صعودی و نزولی ثابت :

تابع پیوسته f را در فاصله (a, b)

الف) صعودی گویند هرگاه: $f' \geq 0$ و اکیداً صعودی گویند هرگاه: $f' > 0$

ب) نزولی گویند هرگاه: $f' \leq 0$ و اکیداً نزولی گویند هرگاه: $f' < 0$

ج) ثابت گویند هرگاه: $f' = 0$

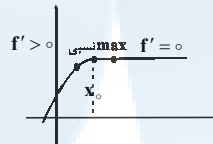
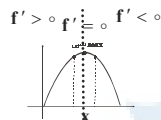


اکیداً صعودی $(a, b) \rightarrow f' > 0 \rightarrow$
ثابت $(b, c) \rightarrow f' = 0 \rightarrow$
صعودی $(a, c) \rightarrow f' \geq 0 \rightarrow$

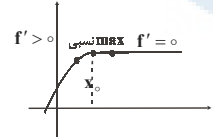
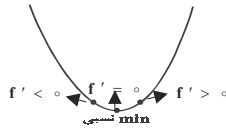
اکیداً نزولی $(a, b) \rightarrow f' < 0 \rightarrow$
ثابت $(b, c) \rightarrow f' = 0 \rightarrow$
نزولی $(a, c) \rightarrow f' \leq 0 \rightarrow$

نقاط اکسترم نسبی :

1) max نسبی: نقطه‌ایست که نسبت به نقاط مجاور خود عرض بیشتر یا مساوی داشته باشد.



2) min نسبی: نقطه‌ایست که نسبت به نقاط مجاور خود عرض کمتر یا مساوی داشته باشد.



نکته مهم: اگر x_0 اکسترم نسبی باشد.

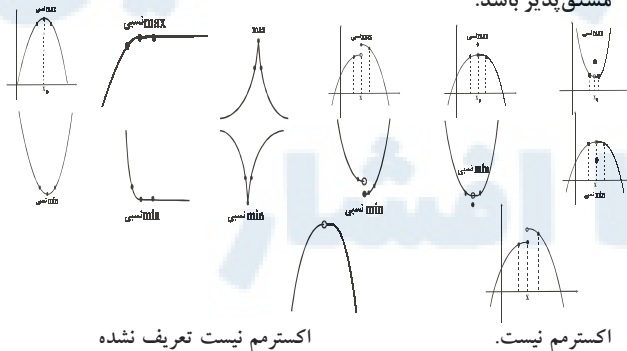
1) تابع باید در x_0 تعریف شده باشد.

2) علامت مشتق در طرفین آن عوض می‌شود.

3) مشتق در این نقطه یا صفر است یا اصلاً وجود ندارد.

نکات مهم در مورد اکسترم های نسبی

1) لزومی ندارد که تابع در نقطه اکسترم نسبی پیوسته یا مشتق پذیر باشد.

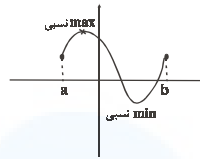


اکسترم نیست تعریف نشده

اکسترم نیست

ریاضی تجربی

(۲) دو سر تابع هیچ گاه اکسترمم نسبی نمی شوند.

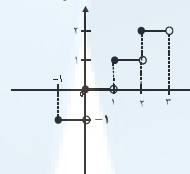


(۳) تابع ثابت تمام نقاطش هم max نسبی است و هم min نسبی



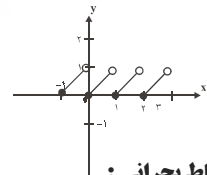
(۴) تابع $y = [x]$

اگر $\begin{cases} x_0 \in Z \Rightarrow \max x_0 \\ x_0 \notin Z \Rightarrow \min \max x_0 \end{cases}$



(۵) تابع $y = x - [x]$

$\begin{cases} x_0 \in Z \rightarrow \min x_0 \text{ نسبی است و مطلق} \\ x_0 \notin Z \rightarrow \max x_0 \text{ اکسترمم نیست} \end{cases}$



نقاط بحرانی:

نقطه x_0 متعلق به دامنه f را بحرانی گویند وقتی مشتق در این نقطه یا صفر شود و یا وجود نداشته باشد.

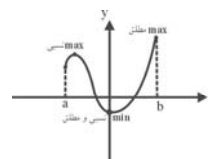
در توابع چند ضابطه‌ای مشتق‌پذیری در نقطه مرزی بررسی شود اگر مشتق‌پذیر نبود بحرانی است.

نکات مهم در نقاط بحرانی

- ۱- دو سر تابع به شرطی که در دامنه باشند بحرانی هستند
- ۲- تمام اکسترمم‌ها بحرانی هستند ولی هر نقطه بحرانی‌ای اکسترمم نیست.
- ۳- هر جا تابع پیوسته نباشد بحرانی است.

اکسترمم‌های مطلق:

- (۱) max مطلق: نقطه‌ایست که نسبت به تمام نقاط موجود در تابع عرض بیشتری داشته باشد.
 - (۲) min مطلق: نقطه‌ایست که نسبت به تمام نقاط موجود در تابع عرض کمتری داشته باشد.
- توجه ۱: دو سر تابع می‌توانند اکسترمم مطلق باشند
توجه ۲: هرگاه نقطه‌ای که به عنوان اکسترمم مطلق انتخاب می‌گردد تو خالی باشد ($\notin D_f$) می‌گوییم اکسترمم مطلق نداریم.



روش به دست آوردن اکسترمم‌های مطلق در یک فاصله $[a, b]$:

- ۱- نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم.
- ۲- نقاط به دست آمده و دو طرف فاصله را در تابع اصلی قرار می‌دهیم آنکه مقدارش بیشتر شد max مطلق و آنکه کمتر شد min مطلق است.

طریقه به دست آوردن طول اکسترمم نسبی:

ریشه‌های ساده طول نقطه اکسترمم نسبی هستند
ریشه‌های مضاعف اکسترمم نیستند و عطف می‌باشند
آزمون مشتق دوم در تعیین max یا min بودن اکسترمم نسبی:
 $f''(x_0)$ را به دست آورده و x_0 را در آن جاگذاری می‌کنیم.

$f''(x_0) > 0 \rightarrow x_0$ min نسبی است

$f''(x_0) < 0 \rightarrow x_0$ max نسبی است

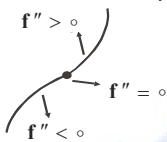
$f''(x_0) = 0 \rightarrow$ با این آزمون قابل بررسی نیست

جهت تقعر و نقطه عطف:

$f''(x)$ را محاسبه نموده و در هر فاصله‌ای که:

(۱) $f''(x) > 0$ تقعر رو به بالا است

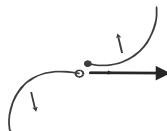
(۲) $f''(x) < 0$ تقعر رو به پایین است.



عطف: نقطه‌ای است که جهت تقعر تابع در این نقطه عوض می‌شود.
توجه: تابع باید در نقطه عطف پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

چون پیوسته نیست \leftarrow عطف نیست

چون پیوسته نیست \leftarrow عطف نیست



نکته مهم: برای به دست آوردن طول نقطه عطف

فقط ریشه‌های ساده طول نقطه عطف است.

$y'' = 0 \rightarrow$ برای عطف
ریشه‌های مضاعف عطف نیست.

نکته: برای تعیین اینکه تابع در چه فاصله‌ای تقعرش رو به بالا و در چه فاصله‌ای تقعرش رو به پایین است مشتق دوم تابع را به دست آورده تعیین علامت می‌کنیم.

چه عباراتی در یک تست ما را متوجه نقطه عطف می‌کند؟

- ۱- هرگاه گفته می‌شود جهت تقعر تابع در این نقطه عوض می‌شود
- ۲- هرگاه گفته شود مشتق دوم تابع در این نقطه با تغییر علامت صفر می‌شود.

- ۳- هرگاه گفته شود مماس بر منحنی در این نقطه از منحنی عبور می‌کند.



