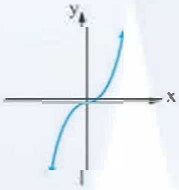
درس نامهٔ توپ برای شب امتحان

فصل ۱: تابع

درس ۱: توابع چندجمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای

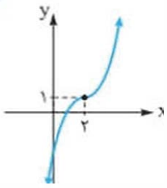
هر تابع که ضابطه‌اش به شکل $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+kx+c$ باشد یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n نام دارد. (n عدد صحیح نامنفی و $a\neq 0$ است.) مثلاً تابع $f(x)=5x^4-8x+1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است. تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ یک تابع درجهٔ ۳ است $(a\neq 0)$. البته در کتاب درسی، تابع $y=x^3$ مورد توجه قرار گرفته که نمودار آن به طور تقریبی به شکل روبه‌رو است:



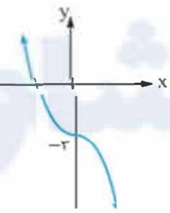
دامنه $=\mathbb{R}$ ، برد $=\mathbb{R}$

مثال: نمودار توابع $y_1=(x-2)^3+1$ و $y_2=-x^3-3$ را به کمک نمودار $y=x^3$ رسم کنید.

پاسخ: برای رسم نمودار y_1 باید نمودار x^3 را ۲ واحد به راست و سپس ۱ واحد به بالا انتقال دهیم که به نمودار روبه‌رو می‌رسیم:

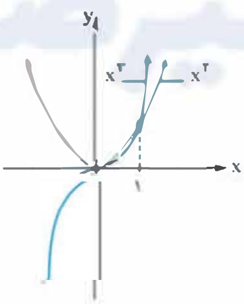


برای رسم نمودار y_2 ابتدا نمودار x^3 را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم سپس آن را ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



مقایسهٔ نمودار $y=x^2$ و $y=x^3$

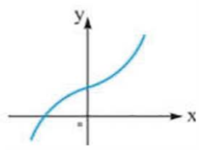
می‌دانید که اگر x هر عددی بین صفر و یک باشد، حاصل x^2 بزرگ‌تر از x^3 است پس در بازهٔ $(0,1)$ نمودار x^2 بالاتر از x^3 است ولی در بقیهٔ xهای مثبت، نمودار x^3 بالاتر از x^2 است.



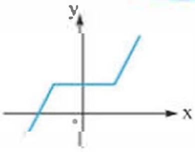
در xهای منفی هم که واضح است مقدار x^2 مثبت و مقدار x^3 منفی است پس نمودار x^2 بالاتر است.

توابع یکنوا (صعودی یا نزولی)

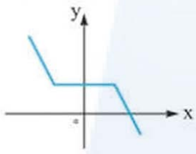
در تابع f اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y هم مرتباً افزایش یابند، می‌گوییم f اکیداً صعودی است مانند تابع روبه‌رو:



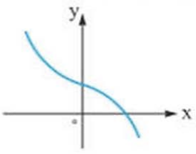
حالا اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y زیاد شوند ولی بعضی نقاط نمودار، هم‌عرض باشند، می‌گوییم تابع f صعودی است مانند تابع روبه‌رو:



اکنون به کمک تعاریف بالا، می‌توانید تابع اکیداً نزولی و تابع نزولی را خودتان تعریف کنید.



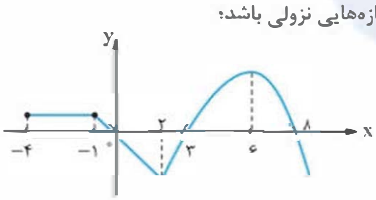
شکل (۲)



شکل (۱)

پس تابع مربوط به شکل (۱) اکیداً نزولی و تابع مربوط به شکل (۲) نزولی است.

نکته: تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت $y=k$ می‌باشد. $(k\in\mathbb{R})$ ضمناً ممکن است تابعی در کل دامنهٔ خود، نه صعودی باشد نه نزولی ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد؛ مانند شکل روبه‌رو: این تابع در بازهٔ $[-4,-1]$ ثابت (هم صعودی و هم نزولی)، در بازه‌های $[-1,2]$ و $[6,\infty)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[2,6]$ اکیداً صعودی است.



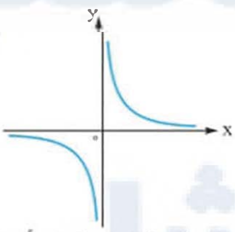
مثال: توابع زیر را رسم کرده و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (خرداد ۹۰)

الف) $y=\frac{1}{x}$ ب) $y=-\frac{1}{x}$

پ) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \\ 1 & -2<x<1 \\ -2x & x>1 \end{cases}$

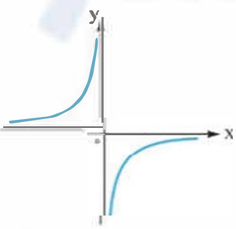
پاسخ:

الف) $y=\frac{1}{x}\Rightarrow$



تابع در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی است ولی در کل $\mathbb{R}$، نه صعودی و نه نزولی است.

ب) $y=-\frac{1}{x}\Rightarrow$

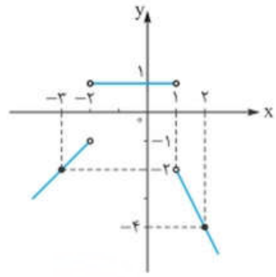


تابع در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در کل $\mathbb{R}$، نه صعودی و نه نزولی است.

پ) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \Rightarrow \\ 1 & -2<x<1 \\ -2x & x>1 \Rightarrow \end{cases}$

x	-2	-3
y	-1	-2

x	1	2
y	-2	-4



پس تابع f در بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً صعودی، در بازهٔ $(-2,1)$ ثابت(هم صعودی، هم نزولی) و در بازهٔ $(1,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

درس ۲: ترکیب توابع

تعریف ترکیب توابع و به دست آوردن آن

اگر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، ترکیب توابع f و g را با نمادهای fog و gof نمایش می‌دهیم و خواهیم نوشت:

$$\boxed{\begin{array}{l} y=(fog)(x)=f(g(x))\ ,\ D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} \\ y=(gof)(x)=g(f(x))\ ,\ D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \end{array}}$$

مثال: **اگر $f=\{(3,4),(7,8),(5,2)\}$ و $g=\{(1,3),(-2,7),(5,9)\}$ باشد، تابع fog را تشکیل دهید.** (خرداد ۸۹)

پاسخ:

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 4 \\ -2 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 8 \Rightarrow fog=\{(1,4),(-2,8)\} \\ 5 \xrightarrow{g} 9 \xrightarrow{f} \times \quad \text{دقت کنید ۹ در دامنهٔ f نیست!} \end{cases}$$

ضمناً با توجه به جواب به دست آمده برای fog می‌توان گفت:

$$(fog)(1)=4\ ,\ (fog)(-2)=8$$

مثال: **توابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ و $g(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ مفروض‌اند. اولاً دامنهٔ توابع f، g و gof را تعیین کنید، ثانیاً ضابطهٔ gof را بیابید، ثالثاً $(\dfrac{gof}{f-g})(0)$ را محاسبه کنید.**

پاسخ: اولاً: $f(x)=\sqrt{4-x^2} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} 4-x^2\geq 0$

$$\Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2$$

$$g(x)=\frac{x+2}{x-1} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\in[-2,2] \mid \underbrace{\sqrt{4-x^2}\in\mathbb{R}-\{1\}}_{\sqrt{4-x^2}\neq 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x\neq\pm\sqrt{3}}\}=[-2,2]-\{\pm\sqrt{3}\}$$

ثانیاً: $(gof)(x)=g(f(x))=\dfrac{\sqrt{4-x^2}+2}{\sqrt{4-x^2}-1}$

ثالثاً: $(\dfrac{gof}{f-g})(0)=\dfrac{(gof)(0)}{f(0)-g(0)}=\dfrac{\overbrace{g(f(0))}^{2}}{2-(-2)}=\dfrac{4}{4}=1$

به دست آوردن g(x) با داشتن f(x) و (fog)(x)

ابتدا کل تابع g را در تابع f به جای xها قرار می‌دهیم تا fog به دست آید. سپس جواب آن را با fog که در فرض به ما داده شده مساوی قرار می‌دهیم تا g به دست آید.

مثال: **اگر $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ و $(fog)(x)=\dfrac{1}{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع g(x) را بیابید.** (خرداد ۸۷)

پاسخ: $(fog)(x)=f(g(x))=\dfrac{g(x)}{1+g(x)} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \dfrac{g(x)}{1+g(x)}=\dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow x\,g(x)=1+g(x) \Rightarrow \underbrace{x\,g(x)-g(x)}_{\text{فاکتور از } g(x)}=1$$

$$\Rightarrow g(x)(x-1)=1 \Rightarrow g(x)=\frac{1}{x-1}$$

به دست آوردن f(x) با داشتن g(x) و (fog)(x)

در این صورت فرض می‌کنیم که $g(x)=t$، سپس از این رابطه x را برحسب t پیدا کرده و در رابطهٔ fog که به ما داده شده قرار می‌دهیم. درنهایت t را به x تبدیل می‌کنیم.

مثال: **اگر $g(x)=2x-6$ و $(fog)(x)=3x^2-7x$، آن‌گاه تابع f(x) را به دست آورید.**

پاسخ: $(fog)(x)=f(g(x)) \Rightarrow f(\underbrace{2x-6}_{t})=3x^2-7x$

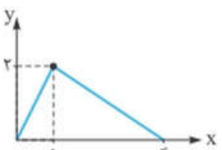
$$2x-6=t \Rightarrow 2x=t+6 \Rightarrow x=\frac{t+6}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{در تابع بالا}} f(t)=3(\frac{t+6}{2})^2-7(\frac{t+6}{2})$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل t به x}} f(x)=3(\frac{x+6}{2})^2-7(\frac{x+6}{2})$$

انتقال و تبدیل نمودارها

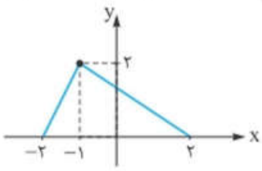
نمودار تابع f را به صورت مقابل فرض کنید:



$y=f(x)$

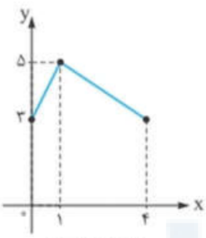
۱) برای رسم نمودار $y=f(x\pm k)$، ریشهٔ داخل پرانتز را به دست می‌آوریم و با توجه به علامت آن نمودار $f(x)$ را به چپ یا راست حرکت می‌دهیم؛ مثلاً برای رسم $y=f(x+2)$ خواهیم داشت:

$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ را ۲ واحد به چپ حرکت می‌دهیم.



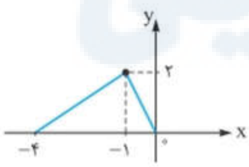
$y=f(x+2)$

۲) برای رسم نمودار $y=f(x)\pm k$ نمودار f را با توجه به علامت $\pm k$ به بالا یا پایین منتقل می‌کنیم، ضمناً جهت حرکت موافق علامت این عدد می‌باشد یعنی اگر این عدد مثبت باشد به بالا و اگر منفی بود به پایین حرکت می‌کنیم. مثلاً برای رسم $y=f(x)+3$ با توجه به نمودار اولیهٔ f کافی است نمودار f را ۳ واحد به بالا حرکت دهیم:



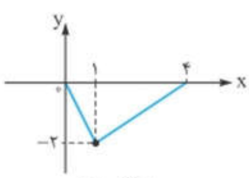
$y=f(x)+3$

۳) برای رسم $y=f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور yها قرینه کنیم (انعکاس دهیم):



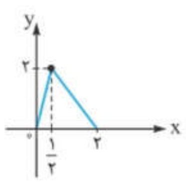
$y=f(-x)$

۴) برای رسم $y=-f(x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور xها قرینه کنیم (انعکاس دهیم):



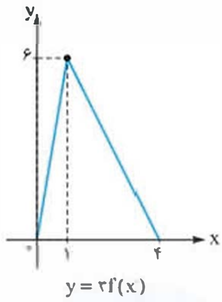
$y=-f(x)$

۵) برای رسم $y=f(kx)$ کافی است در نمودار f طول نقاط را بر k تقسیم کنیم. پس فقط دامنهٔ تابع تغییر می‌کند و برد بدون تغییر خواهد بود. مثلاً برای رسم $y=f(2x)$ طول نقاط نمودار f را بر ۲ تقسیم می‌کنیم (نمودار فشرده‌تر می‌شود). به‌طور کلی اگر $|k|>1$ باشد، نمودار به صورت افقی فشرده‌تر و اگر $|k|<1$ باشد، نمودار به صورت افقی کشیده‌تر می‌شود.



$y=f(2x)$

۶ برای رسم $y=kf(x)$ کافی است در نمودار f عرض نقاط را در عدد k ضرب کنیم. پس فقط برد تابع تغییر می‌کند. ضمناً اگر $|k|>1$ باشد، نمودار به صورت عمودی کشیده‌تر و اگر $|k|<1$ باشد، نمودار به صورت عمودی فشرده‌تر می‌شود. مثلاً نمودار $y=3f(x)$ را رسم می‌کنیم:



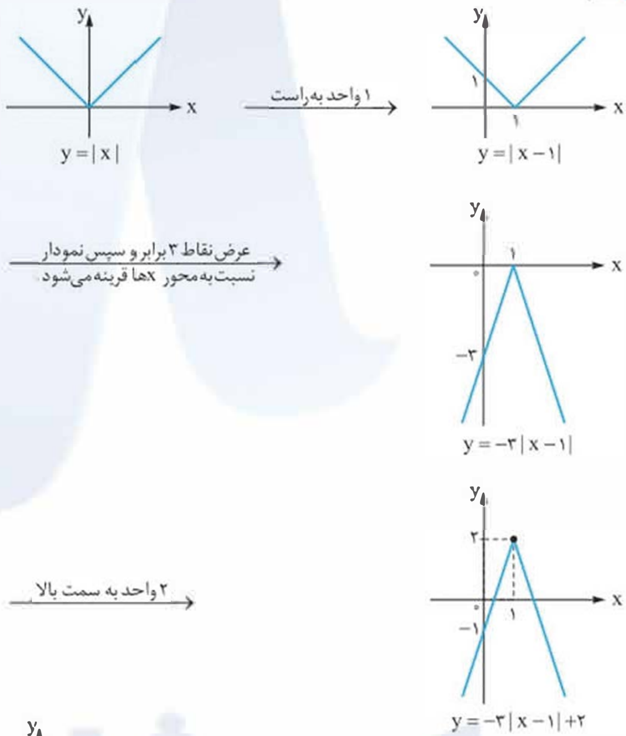
حال به عنوان تمرین، خودتان نمودار $y=-3f(x-2)+3$ را رسم کنید.

