به نام خدا

جمع بندی حسابان ۲

دبیرستان امام صادق(ع) – منطقه سه تهران

خرداد۹۹ دبیر: آقای سعید میری

برگرفته از کتاب درسی

فصل اول(تابع)

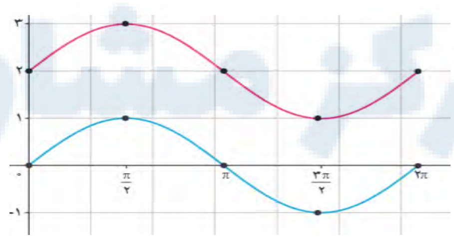
۱-تبدیل نمودار تابع:

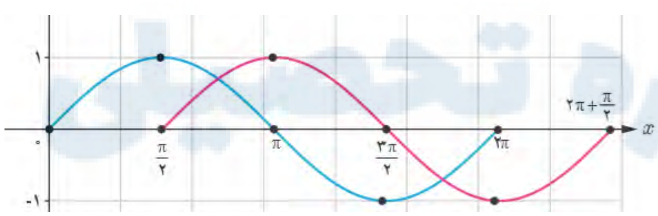
انتقال‌های عمودی و افقی

برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

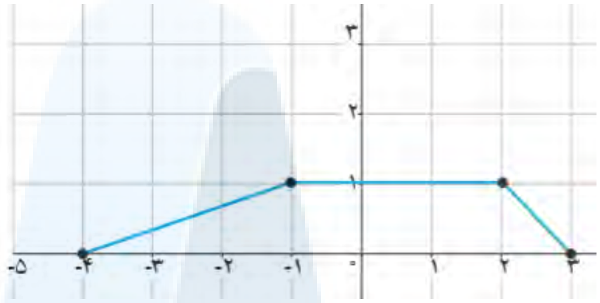
مثال:

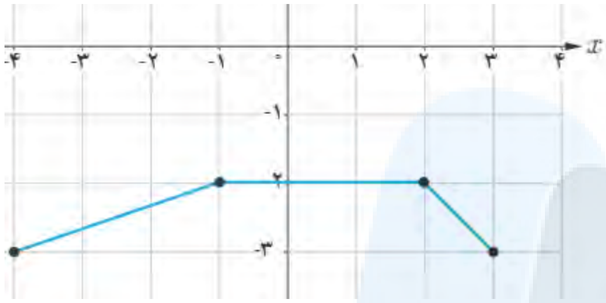




مثال : نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی، نمودار تابع $y=f(x+1)-3$ را رسم

برای این کار ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x+۱)$ رسم شود (شکل الف) و سپس این نمودار را سه واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x+۱)-۳$ رسم شود (شکل ب).



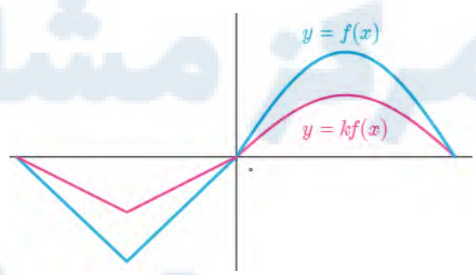


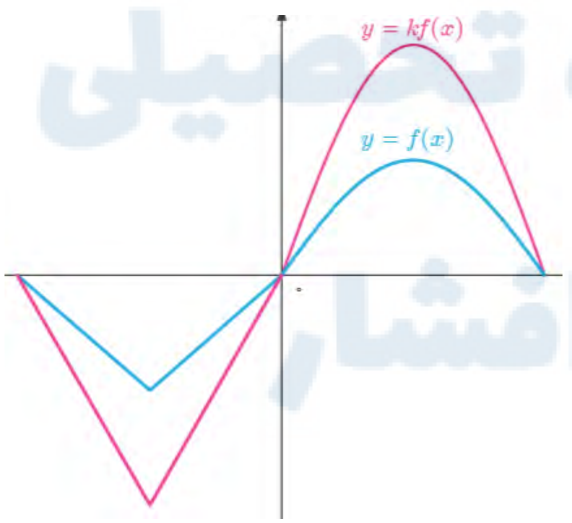
انبساط و انقباض عمودی

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، کافی‌است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y = kf(x)$ برای دو حالت $k > ۱$ و $۰ < k < ۱$ رسم شده است.

اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $۰ < k < ۱$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.

اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x است.





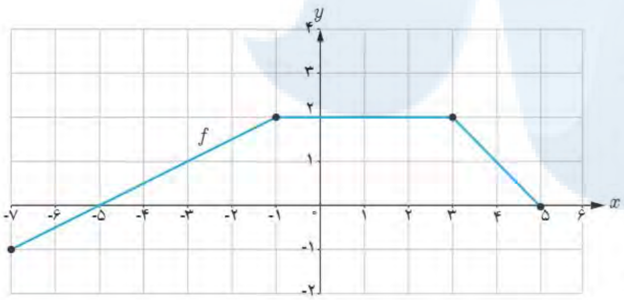
انبساط و انقباض افقی

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی‌است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از **انقباض افقی** نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از **انبساط افقی** نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

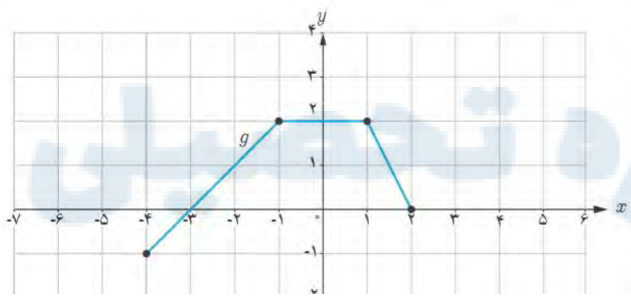
اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور y است.

مثال: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=f(2x+1)$ را به کمک آن رسم می‌کنیم.



اگر $A=(x_0, y_0)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه $A'=\left(\frac{x_0-1}{2}, y_0\right)$ نقطه متناظر آن روی نمودار تابع g است، زیرا[1] :

$$g\left(\frac{x_0-1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{x_0-1}{2}\right)+1\right)=f(x_0-1+1)=f(x_0)=y_0$$



بنابراین نقاط مشخص شده در نمودار f را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نقاط متناظر از g به دست آیند.