نکته مهم:

خواص مشترک اکسترمم نسبی و عطف:

- ۱- مختصات نقطه اکسترمم و عطف در منحنی صدق می‌کند.
- ۲- طول اکسترمم نسبی مشتق اول را صفر می‌کند و طول عطف مشتق دوم را صفر می‌کند.

ریاضی تجربی

نکته: نامنفی‌ها در ریاضی بر ۳ نوع می‌باشند: I. رادیکال‌ها با فرجه‌ی زوج II. عبارتهای با توان زوج III. قدرمطلق‌ها
نکته: اگر جمع چند نامنفی صفر شود به این مفهوم است که تک تک آنها برابر صفر است.

چند ضابطه‌ای

چندضابطه‌ای‌ها به شرطی تابع است که: (۱) هر ضابطه در دامنه‌ی روبه‌روی خود تابع باشد.

(۲) دامنه‌ها عضوهای مشترک نداشته باشند. اگر دامنه‌ها در یک عضو مشترک شدند به شرطی تابع است که به ازای آن عضو مشترک هر دو ضابطه y ‌های مساوی دهد.

«دامنه» حدود تغییرات x

(۱) دامنه‌ی توابع خطی R است.

(۲) **دامنه‌ی توابع کسری:** مخرج را برابر صفر قرار بده، دامنه می‌شود: $\leftarrow \{ \text{ریشه‌های مخرج} \} - R$

نکته: اگر مخرج ریشه نداشته، دامنه R است.

(۳) **دامنه‌ی توابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد:** فرجه‌ی فرد را در نظر بگیرید. هر تابعی که داخل آن است مدنظر است.

(۴) **دامنه‌ی توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج:** زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

توجه: اگر رادیکال در مخرج بود فقط بزرگتر از صفر قرار دهید.

۵- دامنه‌ی توابع مثلثاتی:

الف) دامنه‌ی \sin و \cos همان دامنه‌ی کمان است.

ب) دامنه‌ی \cot و tg

$$\xrightarrow{\text{دامنه } \text{tg}} D = R - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \mid \text{کمان} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{دامنه } \text{cot}} D = R - \{ \text{کمان} = k\pi \}$$

۶- **دامنه‌ی توابع لگاریتمی:** لگاریتم $\log_a b$ دارای سه

$$\left. \begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{array} \right\} \text{ شرط است که اشتراک این سه شرط دامنه‌ی تابع است.}$$

۷- **دامنه‌ی توابع چندضابطه‌ای:** دامنه‌ی تک تک آنها را حساب کنید و بین دامنه‌ها اجتماع بگیرید.

۸- **دامنه‌ی توابع قدرمطلق و جزءصحیح:** ربطی به قدرمطلق و جزءصحیح ندارد و دامنه‌ی تابع داخلی آنها را حساب کنید.

تساوی دو تابع: (۱) دامنه‌هایشان با هم مساوی باشد.

(۲) ضابطه‌ها با هم مساوی باشد.

اعمال روی توابع

الف) چهار عمل اصلی روی توابع

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$$

$$D_{f \pm g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{g(x) = 0\}$$

نکته مهم: در تمام توابع قدر مطلق و چند ضابطه‌ای هر سؤال‌ی مورد کاربرد مشتق مطرح شد حتماً نمودار آنرا رسم نمایید.

نکته مهم: در توابع به صورت $y = (ax + b)^n \times g(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{طول نقطه عطف } x = -\frac{b}{a} \Rightarrow n \text{ فرد} \\ \text{اکسترم نسبی است } x = -\frac{b}{a} \Rightarrow n \text{ زوج} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{نسبی} \\ \min \quad g\left(-\frac{b}{a}\right) > 0 \\ \max \quad g\left(-\frac{b}{a}\right) < 0 \end{array} \right.$$

نکته: مقایسه نمودار f با f' :

۱- هر جا f' بالای محور x ها بود تابع f صعودی و هر جا f' پایین، محور x ها بود تابع f نزولی است.

۲- نقاطی که مشتق در آنها صفر است (تلاقی مشتق با محور x ها) و یا مشتق وجود ندارد (تابع مشتق تعریف نشده) نقاط بحرانی f است.

۳- نقاطی که مشتق در آنها صفر است یا وجود ندارد به شرط اینکه حتماً تغییر علامت داشته باشیم، نقاط اکسترم نسبی f است.

۴- هر جا f' صعود کند f رو به بالا و هر جا f' نزول کند f رو به پایین است.

۵- \min و \max هایی که در نمودار f' مشاهده می‌گردد نقاط عطف f است.

تابع

زوج مرتب: هر دوتایی به صورت (a, b) را زوج مرتب گویند که ترتیب قرار گرفتن آنها مهم باشد.

$$(a, b) \neq (b, a)$$

$$\left. \begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array} \right\} \text{توجه: اگر } (a, b) = (c, d) \text{ آنگاه}$$

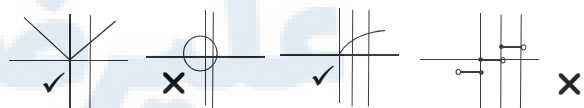
تابع:

I. **از دیدگاه زوج مرتبی:** مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایز عضوهای اول مساوی نداشته باشند.

نکته ۱: تک عضوها تابع هستند. $\{(-1, 2)\}$

نکته ۲: هرگاه دو زوج مرتب عضوهای اولشان مساوی باشند به شرطی تابع است که عضوهای دوم هم مساوی باشند.

II. **از دیدگاه نموداری:** نموداری تابع است که به ازای هر خط موازی محور y ها تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



III. **از دیدگاه ضابطه‌ای:** ضابطه‌ای تابع است که به ازای هر x دلخواه حداکثر یک y نتیجه دهد.

نتیجه: اگر y داخل قدرمطلق یا براکت یا دارای توان زوج باشد معمولاً تابع نیست.

ریاضی تجربی

(ب) ترکیب توابع:

$$\begin{aligned} \text{fog}(x) &= f(g(x)) \\ \text{gof}(x) &= g(f(x)) \\ \text{fof}(x) &= f(f(x)) \\ \text{gog}(x) &= g(g(x)) \\ D_{\text{fog}(x)} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ D_{\text{gof}(x)} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \end{aligned}$$

اعمال روی توابع زوج مرتبی

عمل خواسته شده روی مؤلفه دوم دامنه مشترک انجام می‌شود.

نکته ۱: هرگاه Fog و g معلوم باشند و F را بخواهد کافیست $t = g(x)$ فرض کرده و x را برحسب t به دست آورده و جایگذاری کنید.

نکته ۲: هرگاه از $t = g(x)$ نتوان x را برحسب t محاسبه نمود باید در fog عبارت g را تولید کنیم.

نکته ۳: اگر Fog و F معلوم و g را بخواهد مطابق مثال زیر عمل کنید.

مثال ۱-: اگر $Fog(x) = 2x - 1$ و $F(x) = 3x + 4$ مطلوبست $g(x)$:

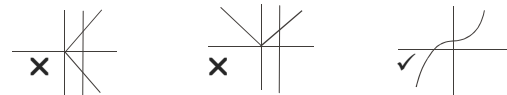
$$\begin{aligned} F(g(x)) &= 2x - 1 \\ F(x) = 3x + 4 &\Rightarrow F(g(x)) = 3g(x) + 4 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} 3g(x) + 4 = 2x - 1 \\ g(x) = \frac{2x - 5}{3} \end{cases}$$

تابع یک به یک:

(I) از دیدگاه زوج مرتبی: علاوه بر دارا بودن شرط تابع نباید مؤلفه‌های دوم با هم مساوی باشند.

(II) از دیدگاه ضابطه‌ای: $F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(III) از دیدگاه نموداری: علاوه بر دارا بودن شرط تابع هر خط که موازی محور x ها رسم گردد باید حداکثر تابع را در یک نقطه قطع نماید.



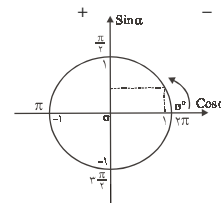
نکته ۱: اگر f و g به یک باشند fog و gof و fof و gog به یک هستند.