مثال: **به کمک قوانین انتقال و تبدیل، نمودار توابع زیر را رسم کنید:**

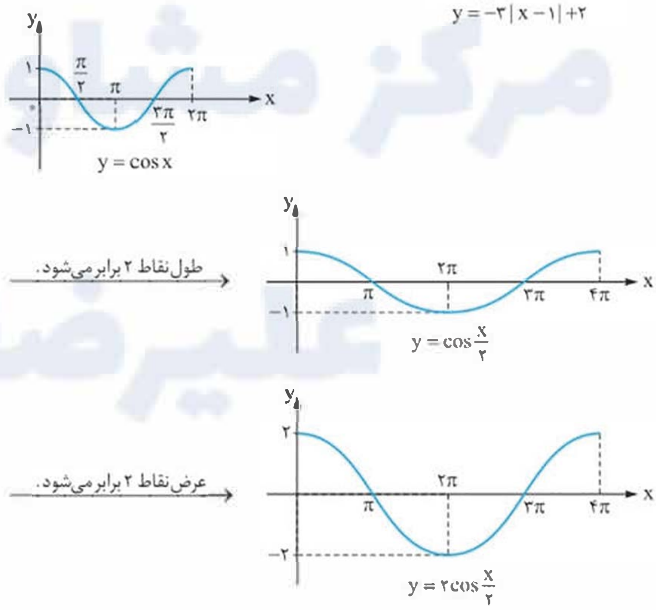
الف) $y=-3|x-1|+2$

ب) $y=2\cos\frac{x}{2}$

پاسخ: الف)



ب)

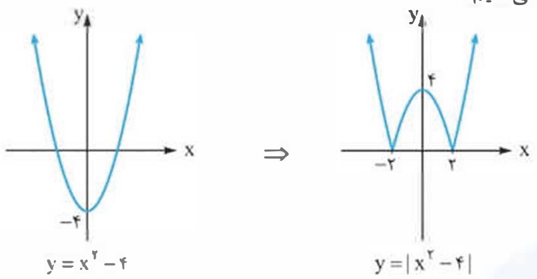


رسم نمودار |f|

برای رسم نمودار $y=|f(x)|$، کافی است ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم کنیم سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور xها قرار دارند نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

مثال: **نمودار تابع $y=|x^2-4|$ را رسم کنید.**

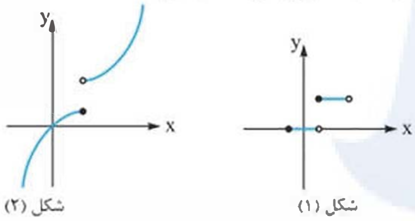
پاسخ: ابتدا نمودار $y=x^2-4$ را رسم کرده سپس قسمت پایین محور xها را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.



درس ۳: تابع وارون

توابع یک‌به‌یک

هرگاه تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها داده شود، این تابع وقتی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی، عضو دوم مساوی نداشته باشند. از نظر هندسی، نمودار یک تابع وقتی یک‌به‌یک است که هر خط افقی دلخواه، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند. مثلاً تابع (۱) یک‌به‌یک نیست ولی تابع (۲) یک‌به‌یک است.



از نظر ضابطه، تابع f یک‌به‌یک است هرگاه:

$$\text{اگر } x_1, x_2 \in D_f, f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

البته تأکید کتاب درسی، روش رسم نمودار است.

مثال: **ثابت کنید $f(x)=\frac{x-1}{x}$ یک‌به‌یک است.** (خرداد ۸۹)

پاسخ:

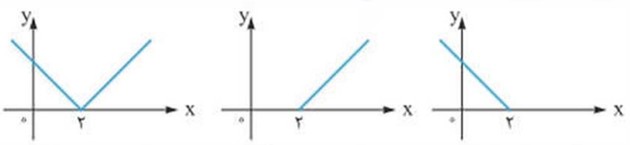
$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1-1}{x_1}=\frac{x_2-1}{x_2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \cancel{x_1x_2}-x_2=\cancel{x_1x_2}-x_1 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$$

یک‌به‌یک است.

محدودکردن دامنه برای یک‌به‌یک‌شدن تابع

گاهی اوقات تابعی مانند f در دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنه‌اش را محدود کنیم، یک‌به‌یک می‌شود. به عنوان مثال تابع $f(x)=|x-2|$ در دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنهٔ آن را به $[2,+\infty)$ یا $(-\infty,2]$ محدود کنیم، تابع یک‌به‌یک خواهد شد. (البته در هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه هم، f یک‌به‌یک است.) این را هم بدانید که در سهمی $y=ax^2+bx+c$ اگر دامنه را به صورت $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ محدود کنیم، تابع یک‌به‌یک خواهد شد.



$f(x)=|x-2|$, $D_f=(-\infty,2]$ (یک‌به‌یک است.)

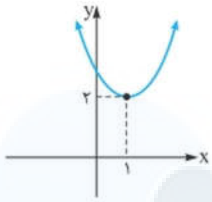
$f(x)=|x-2|$, $D_f=[2,+\infty)$ (یک‌به‌یک است.)

$f(x)=|x-2|$, $D_f=\mathbb{R}$ (یک‌به‌یک نیست.)

مثال: **یک‌به‌یک بودن یا نبودن تابع $f(x)=x^2-2x+3$ را بررسی کنید. اگر f یک‌به‌یک نبود، دامنهٔ آن را طوری محدود کنید که یک‌به‌یک شود.**

پاسخ: بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم و از روی آن، وضعیت یک‌به‌یکی تابع را بررسی کنیم: $y=x^2-2x+3$

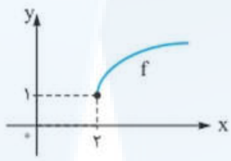
$$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2(1)}=1 \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در تابع}} y=1^2-2(1)+3=2 \Rightarrow S\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$$



پس تابع f در $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست ولی در بازه‌های $[1,+\infty)$ یا $(-\infty,1]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه، یک‌به‌یک خواهد بود.

تابع وارون (معکوس)

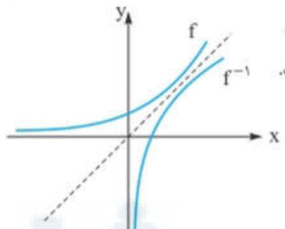
اگر در تابع f جای x و y ها را با هم عوض کنیم وارون f به دست می‌آید. مثلاً اگر $f=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}=\{(2,1),(4,3),(6,5)\}$ می‌باشد.



هم‌چنین اگر $g=\{(2,7),(1,9),(3,7)\}$ باشد، آن‌گاه $g^{-1}=\{(7,2),(9,1),(7,3)\}$ خواهد بود. ولی اگر دقت کنید واضح است که f^{-1} خودش یک تابع است ولی g^{-1} تابع نیست (دو زوج مرتب مختلف، عضوهای اولشان مساوی است). علت این است که f یک‌به‌یک بود ولی g یک‌به‌یک نبود. در این‌جا اصطلاحاً می‌گوییم f وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) است. یعنی f^{-1} خودش، یک تابع است. حال با توجه به شکل داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} D_f=[2,+\infty) \Rightarrow R_{f^{-1}}=[2,+\infty)\\ R_f=[1,+\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}}=[1,+\infty)\end{cases}$$

نتایج مهم این بحث



۱ تابع f وقتی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد.

۲ دامنهٔ f با برد f^{-1} و برد f با دامنهٔ f^{-1} برابر است.

۳ نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه هستند.

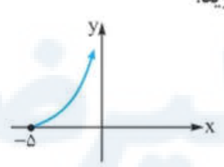
$$A(2,3)\in f \Rightarrow A'(3,2)\in f^{-1}$$

یافتن ضابطهٔ f^{-1}

برای این کار ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم و سپس نام x را به y یا f^{-1} و نام y را به x تغییر می‌دهیم. البته حواستان باشد اول باید بررسی کنید که آیا f یک‌به‌یک است یا خیر.

مثال: وارون‌پذیری تابع $f(x)=(x+5)^2$ را با شرط $x\ge -5$ بررسی کرده سپس ضابطهٔ تابع وارون را در صورت وجود به دست آورید.

پاسخ: با رسم نمودار تابع، متوجه می‌شویم که تابع f با دامنهٔ $x\ge -5$ یک‌به‌یک است:



یافتن تابع وارون $\Rightarrow y=(x+5)^2 \xrightarrow[x\ge -5]{\text{جذر}} x+5=\sqrt{y}$

$\Rightarrow x=\sqrt{y}-5 \xrightarrow{\text{اسم‌ها را عوض می‌کنیم.}} y=\sqrt{x}-5$ تابع وارون

نکتهٔ مهم: ترکیب هر تابع با تابع وارون خود برابر x می‌شود:

$$(fof^{-1})(x)=x\ ,\ x\in D_{f^{-1}}$$
$$(f^{-1}of)(x)=x\ ,\ x\in D_f$$

پس در حالت کلی: $(fof^{-1})(x)\neq(f^{-1}of)(x)$

مثال: تحقیق کنید توابع $f(x)=\frac{1}{x}+2$ و $g(x)=\frac{1}{x-2}$ وارون یکدیگرند.

الف) برای کدام مقادیر x داریم: $f(g(x))=x$

ب) برای کدام مقادیر x داریم: $g(f(x))=x$.

پاسخ: اگر حاصل fog و gof هر دو برابر x شوند به این معنا است که f و g وارون یکدیگرند:

$$\begin{cases}(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{x-2})=\frac{1}{\frac{1}{x-2}}+2=x-2+2=x\\ (gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{1}{x}+2)=\frac{1}{\frac{1}{x}+2-2}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x\end{cases}$$

$\Rightarrow$ f و g وارون یکدیگرند.

الف) $(fog)(x)=x \Rightarrow x\in D_g \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{2\}$

ب) $(gof)(x)=x \Rightarrow x\in D_f \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{0\}$

مثال: اگر $f(x)=4x-3$ و $g(x)=x+2$ باشند، با محاسبه نشان دهید که: $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$

پاسخ: اگر gof را y بنامیم، خواهیم داشت:

$$y=(gof)(x)=g(f(x))=g(4x-3)=4x-3+2=4x-1$$
$$\Rightarrow y=4x-1 \Rightarrow 4x=y+1 \Rightarrow x=\frac{y+1}{4}$$
$$\xrightarrow{\text{اسم‌ها را عوض می‌کنیم.}} \overset{(gof)^{-1}}{\uparrow}\ y=\frac{x+1}{4}$$

$$\begin{cases}y=f(x)=4x-3 \Rightarrow 4x=y+3 \Rightarrow x=\frac{y+3}{4} \Rightarrow f^{-1}=\frac{x+3}{4}\\ y=g(x)=x+2 \Rightarrow x=y-2 \Rightarrow g^{-1}=x-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}og^{-1}=\frac{(x-2)+3}{4}=\frac{x+1}{4}=(gof)^{-1}$$

فصل ۲: مثلثات

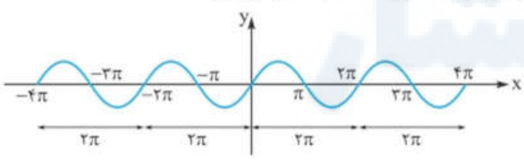
درس ۱: تناوب و تانژانت

تابع متناوب

تابع f را در صورتی متناوب می‌گوییم که عددی مثبت مانند T وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ دو شرط زیر را داشته باشیم:

$$\begin{cases}(x\pm T)\in D_f\\ f(x\pm T)=f(x)\end{cases}$$

کوچک‌ترین عدد مثبت T را دورهٔ تناوب f می‌نامیم. مثلاً دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin x$ برابر 2π است، زیرا دو شرط بالا را دارد یعنی اولاً دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ است پس $(x\pm 2\pi)\in D_f$ است و ضمناً $\sin(x\pm 2\pi)=\sin x$ می‌باشد. پس نمودار تابع $\sin x$ در هر بازه به طول 2π عیناً تکرار می‌شود:

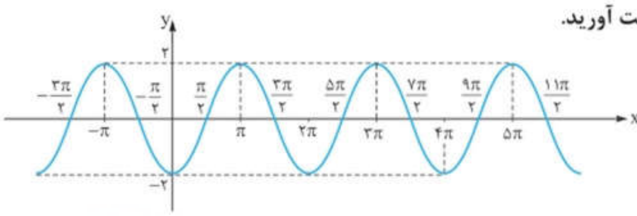


نکتهٔ مهم: در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ مقدار ماکزیمم برابر $|a|+c$ و مقدار مینیمم برابر $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ می‌باشد. ضمناً همواره داریم: $c=\frac{\max+\min}{2}$. مثلاً در تابع $y=-3\cos 2x+1$ خواهیم داشت:

$$\max=|-3|+1=4 \qquad \min=-|-3|+1=-3+1=-2$$

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$$

مثال: نمودار زیر مربوط به تابع $f(x)=a\cos bx+c$ است. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.