با توجه به اینکه $\frac{x_0-1}{2}=\frac{x_0}{2}-\frac{1}{2}$، آیا می‌توانید روشی دیگر برای رسم نمودار تابع g پیشنهاد کنید؟

قضیه تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها

اگر $f(x)$ و $p(x)$ چند جمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه چند جمله‌ای‌های منحصر بفرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری که :

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

که در آن $r(x)=0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

اگر $r(x)=0$ باشد، چندجمله‌ای f بر چندجمله‌ای p بخش‌پذیر است.

قضیه : باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت‌است از $r(x)=f(\frac{-b}{a})$.

مثال:

۱ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای x^3+x-2 را بر $2x+1$ به‌دست آورید.

۲ اگر چند جمله‌ای x^2+ax-2 بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

مثال:

۲ آیا x^n-a^n ($n\in\mathbb{N}$) بر $x-a$ بخش‌پذیر است؟

۳ از تقسیم x^n-a^n بر $x-a$ نشان دهید که x^n-a^n به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

۴ چند جمله‌ای‌های x^5-1 و x^6-64 را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

۷ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

فصل دوم (مثلثات)

دوره تناوب:

تعریف :

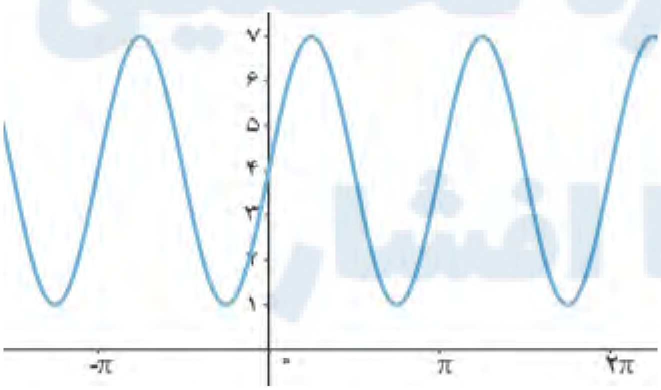
تابع f را **متناوب** می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دورهٔ تناوب** f می‌نامیم.

توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

نکته:

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دورهٔ تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

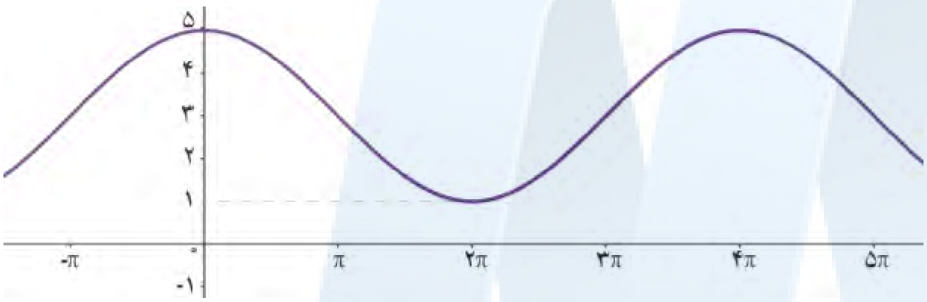
مثال: ضابطه؟



الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و دورهٔ تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

مثال: ضابطه؟



پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و دورهٔ تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{2}$ و $|a| = 2$ لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{2}$ و بنابراین داریم: $y = 2\cos(\frac{x}{2}) + 3$.

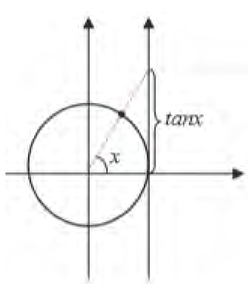
۲- تابع تانژانت:

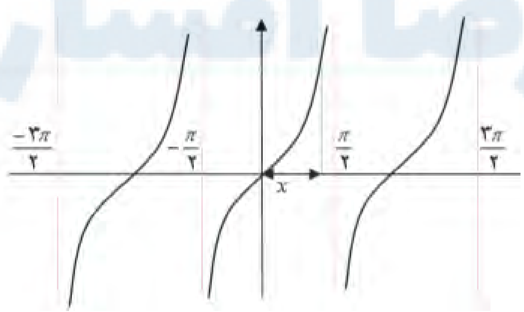
همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan x$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan x$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan x$، تابعی متناوب است[1] و دوره تناوب آن π است، زیرا:

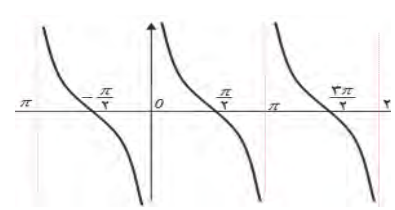
$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در مجموعهٔ $[0, 2\pi] - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ بررسی کنید.

رسم نمودار تانژانت و کتانژانت:







جواب‌های کلی معادله $\tan x=\tan\alpha$ به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ می‌باشد که در آن $k\in\mathbb{Z}$.

مثال : معادله $\tan x=\tan 5x$ را حل کنید.

حل :

$$x=k\pi+5x \Rightarrow 4x=k\pi \rightarrow x=\frac{k\pi}{4}$$

جواب‌هایی قابل قبول‌اند که باقی‌ماندهٔ k ($k\in\mathbb{Z}$) بر ۴ برابر ۲ نباشد. (چرا؟)

تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

مثال:

تانژانت زاویه 105° را حساب می‌کنیم.

$$\tan 105=\tan(45+60)=\frac{\tan 45+\tan 60}{1-\tan 45\tan 60}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{1-1\times\sqrt{3}}=-\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$$

تمرین:

۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2}=\sin 3x$

ب) $\cos 2x-\cos x+1=0$

پ) $\cos x=\cos 2x$

ت) $\cos 2x-3\sin x+1=0$

ث) $\cos^2 x-\sin x=\frac{1}{4}$

ج) $\sin x-\cos 2x=0$

چ) $\tan(2x-1)=0$

ح) $\tan 3x=\tan\pi x$

۲ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

فصل سوم (حد های نامتناهی – حد دربی نهایت)