نکته ۲: تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ یک به یک است.

دایره مثلثاتی:

دایره‌ای است به شعاع یک که مرکز آن انتهای سمت راست قطر افقی است. جهت حرکت خلاف جهت عقربه‌های ساعت است و اگر برعکس این جهت حرکت کنیم زاویه منفی می‌شود.

	Sin	Cos	tg	Cot
ناحیه اول	+	+	+	+
ناحیه دوم	+	-	-	-
ناحیه سوم	-	-	+	+
ناحیه چهارم	-	+	-	-



نسبت‌های مثلثاتی $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, $-\alpha$

نسبت تغییر نمی‌کند ولی علامت آن با توجه به ناحیه ممکن است عوض شود.

نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$

نسبت عوض می‌گردد و علامت با توجه به ناحیه تعیین می‌شود.

نکته: نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$

در Sin و Cos اگر k فرد بود از k صرفنظر کنید. اگر k زوج بود از $k\pi$ صرفنظر کنید.

در tg و cot چه k فرد و چه k زوج از $k\pi$ صرفنظر نمایید. **فرمول‌های مثلثاتی:**

$$1) \text{Sin}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \begin{cases} \text{Sin}^2 \alpha = 1 - \text{Cos}^2 \alpha \\ \text{Cos}^2 \alpha = 1 - \text{Sin}^2 \alpha \end{cases}$$

$$2) \text{tg}^n \alpha = \frac{\text{Sin}^n \alpha}{\text{Cos}^n \alpha}, \quad \text{Cot}^n \alpha = \frac{\text{Cos}^n \alpha}{\text{Sin}^n \alpha}$$

$$3) \text{tg}^n \alpha \times \text{Cot}^n \alpha = 1 \rightarrow \begin{cases} \text{tg}^n \alpha = \frac{1}{\text{Cot}^n \alpha} \\ \text{Cot}^n \alpha = \frac{1}{\text{tg}^n \alpha} \end{cases}$$

$$4) 1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{Cos}^2 \alpha}, \quad 1 + \text{Cot}^2 \alpha = \frac{1}{\text{Sin}^2 \alpha}$$

$$5) \text{Sin}^2 \alpha - \text{Cos}^2 \alpha = \text{Sin}^2 \alpha - \text{Cos}^2 \alpha$$

$$6) \text{Sin}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = 1 - 2\text{Sin}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha$$

بسط $(a \pm b)$

$$\text{Sin}(a \oplus b) = \text{Sin} a \text{Cos} b + \text{Cos} a \text{Sin} b$$

$$\text{Sin}(a - b) = \text{Sin} a \text{Cos} b - \text{Cos} a \text{Sin} b$$

$$\text{Cos}(a \oplus b) = \text{Cos} a \text{Cos} b - \text{Sin} a \text{Sin} b$$

$$\text{Cos}(a - b) = \text{Cos} a \text{Cos} b + \text{Sin} a \text{Sin} b$$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg} a + \text{tg} b}{1 - \text{tg} a \text{tg} b}$$

$$\text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg} a - \text{tg} b}{1 + \text{tg} a \text{tg} b}$$

نسبت‌های $2x$ و $3x$

$$\text{Sin} 2x = 2\text{Sin} x \text{Cos} x \Rightarrow \text{Sin} x \text{Cos} x = \frac{1}{2} \text{Sin} 2x$$

$$\text{Cos} 2x = \text{Cos}^2 x - \text{Sin}^2 x = 2\text{Cos}^2 x - 1 = 1 - 2\text{Sin}^2 x$$

$$\text{tg} 2x = \frac{2\text{tg} x}{1 - \text{tg}^2 x}$$

$$\text{Sin} 3x = 3\text{Sin} x - 4\text{Sin}^3 x$$

$$\text{Cos} 3x = 4\text{Cos}^3 x - 3\text{Cos} x$$

فرمول‌های طلایی:

$$\text{Cos}^2 ax = \frac{1 + \text{Cos} 2ax}{2}$$

$$\text{Sin}^2 ax = \frac{1 - \text{Cos} 2ax}{2}$$

ریاضی تجربی

فرمول مهم :

$$\int u^n u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int (2x+1)(x^2+x+1)^5 dx = \frac{(x^2+x+1)^6}{6} + c$$

۲) هرگاه انتگرال داده شده به صورت کسری باشد که درمخرج یک عبارت رادیکالی ۲ جمله‌ای داشته باشیم حتماً صورت و مخرج را در مزدوج رادیکال ضرب کنید و سپس انتگرال بگیرید.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \int \frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x+2-2} dx$$

$$= \int (x+2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} = \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}x + c$$

۳) انتگرال \sin^2, \cos^2 : حتماً از دو فرمول مثلثاتی زیر استفاده کنید :

$$\sin^2 ax = \frac{1 - \cos 2ax}{2} \quad \cos^2 ax = \frac{1 + \cos 2ax}{2}$$

۴) انتگرال \cot^2, \tan^2 : داخل انتگرال را یکبار بعلاوه یک و یکبار منهای یک کنید و سپس انتگرال بگیرید.

$$\int \cot^2 \frac{x}{3} dx = \int \cot \frac{x}{3} + 1 - 1 = \frac{-1}{1} \cot \frac{x}{3} - x + c$$

۵) انتگرال \sin^3, \cos^3 :

یک توان کم کنید و توان زوج حاصل را با استفاده از فرمول اولیه

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 ax &= 1 - \sin^2 ax \\ \sin^2 ax &= 1 - \cos^2 ax \end{aligned} \right\} \text{مثلثات بنویس.}$$

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x = \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \int (\sin x - \sin x \cos^2 x) dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

۶) چه انتگرالهایی جواب آنها \ln است. $\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + c$

انتگرال‌های کسری که مشتق مخرج در صورت وجود داشته باشد جواب \ln مخرج است.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln |x^2-1| + c$$

۷) انتگرال \cot, \tan آنرا به فرم \sin, \cos بنویس که جواب \ln است.

$$\int \tan 2x dx = \frac{-1}{-2} \int \frac{-2 \sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + c$$

۸) انتگرالی که در مخرج \sin^2 یا \cos^2 باشد : از دو فرمول مثلثاتی زیر استفاده می‌شود.

$$\frac{1}{\sin^2 ax} = 1 + \cot^2 ax$$

$$\frac{1}{\cos^2 ax} = 1 + \tan^2 ax$$

$$1 - \cos(u) = 2 \sin^2 \frac{u}{2}$$

$$1 + \cos(u) = 2 \cos^2 \frac{u}{2}$$

معادلات محاسباتی (حالت‌های کلی) :

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

$$1) \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$2) \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$3) \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$4) \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 x &= \sin^2 \alpha \\ \cos^2 x &= \cos^2 \alpha \\ \tan^2 x &= \tan^2 \alpha \\ \cot^2 x &= \cot^2 \alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

فرمول‌های انتگرال :

$$1) \int a dx = ax + c$$

$$2) \int ax^n dx = a \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

قضایا :

$$I) \int aF(x) dx = a \int F(x) dx$$

$$II) \int (f \pm g \pm h \pm \dots) dx = \int f dx \pm \int g dx \pm \int h dx + \dots$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$$

نکته مهم : در حل انتگرال هر جا رادیکال دیدید به صورت توان کسری

بنویسید. $(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}})$ و اگر متغیر در مخرج بود آنرا به این

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^2 dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c$$

انتگرال مثلثاتی :

$$1) \int a \sin kx dx = -a \frac{1}{k} \cos kx + c$$

$$2) \int a \cos kx dx = a \frac{1}{k} \sin kx + c$$

$$3) \int a(1 + \tan^2 kx) dx = a \frac{1}{k} \tan kx + c$$

$$4) \int a(1 + \cot^2 kx) dx = -a \frac{1}{k} \cot kx + c$$

روش‌های انتگرال گیری :

۱) عبارت‌های تواندار زمانی انتگرال دارند که بدون در نظر گرفتن مشتق پایه در کنارشان وجود داشته باشد.