پاسخ:

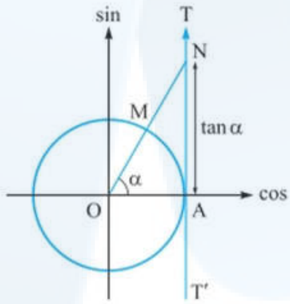
$$\begin{cases}\max=2\\ \min=-2\end{cases} \Rightarrow c=\frac{\max+\min}{2}=\frac{2+(-2)}{2}=0$$

$$\max=|a|+c \Rightarrow 2=|a|+0 \Rightarrow |a|=2 \Rightarrow a=\pm 2$$

ولی با توجه به شکل، چون $f(0)=-2$ می‌باشد فقط $a=-2$ قابل‌قبول است.
هم‌چنین با توجه به شکل، دورهٔ تناوب برابر 2π است، لذا:

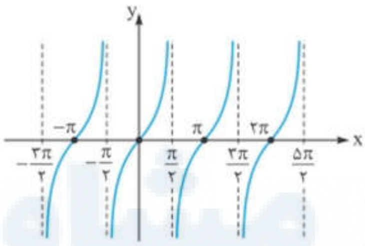
$$T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 2\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=1 \Rightarrow b=\pm 1$$

تانژانت



محور TT' در شکل مقابل، محور تانژانت‌ها نام دارد. برای یافتن مقدار تانژانت زاویه‌ای مثل α، پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت‌ها را در نقطه‌ای مثل N قطع کند اندازهٔ پاره‌خط AN همان $\tan\alpha$ می‌باشد.
(نقطهٔ A مبدأ تانژانت است.)

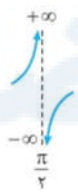
اگر $\alpha=\frac{\pi}{2}$ باشد، $\tan\alpha$ تعریف‌نشده است چون اگر پاره‌خط OM را امتداد دهیم محور TT' را قطع نمی‌کند؛ پس $\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف‌نشده است.



با توجه به توضیحات بالا تابع $y=\tan x$ به صورت روبه‌رو قابل رسم می‌باشد. ضمناً تابع $y=\tan x$ متناوب است و دورهٔ تناوب آن $T=\pi$ است، هم‌چنین دامنه و برد تانژانت به صورت زیر است:

$$D_y=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}, R_y=\mathbb{R}$$

مثال: تابع $y=\tan x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ صعودی است یا نزولی؟



پاسخ: با توجه به نموداری که رسم کردیم واضح است که تابع در بازه‌های $(0,\frac{\pi}{2})$، $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ اکیداً صعودی است ولی در کل بازهٔ $[0,2\pi]$ غیریکنوا است (نه صعودی است، نه نزولی)؛ چون مثلاً در نزدیکی $x=\frac{\pi}{2}$ شاخهٔ سمت چپ به $+\infty$ و شاخهٔ سمت راست به $-\infty$ می‌رود. (به دو طرف $x=\frac{\pi}{2}$ در شکل توجه کنید.) یعنی از $+\infty$ ناگهان به $-\infty$ می‌رود.

تغییرات tan x در ۴ ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی

در هر ربع دایرهٔ مثلثاتی، با زیادشدن مقدار زاویه، tan آن زاویه هم زیاد می‌شود پس در هر ربع دایره، $\tan x$ اکیداً صعودی است. توجه کنید اگر گفته شود: « $y=\tan x$ در بازهٔ $(0,\pi)$ صعودی است یا نزولی؟»، می‌گوییم نه صعودی است، نه نزولی؛ چون بازهٔ $(0,\pi)$ شامل دو ناحیهٔ مختلف می‌باشد.

درس ۲: معادلات مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دوبرابر کمان (2α)

برای محاسبهٔ $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ به کمک نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \xrightarrow[\text{دیدید از فرمول زیر استفاده کنید.}]{\text{اگر در متن سؤال } \sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

مثال: مقادیر $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ و $\tan 15^\circ$ را حساب کنید.

پاسخ: 15° را α فرض می‌کنیم و از فرمول‌های بالا استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha \Rightarrow \cos 2(15^\circ)=1-2\sin^2 15^\circ$$

$$\Rightarrow \cos 30^\circ=1-2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=1-2\sin^2 15^\circ$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 15^\circ=1-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\sin^2 15^\circ=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 15^\circ=\frac{2-\sqrt{3}}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} \sin 15^\circ=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

ضمناً از سال‌های قبل می‌دانیم که $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ لذا:

$$\cos^2 15^\circ=1-\sin^2 15^\circ=1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{4-2+\sqrt{3}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos 15^\circ=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

مثال: اگر α زاویه‌ای حاده و $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \xrightarrow{\sin\alpha=\frac{3}{5}} \cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos\alpha=\pm\frac{4}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است.}} \cos\alpha=\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5})=\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$$

معادلات مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی، ابتدا به کمک فرمول‌ها و اتحادهای مثلثاتی، تعداد نسبت‌های مثلثاتی را کاهش می‌دهیم تا دو طرف معادله، سینوس یا دو طرف معادله کسینوس باشند سپس خواهیم داشت:

$$\sin x=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi+\alpha\\ x=2k\pi+\pi-\alpha\end{cases}$$

$$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=2k\pi\pm\alpha$$

به جواب‌های بالا جواب‌های کلی (عمومی) می‌گوییم ولی اگر جواب‌های خاصی مدنظر باشد به k اعداد صحیح را نسبت می‌دهیم تا xهایی که در یک بازهٔ خاص هستند به دست آیند. حالت‌های خاص معادلات سینوسی و کسینوسی هم عبارت‌اند از:

$\sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$	$\cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi$
$\sin x=-1 \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$	$\cos x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\pi$
$\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$	$\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

تذکر: در تمام معادلات بالا به جای x هر عبارت دیگری هم ممکن است بیاید؛ مثلاً اگر $\sin ۳x = ۱$ باشد، آن‌گاه: $۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه: $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

مثال: معادلات زیر را حل کرده و جواب‌های کلی آن‌ها را به دست آورید. در قسمت (ت) جواب‌هایی که در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ هستند را به دست آورید.

الف) $\sin ۳x - \sin ۲x = ۰$ ب) $۴\cos^۲ x - ۱ = ۰$

پ) $۴\sin^۲ x - ۳ = ۰$ ت) $۲\sin^۲ t + \sin t - ۱ = ۰$

ث) $\cos ۲x + \cos \frac{x}{۲} = ۰$ ج) $\sin ۴x = \cos x$

پاسخ:

الف)
$$\sin ۳x = \sin \underbrace{۲x}_{\alpha}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + ۲x \Rightarrow x = ۲k\pi \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - ۲x \Rightarrow ۵x = ۲k\pi + \pi \\ \xrightarrow{\div ۵} x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۵} \end{cases}$$

ب)
$$۴\cos^۲ x - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{جذر}} \cos x = \pm\frac{۱}{۲}$$
$$\begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos \overset{\alpha}{\boxed{\frac{\pi}{۳}}} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ \cos x = -\frac{۱}{۲} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \cos \underset{\alpha}{\boxed{\frac{۲\pi}{۳}}} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

در معادلهٔ $\cos x = -\frac{۱}{۲}$ ابتدا می‌گوییم $\cos \frac{\pi}{۳}$ می‌شود $\frac{۱}{۲}$، حالا به خاطر وجود علامت $(-)$ می‌گوییم که: $\alpha = \pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$

پ)
$$۴\sin^۲ x - ۳ = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{جذر}} \sin x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

منفی به پشت زاویه می‌آید.
$$\sin x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin \underbrace{(-\frac{\pi}{۳})}_{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + (-\frac{\pi}{۳}) \\ x = ۲k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{۳}) \end{cases}$$

ت)
$$\underset{a}{۲}\sin^۲ t + \underset{b}{۱}\sin t - \underset{c}{۱} = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۹$$
$$\Rightarrow \sin t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۱ \pm ۳}{۴}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{۱}{۲} = \sin \overset{\alpha}{\boxed{\frac{\pi}{۶}}} \Rightarrow \begin{cases} t = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \xrightarrow{k=۰} t = \frac{\pi}{۶} \\ t = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \xrightarrow{k=۰} t = \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \\ \sin t = -۱ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} t = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{k=۰} t = -\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

ث)
$$\cos ۲x = -\cos\frac{x}{۲} = \cos(\underbrace{\pi - \frac{x}{۲}}_{\alpha})$$
$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm (\pi - \frac{x}{۲}) \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{x}{۲} \Rightarrow x = \frac{۴k\pi}{۵} + \frac{۲\pi}{۵} \\ ۲x = ۲k\pi - \pi + \frac{x}{۲} \Rightarrow x = \frac{۴k\pi}{۳} - \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

ج)
$$\sin ۴x = \cos x = \sin(\underbrace{\frac{\pi}{۲} - x}_{\alpha})$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۱۰} \\ ۴x = ۲k\pi + \pi - (\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

دقت کنید که در این معادله، چون یک طرف sin و یک طرف cos بود به کمک زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ کسینوس را به سینوس تبدیل کردیم تا دو طرف هم‌نام شوند. البته می‌توانستید sin را به cos تبدیل کنید و بنویسید:

$$\cos(\frac{\pi}{۲} - ۴x) = \cos \underset{\alpha}{x} \Rightarrow \text{ادامهٔ حل}$$

ضمناً مهم نیست زاویهٔ سمت راست را α فرض کنیم یا زاویهٔ سمت چپ را ولی ما همه جا، زاویهٔ سمت راست را α فرض کرده‌ایم.

فصل ۳: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

درس ۱: حد بی‌نهایت

قضیه: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه‌اول $(x-a)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است؛ پس اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آن‌گاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است. مثلاً چندجمله‌ای $f(x) = ۳x^۲ - ۵x - ۲$ بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر است چون $f(۲)$ برابر صفر است. (عدد ۲ ریشهٔ معادلهٔ $x - ۲ = ۰$ است.) حالا با تقسیم $f(x)$ بر $(x-۲)$ می‌توانیم $f(x)$ را به عوامل اول خود تجزیه کنیم:

$$\begin{array}{l|l} ۳x^۲ - ۵x - ۲ & x - ۲ \\ \hline -(۳x^۲ - ۶x) & ۳x + ۱ \\ \quad x - ۲ & \\ \quad -(x - ۲) & \\ \quad ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۵x - ۲ = \underbrace{(x-۲)(۳x+۱)}_{\text{عوامل اول}}$$

رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$

اگر حاصل حد تابع گویای $\frac{f}{g}$ در $x = a$ برابر $\frac{۰}{۰}$ شود به این معنا است که عبارت‌های f و g هر دو بر $(x-a)$ بخش‌پذیرند، پس آن‌ها را تک‌تک بر $(x-a)$ تقسیم می‌کنیم تا f و g به عوامل اول خود تجزیه شوند، سپس عامل صفرشونده را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم.

مثال: مقدار $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{۲x^۳ + ۳x^۲ + ۴}{x^۳ + ۸}$ را به دست آورید.

پاسخ: اگر عدد (-۲) را در صورت و مخرج قرار دهیم هر دوی آن‌ها صفر می‌شوند لذا عامل صفرشونده برابر $(x+۲)$ است. حالا صورت و مخرج را جداگانه بر $(x+۲)$ تقسیم می‌کنیم؛ البته $x^۳ + ۸$ را به کمک اتحاد چاق و لاغر هم می‌توان تجزیه کرد:

$$\text{حد داده‌شده} = \lim_{x\to -۲} \frac{\cancel{(x+۲)}(۲x^۲ - x + ۲)}{\cancel{(x+۲)}(x^۲ - ۲x + ۴)} = \frac{۸+۲+۲}{۴+۴+۴} = ۱$$

تذکر: اگر حاصل حد تابع $\frac{f}{g}$ برابر $\frac{۰}{۰}$ شود و در f یا g یا هر دوی آن‌ها عبارت رادیکالی وجود داشت ابتدا صورت و مخرج را در عبارت یا عبارت‌های رادیکالی مناسب ضرب می‌کنیم تا به کمک اتحادها عامل صفرشونده یعنی $(x-a)$ ایجاد شود و سپس آن را از صورت و مخرج ساده کنیم.

درس نام

مثال: حد مقابل را به دست آورید. $\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}$

پاسخ: الان اگر عدد ۸ را در کسر جای‌گذاری کنیم به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. پس $(x-8)$ عامل صفرشونده است، از طرفی فرجهٔ رادیکال ۳ است پس باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم:

$$\text{حد} = \lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{x-8}}$$

$$=8(\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4)=8(4+2(2)+4)=8\times 12=96$$

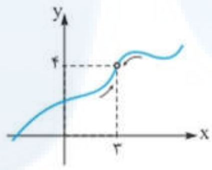
مفهوم همسایگی

هر بازهٔ باز مثل (a,b) شامل عدد حقیقی k را یک همسایگی k می‌نامیم؛ مثلاً می‌توان گفت بازهٔ $(1,4)$ یک همسایگی عدد ۳ است.

هم‌چنین به هر بازه به شکل $(k,k+b)$ یک همسایگی راست k می‌گوییم $(b>0)$ و به هر بازه به شکل $(k-a,k)$ یک همسایگی چپ k می‌گوییم $(a>0)$؛ مثلاً بازهٔ $(3,4)$ یک همسایگی راست ۳ و بازهٔ $(2,3)$ یک همسایگی چپ ۳ است.

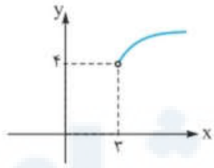
حالا اگر خود عدد k را از همسایگی حذف کنیم به بازهٔ $(a,b)-\{k\}$ یک همسایگی محذوف k می‌گوییم. پس مجموعهٔ $(1,4)-\{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ است، البته یک عدد، بی‌نهایت همسایگی محذوف دارد.