حدهای نامتناهی:

محدودیتی افزایش می‌یابد. به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی، بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می‌نویسیم : $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

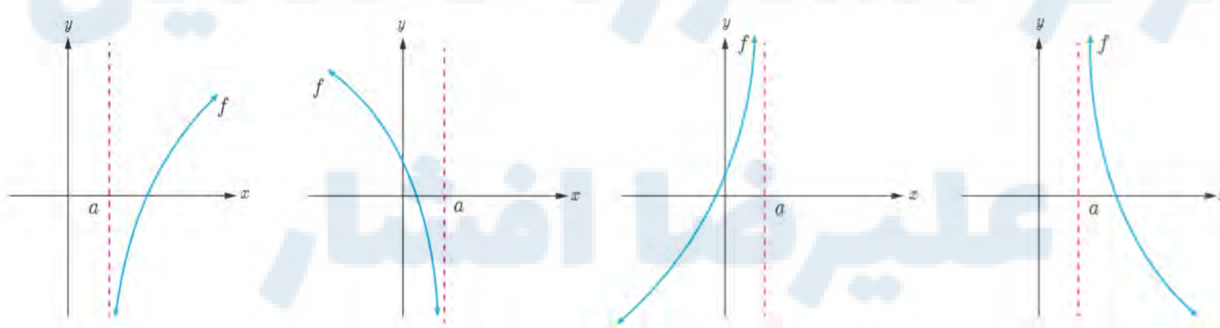
تذکر : این نماد نشان می‌دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود و مثبت بی‌نهایت فقط یک نماد است که نشان می‌دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می‌تواند بزرگ‌تر باشد.

تعریف حدهای یک‌طرفه نامتناهی

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ بدین‌معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تذکر : تعریف حدهای یک‌طرفه نامتناهی $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت‌های مختلف حدهای یک‌طرفه نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است.



$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

دو قضیه و دو مثال:

قضیه ۱ : اگر n یک عدد طبیعی باشد؛ آن‌گاه :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{عددی زوج باشد، } n\\ -\infty & \text{عددی فرد باشد، } n\end{cases} \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$$

مثال : با توجه به قضیه فوق می‌توان نوشت :

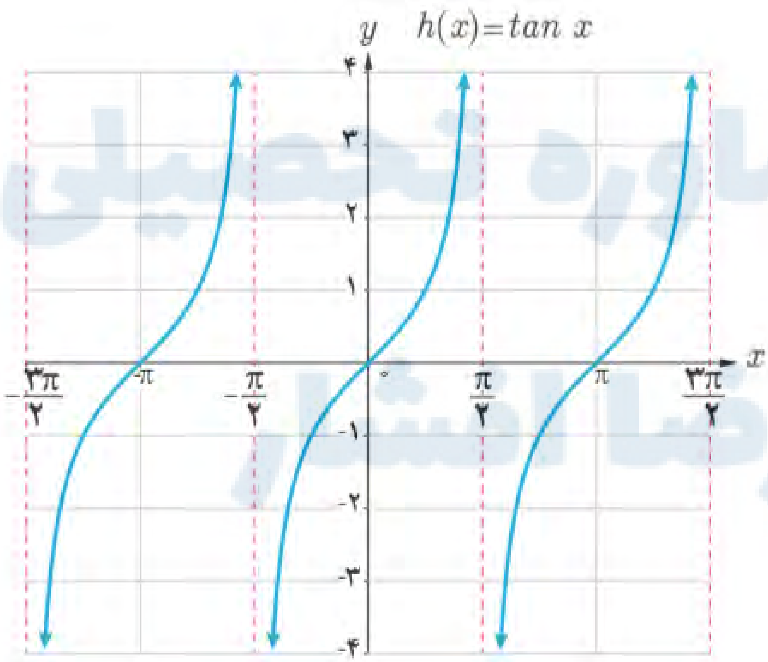
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^4}=+\infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4}=+\infty$$

قضیه ۲ : الف) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ و برعکس.

مثال : $\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{|x-1|}=+\infty$ و $\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{|x-1|}=+\infty$ و در نتیجه $\lim_{x\to 1}\frac{2}{|x-1|}=+\infty$

مثال: حاصل؟



$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} h(x)=\cdots$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} h(x)=\cdots$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} h(x)=\cdots$$

قضیه ۳ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ آن‌گاه :

الف) اگر $L>0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L<0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L>0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

تذکر : قضیه ۳ در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{\sin x}$ را به‌دست آورید.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ را به‌دست آورید.

قضیه ۴ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ (و یا $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$) آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

تذکر : قضیه فوق در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{\tan x}$ را به‌دست آورید.

حل : در یکی از کار در کلاس‌های قبل به‌صورت شهودی دیده شد که : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ از طرفی

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x+1)=\frac{\pi}{2}+1$ طبق قضیه فوق $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{\tan x}=0$

قضیه ۵ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آن‌گاه؛[1]

الف) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=+\infty$

ب) اگر $L>0$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).\,g(x)\right)=+\infty$

پ) اگر $L<0$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).\,g(x)\right)=-\infty$

تذکر : قضیه فوق برای حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : برای به‌دست آوردن حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1+\frac{1}{x^2})$ از آنجا که $\lim\limits_{x\to 0} 2x+1=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ می‌شود.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+\sin^2 x}{x^2}$ را به‌دست آورید.

حد در بی نهایت:

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ و جدول صفحه قبل می‌توان مشاهده کرد در صورتی که x به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار شود می‌توان $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل کند برابر صفر است و می‌نویسیم. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$

تعریف :

- اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a\,,+\infty)$ تعریف شده باشد گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.
- اگر تابع f در بازه $(-\infty\,,\,a)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از l به هر اندازه کوچک کرد.