ریاضی تجربی

فرم ضمنی معادله دایره:

به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است که:

I: ضریب x^2 و y^2 باید یک باشد. اگر دو عدد برابر بود تمام معادله را بر آن عدد تقسیم کنید و اگر دو عدد نابرابر بود دیگر دایره نیست.

II: مختصات مرکز از روی فرم ضمنی

مشتق نسبت به $x = 0$
مشتق نسبت به $y = 0$

III: اندازه شعاع از روی فرم ضمنی $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

III: فرم ضمنی بالا معادله خانواده دایره است که این خانواده عبارتند از: 1: دایره 2: نقطه 3: تهی که برای تشخیص:

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow \text{دایره}$$

$$a^2 + b^2 - 4c < 0 \Rightarrow \text{تهی}$$

$$a^2 + b^2 - 4c = 0 \Rightarrow \text{نقطه}$$

وضعیت نقطه نسبت به دایره

برای بررسی وضعیت نقطه (x_0, y_0) نسبت به دایره کافیست مختصات (x_0, y_0) را در دایره قرار دهید و حاصل را $f(x_0, y_0)$ بنامید.

1) $f(x_0, y_0) > 0$ نقطه خارج دایره



2) $f(x_0, y_0) = 0$ نقطه روی دایره



3) $f(x_0, y_0) < 0$ نقطه داخل دایره



نکته مهم: 1) از هر نقطه خارج دایره 2 قطعه مماس می توان بر دایره رسم نمود که طول آن برابر است با:

$$\sqrt{f(x_0, y_0)} = \text{طول قطعه مماس}$$

2) از هر نقطه روی دایره می توان یک خط مماس رسم نمود.

3) از هر نقطه داخل دایره نمی توان مماس بر دایره رسم نمود ولی بی شمار وتر از این نقطه می گذرد.

$$\text{طول کوچک ترین وتر} = 2\sqrt{f(x_0, y_0)}$$

قطر = طول بزرگترین وتر

به دست آوردن کوتاهترین و بلندترین فاصله یک نقطه نسبت به یک دایره

الف) نقطه خارج دایره باشد.

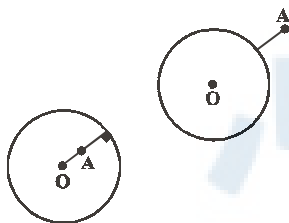
$$\text{کمترین} = |AO - R|$$

$$\text{بیشترین} = |AO + R|$$

ب) نقطه داخل دایره باشد.

$$\text{کمترین} = |R - OA|$$

$$\text{بیشترین} = |OA + R|$$



1) وضعیت خط نسبت به دایره $OH > R \Rightarrow$ خط دایره را قطع نمی کند.



$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x) dx = \frac{-1}{1} \cot x + c$$

9) انتگرال نمایی:

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$$

$$\int e^{rx} dx = \frac{1}{r} e^{rx} + c$$

$$\int \frac{dx}{e^x} = \int e^{-x} dx = \frac{1}{-1} e^{-x} + c$$

محاسبه انتگرال معین از روی نمودار تابع: در فاصله داده شده مساحت هایی که نمودار با محور x ها اشغال می کند را محاسبه کنید و مجموع مساحت های بالای محور x ها را از تمام مساحت های پایین محور x ها کم می کنیم.

انتگرال معین از توابع قدر مطلق:

ریشه داخل قدرمطلق را به دست آورید:

الف) اگر ریشه در محدوده نباشد به محدوده کاری نداریم

ب) اگر ریشه در محدوده باشد، محدوده را با توجه به ریشه به شکل زیر تفکیک می کنیم.

$$\int_a^b = \int_a^{\text{ریشه}} + \int_{\text{ریشه}}^b$$

و در هر فاصله ابتدا عبارت را از قدرمطلق بیرون آورید و سپس انتگرال بگیرید.

مشتق گیری از انتگرال:

I) مشتق گیری از انتگرال نامعین:

$$y = \int F(x) dx \rightarrow y' = f(x)$$

II) مشتق گیری از انتگرال معین

$$y = \int_{F(x)}^{g(x)} h(t) dt \Rightarrow y' = g'(x)h(g(x)) - F'(x)h(F(x))$$

انتگرال معین

$$\int_a^b f(x) = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

خواص انتگرال معین:

$$1) \int_a^a F(x) dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx = 0$$

$$2) \int_a^b F(x) dx = -\int_b^a F(x) dx$$

$$3) \int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx$$

$$\int_1^4 = \int_1^{3/5} + \int_{3/5}^4$$

$$\text{مثال) اگر } F(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases} \text{ مطلوبست } \int_{-1}^4 F(x) dx$$

$$\int_{-1}^4 F(x) dx = \int_{-1}^1 2x dx + \int_1^4 (2x^2 - 1) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - x \right]_1^4$$

مقاطع مخروطی:

معادله کانونی دایره:

اگر مرکز دایره O و شعاع دایره R باشد معادله کانونی دایره:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

ریاضی تجربی

(1) $AA' = 2a$ قطر بزرگ

$BB' = 2b$ قطر کوچک

$FF' = 2c$ فاصله‌ی کانونی

(2) A و A' دو سر قطر بزرگ

B و B' دو سر قطر کوچک

F و F' کانون‌ها هستند که همیشه روی قطر بزرگند.

O مرکز که همیشه وسط AA' و BB' و FF' است.

(3) رابطه‌ی مهم در بیضی: $a^2 = b^2 + c^2$

(4) خروج از مرکز بیضی (e): $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

توجه: در بیضی ($e < 1$) است.

(5) طول وتر کانونی بیضی: $MN = \frac{2b^2}{a}$

(6) مساحت بیضی: $S = \pi ab$

(7) مختصات رئوس و کانون‌ها:

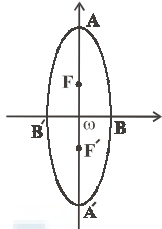
مختصات مرکز	$\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} a+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -a+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} c+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -c+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$
	$\begin{matrix} o+\alpha \\ b+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} o+\alpha \\ -b+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} c+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -c+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$	

(8) معادله‌ی کانونی بیضی افقی:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

بیضی قائم

تمام اطلاعات شماره‌های 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 بیضی افقی در مورد بیضی قائم نیز صادق است.



(7) مختصات رئوس و کانون‌ها:

مختصات مرکز	$\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} o+\alpha \\ a+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} o+\alpha \\ -a+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} c+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -c+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$
	$\begin{matrix} b+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -b+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} c+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -c+\alpha \\ o+\beta \end{matrix}$	

(8) معادله‌ی کانونی بیضی قائم «کانونی»:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

نکات: (1) در بیضی همیشه $a > b$ است پس عدد بزرگ در مخرج همیشه a^2 است.

(2) $\left. \begin{matrix} \text{عدد بزرگ در مخرج } x \text{ بود} \leftarrow \text{افقی} \\ \text{عدد بزرگ در مخرج } y \text{ بود} \leftarrow \text{قائم} \end{matrix} \right\}$

فرم ضمنی معادله‌ی بیضی

به صورت $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ است. $A \neq B$ ولی هم علامت»

(1) تشخیص نوع بیضی از روی فرم ضمنی: $\left. \begin{matrix} A > B \text{ بیضی قائم} \\ B > A \text{ بیضی افقی} \end{matrix} \right\}$

(2) $OH = R \Rightarrow$ خط بر دایره مماس است

(3) $OH < R \Rightarrow$ خط دایره را در 2 نقطه قطع می‌کند



اندازه‌ی مماس مشترک دو دایره

مماس مشترک خارجی = $\sqrt{(OO')^2 - (R - R')^2}$



مماس مشترک داخلی = $\sqrt{(OO')^2 - (R + R')^2}$



وضعیت دو دایره

1- مرکز و شعاع هر کدام را به دست آورید.