کاربرد همسایگی یک عدد و همسایگی محذوف یک عدد در مبحث حد است. مثلاً وقتی می‌نویسیم $\lim_{x\to 3}f(x)$، تابع f باید در همسایگی محذوف ۳ تعریف شده باشد. مثلاً در شکل مقابل حد تابع f در $x=3$ موجود و برابر با ۴ است:



$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}f(x)=4$$

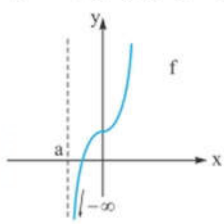
ولی حد تابع g در $x=3$ موجود نیست و فقط حد راست دارد، چون g فقط در همسایگی راست ۳ تعریف شده است:



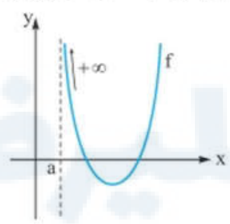
$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}g(x)=4$$

حدبی‌نهایت (نامتناهی)

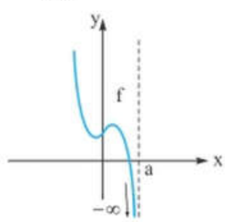
اگر جواب یک حد در یک نقطه برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود اصطلاحاً می‌گوییم حد در آن نقطه وجود ندارد چون جواب حد، باید عددی متناهی شود. به شکل‌های زیر توجه کنید:



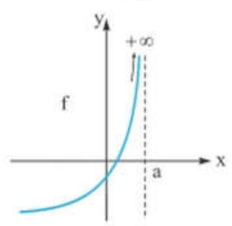
$\lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty$



$\lim_{x\to 3^+}f(x)=+\infty$



$\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty$



$\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty$

در محاسبهٔ حد بی‌نهایت اگر L عددی مثبت باشد دقت کنید که:

$$\frac{L}{0^+}=+\infty\ ,\ \frac{L}{0^-}=-\infty$$

و اگر L عددی منفی باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{L}{0^+}=-\infty\ ,\ \frac{L}{0^+}=-\infty$$

مثال: حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

الف) $\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{[x]-1}{|4x-1|}$ ب) $\lim_{x\to 0}\frac{2x+6}{\sin x}$

پاسخ: الف) اگر $\frac{1}{4}$ را در مخرج به جای x قرار دهیم حاصل مخرج، صفر می‌شود ولی چون $(4x-1)$ داخل قدرمطلق است باید بنویسیم 0^+.

$$\text{حد موردنظر}=\frac{[\frac{1}{4}]-1}{0^+}=\frac{0-1}{0^+}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

ب) اگر در مخرج به جای x صفر بگذاریم به $\sin 0$ می‌رسیم ولی می‌دانیم که: $\sin 0^+=0^+$ و $\sin 0^-=0^-$ لذا باید حد چپ و راست را جداگانه حساب کنیم:

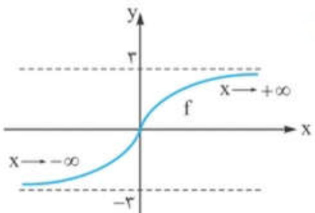
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+6}{\sin x}=\frac{2(0)+6}{\sin 0^+}=\frac{6}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+6}{\sin x}=\frac{2(0)+6}{\sin 0^-}=\frac{6}{0^-}=-\infty$$

درس ۲: حد در بی‌نهایت

حد در بی‌نهایت

به شکل مقابل دقت کنید:



وقتی $x\to+\infty$، آن‌گاه عرض نقاط تابع به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند لذا می‌توان چنین نوشت: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$.

وقتی $x\to-\infty$، آن‌گاه عرض نقاط تابع به عدد ۳- نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند، پس خواهیم نوشت: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-3$.

ضمناً توجه کنید که وقتی $x\to\pm\infty$، آن‌گاه برای حدگرفتن از یک چندجمله‌ای خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to\pm\infty}ax^n$$

یعنی جملهٔ باتوان بیشتر برای متغیر را انتخاب می‌کنیم. ضمناً توجه کنید که:

$$\frac{\infty}{\text{عدد مخالف صفر}}=\infty\quad,\quad \infty\times\text{عدد مخالف صفر}=\infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{\infty}=0\quad,\quad \infty\times\infty=\infty\quad,\quad \infty+\infty=\infty$$

مثال: حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to-\infty}(2x-4+7x^2)$ ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-3x+1}{5x^3+10x-6}$

پ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{x^3+2x-4}$ ت) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-10x^8-7x^2}{2x^5-3}$

پاسخ:

الف) $\text{حد موردنظر}=\lim_{x\to-\infty}(7x^2)=7(-\infty)^2=7\times\infty=+\infty$

ب) $\text{حد موردنظر}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{5x^3}=\frac{4}{5}$

پ) حد موردنظر = $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=\frac{3}{(-\infty)^2}=\frac{3}{\infty}=0$

ت) حد موردنظر = $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-10x^8}{2x^5}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^3)=-5(-\infty)^3$

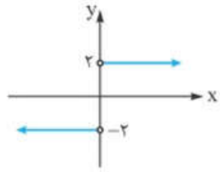
$=-5\times(-\infty)=+\infty$

مثال: **نمودار تابع f را رسم کرده و حدود خواسته‌شده را به کمک آن به دست آورید:**

$$f(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ -2 & x<0\end{cases}\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=?\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=?$$

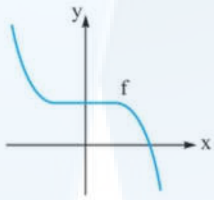
پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ -2 & x>0\end{cases}\Rightarrow$$



$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=2\ ,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-2$$

مثال: **با توجه به شکل مقابل، حاصل حدهای خواسته‌شده را به دست آورید.**



$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=?\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=?$$

پاسخ: وقتی $x\to+\infty$ شاخهٔ سمت راست نمودار، به سمت پایین یعنی $-\infty$ حرکت می‌کند هم‌چنین وقتی $x\to-\infty$ شاخهٔ سمت چپ نمودار، به سمت بالا یعنی $+\infty$ حرکت می‌کند، لذا:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

فصل ۴: مشتق

درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق

تعریف مشتق

مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول $x=a$ به دو شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\quad \text{(h متغیر است.)}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad \text{(x متغیر است.)}$$

البته $f'(a)$ فقط وقتی تعریف شده است که حاصل حدهای بالا موجود و متناهی شود. یعنی به طور مثال اگر برای $f'(a)$ دو جواب مختلف به دست آمد یا حاصل $f'(a)$ برابر ∞ شود، مشتق f در a تعریف‌نشده است.

خط مماس بر منحنی

$f'(a)$ بیانگر شیب خط مماس بر منحنی در $x=a$ است.

مثال: **معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^2-3x$ را در نقطهٔ $x=1$ واقع بر منحنی به دست آورید.**

پاسخ: ابتدا باید شیب خط مماس که همان مشتق در $x=1$ است را محاسبه کنیم. ما برای آموزش از هر دو فرمول بالا استفاده می‌کنیم، شما در امتحان از هر فرمول که راحت‌ترید استفاده کنید:

روش اول: $f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{(1+h)^2-3(1+h)-(-2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{1+2h+h^2-3-3h+2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{h^2-h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{\cancel{h}(h-1)}{\cancel{h}}=0-1=-1$

روش دوم: $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x-(-2)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=1-2=-1$

از طرفی عرض نقطهٔ تماس برابر است با: $f(1)=-2$ لذا به کمک شیب یعنی عدد -1 و نقطهٔ $(1,-2)$ معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-(-2)=-1(x-1)$

$\Rightarrow y=-x+1-2\Rightarrow y=-x-1$

درس ۲: مشتق‌پذیری و پیوستگی

یک قضیهٔ بسیار مهم در ریاضی می‌گوید که اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در $x=a$ قطعاً پیوسته هم می‌باشد. چون اثبات این قضیه ممکن است در امتحان مطرح شود لذا آن را حتماً یاد بگیرید:

اثبات: باید نشان دهیم که: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

می‌دانیم f در a مشتق‌پذیر است، پس $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود دارد؛ لذا خواهیم نوشت:

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim\limits_{x\to a}(x-a)\times(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})$

$=\lim\limits_{x\to a}(x-a)\times f'(a)=0\times f'(a)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

نتیجهٔ قضیهٔ مذکور این است که: اگر f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

مشتق چپ و راست

با توجه به مفهوم مشتق که در ابتدای فصل گفتیم، می‌توان چنین نوشت که:

مشتق راست در a : $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

یا $f'_+(a)=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

مشتق چپ در a : $f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

یا $f'_-(a)=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

نتیجه: تابع f وقتی در $x=a$ مشتق‌پذیر است که اولاً در $x=a$ پیوسته باشد و ثانیاً: $f'_-(a)=f'_+(a)$.

مثال: **مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|1-x^2|$ را در نقطهٔ $x=1$ بررسی کنید.**

پاسخ: اولاً f در $x=1$ پیوسته است، زیرا: $f(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$

ثانیاً مشتق‌های چپ و راست در $x=1$ را بررسی می‌کنیم:

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{|\overbrace{1-x^2}^{+}|-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1-x^2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{\cancel{x-1}}=-(1+1)=-2$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{|\overbrace{1-x^2}^{-}|-0}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-(1-x^2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-\cancel{(1-x)}(1+x)}{\cancel{x-1}}=1+1=2$

چون $f'_-(1)\neq f'_+(1)$، لذا f در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال: به کمک تعریف مشتق (مفهوم مشتق)، بررسی کنید که آیا تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\neq ۲\\ ۱ & x=۲\end{cases}$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر است یا خیر؟

پاسخ: مشتق چپ:

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-۱}{x-۲}=\frac{۳}{۰^-}=-\infty$$

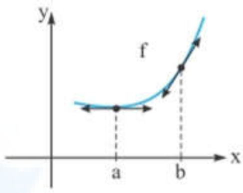
مشتق راست:

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۱}{x-۲}=\frac{۳}{۰^+}=+\infty$$

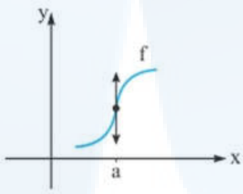
چون مشتق‌های چپ و راست، موجود و متناهی نیستند؛ لذا f در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است.

بررسی مشتق‌پذیری تابع f از روی نمودار آن

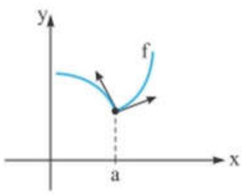
از نظر نموداری، هر جا تابع ناپیوسته باشد (نقطهٔ توخالی داشته باشیم یا نمودار یکپارچه نباشد) تابع مشتق‌پذیر نیست. ضمناً در هر نقطه‌ای که بتوان ۲ خط مماس بر نمودار تابع رسم کرد تابع مشتق‌پذیر نیست (نقاط نوک تیز یا گوشه‌ای در نمودارها) و در نهایت این‌که هر جا خط مماس بر نمودار، موازی محور yها باشد مشتق وجود ندارد (چون شیب خط موازی با محور yها برابر ∞ است و گفتیم که شیب مماس همان مشتق است).



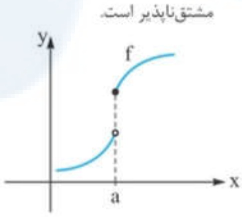
f در a و b مشتق‌پذیر است.



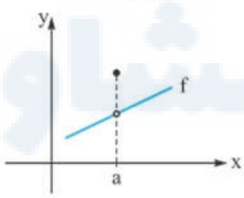
در a خط مماس قائم است، پس f در a مشتق‌ناپذیر است.



در a دو خط مماس بر نمودار رسم شده، پس f در a مشتق‌ناپذیر است.



f در a ناپیوسته است، پس در a مشتق‌ناپذیر است.



f در a ناپیوسته است، پس در a مشتق‌ناپذیر است.

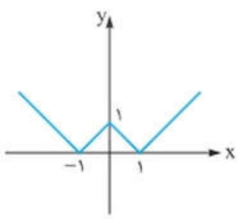
مثال: با رسم نمودار توابع زیر، مشخص کنید در چه نقاطی مشتق‌پذیر نیستند؟

الف) $f(x)=||x|-۱|$　　ب) $y=\begin{cases}x^۲+۱ & x\le ۰\\ -x^۲+۱ & x>۰\end{cases}$

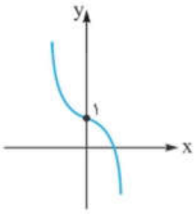
پ) $y=-|x|+|x-۱|$　　ت) $y=|۱-x^۲|$

پاسخ:

الف) نمودار تابع در نقاط به طول $x=۰$، $x=۱$ و $x=-۱$ نوک‌تیز است (دو خط مماس دارند) لذا f در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

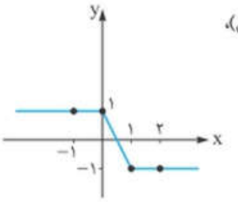


ب)

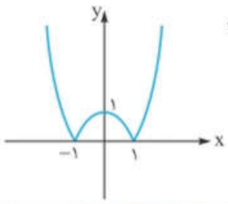


$\Rightarrow$ تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

پ) نقاط به طول $x=۱$ و $x=۰$ نوک‌تیز هستند (گوشه‌ای)، پس f در این دو نقطه مشتق ندارد.



ت) نقاط به طول $x=۱$ و $x=-۱$ نوک‌تیز هستند، پس f در این نقاط مشتق ندارد.



تابع مشتق

اگر $x\in D_f$ باشد، آن‌گاه تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش داده و خواهیم داشت:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

البته حد بالا باید موجود و متناهی باشد. xهایی از D_f که به ازای آن‌ها f' موجود باشد را $D_{f'}$ (دامنهٔ مشتق) می‌نامیم.

مثال: تابع مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را به همراه دامنهٔ آن به دست آورید.

پاسخ:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

پس تابع مشتق برابر است با: $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ و دامنهٔ f' برابر است با $(۰,+\infty)$.