مثال:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x}+4}=\frac{\lim\limits_{x\to -\infty} 2+\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to -\infty} 4}=\frac{2+0}{0+4}=\frac{1}{2}$$

حدهای نامتناهی:

مثال:

در مورد حدهای $\lim_{x\to+\infty} x^۳$ و $\lim_{x\to-\infty} x^۳$ چه می‌توان گفت؟ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ به عنوان مثال $\lim_{x\to+\infty} -x^۲=-\infty$

برای مثال $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} x^۲=+\infty$

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۱x+a_۰$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰)=\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

مثال:

الف) $\lim_{x\to-\infty}(-۲x^۳+x-۱)=\lim_{x\to-\infty} x^۳(-۲+\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x^۳})=\lim_{x\to-\infty} -۲x^۳=+\infty$

ب) $\lim_{x\to+\infty}(۳-۲x-۵x^۴)=\lim_{x\to+\infty} x^۴(\frac{۳}{x^۴}-\frac{۲}{x^۳}-۵)=\lim_{x\to+\infty} -۵x^۴=-\infty$

مثال: حاصل؟

الف) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۳-۷x+۱}{۲x^۲-x+۳}$

ب) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۳x^۳+x-۱}{۶x^۳-۲x+۱}$

پ) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲-x+۱}{۴x^۳+۲x-۱}$

مجانب‌ها:

مجانب قایم:

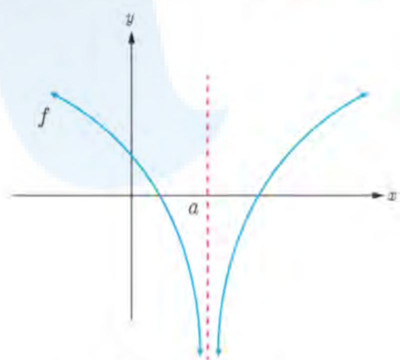
تعریف :

خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

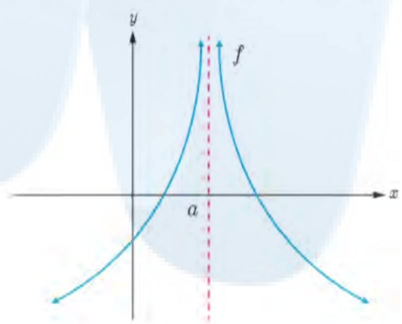
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

مثال : در هر یک از شکل‌های زیر خط $x=a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



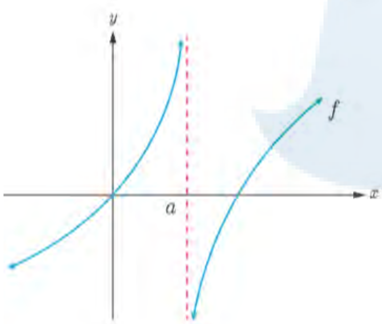
$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



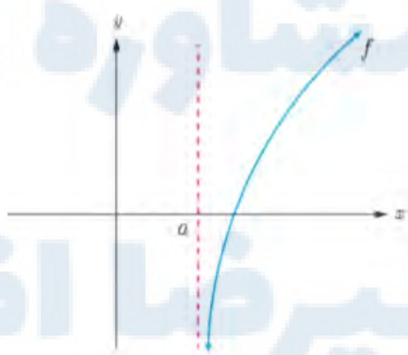
$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

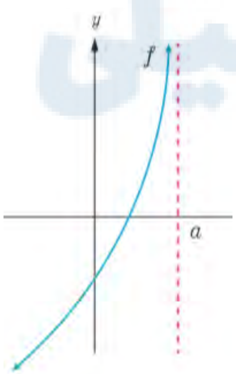


$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

مثال: کدام‌یک از خطوط $x=-۱$ و $x=۳$ مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}$ می‌باشند؟

حل: شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}=-\infty$$

به علاوه از آنجا که $\lim_{x\to-۱^-} f(x)=+\infty$ می‌توانیم بگوییم $x=-۱$ نیز مجانب قائم منحنی تابع f است از طرفی

$$\lim_{x\to۳} f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}=\lim_{x\to۳}\frac{(x-۳)(x-۱)}{(x-۳)(x+۱)}=\lim_{x\to۳}\frac{x-۱}{x+۱}=\frac{۱}{۲}$$

خط $x=۳$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به‌صورت $x=-۱$ دارد.

تمرین:

مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x+۱}{x^۳+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می‌باشد؟

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R}-\{-۱ , ۱\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[-۲ , ۲]-\{۱\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

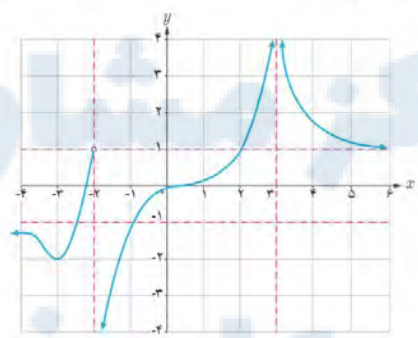
۶ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

مجانب افقی:

خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار $y=f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ برقرار باشد

مثال: کدام مجانب افقی است؟

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به‌دست آورید :



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=$

ث) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=$

ج) مجانب‌های افقی و قائم

مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید :

الف) $y=\dfrac{۲x-۱}{x-۳}$

ب) $y=\dfrac{x}{x^۲-۴}$

پ) $y=\dfrac{۱+۲x^۲}{۱-x^۲}$

ت) $y=\dfrac{۲x}{۱+x^۲}$

فصل چهارم (مشتق)

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a\,,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تمرین۱:

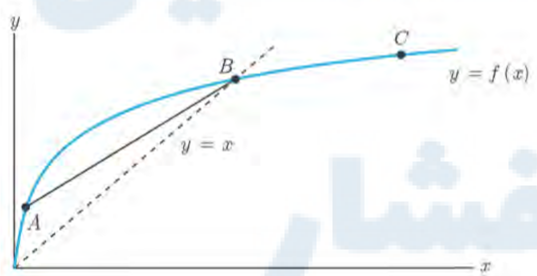
اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(راهنمایی : تغییر متغیر $a+h=x$ را به کار برید.
توجه کنید وقتی که $h\to 0$ آنگاه $x\to a$)

تمرین۲:

۳ برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 , m_2 , ... و m_6 در نظر بگیرید.

https://afshar.x همه رسانه های م

https://alirezaa مرکز مشاوره تحص

مشتق‌پذیری و پیوستگی:

قضیه : اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات : کافی است نشان دهیم : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