2- OO' (فاصله‌ی دو مرکز) را با $R + R'$ یا $|R - R'|$ مقایسه کنید.

1) دو دایره بیرون هم $OO' > R + R'$



2) دو دایره مماس بیرون $OO' = R + R'$



3) دو دایره مماس درون $OO' = |R - R'|$



4) دو دایره متقاطع $|R - R'| < OO' < R + R'$



5) دو دایره درون هم «متداخل» $OO' < |R - R'|$



6) دو دایره هم مرکز $OO' = 0$



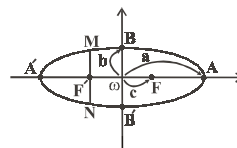
وتر مشترک

دو دایره‌ی متقاطع اگر نقاط تقاطع آنها را به هم وصل کنیم به این پاره‌خط وتر مشترک 2 دایره می‌گوییم.



(الف) معادله‌ی وتر مشترک: 2 معادله را مساوی هم قرار داده، توان 2ها حذف می‌شود. هر چه ماند معادله‌ی مشترک 2 دایره است.

(2) طول وتر مشترک: ابتدا معادله‌ی وتر مشترک را به دست آورید و معادله‌ی به دست آمده را با یکی از دو دایره تلاقی می‌دهیم تا طول نقطه‌ی تلاقی به دست آید. فاصله‌ی دو نقطه‌ی به دست آمده طول وتر مشترک است.



بیضی

1. بیضی افقی

ریاضی تجربی

۲) به دست آوردن مرکز از روی فرم ضمنی: از روش مشتق مانند دایره

۳) خروج از مرکز از روی فرم ضمنی

$$e = \sqrt{1 - \frac{B, A \text{ کوچک}}{B, A \text{ بزرگ}}}$$

۴) اگر ۳ مورد فوق را در تست بخواهد روش تستی داریم اگر هر مورد دیگر را بخواهد باید فرم ضمنی را به کانونی تبدیل کنیم.

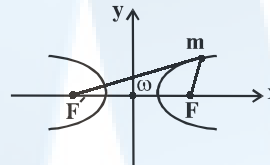
برای تبدیل فرم ضمنی به کانونی \leq از مربع کامل

۵) فرم ضمنی فوق فرم خانواده بیضی است که برای تشخیص مرکز را به دست آورده و در معادله صدق می‌دهیم.

- $f(\alpha, \beta) > 0 \Rightarrow$ تهی
- $f(\alpha, \beta) < 0 \Rightarrow$ بیضی
- $f(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow$ نقطه

هذلولی

مجموعه نقاطی از صفحه که تفاضل فاصله‌ی آنها از ۲ نقطه‌ی ثابت در صفحه یک مقدار ثابتی گردد.



$$|mF - mF'| = 2a \text{ ثابت}$$

هذلولی بر ۲ نوع است.

I. هذلولی افقی

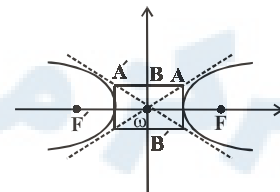
- ۱) $AA' = 2a$ قطر کانونی
- ۲) $BB' = 2b$ قطر غیر کانونی
- ۳) $FF' = 2c$ فاصله‌ی کانونی

۲) A و A' دو سر قطر کانونی یا ۲ رأس کانونی

B و B' دو سر قطر غیر کانونی

F و F' کانون‌ها که همیشه در شکم هذلولی قرار دارند.

O مرکز است که وسط AA' و BB' و FF' است.



۳) رابطه‌ی مهم هذلولی: $c^2 = a^2 + b^2$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

توجه: در بیضی ($e > 1$) است.

۵) طول وتر کانونی بیضی: $MN = \frac{2b^2}{a}$

۶) مختصات رئوس و کانون‌ها:

$\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} a+\alpha \\ \beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -a+\alpha \\ \beta \end{matrix}$	
$\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} a+\alpha \\ -\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -a+\alpha \\ -\beta \end{matrix}$	
$\begin{matrix} \alpha+\alpha \\ b+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} \alpha+\alpha \\ -b+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} c+\alpha \\ \beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -c+\alpha \\ \beta \end{matrix}$

۷) معادله‌ی کانونی هذلولی افقی:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

۸) هر هذلولی ۲ مجانب مایل دارد که محل تلاقی آنها مرکز است که معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)}{a} \pm \frac{(y-\beta)}{b} = 0$$

۹) شیب مجانب مایل در هذلولی افقی: $m = \pm \frac{b}{a}$

۱۰) فاصله‌ی کانون تا مجانب: b

۱۱) فاصله‌ی رأس کانون تا مجانب: $\frac{ab}{c}$

۱۲) مساحت مستطیل هذلولی: $S = 2ab$

فرم ضمنی هذلولی

به صورت $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ است. « A و B مختلف‌العلامه »

۱) تشخیص نوع هذلولی: $\left. \begin{matrix} A > 0 > A \text{ هذلولی قائم} \\ B > 0 > B \text{ هذلولی افقی} \end{matrix} \right\}$

۲) مرکز به روش مشتق

۳) خروج از مرکز

$$e = \sqrt{1 + \frac{B, A \text{ مثبت بین}}{B, A \text{ منفی بین}}}$$

۴) اگر $A = -B$ به این هذلولی متساوی‌القطرین گویند.

۵) اگر ۴ مورد فوق را بخواهد روش تستی دارد برای بقیه‌ی موارد باید فرم ضمنی به کانونی تبدیل شود.

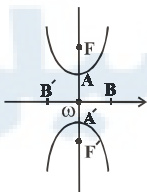
۶) معادله‌ی فوق معادله‌ی خانواده‌ی هذلولی است که برای تشخیص، مختصات مرکز را به دست آورده، در فرم ضمنی قرار دهید.

هذلولی $F(\alpha, \beta) \neq 0 \Rightarrow$

دو خط راست $F(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow$

II. هذلولی قائم

موارد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ هذلولی افقی در مورد هذلولی قائم نیز صادق است.



۶) مختصات رئوس و کانون‌ها:

$\begin{matrix} \alpha+\alpha \\ a+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} \alpha+\alpha \\ -a+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} b+\alpha \\ \beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} -b+\alpha \\ \beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} \alpha+\alpha \\ c+\beta \end{matrix}$	$\begin{matrix} \alpha+\alpha \\ -c+\beta \end{matrix}$
--	---	---	--	--	---

۷) معادله‌ی کانونی هذلولی قائم:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

۸) معادله‌ی مجانب‌های هذلولی قائم:

$$\frac{(y-\beta)}{a} \pm \frac{(x-\alpha)}{b} = 0$$

۹) شیب مجانب مایل در هذلولی قائم: $m = \pm \frac{a}{b}$

ریاضی تجربی

تبدیل یا جایگشت:

نکات مهم در تبدیل:

۱- نماد فاکتوریل به صورت $(n!)$ می باشد و به مفهوم زیر است:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots \times 1 \quad 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

نکته: برطبق قرارداد

$$0! = 1 \quad 1! = 1$$

تبدیل که یک انتخاب r تایی از یک مجموعه n تایی با در نظر گرفتن جایجایی است مطابق فرمول زیر بیان می گردد.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

n شی متمايز را به چند طریق می توان در یک ردیف در کنار هم قرار داد؟ $n!$

تبدیلات یکی در میان

حالت (۱): اعضای ۲ گروه برابر نباشند. $n! \times m!$

حالت (۲): اعضای ۲ گروه برابر باشد. $2 \times m! \times m!$

تبدیلات دایره‌ای:

هرگاه n شی متمايز بخواهند دور یک محیط دایره‌ای قرار گیرند:

حالت (۱): اشیاء قابل وارونه شدن نباشد: $(n-1)!$

حالت (۲): اشیاء قابل وارونه شدن باشند. $\frac{(n-1)!}{2}$

تبدیل با اعضای تکراری

$$\frac{n!}{r!}$$

حاصل ضرب فاکتوریل اعضای تکراری

مثال:

با ارقام ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۳ چند عدد ۶ رقمی می توان ساخت؟

$$\frac{6!}{3! \times 2!}$$

$$r \times P(n-k, r-k)$$

تبدیلات شامل k عضو خاصتبدیلات فاقد k عضو خاص

$$P(n-k, r)$$

ترکیب

تعداد انتخاب‌های r تایی از یک مجموعه n تایی بدون در نظر گرفتن حالت جایجایی

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال:

یک مجموعه n عضوی چند زیر مجموعه r عضوی دارد؟

$$\binom{n}{r}$$

احتمال:

آزمایش تصادفی: هر آزمایشی که نتیجه آن از قبل مشخص نباشد. مانند پرتاب تاس یا سکه.