فرمول‌های محاسبهٔ مشتق (بدون استفاده از تعریف)

در فرمول‌های زیر k عددی حقیقی و n عددی طبیعی می‌باشد:

① $y=k \Rightarrow y'=۰$

مثال: $f(x)=\sqrt{۲} \Rightarrow f'(x)=۰$

② $y=kx \Rightarrow y'=k$

مثال: $y=-۳x \Rightarrow y'=-۳$

مثال: $y=\frac{x}{۵} \Rightarrow y'=\frac{۱}{۵}$

③ $y=x^n \Rightarrow y'=nx^{n-۱}$

مثال: $y=x^۸ \Rightarrow y'=۸x^۷$

④ $y=kf(x) \Rightarrow y'=kf'(x)$

مثال: $y=۱۰x^۳ \Rightarrow y'=۱۰\times(۳x^۲)=۳۰x^۲$

(5) $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(6) $y=\sqrt{ax+b} \Rightarrow y'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

مثال: $y=\sqrt{3x-8} \Rightarrow y'=\frac{3}{2\sqrt{3x-8}}$

(7) $y=\sqrt[3]{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(8) $y=(f\pm g)(x) \Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$

مثال: $y=5x^4-3x^2+\sqrt{3}x+1 \Rightarrow y'=20x^3-6x+\sqrt{3}$

(9) $y=(\overset{\text{اولی}}{f}\cdot \overset{\text{دومی}}{g})(x) \Rightarrow y'=\overset{\text{مشتق اولی}}{f'(x)}\,\overset{\text{خود دومی}}{g(x)}+\overset{\text{مشتق دومی}}{g'(x)}\,\overset{\text{خود اولی}}{f(x)}$

مثال: $y=(\underbrace{3x^4+7}_{f})(\underbrace{-x^2+\frac{1}{x}}_{g})$

$$\Rightarrow y'=(\overbrace{12x^3}^{f'})(\overbrace{-x^2+\frac{1}{x}}^{g})+(\overbrace{-2x-\frac{1}{x^2}}^{g'})(\overbrace{3x^4+7}^{f})$$

(10) $y=(\frac{f}{g})(x) \Rightarrow y'=\frac{\overset{\text{مشتق صورت}}{f'(x)}\,\overset{\text{خود مخرج}}{g(x)}-\overset{\text{مشتق مخرج}}{g'(x)}\,\overset{\text{خود صورت}}{f(x)}}{(g(x))^2}$

مثال: $y=\frac{\overbrace{x^3-8x}^{f}}{\underbrace{2x+5\sqrt{x}}_{g}}$

$$\Rightarrow y'=\frac{\overbrace{(3x^2-8)}^{f'}\overbrace{(2x+5\sqrt{x})}^{g}-\overbrace{(2+5\times\frac{1}{2\sqrt{x}})}^{g'}\overbrace{(x^3-8x)}^{f}}{\underbrace{(2x+5\sqrt{x})^2}_{g^2}}$$

(11) $y=f^n(x) \Rightarrow y'=\underset{\text{توان}}{n}\times\underset{\text{مشتق خود f}}{f'(x)}\times\underset{\text{خود تابع با یک توان کم‌تر}}{f^{n-1}(x)}$

مثال: $y=(\underbrace{10x^4-5x^3-3}_{f})^{\overset{n}{8}}$

$$\Rightarrow y'=8\times(40x^3-15x^2)\times(10x^4-5x^3-3)^7$$

مثال: $y=(\underbrace{\frac{-2x+3}{x^2-1}}_{f})^{\overset{n}{10}}$

$$\Rightarrow y'=10\times(\frac{-2(x^2-1)-2x(-2x+3)}{(x^2-1)^2})\times(\frac{-2x+3}{x^2-1})^9$$

مثال: $y=(3x^4-2x)^5(\sqrt[3]{x})$

$$\Rightarrow y'=\underbrace{5(12x^3-2)(3x^4-2x)^4}_{\text{مشتق اولی}}\times\underbrace{(\sqrt[3]{x})}_{\text{خود دومی}}+\underbrace{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}_{\text{مشتق دومی}}\times\underbrace{(3x^4-2x)^5}_{\text{خود اولی}}$$

مشتق تابع مرکب (قاعدهٔ زنجیری)

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog نیز مشتق‌پذیر است و خواهیم داشت:

$$y=(fog)(x)=f(g(x)) \Rightarrow y'=g'(x)\times f'(g(x))$$

یا می‌توان دستور بالا را به صورت زیر نوشت:

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'\times f'(u)$$

مثلاً مشتق تابع $f(\sqrt{x})$ برابر است با: $\frac{1}{2\sqrt{x}}\times f'(\sqrt{x})$.

مثال: اگر $g(x)=f(x^2+5x)$ و $g'(1)=8$ باشد، آن‌گاه $f'(6)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$g(x)=f(\underbrace{x^2+5x}_{u})$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} g'(x)=(2x+5)\times f'(x^2+5x)$$

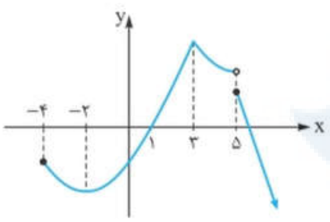
$$\xrightarrow{x=1} g'(1)=(2(1)+5)f'(1^2+5(1)) \Rightarrow g'(1)=7f'(6)$$

$$\Rightarrow 8=7f'(6) \Rightarrow f'(6)=\frac{8}{7}$$

مشتق‌پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است، هرگاه در هر نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشد. ضمناً f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ $x=a$ مشتق راست و در نقطهٔ $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

در نمودار زیر، مشتق‌پذیری f را روی چند بازه، بررسی می‌کنیم:



f در بازهٔ $[-4,1]$ مشتق‌پذیر است.

f در بازهٔ $[-4,5)$ مشتق‌ناپذیر است.

چون در $x=3$ مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای یا زاویه‌دار است).

f روی بازهٔ $[5,+\infty)$ مشتق‌پذیر است.

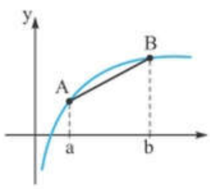
f در بازهٔ $(4,6)$ مشتق‌ناپذیر است، چون در $x=5$ ناپیوسته است.

درس ۳: آهنگ تغییر

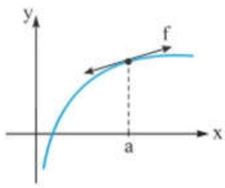
آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط تابع

منظور از آهنگ یا سرعت لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ a همان $f'(a)$ می‌باشد. همچنین منظور از آهنگ متوسط تغییرات f از a تا b کسر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ است.

از نظر هندسی، آهنگ (سرعت) لحظه‌ای f در $x=a$ همان شیب خط مماس بر نمودار f در a است و آهنگ (سرعت) متوسط f از a تا b، شیب خطی است که دو نقطهٔ ابتدایی و انتهایی را به هم وصل می‌کند.



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=$ سرعت متوسط از a تا b = شیب خط AB



$f'(a)=$ سرعت لحظه‌ای در a = شیب خط مماس در a

مثال: گلوله‌ای را در راستای عمودی به بالا پرتاب می‌کنیم. معادلهٔ حرکت آن به صورت $y(t)=-5t^2+10t$ می‌باشد. (t زمان برحسب ثانیه و y ارتفاع از سطح زمین برحسب متر است.)

الف) این گلوله در چه لحظه‌هایی در زمین قرار دارد؟ (ارتفاع آن صفر است.)

ب) معادلهٔ سرعت این گلوله را بنویسید. سرعت در شروع حرکت و در لحظهٔ برخورد با زمین چه‌قدر است؟

پ) در چه لحظه‌ای سرعت گلوله صفر است؟ ارتفاع گلوله در این لحظه چه‌قدر است؟ (ارتفاع ماکزیمم)

ت) سرعت متوسط گلوله از لحظهٔ $t=1$ تا پایان حرکت چه‌قدر است؟

پاسخ:

الف) $\underset{\text{ارتفاع}}{\underset{\downarrow}{y}}=0 \Rightarrow -5t^2+10t=0 \Rightarrow t(-5t+10)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=0 & \text{شروع حرکت} \\ t=2 & \text{پایان حرکت (لحظهٔ برخورد با زمین)} \end{cases}$$

ب) $y=-5t^2+10t \Rightarrow y'=-10t+10$ معادلهٔ سرعت

$y'(0)=-10(0)+10=10$ سرعت لحظه‌ای در شروع حرکت

$y'(2)=-10(2)+10=-10$ سرعت لحظه‌ای در پایان حرکت

پ) $y'=0 \Rightarrow -10t+10=0 \Rightarrow t=1$ (ثانیه)

$y=-5t^2+10t \xrightarrow{t=1} y=-5(1)^2+10(1)=5$ (متر)

ت) $\text{سرعت متوسط}=\frac{y(b)-y(a)}{b-a}=\frac{y(2)-y(1)}{2-1}=\frac{0-(5)}{1}=-5$

فصل ۵: کاربرد مشتق

درس ۱: اکسترمم‌های تابع

یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق

در یک بازه از دامنهٔ f، اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد آن‌گاه f در آن بازه اکیداً صعودی است، اگر f' موجود و منفی باشد آن‌گاه f در این بازه اکیداً نزولی است و در نهایت این‌که اگر f' در یک بازه موجود و برابر صفر باشد آن‌گاه f در آن بازه، تابعی ثابت است.

مثال: تابع $f(x)=x^3-3x+5$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

پاسخ: f' را به دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

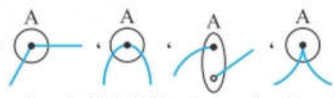
$f'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	7	↘	3	↗	$+\infty$

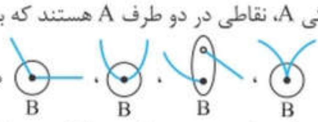
پس f در بازهٔ $(-1,1)$ اکیداً نزولی و در بازه‌های $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

اکسترمم‌های نسبی و مطلق

به نقطهٔ A در شکل‌های

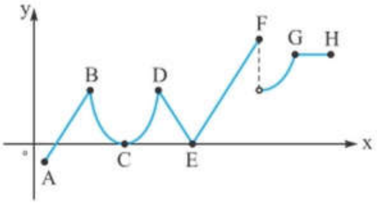


ماکزیمم نسبی می‌گوییم چون عرض A بزرگ‌تر یا مساوی عرض نقاط اطراف خود (همسایگی A) است. منظور از نقاط همسایگی A، نقاطی در دو طرف A هستند که بسیار به A نزدیک‌اند. به نقطهٔ B در شکل‌های



مینیمم نسبی می‌گوییم چون عرض B کوچک‌تر یا مساوی عرض نقاط همسایگی خود است. به نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی، اکسترمم نسبی هم می‌گوییم. نقاط روی یک پاره‌خط افقی، هم ماکزیمم و هم مینیمم نسبی محسوب می‌شوند. ضمناً نقاط ابتدا و انتهایی یک بازه اکسترمم نسبی محسوب نمی‌شوند (چون تابع فقط در یک طرف آن‌ها وجود دارد). حال اگر عرض A در کل دامنهٔ تابع، **بزرگ‌تر یا مساوی (کوچک‌تر یا مساوی)** عرض سایر نقاط باشد به A **ماکزیمم مطلق (مینیمم مطلق)** می‌گوییم.

مثال: در شکل مقابل، اکسترمم‌های نسبی و مطلق را مشخص کنید.



پاسخ:

$$\begin{cases} \text{ماکزیمم نسبی} \Rightarrow B,D,F,G,(\text{نقاط بین } H,G) \\ \text{مینیمم نسبی} \Rightarrow C,E,(\text{نقاط بین } H,G) \\ F \Rightarrow \text{ماکزیمم مطلق (از همه بالاتر است.)} \\ A \Rightarrow \text{مینیمم مطلق (از همه پایین‌تر است.)} \end{cases}$$

یافتن اکسترمم‌های مطلق به کمک نقاط بحرانی

تابع f با دامنهٔ $[a,b]$ را در نظر بگیرید. نقاطی از بازهٔ (a,b) که مشتق f در آن‌ها صفر است یا مشتق f در آن‌ها وجود ندارد (مانند نقاط ناپیوستگی) نقاط بحرانی f نامیده می‌شوند. به ۲ موضوع مهم توجه کنید که اولاً طول نقطهٔ بحرانی باید متعلق به دامنهٔ تابع باشد و ثانیاً تابع در یک همسایگی نقطهٔ بحرانی باید تعریف‌شده باشد. در امتحان، برای یافتن نقاط بحرانی، از تابع مشتق بگیرید و مساوی صفر قرار دهید (اگر مشتق، کسری شد مخرج را هم مساوی صفر قرار دهید). حال برای یافتن max و min مطلق، عرض نقاط بحرانی و عرض نقاط ابتدا و انتهای دامنه را به دست می‌آوریم. بیشترین عرض، ماکزیمم مطلق و کم‌ترین عرض، مینیمم مطلق خواهد بود.

مثال: اکسترمم‌های مطلق توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x)=x^3-27x-4 \quad x\in[-4,-1]$

ب) $y=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}}$

پاسخ:

الف) $f(x)=x^3-27x-4 \quad x\in[-4,-1]$

$y'=0 \Rightarrow 3x^2-27=0 \Rightarrow x^2=9$

$\Rightarrow x=\pm3 \xrightarrow[\text{دامنه قرار دارد.}]{\text{فقط ۳- در}} x=-3$ بحرانی

نقاط به طول $x=-4$ و $x=-1$ ابتدا و انتهای بازهٔ بسته هستند، این نقاط بحرانی نیستند ولی عرض آن‌ها را نیز باید حساب کنیم.

x	-4	-3	-1
y	40	50	22
		max مطلق	min مطلق

ب) $y=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y'=\frac{6}{5}x^{\frac{6}{5}-1}-12\times\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}$

$=\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}-\frac{12}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{6\sqrt[5]{x}}{5}-\frac{12}{5\sqrt[5]{x^4}}=\frac{6x-12}{5\sqrt[5]{x^4}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x-12=0 \Rightarrow x=2 \quad \text{ریشهٔ صورت} \\ \xrightarrow{\text{در تابع}} y=2^{\frac{6}{5}}-12\times2^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{2^6}-12\sqrt[5]{2} \\ =2\sqrt[5]{2}-12\sqrt[5]{2}=-10\sqrt[5]{2} \\ x^4=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{ریشهٔ مخرج} \xrightarrow{\text{در تابع}} y=0^{\frac{6}{5}}-12\times0^{\frac{1}{5}}=0 \end{cases}$$

پس $-10\sqrt[5]{2}$ مینیمم مطلق و صفر ماکزیمم مطلق خواهد بود.