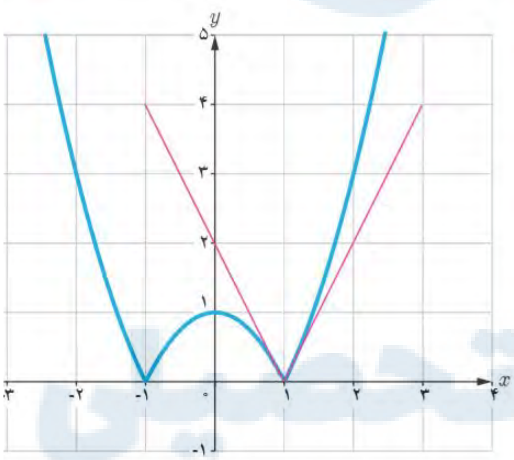
$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}((x-a)(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}))=$$

$$\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})=\circ.f'(a)=\circ$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=\circ$ و از آنجا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (چرا؟)

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

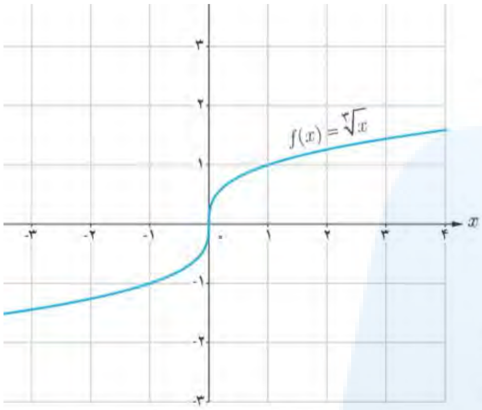
مثال : مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^{۲}-۱|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.



بنابراین $f'(۱)$ موجود نیست. به‌عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=۱$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x=۱$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=۱$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=۱$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲- است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x=۱$ می‌نامیم و با $f'_+(۱)$ و $f'_-(۱)$ نمایش می‌دهیم.

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

حالت دیگر مشتق‌ناپذیری:



مثال : تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را درنظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=\circ$ بررسی کنید.

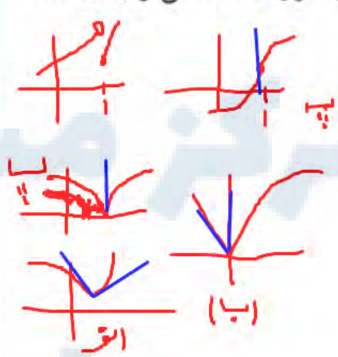
$$f'(\circ)=\lim_{x\to\circ}\frac{\sqrt[3]{x}-\circ}{x}=\lim_{x\to\circ}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to\circ}\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}=+\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق‌پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x=\circ$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=\circ$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x=\circ$ را «**مماس قائم**» منحنی می‌نامیم.

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه حد چپ یا راست نامتناهی داشته باشد در این‌صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت :



اگر تابع f در $x=a$ هریک از شرایط زیر را داشته باشد، در این‌صورت در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱ f در a پیوسته نباشد.

۲ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

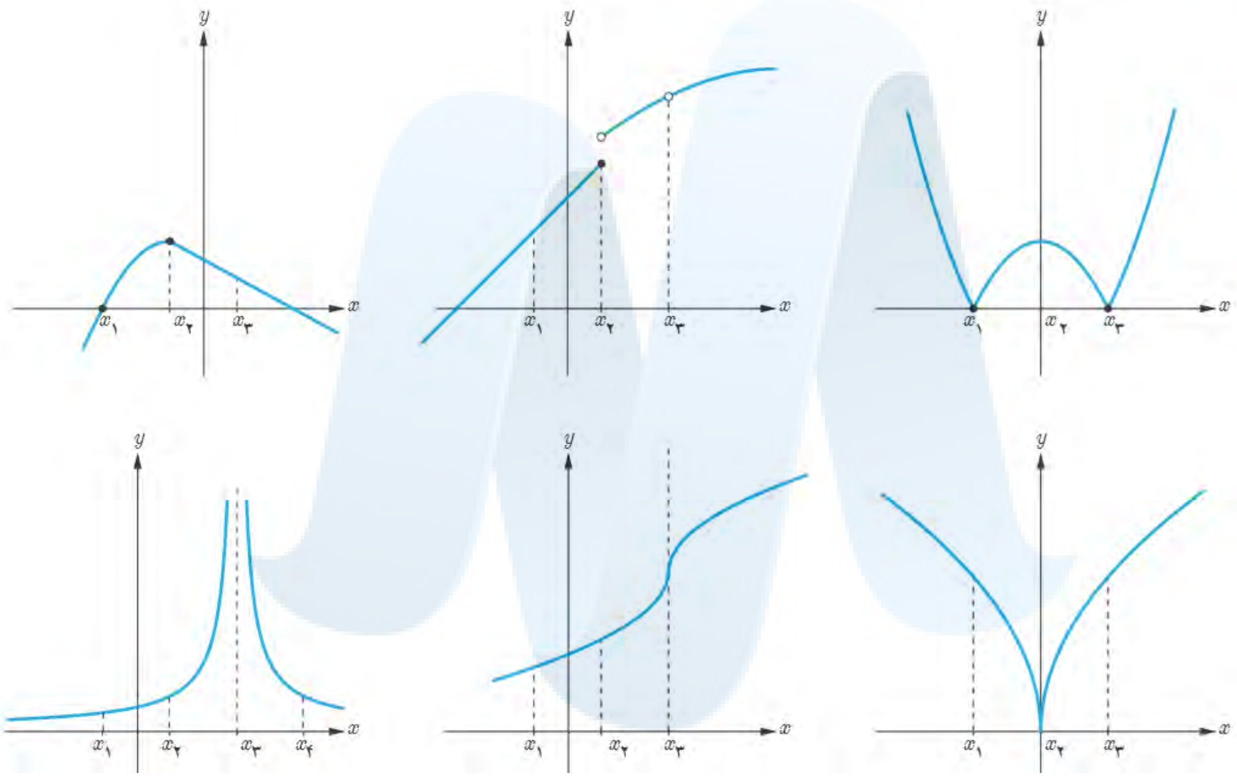
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

تمرین:

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.