فضای نمونه: مجموعه تمام حالاتی که ممکن است در یک آزمایش تصادفی اتفاق بیافتد که آن را با S نمایش می دهیم.

$n(S) =$ (تعداد وجه) \Rightarrow تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پیشامد تصادفی: زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است.

نکات: (۱) در هذلولی همیشه $a > b$ یا $a < b$ یا $a = b$ است.

(۲) تشخیص نوع هذلولی اگر کسر مثبت شامل x بود \leftarrow افقی اگر کسر مثبت شامل y بود \leftarrow قائم

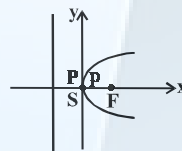
(۳) عدد مخرج کسر مثبت همیشه a^2 است.

(۴) اگر $a = b$ باشد به این هذلولی متساوی‌القطرین می گویند

سهمی

مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه‌ی ثابت و یک خط ثابت در

کانون خط هادی



صفحه به یک فاصله باشند. سهمی بر ۴ نوع می باشد.

(۱) سهمی رو به راست

$$\begin{matrix} \alpha \\ S \end{matrix} \left| \begin{matrix} P + \alpha \\ F \\ \circ + \beta \end{matrix} \right. \quad x = -P + \alpha$$

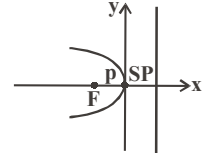
$$(y - \beta)^2 = 4P(x - \alpha)$$

معادله‌ی سهمی رو به راست

(۲) سهمی رو به چپ

$$\begin{matrix} \alpha \\ S \end{matrix} \left| \begin{matrix} -P + \alpha \\ F \\ \circ + \beta \end{matrix} \right. \quad x = P + \alpha$$

معادله‌ی خط هادی



$$(y - \beta)^2 = -4P(x - \alpha)$$

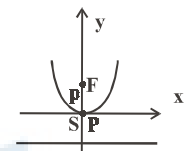
معادله‌ی سهمی رو به چپ

(۳) سهمی رو به بالا

$$\begin{matrix} \alpha \\ S \end{matrix} \left| \begin{matrix} P + \beta \\ F \\ \circ + \alpha \end{matrix} \right. \quad y = -P + \beta$$

$$(x - \alpha)^2 = 4P(y - \beta)$$

معادله‌ی سهمی رو به بالا

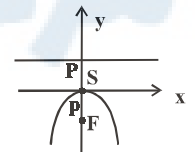


(۴) سهمی رو به پایین

$$\begin{matrix} \alpha \\ S \end{matrix} \left| \begin{matrix} -P + \beta \\ F \\ \circ + \alpha \end{matrix} \right. \quad y = P + \beta$$

$$(x - \alpha)^2 = -4P(y - \beta)$$

معادله‌ی سهمی رو به پایین



نکات:

(۱) کانون همیشه در شکم سهمی است و خط هادی در پشت سهمی است.

(۲) $P =$ فاصله‌ی رأس تا خط هادی = فاصله‌ی کانونی تا رأس

$2P =$ فاصله‌ی کانونی تا خط هادی

(۳) سهمی رو به هر محوری باز شود، متغیر مربوط به آن محور از درجه‌ی اول است.

(۴) اگر فرم ضمنی در هر شرایطی به فرم کانونی تبدیل شود.

(۵) طول وتر کانونی $4P =$

ریاضی تجربی

احتمال وقوع هر پیشامد:

برابر است با تعداد حالات مساعد به تعداد کل حالتها

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

قوانین احتمال:

۱- احتمال وقوع هر پیشامد عددی است از صفر تا یک

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

۲- متمم هر پیشامد: متمم پیشامد A را با A' یا A^c نمایش می‌دهد و بدین مفهوم است که اگر A اتفاق بیافتد A' اتفاق نمی‌افتد و بالعکس.

$$P(A) + P(A') = 1 \quad \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$

۳- قانون جمع احتمال:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۴- دو پیشامد ناسازگار: دو پیشامد را ناسازگار گویند که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

۵- دو پیشامد مستقل:

دو پیشامد را مستقل از هم گویند که وقوع یکی ربطی به دیگری نداشته باشد.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \text{شرط دو پیشامد مستقل}$$

۷- احتمال شرطی:

می‌خواهیم احتمال پیشامد A را حساب کنیم به شرط اینکه احتمال پیشامد B را بدانیم.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

بدانیم می‌خواهیم

اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه P(A | B) کدام است؟

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

۸- توزیع دو جمله‌ای:

در انجام عمل با احتمال P, n شیء شرکت می‌کنند احتمال اینکه K شیء به نتیجه دلخواه برسند.

$$P(A) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

دسته‌بندی داده‌ها ۱- دامنه تغییرات (R) = Max - Min

۲- تعداد دسته‌ها (x) بین ۵ تا ۲۰ است.

$$C = \frac{R}{K} \quad \text{۳- طول دسته (c)}$$

آمار:

نکته (۱):

اگر به تمام داده‌ها مقدار ثابت K را اضافه یا کم کنیم در دامنه تغییرات، تغییری ایجاد نمی‌شود.

نکته (۲):

اگر تمام داده‌ها در عدد ثابت k ضرب گردد، دامنه تغییرات در |k| ضرب می‌شود.

۴- فراوانی مطلق (F_i)

تعداد داده‌هایی که در هر طبقه قرار می‌گیرند.

نکته «۳»:

مجموع فراوانی همیشه برابر است با تعداد داده‌ها.

$$f_i = \frac{F_i}{N} \quad \text{۵- فراوانی نسبی}$$

تعداد داده

برابر است با فراوانی مطلق تقسیم بر تعداد داده‌ها.

نکته «۴»:

مجموع فراوانی نسبی همواره برابر با یک

$$p_i = \frac{f_i}{N} \times 100 \quad \text{۶- درصد فراوانی}$$

برابر است با فراوانی نسبی ضربدر صد.

نکته «۵»:

مجموع درصد فراوانی همواره برابر با ۱۰۰ است.

۷- فراوانی تجمعی (FC)

برابر است با فراوانی مطلق آن دسته + فراوانی تجمعی دسته ماقبل.

نکته «۶»:

فراوانی تجمعی دسته اول با فراوانی مطلق دسته اول برابر است.

فراوانی تجمعی دسته آخر برابر با تعداد داده‌ها است.

۸- مرکز دسته (xi) { میانگین - نشانه - مرکز }

حد پایین دسته + حد بالای دسته

۲

نکته «۷»:

اختلاف دو مرکز دسته متوالی همان طول دسته است.

الف) میانگین

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} \quad \text{بدون فراوانی}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i} \quad \text{با فراوانی}$$

۱- میانگین همواره عددی است، بین بیشترین و کمترین داده.

۲- اگر به تمام داده‌ها مقدار ثابت k را اضافه یا کم کنیم میانگین نیز با این عدد ثابت جمع یا کم می‌شود.

۳- اگر تمام داده‌ها در عدد ثابت k ضرب گردد میانگین نیز در این عدد ثابت ضرب می‌شود.

۴- اگر داده‌ها تشکیل تصاعد عددی دهند، میانگین برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{\max + \min}{2}$$

۵- اگر داده‌ها با هم برابر باشند، داریم:

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$$

۶- مجموع اعداد طبیعی مطابق رابطه زیر حساب می‌گردد.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ب) میانه

داده‌ها را به صورت صعودی یا نزولی مرتب کنید.