آزمون مشتق اول برای پیداکردن ماکزیمم و مینیمم نسبی

برای پیداکردن اکسترمم‌های نسبی، ابتدا نقاط بحرانی را به دست آورده و به کمک آن‌ها، تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم هر جا که مشتق از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، مینیمم نسبی و هر جا که مشتق از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، ماکزیمم نسبی خواهد بود.

مثال: اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+10$ را تعیین کنید.

پاسخ:

$$y'=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0$$

$$\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{اتحاد جملهٔ}} (x-3)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=2\\ x=3\end{cases} \text{طول نقاط بحرانی}$$

x	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{44}{3}$ max	↘	$\frac{29}{2}$ min	↗	$+\infty$

پس $B(3,\frac{29}{2})$ مینیمم نسبی و $A(2,\frac{44}{3})$ ماکزیمم نسبی خواهد بود.

این تابع اکسترمم مطلق ندارد، زیرا در بین عرض‌های موجود در جدول، بیش‌ترین عرض $+\infty$ و کمترین عرض $-\infty$ است و می‌دانیم $+\infty$ و $-\infty$ در ریاضی دو نماد هستند و عدد محسوب نمی‌شوند. ضمناً تابع در بازهٔ $[2,3]$ نزولی و در بازه‌های $(-\infty,2]$ و $[3,+\infty)$ صعودی است. (هر جا مشتق مثبت باشد، تابع صعودی و هر جا منفی باشد، تابع نزولی است.)

تعیین پارامترهای مجهول در مسائل اکسترمم نسبی

گاهی اوقات نقطهٔ اکسترمم نسبی به ما داده می‌شود و محاسبهٔ مجهولاتی مثل a و b از ما خواسته می‌شود. در این‌گونه سؤالات، یک بار مختصات نقطهٔ داده‌شده را در خود تابع قرار می‌دهیم و یک بار هم طول نقطهٔ داده‌شده را در رابطهٔ $y'=0$ جای‌گذاری می‌کنیم.

مثال: ضرایب ثابت a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=x^3+ax^2+b$ در $A(2,3)$ یک ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد.

پاسخ:

$$y=x^3+ax^2+b \xrightarrow[(y=3)]{(x=2)} 3=2^3+a(2)^2+b$$

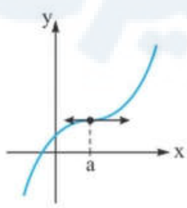
$$\Rightarrow 4a+b=-5$$

$$y'=0 \Rightarrow 3x^2+2ax=0 \xrightarrow{(x=2)} 3(2)^2+2a(2)=0$$

$$\Rightarrow a=-3 \xrightarrow[\text{بالا قرار می‌دهیم.}]{\text{در رابطهٔ}} b=7$$

قضیهٔ فِرما

اگر تابع f در نقطه‌ای به طول $x=a$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(a)$ موجود باشد، آن‌گاه قطعاً $f'(a)=0$ است. به عبارت دیگر، هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f، یک نقطهٔ بحرانی هم می‌باشد.



تذکر: عکس قضیه فِرما، لزوماً درست نیست؛ یعنی هر نقطهٔ بحرانی، لزوماً اکسترمم نسبی نیست. مانند:

الان در نقطهٔ $x=a$ مشتق صفر است (خط مماس افقی است) ولی این نقطه، اکسترمم نسبی نیست.

مثال: تابع $f(x)=-x^2+4x+3$ را در نظر بگیرید و درستی قضیهٔ فِرما را به کمک مشتق، نشان دهید.

پاسخ: ابتدا معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل می‌کنیم تا طول نقطه یا نقاط بحرانی به دست آید:

$$f'(x)=0 \Rightarrow -2x+4=0 \Rightarrow x=2$$

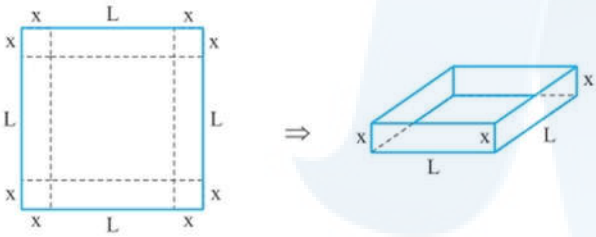
x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y	$-\infty$	↗	۷	↘	$-\infty$

واضح است که نقطهٔ $A(2,7)$ اکسترمم نسبی (ماکزیمم نسبی) تابع است. از طرفی نقطه به طول $x=2$ نقطهٔ بحرانی هم می‌باشد؛ لذا درستی قضیهٔ فِرما، ثابت شده است.

درس ۲: بهینه‌سازی

در این قسمت می‌خواهیم به کمک تعیین نقطه یا نقاط بحرانی و تعیین علامت مشتق، مقدار یک یا دو متغیر را طوری تعیین کنیم که مقدار متغیر سوم، ماکزیمم یا مینیمم شود. در این‌گونه مسائل، عبارت اصلی که می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم شود فقط باید شامل یک متغیر باشد ولی اگر دارای ۲ متغیر بود به کمک اطلاعات مسئله، آن‌ها را به یک متغیر تبدیل می‌کنیم سپس معادلهٔ $y'=0$ را حل می‌کنیم تا نقطه یا نقاط بحرانی به دست آیند و در نهایت y' را تعیین علامت می‌کنیم.

مثال: ورق فلزی مربع‌شکلی به طول ضلع $4\,cm$ را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن، مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تاکردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص‌شده در شکل، یک جعبه درباز بسازیم. مقدار x چه‌قدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن شود؟



پاسخ: می‌خواهیم حجم مکعب‌مستطیل، ماکزیمم شود؛ لذا فرمول حجم آن را می‌نویسیم:

$$V = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = L\times L\times x = xL^2$$

ولی رابطهٔ اخیر دو متغیر دارد لذا باید کاری کنیم که فقط یک متغیر داشته باشد:

$$\text{طبق فرض}: \text{ضلع مربع} = 4 \Rightarrow x+L+x=4 \Rightarrow 2x+L=4$$

$$\Rightarrow L=4-2x$$

$$V=xL^2 \xrightarrow{L=4-2x} V=x(4-2x)^2=x(16-16x+4x^2)$$

$$=4x^3-16x^2+16x \quad , \quad x\in[0,2]$$

چون تابع V تابعی پیوسته است لذا طبق قضیه مقدار اکسترمم، در هر بازهٔ بسته‌ای هم دارای ماکزیمم است و هم مینیمم. حالا نقاط بحرانی آن را به دست می‌آوریم.

$$V'=0 \Rightarrow 12x^2-32x+16=0$$

$$\xrightarrow{\div 4} 3x^2-8x+4=0 \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{تجزیه}} (x-2)(3x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=2\\ x=\frac{2}{3}\end{cases} \text{نقاط بحرانی}$$

حالا جدول تغییرات تابع V را رسم می‌کنیم:

x	۰		$\frac{2}{3}$		۲
V'		+	۰	−	۰
V	۰	↗		↘	

پس به ازای $x=\frac{2}{3}$ حجم جعبه ماکزیمم می‌شود (لزومی ندارد مقدار حجم به ازای $x=\frac{2}{3}$ را به دست آوریم، اگر حجم ماکزیمم خواسته می‌شد باید $x=\frac{2}{3}$ را در تابع حجم (تابع V) قرار می‌دادیم).

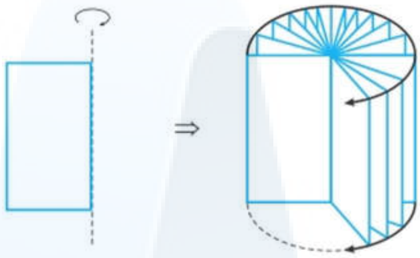
فصل ۶: هندسه

درس ۱: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

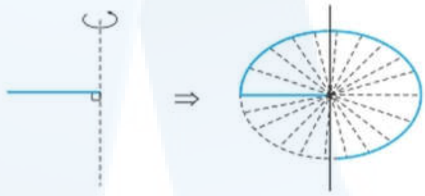
دوران حول محور

وقتی شکل‌های هندسی را حول یک محور دوران دهیم شکل‌های دوبعدی یا سه‌بعدی ساخته می‌شوند. به قسمت‌های زیر توجه کنید:

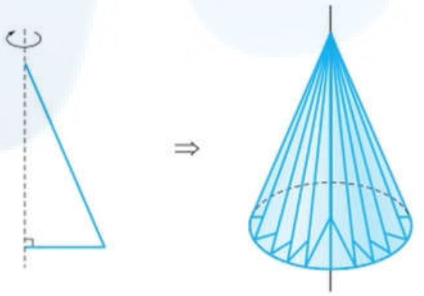
الف شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن، یک استوانه است.



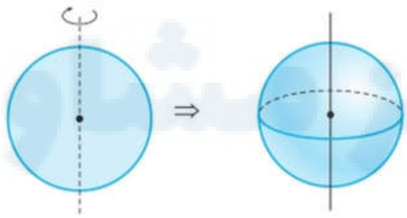
ب شکل حاصل از دوران یک پاره‌خط، حول پاره‌خط دیگری که بر آن عمود است، یک دایره است.



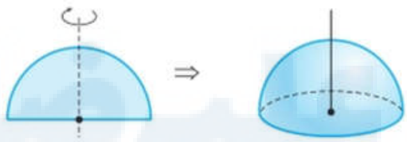
پ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه، یک مخروط می‌باشد.



ت شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن، یک کره است.



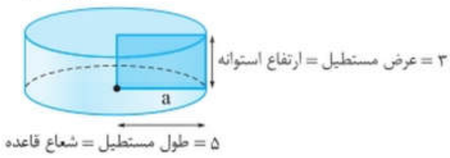
ث شکل حاصل از دوران یک نیم‌دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن، یک نیم‌کره است.



مثال **مستطیلی به ابعاد ۵ و ۳ را حول عرضش دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را به دست آورید.**

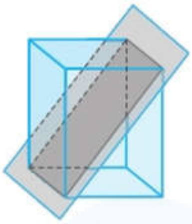
پاسخ طبق شکل روبه‌رو، یک استوانه حاصل می‌شود که شعاع قاعده‌اش برابر ۵ و ارتفاعش برابر ۳ است:

$V = \pi r^2 h = \pi \times 5^2 \times 3 = 75\pi$: حجم استوانه



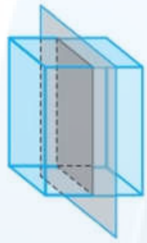
بُرش

می‌خواهیم اجسام سه‌بُعدی را بُرش بزنیم، شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود سطح مقطع آن نامیده می‌شود. سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک مکعب توخالی به شکل‌های زیر است:

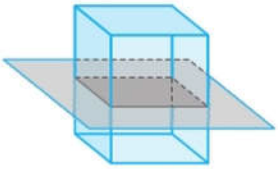


سطح مقطع: مستطیل

سطح مقطع: مثلث



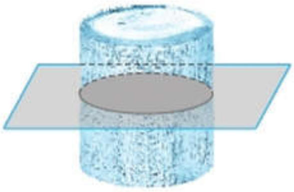
سطح مقطع: مربع



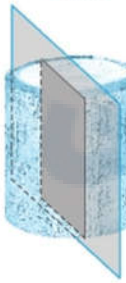
سطح مقطع: مربع

سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد به شکل‌های زیر است:

سطح مقطع: بیضی



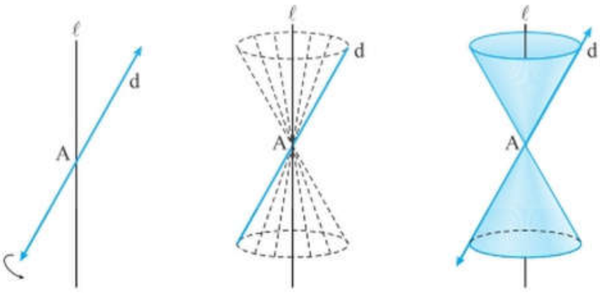
سطح مقطع: دایره



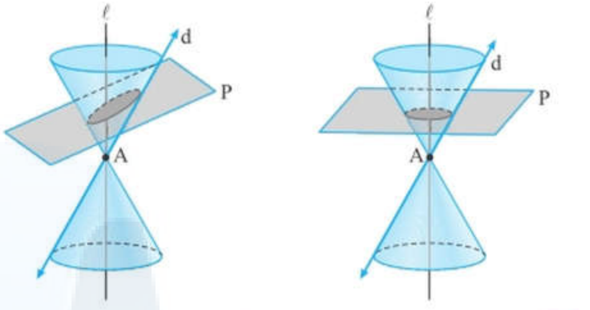
سطح مقطع: مستطیل

آشنایی با مقاطع مخروطی

دو خط d و ℓ در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط ℓ دوران کامل دهیم شکل حاصل، یک سطح مخروطی نامیده می‌شود. ضمناً به خط ℓ محور، به نقطهٔ A رأس و به خط d مولد این سطح مخروطی می‌گوییم.