تمرین:

اگر $f(x)=\begin{cases}5x & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به‌دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

فرمول‌های مشتق‌گیری:

۱ اگر $f(x)=c$ آن‌گاه $f'(x)=0$

به‌طور مثال اگر $f(x)=7$ و $g(x)=-\frac{2}{5}$ آن‌گاه $f'(x)=0$ و $g'(x)=0$.

۳ به‌طور کلی اگر n یک عدد **صحیح** باشد و $f(x)=x^n$ آن‌گاه : $f'(x)=nx^{n-1}$.

مثال : اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $x\neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم : $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow f'(x)=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

*۴ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

۵ اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

۶ اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

۷ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع kf $(k\in\mathbb{R})$ ، $f\pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ $(g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم :

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

مثال:

الف) $f(x)=-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1 \Rightarrow g'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$

پ) $h(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x)=6x^2(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x)=\frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x)=\frac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ مشتق‌پذیر هستند و داریم : $f'(x)=\cos x$ و $g'(x)=-\sin x$

$$\boxed{f(x)=\tan x}=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow\boxed{f'(x)}=\frac{(\cos x)(\cos x)+(\sin x)(\sin x)}{\cos^{۲} x}=\boxed{\frac{۱}{\cos^{۲} x}}=\boxed{۱+\tan^{۲} x}$$

مثال: مشتق بگیرید:

ب) $g(x)=\frac{۵\cos x}{۱-\sin x}$ الف) $f(x)=\sin x\tan x$

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم :

$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

مثال:

۱ : مشتق تابع $\sin x^{۲}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x^{۲}$ داریم $\sin x^{۲}=f(g(x))$. بنابراین

$$(\sin x^{۲})'=f'(g(x))g'(x)=\cos x^{۲}.۲x=۲x\cos x^{۲}$$

۲ : مشتق تابع $\sqrt{۱+\sin^{۲} x}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۱+\sin^{۲} x$ داریم $\sqrt{۱+\sin^{۲} x}=f(g(x))$. بنابراین

$$(\sqrt{۱+\sin^{۲} x})'=f'(g(x))g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱+\sin^{۲} x}}\times ۲\sin x\cos x=\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{۱+\sin^{۲} x}}$$

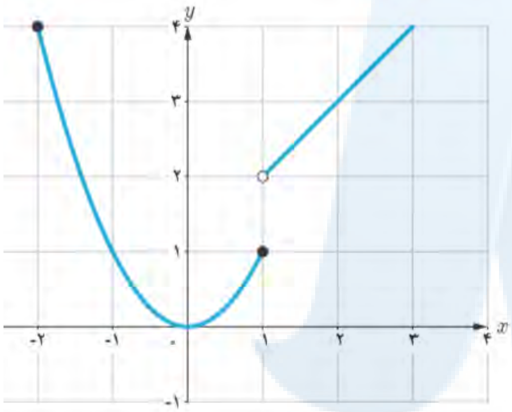
۳ : مشتق تابع $\sin\sqrt{۱+x^{۲}}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{۱+x^{۲}}$ داریم $\sin\sqrt{۱+x^{۲}}=f(g(x))$. بنابراین

$$(\sin\sqrt{۱+x^{۲}})'=f'(g(x))g'(x)=\cos\sqrt{۱+x^{۲}}\times(\sqrt{۱+x^{۲}})'$$

مشتق‌پذیری روی یک‌بازه

تابع f روی بازه $(a\ ,\ b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.
تابع f روی بازه $[a\ ,\ b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه $(a\ ,\ b)$ مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty\ ,\ +\infty)$ مشتق‌پذیر است.

✤ **مثال :** تابع $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & -۲ \le x \le ۱ \\ x+۱ & x > ۱ \end{cases}$ را درنظر می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[-۲\ ,\ ۱]$ و $(۱\ ,\ \infty)$ مشتق‌پذیر است. ولی f روی بازه $[۱\ ,\ ۲]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)

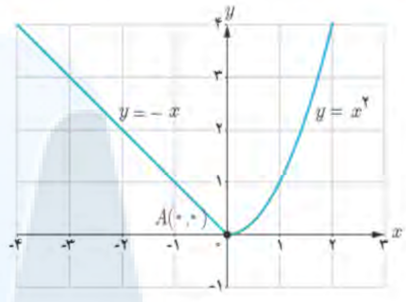
مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

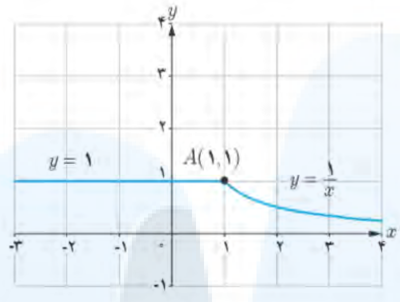
✤ **مثال :** اگر $y = ۳x^{۴} + ۲x^{۲} - ۱$ آن‌گاه :

$$y' = ۱۲x^{۳} + ۴x \quad , \quad y'' = ۳۶x^{۲} + ۴$$

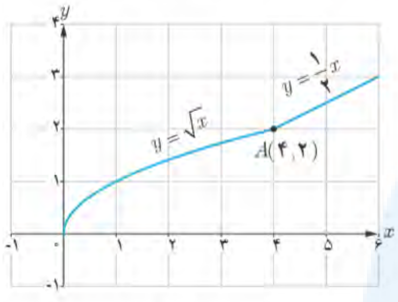
۲ با محاسبهٔ مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطهٔ A، نشان دهید که این توابع در نقطهٔ A مشتق‌پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



(پ)

۳ تابع
$$f(x)=\begin{cases} ۵x-۴ & x<۰ \\ x^{۲} & ۰\le x\le ۳ \\ x+۶ & x>۳ \end{cases}$$
داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند؟

پ) ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) در $x=۲$ برابر ۳ شود.

پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

ث) در تمام نقاط منفی باشد.