اگر تعداد داده‌ها:

فرد باشد \leftarrow میانه: داده وسطیزوج باشد \leftarrow میانه: میانگین دو داده وسطی

د) مد

داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد.

ریاضی تجربی

خط و نقطه

نکته ۱:

میانۀ پاره خطی است که از رأس مقابل شروع و به وسط ضلع مقابل فرود می آید.

۴- اگر میانۀ های یک مثلث را رسم کنیم، این سه میانۀ همدیگر را در نقطه ای مانند G قطع می کنند.

$$G \begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_G \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_G \end{cases}$$

۵- اگر مختصات رأس مثلثی معلوم باشد مساحت آن مطابق رابطه زیر حساب می شود.

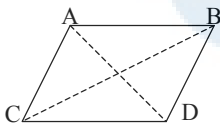
$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$= \frac{1}{2} |(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_{n-1}y_n) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \dots + y_{n-1}x_n)|$$

مساحت

ب) مساحت مثلث

$$S = \frac{1}{2} |-1(3-0) + 0(2-0) + 2(2-3)| = \frac{1}{2} |-5| = \frac{5}{2}$$



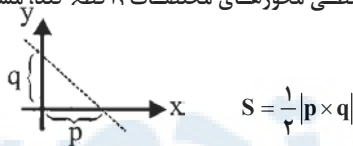
۶- در هر متوازی الاضلاع داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

نکته ۲:

برای بدست آوردن محل تلاقی دو قطر متوازی الاضلاع وسط AC یا BD را بدست می آوریم.

۸- هرگاه خطی محورهای مختصات را قطع کند، مساحت مثلث ایجاد شده:



طول از مبدأ: p

عرض از مبدأ: q

۹- شیب برابر است با تانژانت زاویه ای که خط با جهت مثبت محور x ها ایجاد می کند.

زاویه با جهت مثبت محور x ها $m = \tan \alpha$

۱۰- هرگاه دو نقطه معلوم باشد شیب بصورت زیر است:

$$m = \frac{\text{تفاضل عرضها}}{\text{تفاضل طولها}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

۱۲- وضعیت دو خط نسبت به هم:

الف) موازی یکدیگر: شیب آنها باید برابر باشد. $m_1 = m_2$
 ب) عمود برهم: باید ضرب شیبها برابر ۱- باشد و یا شیب یکی عکس و قرینه دیگری باشد یا

$$m_2 = \frac{1}{-m_1} \quad m_1 \times m_2 = -1 \quad m_1 = \frac{1}{-m_2}$$

۲- شاخص های پراکندگی: عبارتند از: واریانس (پراش) - انحراف معیار - ضریب تغییرات.

$$S^2 = \delta^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{بدون فراوانی}$$

$$S^2 = \delta^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum F_i} \quad \text{با فراوانی}$$

الف) واریانس $S^2 - \delta^2$

ب) انحراف معیار $S = \delta = \sqrt{\text{واریانس}}$

ج) ضریب تغییرات $cv = \frac{\delta}{\bar{x}} = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$

نکات مهم در واریانس و انحراف معیار:

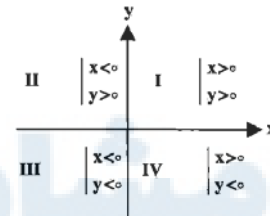
- ۱- مجموعه ای از داده ها واریانس بیشتری دارد که دامنه تغییرات بیشتری داشته باشد.
- ۲- فقط در یک حالت واریانس - انحراف معیار - ضریب تغییرات صفر است و آن هم زمانی است که تمام داده ها با هم برابر باشد.
- ۳- اگر تمام داده ها با عدد ثابت k ضرب گردد در واریانس و انحراف معیار تغییری ایجاد نمی شود.
- ۴- اگر تمام داده ها در عدد ثابت k ضرب گردد انحراف معیار در قدر مطلق |k| واریانس در k^2 ضرب می شود.
- ۵- اگر تمام داده ها تشکیل تصاعد عددی دهند انحراف معیار مطابق فرمول زیر حساب می گردد.

$$\delta = d \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} \quad d \leftarrow \text{قدر نسبت تصاعد}$$

خط و نقطه و قرینه یابی

خط و نقطه:

۱- دستگاه محورهای مختصات صفحه را به ۴ ناحیه تقسیم می کند.

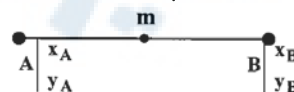


۲- معادله محور x ها بصورت $y = 0$ می باشد، یعنی هر نقطه روی محور x ها y آن صفر است و معادله محور y ها، $x = 0$ است.

معادله نیمساز ناحیه اول و سوم خط $y = x$ و نیمساز ناحیه دوم و چهارم خط $y = -x$ است.

۳- بدست آوردن طول پاره خط AB وقتی مختصات دو سر آن معلوم باشد.

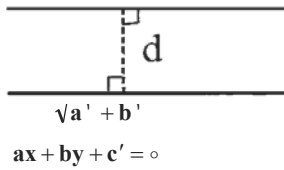
$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



$$\begin{cases} x_m = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_m = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

ریاضی تجربی

۱۸- فاصله دو خط موازی
 $ax + by + c = 0$



$ax + by + c' = 0$

نکته ۶:

قبل از استفاده از این فرمول، ضرایب x ها و y ها باید برابر شوند.

معادله دسته خط:

مجموعه خطوطی که از یک نقطه ثابت می گذرند، به دسته خط معروفند و برای نوشتن معادله دسته خط داشتن معادله دو خط کافی است.

(معادله خط دیگر) = m (معادله یک خط)

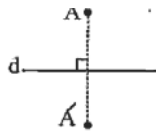
هر عدد دلخواه

برای بدست آوردن نقطه ثابت یک دسته خط دو m دلخواه به معادله بدهید، دو معادله بدست می آید. نقطه تلاقی این دو معادله نقطه ثابت دسته خط است.



تقارن:

- ۱- مرکزی: قرینه نسبت به یک نقطه O وسط AA' است.
- ۲- محوری: قرینه نسبت به یک خط



خط d عمود منصف AA' است.

قرینه نقطه A نسبت به:

- ۱- محور x ها $A' \left(\begin{matrix} x \\ -y \end{matrix} \right) \leftarrow$
- ۲- محور y ها $A' \left(\begin{matrix} -x \\ y \end{matrix} \right) \leftarrow$
- ۳- مبدأ مختصات $A' \left(\begin{matrix} -x \\ -y \end{matrix} \right) \leftarrow$
- ۴- نیمساز ناحیه ۱ و ۳ $A' \left(\begin{matrix} y \\ x \end{matrix} \right) \leftarrow$
- ۵- نیمساز ناحیه ۲ و ۴ $A' \left(\begin{matrix} -y \\ -x \end{matrix} \right) \leftarrow$
- ۶- نقطه $A' \left(\begin{matrix} 2\alpha - x \\ 2\beta - y \end{matrix} \right) \leftarrow B \left(\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right)$
- ۷- خط $x = a$ $A' \left(\begin{matrix} 2a - x \\ y \end{matrix} \right) \leftarrow$
- ۸- خط $y = b$ $A' \left(\begin{matrix} x \\ 2b - y \end{matrix} \right) \leftarrow$

ج) مستقاطع هم: برای بدست آوردن نقطه تلاقی کفایت دو خط را در یک دستگاه قرار داده و حل کنیم.
 ۱۳- دو خط $ax + by + c = 0, a'x + b'y + c' = 0$ مفروض است.

منطبق $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
 موازی $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
 متقاطع $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

عمود $aa' + bb' = 0$
 عمود نیست $aa' + bb' \neq 0$

۱۴- طریقه نوشتن معادله یک خط: نیاز به یکی از دو اطلاعات زیر داریم:

۱- یک نقطه و شیب داشته باشیم:

$y - y_0 = m(x - x_0)$, m

۲- دو نقطه از خط معلوم باشد: بعد از اینکه شیب بدست آمد هر کدام از دو نقطه معادله خط می نویسیم.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

نکته ۳:

اگر در حل مسئله $m = \infty$ معادله خط بصورت $x = x_0$ است.