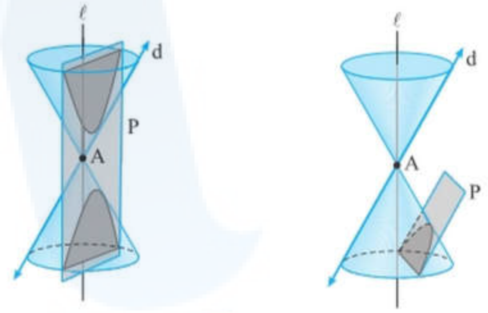


وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش زده می‌شود معمولاً سطح مقطع حاصل، یک منحنی است. ولی از آن‌جا که این منحنی‌ها حاصل برخورد یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، آن‌ها را مقاطع مخروطی می‌نامند.



الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.

ب) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل بیضی خواهد بود.

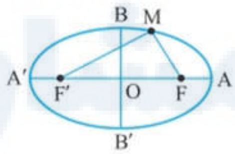


پ) اگر صفحهٔ P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی است.

ت) اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را هذلولی می‌نامیم.

بیضی

بیضی شامل تمام نقاطی از صفحه مانند M است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت F و F′ (کانون‌ها) برابر با مقدار ثابت ۲a می‌باشد. (جابه‌جایی F و F′ مهم نیست.)



$\Rightarrow MF+MF'=۲a$

ضمناً به A و A′ رأس‌های کانونی و به B و B′ رأس‌های ناکانونی می‌گوییم. اگر نقطهٔ M خارج بیضی باشد: $MF+MF'>۲a$

و اگر داخل بیضی باشد: $MF+MF'<۲a$

طول قطر بزرگ: $OA=a \Rightarrow AA'=۲a$

طول قطر کوچک: $OB=b \Rightarrow BB'=۲a$

فاصلهٔ کانونی: $OF=c \Rightarrow FF'=۲c$

مرکز بیضی: $O(\alpha,\beta)$

رابطهٔ بین پارامترهای بیضی: $a^۲=b^۲+c^۲$

خروج از مرکز بیضی: $e=\frac{c}{a}=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}$

○ دقت کنید که خروج از مرکز بیضی همواره عددی بین صفر و یک است. هر چه‌قدر e به ۱ نزدیک‌تر باشد، بیضی کشیده‌تر است و هر چه‌قدر e به صفر نزدیک‌تر باشد، بیضی به دایره شبیه‌تر است.

مثال: در یک بیضی $b=۵$ و $c=۳$ می‌باشند. اندازهٔ قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی و هم‌چنین خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا باید مقدار a را به دست آوریم:

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=۲۵+۹ \Rightarrow a^۲=۳۴ \Rightarrow a=\sqrt{۳۴}$$

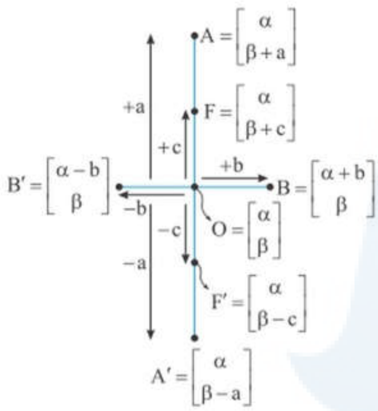
قطر بزرگ $=۲a=۲\sqrt{۳۴}$

قطر کوچک $=۲b=۲\times۵=۱۰$

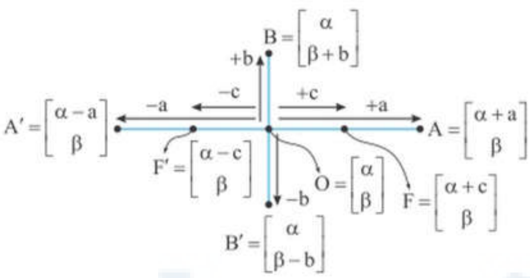
خروج از مرکز $=\frac{c}{a}=\frac{۳}{\sqrt{۳۴}}$

فاصلهٔ کانونی $=۲c=۲\times۳=۶$

بیضی قائم: بهتر است برای حل مسائل بیضی، فقط اسکلت اصلی آن را رسم کنیم و نقاط مهم بیضی را روی آن نمایش دهیم. در بیضی قائم طول نقاط O، F′، F، A و A′ همگی با هم برابرند و عرض نقاط O، B و B′ هم با هم برابرند.

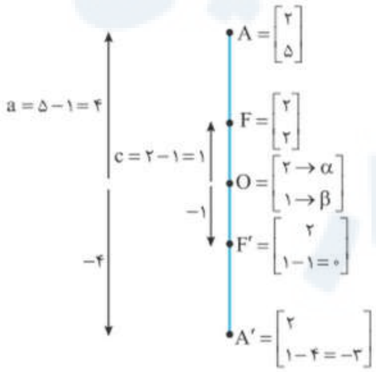


بیضی افقی: در بیضی افقی نقاط O، F′، F، A و A′ هم‌عرض‌اند و نقاط O، B و B′ هم‌طول‌اند.



مثال: در یک بیضی $A(۲,۵)$ یکی از رئوس اصلی و $F(۲,۲)$ یکی از کانون‌ها و $O(۲,۱)$ مرکز بیضی می‌باشد. مختصات بقیهٔ رأس‌ها و کانون F′ و خروج از مرکز را بیابید.

پاسخ: A، F و O هم‌طول‌اند پس بیضی قائم است:



$$(a=۴,c=۱)\xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲}۱۶=b^۲+۱\Rightarrow b^۲=۱۵\Rightarrow b=\sqrt{۱۵}$$

خروج از مرکز: $e=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۴}$ ، $B\begin{bmatrix}\alpha+b=۲+\sqrt{۱۵}\\ \beta=۱\end{bmatrix}$

$$B'\begin{bmatrix}\alpha-b=۲-\sqrt{۱۵}\\ \beta=۱\end{bmatrix}$$

مثال: **مختصات دو سر قطر بزرگ در یک بیضی $A(9,2)$ و $A'(-1,2)$ می‌باشند. اگر فاصلهٔ کانونی بیضی ۶ باشد، مختصات دو سر قطر کوچک و کانون‌ها را به دست آورید.**

پاسخ: عرض نقاط A و A' یکسان است، پس بیضی افقی است. از طرفی نقطهٔ O یعنی مرکز بیضی، وسط پاره‌خط AA' قرار دارد لذا:

$$O\begin{bmatrix} \frac{9-1}{2}=4 \\ \frac{2+2}{2}=2 \end{bmatrix}$$

$$AA'=9-(-1)=10 \Rightarrow 2a=10 \Rightarrow a=5$$

$$\text{فاصلهٔ کانونی}=2c=6 \Rightarrow c=3$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 25=b^2+9 \Rightarrow b^2=16 \Rightarrow b=4$$

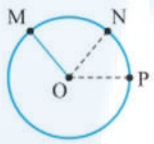
$$F\begin{bmatrix} \alpha+c=4+3=7 \\ \beta=2 \end{bmatrix} \quad , \quad F'\begin{bmatrix} \alpha-c=4-3=1 \\ \beta=2 \end{bmatrix}$$

$$B\begin{bmatrix} \alpha=4 \\ \beta+b=2+4=6 \end{bmatrix} \quad , \quad B'\begin{bmatrix} \alpha=4 \\ \beta-b=2-4=-2 \end{bmatrix}$$

درس ۲: دایره

دایره و معادلهٔ آن

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابتی در همان صفحه، مقداری ثابت و مثبت باشد. این نقطهٔ ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را شعاع دایره می‌نامیم.



$$OM=ON=OP=r$$

معادلهٔ استاندارد دایره

اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره و r شعاع آن باشد، شکل استاندارد معادلهٔ دایره به صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ می‌باشد.

مثلاً معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(-1,4)$ و به شعاع ۳ برابر است با:

$$(x+1)^2+(y-4)^2=9$$

مثال: **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $A(1,2)$ گذشته و نقطهٔ $O(3,3)$ مرکز آن باشد.**

پاسخ: شعاع دایره به ما داده نشده و ما باید خودمان آن را به دست آوریم:

$$\text{شعاع دایره}=OA=\sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}=r$$

معادلهٔ دایره:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-3)^2=5$$

معادلهٔ گستردهٔ دایره

شکل گستردهٔ معادلهٔ دایره به صورت:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

می‌باشد در این حالت، شعاع دایره به صورت $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ و مرکز آن $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ است. توجه کنید فقط اگر $a^2+b^2-4c>0$ باشد یک دایره تشکیل خواهد شد. مثلاً در دایرهٔ $x^2+y^2\underset{\overset{\uparrow}{a}}{-2}x\underset{\overset{\uparrow}{b}}{+4}y\underset{\overset{\uparrow}{c}}{+1}=0$ خواهیم داشت:

مرکز دایره:

$$O\left|\begin{array}{l} \frac{-a}{2}=\frac{-(-2)}{2}=1 \\ \frac{-b}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \end{array}\right.$$

شعاع:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2-4(1)}=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$$

مثال: **مقدار k را چنان تعیین کنید که معادلهٔ $x^2+y^2-2x-6y+k=0$ دایره‌ای به شعاع ۲ را مشخص کند.**

پاسخ:

$$r=2 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=2 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{4+36-4k}=2$$

$$\sqrt{40-4k}=4 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 40-4k=16 \Rightarrow k=6$$

وضعیت نقطه نسبت به دایره: به شکل‌های استاندارد و گسترده دایره توجه کنید:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2}_{\text{کل عبارت را } f \text{ می‌نامیم.}}=0 \quad \text{شکل استاندارد}$$

$$\underbrace{x^2+y^2+ax+by+c}_{\text{کل عبارت را } f \text{ می‌نامیم.}}=0 \quad \text{شکل گسترده}$$

حالا مختصات نقطهٔ داده‌شده را در تابع f به جای x و y ها قرار می‌دهیم. اگر حاصل مثبت شد نقطه، خارج دایره، اگر منفی شد نقطه، درون دایره و اگر صفر شد، نقطه روی دایره است.

مثال: **وضعیت نقاط $A(1,4)$ ، $B(0,-2)$ را نسبت به دایرهٔ $(x-1)^2+y^2=5$ بررسی کنید.**

پاسخ: ابتدا تابع f را تشکیل می‌دهیم (فقط کافی است ۵ را به سمت چپ ببریم).
حاصل، مثبت شد پس A خارج دایره است.

$$f=(x-1)^2+y^2-5 \xrightarrow{A\begin{bmatrix}1\to x\\4\to y\end{bmatrix}} f=(1-1)^2+4^2-5=11$$

$$f=(x-1)^2+y^2-5 \xrightarrow{B\begin{bmatrix}0\to x\\-2\to y\end{bmatrix}} f=(0-1)^2+(-2)^2-5$$

$$=1+4-5=0$$

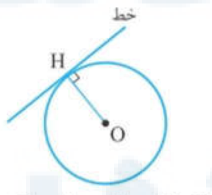
حاصل، صفر شد پس نقطهٔ B روی محیط دایره است.

وضعیت خط نسبت به دایره

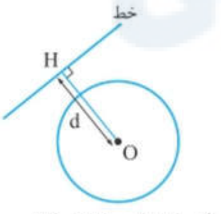
برای بررسی وضعیت هر خط نسبت به یک دایره ابتدا فاصلهٔ مرکز دایره تا آن خط را به دست می‌آوریم و آن را d می‌نامیم سپس d را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم. ضمناً توجه دارید که فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ تا خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

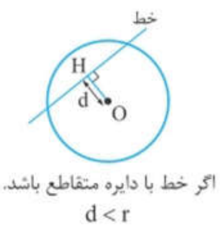
حالا، به شکل‌های زیر توجه کنید:



اگر خط بر دایره مماس باشد.
$d=r$



اگر خط دایره را قطع نکند.
$d>r$



اگر خط با دایره متقاطع باشد.
$d<r$

○ توجه کنید که خط مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره عمود است.

مثال: **وضعیت خط $2x+y=1$ را نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-2x-3=0$ مشخص کنید.**

پاسخ ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2+y^2-\overset{\overset{a}{\uparrow}}{2}x-\overset{\overset{c}{\uparrow}}{3}=0$$

مرکز دایره:

$$O\begin{bmatrix} -\frac{a}{2}=\frac{-(-2)}{2}=1 \\ -\frac{b}{2}=-\frac{0}{2}=0 \end{bmatrix}$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2-4(-3)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+12}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2 \text{ شعاع}$$

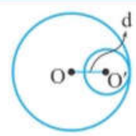
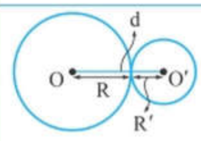
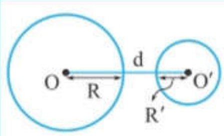
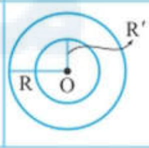
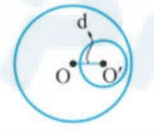
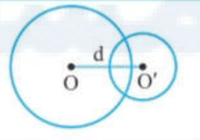
حالا فاصلهٔ O را تا خط $\overset{\overset{a}{\uparrow}}{2}x+\overset{\overset{b}{\uparrow}}{1}y-\overset{\overset{c}{\uparrow}}{1}=0$ محاسبه می‌کنیم:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2(1)+1(0)+(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

واضح است که $2>\frac{1}{\sqrt{5}}$ است یعنی $r>d$؛ لذا خط با دایره متقاطع است.