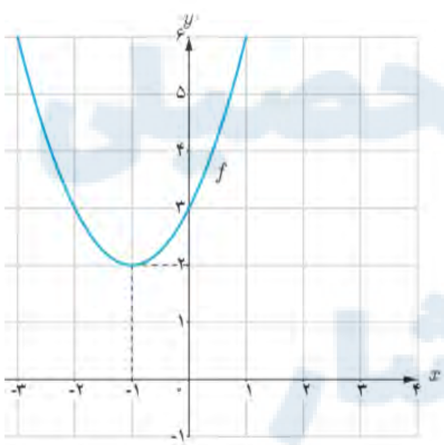
۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+۲x+۳$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(۳)$ و $f'(۰)$ و $f'(-۱)$ و $f'(۲)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبهٔ مشتق تابع $f(x)=x^{۲}+۲x+۳$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.



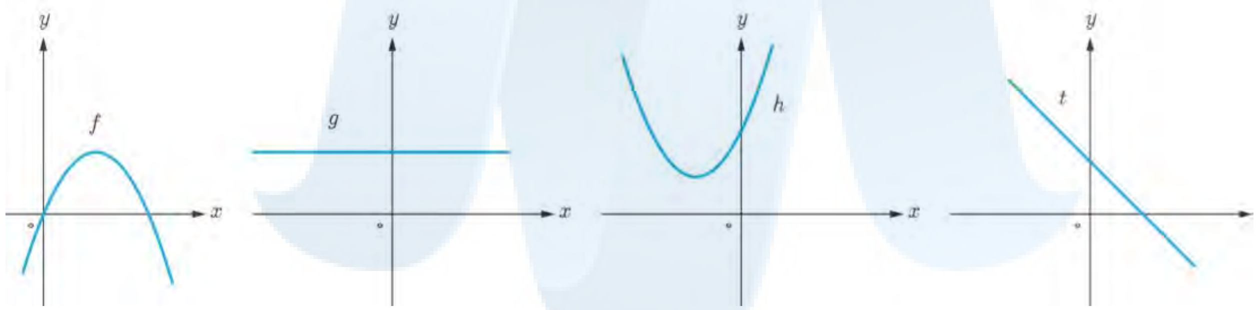
۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

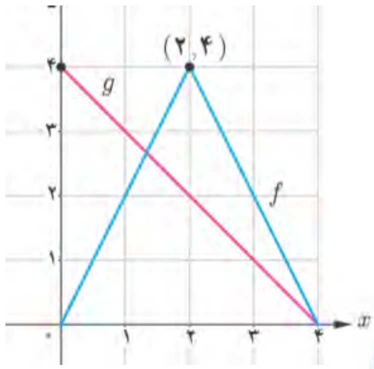
۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۸ اگر $f(x)=|x^2-4|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

۹ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را به‌دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

۱۰ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.





۱۱ نمودار توابع f و g را در شکل مقابل درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x) \,.\, g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

۱۲ اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$

۱۳ اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\leq ۰ \\ x & x>۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

۱۴ مشتق توابع داده شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=(۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۳$

پ) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۱)$

ب) $f(x)=\dfrac{x^۲-۳x+۱}{-۳x+۲}$

ت) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

۱۵ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin^۳x+\cos^۲x$

پ) $f(x)=\tan^۲x-۲\cos x$

ب) $f(x)=\dfrac{۱-\sin x}{۱+\sin x}$

ت) $f(x)=\sin x\cos ۲x$

۱۶ اگر $f(x)=\sin^۲x-\cos ۲x$، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $f''(\frac{\pi}{۶})$

ب) $f''(\frac{\pi}{۲})-f'(\frac{\pi}{۲})$

آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای

به‌طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a\ ,\ a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$[a\ ,\ a+h] \text{ در بازه } f \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$x=a \text{ در نقطه } f \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

مثال:

آهنگ رشد : همان‌گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.

آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[۰,۶۰]$ چنین است :

$$\frac{f(۶۰)-f(۰)}{۶۰-۰}=\frac{۷\sqrt{۶۰}+۵۰-۵۰}{۶۰}\approx ۰/۹\ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$$

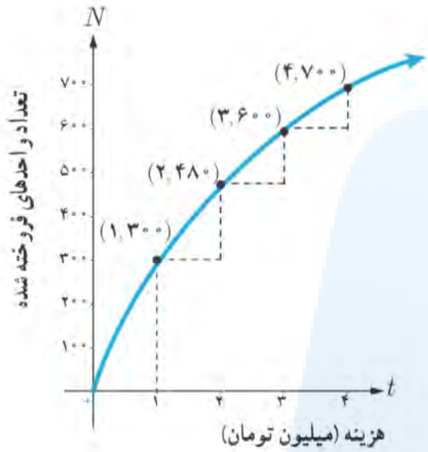
یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانتی‌متر در هر ماه است.

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[۰,۲۵]$ چقدر است؟

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

تمرین:



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = t^۲ - t + ۱۰$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰ , ۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[۰ , ۵]$ با هم برابرند؟

۷ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + ۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳ \leq t \leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۳$ چقدر است؟

۸ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t=۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = ۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^۲$ به‌دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[۰,۱]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰,۱۰۰]$ می‌شود؟

قضیه : اگر تابع f در **بازهٔ بستهٔ** $[a\,,\,b]$ **پیوسته** باشد، آن‌گاه تابع در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

نقطه بحرانی:

با توجه به آنچه تا به حال ملاحظه کردیم، اکسترمم‌های مطلق تابع در «نقاط ابتدا و انتهای بازه»، یا در «اکسترمم‌های نسبی تابع» و یا در «نقاطی که تابع در آنها مشتق‌پذیر نیست» اتفاق می‌افتند. از طرفی دیدیم که در اکسترمم‌های نسبی یا «مشتق تابع وجود ندارد» و یا «مشتق وجود دارد و برابر صفر است». بنابراین اکسترمم‌های مطلق تابع را باید در بین نقاطی بررسی کنیم که یکی از سه ویژگی زیر را داشته باشند :

۱ نقاطی که مشتقِ تابع در آنها وجود ندارد.

۲ نقاطی که مشتق در آنها برابر صفر است.

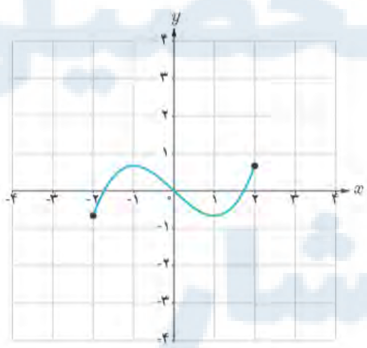
۳ نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ مورد نظر.