نکته ۴:

اگر دو نقطه داده شده بصورت $A \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right)$, $B \left(\begin{matrix} c \\ b \end{matrix} \right)$ باشد معادله خط همواره بصورت $x = a$ می باشد.

نکته ۵:

اگر دو نقطه داده شده بصورت $A \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right)$, $B \left(\begin{matrix} c \\ b \end{matrix} \right)$ معادله خط همواره به صورت $y = b$ خواهد بود.

۱۵- برای دو خط متقاطع:

نقطه تلاقی: دو خط را که در یک دستگاه قرار می دهیم و حل می کنیم جواب دستگاه نقطه تلاقی است.

زاویه بین دو خط: شیب هر خط را بدست آورده و m_1, m_2 می نامیم و از رابطه زیر بدست می آوریم. α زاویه بین دو خط است.

$tg \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$

۱۵- شرط اینکه سه خط در یک نقطه متقاطع باشند (همرس باشند) - مستقارب باشند) این است که نقطه تلاقی دو خط باید در خط سوم صدق کند.

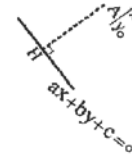
۱۶- شرط اینکه ۳ نقطه بر یک استقامت باشند (روی یک خط باشند):

$M_{AB} = M_{AC} = M_{BC}$



۱۷- فاصله یک نقطه از یک خط:

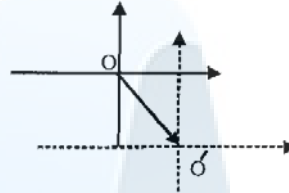
$AH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



ریاضی تجربی

انتقال محورها:

هرگاه محورهای مختصات را به موازات خود انتقال دهیم، بطوریکه مبدأ مختصات از نقطه $O \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ به مختصات $O' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ منتقل گردد، مختصات نقاط و معادلات خط و منحنی در دستگاه جدید تغییر می‌کند.



$$X = x - \alpha$$

$$Y = y - \beta$$

نکته ۸:

در انتقال محورها شیب خط تغییر نمی‌کند.

جمع و تفریق ۲ ماتریس:

دو ماتریس وقتی قابلیت جمع و تفریق را دارند که: ۱- حتماً دو ماتریس هم مرتبه باشند. ۲- برای جمع یا تفریق عضوهای نظیر را با هم جمع یا از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

خواص جمع ماتریسی:

$$1) A + B = B + A \quad \text{جمع ماتریس خاصیت جابجایی دارد.}$$

$$2) A + \vec{0} = \vec{0} + A = A$$

جمع ماتریس‌ها خاصیت حذف دارد.

$$3) A + C = B + C \Rightarrow A = B$$

ضرب عدد در ماتریس:

آن عدد در تک تک عضوهای ماتریس ضرب می‌گردد.

$$r \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس:

دو ماتریس وقتی قابلیت ضرب دارند که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد.

خواص ضرب ماتریسی:

$$1) A \times B \neq B \times A \quad \text{ضرب ماتریس خاصیت جابجایی ندارد.}$$

$$2) A \times I = I \times A = A$$

$$3) A \times C = B \times C \Rightarrow A = B \quad \text{ضرب ماتریس‌ها خاصیت حذف ندارد.}$$

$$4) A^n = A \times A \times \dots \times A$$

«دترمینان ماتریس ۲×۲»

دترمینان ماتریس A را به صورت $|A|$ نشان می‌دهند و بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

وارون ماتریس ۲×۲ (معکوس)

۱- ماتریسی معکوس پذیر است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

۲- وارون ماتریس A را با A^{-1} نمایش می‌دهند.

طریقه بدست آوردن ماتریس معکوس ۲×۲:

- ۱- جای عناصر قطر اصلی عوض شود.
- ۲- عناصر قطر فرعی را قرینه می‌کنیم.
- ۳- تمام عناصر را بر دترمینان ماتریس اصلی تقسیم می‌کنیم.

نکاتی در مورد دترمینان و ماتریس وارون:

$$1) A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

$$2) |A^n| = |A|^n$$

$$3) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, \quad |A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$$

ماتریس تقارن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نسبت به محور x ها

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نسبت به محور y ها

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نسبت به مبدأ مختصات

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

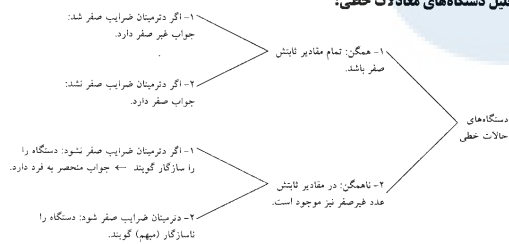
نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

تحلیل دستگاه‌های معادلات خطی:



نکته مهم:

برای تحلیل دستگاه‌های ۲ معادله ۲ مجهول ناهمگن:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \rightarrow \text{جواب منحصر به فرد} \rightarrow \text{دستگاه سازگار} \\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \rightarrow \text{بسی‌شمار جواب} \rightarrow \begin{cases} = \frac{c_1}{c_2} \\ = \frac{c_1}{c_2} \end{cases} \rightarrow \text{دستگاه میهم ناسازگار} \end{cases}$$

دو دستگاه هم‌ارز:

دو دستگاه را هم‌ارز گویند که جواب یکی در دیگری صدق کند و برعکس.

به $(a+b)^n$ بسط دو جمله‌ای گویند.

۱- هر بسط $(n+1)$ جمله دارد.

$$\binom{n}{k-1} (a)^{n-(k-1)} (b)^{(k-1)}$$

ریاضی تجربی

۲- برای نوشتن جمله k ام یک بسط

$$\binom{9}{6-1} (2x)^{9-5} (-y)^5 = \underbrace{-136 \times 16}_{\text{ضرب تغییر بسط}} \times \underbrace{x^4 y^5}_{\text{ضرب عددی}}$$

۳- برای بدست آوردن مجموع ضرایب عددی کافیت جای تمام متغیرها عدد یک را قرار دهید.

$$x = y = 1 \Rightarrow (2-1)^9 = 1^9 = 1$$

۴- هرگاه میانگین ضریب عددی را بخواهد:

$$\text{میانگین ضرایب} = \frac{\text{مجموع ضرایب عددی}}{\text{تعداد جملات}}$$

$$\text{مجموع ضرایب} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 5^4$$

$$\text{تعداد جملات} \Rightarrow 4 + 1 = 15$$

$$\text{میانگین} = \frac{5^4}{15} = 5^3 = 125$$

۵- برای بدست آوردن بزرگترین ضریب عددی اگر

$$n \leftarrow \text{زوج} \leftarrow \frac{n}{2} + 1 \text{ جمله}$$

$$n \leftarrow \text{فرد} \leftarrow \frac{n}{2} + 1 \text{ جملات طرفین}$$

۶- هرگاه در بسط ضریب جمله P ام با ضریب جمله r ام باهم برابر باشد، حتماً داریم:

$$P + r = n + 2$$

۷- اگر عدد ثابت یک بسط را بخواهید، به جای تمام متغیرها عدد صفر قرار دهید.

ب) روش تستی: در بسط $(x^a \pm x^b)^n$ جمله مستقل از x جمله

$$k = \frac{na}{a-b} + 1$$

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

راه‌های ارتباطی مرکز مشاوره

تلگرام

اینستاگرام

وبسایت



AlirezaAfsharOfficial

AlirezaAfsharOriginal

www.AlirezaAfshar.org

رزور مشاوره خصوصی علیرضا افشار

برای رزور مشاوره خصوصی تک جلسه و ماهانه
به شماره ۰۹۳۵۸۹۶۰۵۰۳ در واتساپ پیام دهید

Afshar.xyz

آدرس تمام رسانه ها :