وضع دو دایره نسبت به هم

فرض کنید ۲ دایره با مرکزهای O و O' و شعاع‌های R و R' موجود باشند در این صورت اگر $R>R'$ باشد و OO' را d بنامیم، حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

$d=R-R'$	$d=R+R'$	$d>R+R'$
دو دایره از داخل بر هم مماس‌اند. (مماس داخل)	دو دایره از بیرون بر هم مماس‌اند. (مماس خارج)	دو دایره خارج یکدیگر بوده و برخوردی ندارند. (متخارج)
		
$d=0$	$d<R-R'$	$R-R'<d<R+R'$
دو دایره هم‌مرکز خواهند بود.	دایرهٔ کوچک، داخل دایرهٔ بزرگ بوده و نقطهٔ برخورد ندارند. (متداخل)	دو دایره در ۲ نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. (متقاطع)
		

مثال: دو دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=7$ و $x^2+y^2-2x+4y=-4$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

پاسخ

$$(x-2)^2+(y+3)^2=7 \Rightarrow O(2,-3), R=\sqrt{7}\simeq 2/6$$

$$x^2+y^2-\underset{\underset{a}{\downarrow}}{2}x+\underset{\underset{b}{\downarrow}}{4}y+\underset{\underset{c}{\downarrow}}{4}=0$$

$$\Rightarrow O'\begin{bmatrix} -\frac{a}{2}=-\frac{-2}{2}=1 \\ -\frac{b}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \end{bmatrix}, R'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-16}=1$$

$$\begin{cases} OO'=d=\sqrt{(2-1)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\simeq 1/4 \\ R-R'=2/6-1=1/6, R+R'=2/6+1=3/6 \end{cases}$$

$\Rightarrow d<R-R' \Rightarrow$ دو دایره متداخل‌اند.

فصل ۷: احتمال

درس ۱: قانون احتمال کل

احتمال وقوع یک پیشامد

اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال رخدادن A برابر است با:

$$P(A)=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال: یک سکه را ۳ بار می‌اندازیم (یا ۳ سکه را یک بار می‌اندازیم). با چه احتمالی:

الف) هر سه بار «پشت» ظاهر می‌شود.

ب) حداکثر یک بار «رو» ظاهر می‌شود.

پ) تعداد «رو»ها بیشتر از تعداد «پشت»ها است.

پاسخ دقت کنید که مسائل جنسیت فرزندان و پرتاب سکه‌ها مانند هم حل می‌شوند. (ممکن است به جای ۳ بار پرتاب سکه، گفته شود خانواده‌ای ۳ فرزند دارد.)

الف) $n(S)=2^3=8\ ,\ A=\{\underbrace{(P,P,P)}_{\text{همه پشت}}\}$

$$\Rightarrow n(A)=1 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{8}$$

ب) حداکثر یک بار «رو» یعنی یک بار «رو» بیاید و یا اصلاً «رو» نیاید:

$$A=\{\underbrace{(P,P,P)}_{\text{همه پشت بیایند (اصلاً رو نیاید).}},\underbrace{(R,P,P),(P,R,P),(P,P,R)}_{\text{یک بار (رو) بیاید.}}\}$$

$$\Rightarrow n(A)=4 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

پ) $A=\{(R,R,P),(R,P,R),(P,R,R),(R,R,R)\}$

$$\Rightarrow n(A)=4 \Rightarrow P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

مثال: از جعبه‌ای که شامل ۳ مهرهٔ سبز، ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی است، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمالات زیر:

الف) هر ۳ مهره، قرمز باشند. **ب) هر ۳ مهره، هم‌رنگ باشند.**

پ) هیچ ۲ مهره‌ای، هم‌رنگ نباشند. **ت) حداقل ۲ مهره، آبی باشند.**

پاسخ

الف)

$$n(S)=\binom{5+4+3}{3}=\binom{12}{3}=\frac{12!}{9!3!}=\frac{12\times11\times10\times\cancel{9!}}{\cancel{9!}\times3\times2\times1}=220$$

$$n(A)=\overbrace{\binom{4}{3}}^{\text{کل قرمزها}}=4 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{220}$$

ب) هر ۳ آبی یا هر ۳ قرمز یا هر ۳ سبز $\Leftarrow$ سه مهرهٔ هم‌رنگ

$$n(A)=\binom{3}{3}\overset{\text{یا}}{+}\binom{4}{3}\overset{\text{یا}}{+}\binom{5}{3}=1+4+10=15 \Rightarrow P(A)=\frac{15}{220}$$

پ) ۱ آبی و ۱ قرمز و ۱ سبز $\Leftarrow$ هیچ ۲ مهره‌ای هم‌رنگ نباشد.

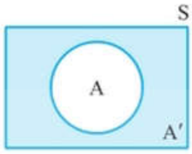
$$n(A)=\binom{3}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{5}{1}=3\times4\times5=60 \Rightarrow P(A)=\frac{60}{220}$$

ت) (۳ مهرهٔ آبی) یا (۱ مهرهٔ سبز یا قرمز و ۲ مهرهٔ آبی) $\Leftarrow$ حداقل ۲ مهرهٔ آبی

$$n(A)=\binom{5}{2}\times\binom{4+3}{1}+\binom{5}{3}=10\times7+10=80$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{80}{220}$$

احتمال وقوع متمم یک پیشامد: گاهی اوقات، تعداد اعضای پیشامد مطلوب A بسیار زیاد و پیداکردن آن‌ها وقت‌گیر است. در این‌گونه مواقع بهتر است ابتدا احتمال رخ‌ندادن A (یعنی رخ‌دادن A') را حساب کنیم و سپس به کمک فرمول $P(A)=1-P(A')$ یا $P(A')=1-P(A)$ احتمال وقوع A را به دست آوریم.



مثال: **در یک خانوادهٔ ۳ فرزندی، با چه احتمالی، حداقل یک فرزند، دختر است؟**

پاسخ: برای پاسخ به این سؤال دو روش وجود دارد:

روش اول: حداقل یک دختر یعنی ۱ دختر یا ۲ دختر یا ۳ دختر که نوشتن این اعضا با توجه به فضای نمونه، کمی وقت‌گیر است لذا بهتر است از پیشامد متمم استفاده کنیم:

$n(S)=2^3=8$

A = حداقل یکی از فرزندان دختر باشد.

A' = هیچ‌کدام از فرزندان دختر نباشد.

$$A'=\{(\text{پ، پ، پ})\} \Rightarrow n(A')=1 \Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{1}{8}$$

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

روش دوم: اگر بخواهیم این سؤال را بدون استفاده از A' حل کنیم باید به این نکته توجه کنیم که اگر بخواهیم از بین n فرزند، k فرزند پسر (دختر) باشد می‌توانیم $n(A)$ را خیلی سریع از $\binom{n}{k}$ به دست آوریم. در مورد پرتاب سکه‌ها و آزمون‌های چندگزینه‌ای هم، می‌توان از این نکته استفاده کرد.

$$\overset{\text{حداقل ۱ دختر}}{n(A)} = \overset{\text{۱ دختر}}{\binom{3}{1}} \overset{\text{یا}}{+} \overset{\text{۲ دختر}}{\binom{3}{2}} \overset{\text{یا}}{+} \overset{\text{۳ دختر}}{\binom{3}{3}}$$

$$=3+3+1=7 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{7}{8}$$

قانون جمع احتمالات

اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند، آن‌گاه:

$$\underbrace{P(A\cup B)}_{\text{A یا B یا حداقل یکی از آن‌ها رخ دهد.}}=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{A و B با هم رخ دهند.}}$$

پیشامدهای ناسازگار

اگر دو پیشامد A و B نتوانند با هم رخ دهند، آن‌ها را ناسازگار می‌گوییم. مثل این‌که در پرتاب یک تاس، عدد ظاهرشده، هم فرد و هم زوج باشد. اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، آن‌گاه $A\cap B=\phi$ خواهد بود و در نتیجه:

$P(A\cap B)=0$

مثال: **فرض کنید در جامعه‌ای، درصد نوع خون به شرح زیر باشد:**

گروه خونی	A	B	AB	O
درصد	۴۱	۹	۴	۴۶

فرد مجروحی را به بخش اورژانس آورده‌اند. با چه احتمالی، گروه خونی وی A یا B خواهد بود؟

پاسخ: دو پیشامد داشتن گروه خونی A و داشتن گروه خونی B ناسازگارند. چون یک فرد، نمی‌تواند هم گروه خونی A و هم گروه خونی B داشته باشد لذا $P(A\cap B)=0$ خواهد بود.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{صفر}}=0.41+0.09=0.50$$

پیشامدهای مستقل

اگر پیشامدهای A و B به گونه‌ای باشند که وقوع یا عدم وقوع یکی، در وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد آن‌ها را مستقل می‌گویند. مانند زوج‌آمدن عدد تاس و پشت‌آمدن سکه در پرتاب سکه و تاس با هم، در این حالت می‌توان گفت:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

نکته: اگر A و B مستقل باشند، آن‌گاه پیشامدهای A و B'، پیشامدهای A' و B و پیشامدهای A' و B' نیز مستقل خواهند بود.

مثال: **مادری دارای ۵ فرزند است. با چه احتمالی فرزند وسط پسر و فرزند آخر دختر است؟**

پاسخ: جنسیت هر فرزند، تأثیری در جنسیت بقیهٔ فرزندان ندارد لذا:

$$P(\underbrace{\text{وسطی پسر}}_{A} \text{ و } \cap \underbrace{\text{آخری دختر}}_{B}) = P(\underbrace{\text{وسطی پسر}}_{A})\times P(\underbrace{\text{آخری دختر}}_{B})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

مثال: **می‌دانیم احتمال این‌که RH خون فردی، منفی باشد ۰/۱۶ است. با چه احتمالی، در یک خانواده، اولین فرزند با RH خونِ منفی، فرزند سوم خانواده است؟**

پاسخ: طبق فرض، احتمال داشتن RH خون منفی، ۰/۱۶است، پس احتمال داشتن RH خون مثبت، برابر $(0.84=1-0.16)$ می‌باشد. اولین فرزند که RH خونِ منفی دارد فرزند سوم است پس دو فرزند اول، RH خونِ مثبت دارند؛ ضمناً پیشامدها مستقل‌اند. لذا:

$$\text{احتمال خواسته‌شده} = P(\text{اولی RH مثبت})\times P(\text{دومی RH مثبت})$$
$$\times P(\text{سومی RH منفی}) = 0.84\times0.84\times0.16=0.112$$

احتمال شرطی

گاهی اوقات، قبل از وقوع A پیشامد دیگری مانند B رخ می‌دهد که روی احتمال وقوع A تأثیر می‌گذارد. مثلاً در پرتاب یک تاس احتمال ظاهرشدن عدد ۳ برابر $\frac{1}{6}$ است، اما اگر بدانیم عدد ظاهرشده، عددی اول است (۲ یا ۳ یا ۵) در این صورت، احتمال ظاهرشدن عدد ۳ برابر $\frac{1}{3}$ خواهد شد.

تعریف: فرض کنید A و B دو پیشامد باشند به شرطی که $P(B)\neq 0$ باشد، در این صورت اگر B قبل از A رخ داده باشد، آن‌گاه احتمال وقوع A را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\xrightarrow[\text{مستقل باشند.}]{\text{اگر A و B}} P(A|B)=\frac{P(A).\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}}=P(A)$$

مثال: **اگر $P(A)=\frac{7}{10}$ ، $P(B)=\frac{1}{10}$ و $P(B|A)=\frac{3}{10}$ باشد، $P(A\cup B)$ را محاسبه کنید.**

پاسخ:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Rightarrow \frac{3}{10}=\frac{P(B\cap A)}{\frac{7}{10}}$$

$$\Rightarrow P(B\cap A)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{100}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{7}{10}+\frac{1}{10}-\frac{21}{100}=\frac{70+10-21}{100}=\frac{59}{100}$$

مثال: **اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A')=\frac{3}{10}$ باشد، $P(A|B)$ را پیدا کنید.**

(آزمون مدارس تهران خرداد ۹۲)

پاسخ:

$$P(A')=\frac{3}{10} \Rightarrow P(A)=1-P(A')=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A).\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}}=P(A)=\frac{7}{10}$$

نکته: در مسائل احتمالی شرطی، همیشه پیشامد B (پیشامدی که زودتر رخ می‌دهد) را به عنوان فضای نمونه‌ای جدید در نظر می‌گیریم و سپس اعضای پیشامد A را از بین اعضای B انتخاب می‌کنیم.

مثال: یک تاس را ۲ بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم مجموع اعداد ظاهرشده برابر ۸ است. با چه احتمالی، این دو عدد با هم برابرند؟

پاسخ: می‌دانیم مجموع دو عدد ظاهرشده ۸ است، پس الان $n(S)$ دیگر برابر با ۳۶ نیست و خواهیم داشت:

$$B=S=\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\} \Rightarrow n(S)=5$$

$$A=\{(4,4)\} \Rightarrow n(A)=1$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(A)}_{\downarrow}=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{5}$$

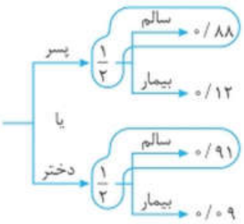
همان $P(A\mid B)$ است.

قانون احتمال کل

در بعضی سؤالات، چند احتمال تودرتو وجود دارد مثلاً فرض کنید گفته شود ۴۵ درصد افراد یک دانشکده پسر و بقیه دختر هستند و ضمناً ۱۰ درصد دختران، متأهل و ۲۰ درصد پسران نیز متأهل‌اند. حالا یک نفر را تصادفاً انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی پسر و مجرد است؟ بهتر است وقتی با این‌گونه سؤالات مواجه می‌شویم از روش شاخه‌بندی (نمودار درختی) استفاده کنیم. به مثال زیر توجه کنید و سپس خودتان احتمال پسر و مجرد بودن این فرد را حساب کنید.

مثال: فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ باشد، والدینی که حامل این نوع بیماری هستند در انتظار تولد فرزندی هستند. با چه احتمالی این فرزند سالم است؟

پاسخ: می‌دانیم احتمال این‌که یک فرزند پسر یا دختر باشد $\frac{1}{2}$ است؛ لذا:



$$\Rightarrow \text{احتمال مطلوب}=(\frac{1}{2}\times 0/88)+(\frac{1}{2}\times 0/91)=0/44+0/455=0/895$$