مجموعهٔ حاصل از اجتماع نقاط دو دستهٔ (۱) و (۲) را «**نقاط بحرانی**» می‌نامیم.

تعریف : فرض کنیم $c \in D_f$. نقطهٔ به‌طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می‌نامیم. هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط ماکزیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار ماکزیمم مطلق** تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط مینیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار مینیمم مطلق** تابع است.

مثال : اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x$ را در بازهٔ $[-۲\,,\,۲]$ بیابید.



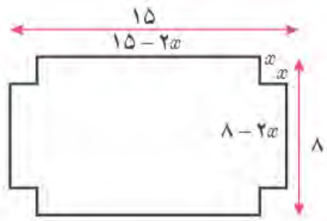
حل : بنابر آنچه گفته شد باید نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را مشخص نماییم.

بنابراین باید در بازهٔ $[-۲\,,\,۲]$ به دنبال نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق نداشته باشد و یا مشتق در آنها برابر صفر باشد. اما f در تمام بازهٔ $(-۲\,,\,۲)$ مشتق‌پذیر است و داریم $f'(x)=x^۲-۱$ و مقدار f' در $x=\pm۱$ برابر صفر می‌شود یعنی داریم $f'(۱)=۰$ و $f'(-۱)=۰$.

بنابراین $x=\pm۱$ و $x=\pm۲$ طول نقاط بحرانی هستند و از آنجا که داریم :

$$f(۲)=\frac{۲}{۳} \qquad f(۱)=-\frac{۲}{۳} \qquad f(-۱)=\frac{۲}{۳} \qquad f(-۲)=-\frac{۲}{۳}$$

لذا مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع بر این بازه به ترتیب برابر $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ و نقاط ماکزیمم نقاط به طول $x=-۱$ و $x=۲$ و نقاط مینیمم نقاط به طول $x=۱$ و $x=-۲$ است.



مثال : یک سازنده جعبه‌های حلبی، با بریدن مربع‌های همنهشت از چهار گوشه ورق‌های حلبی به ابعاد ۸ اینچ[1] و ۱۵ اینچ و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه‌های سر باز می‌سازد. اگر بخواهیم حجم جعبه‌های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شود چقدر باید باشد؟

حل : فرض کنید طول ضلع مربعی که از گوشه‌های مستطیل مفروض برحسب اینچ بریده می‌شود x باشد. پس

$$0 \le x \le \frac{15}{2} \qquad 15 - 2x = \text{طول قوطی مورد نظر}$$

$$0 \le x \le 4 \qquad 8 - 2x = \text{عرض قوطی}$$

پس با توجه به این مفروضات داریم :

$$V(x) = x(15 - 2x)(8 - 2x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x \quad , \quad 0 \le x \le 4$$

چون V روی $[0\,,4]$ پیوسته است، پس دارای اکسترمم‌های مطلق در این بازه است و داریم :

$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 0$$

$$(3x - 5)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \quad \text{یا} \quad x = 6$$

اما $x=6$ در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست $x=0$ و $x=4$ و $x=\frac{5}{3}$ نقاط بحرانی تابع هستند. از طرفی $V(0)=0$ ، $V(\frac{5}{3}) > 0$ و $V(4) = 0$ نشان می‌دهد که ماکزیمم مطلق تابع در $x=\frac{5}{3}$ حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید $\frac{5}{3}$ اینچ باشد.

تعیین یکنوایی به کمک مشتق:

قضیه :

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a\,,b]$ پیوسته و بر بازه $(a\,,b)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت :

الف) اگر به ازای هر x در $(a\,,b)$، $f'(x) > 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه $(a\,,b)$، $f'(x) < 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه $(a\,,b)$، $f'(x) = 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,b]$ یک تابع ثابت است.

مثال:

۲ تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که این تابع در بازه‌های $(-\infty\,,\,0)$ و $(0\,,\,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

ب) آیا می‌توان گفت این تابع در تمام دامنهٔ خود اکیداً نزولی است؟

در ادامه محکی برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم.

مثال : اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$ را در بازهٔ $[-3\,,\,4]$ به‌دست آورید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

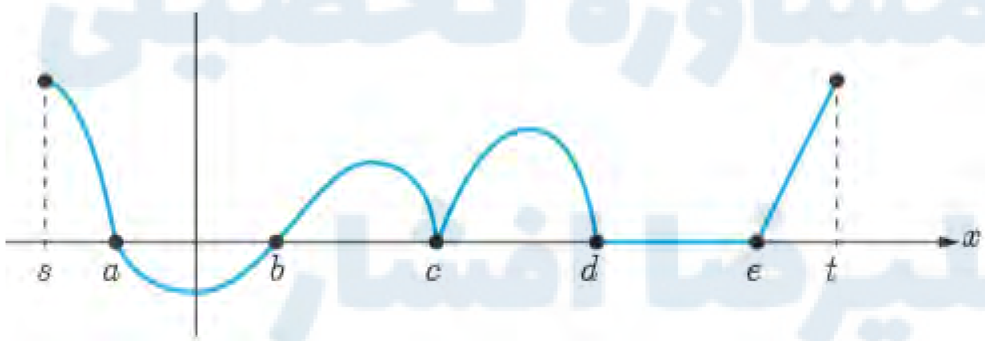
مثال:

نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است.

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s\,,\,t]$ بررسی کنید.

ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟

پ) آیا نقاط بازهٔ $(d\,,\,e)$ اکسترمم نسبی هستند؟



سه تمرین مهم:

۷ ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطه (۲ , ۱)، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۸ نمودار تابعی مانند f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$$f(-1) = 5 \quad , \quad f(4) = -2 \quad , \quad f(0) = 0$$

نقطهٔ (۱ , ۱) ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

۹ یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy = 100\,\text{cm}^2$ و $h = 2\text{cm}$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.

جهت تقعر:

قضیه :

فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه باز I موجود باشد.

الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) > 0$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

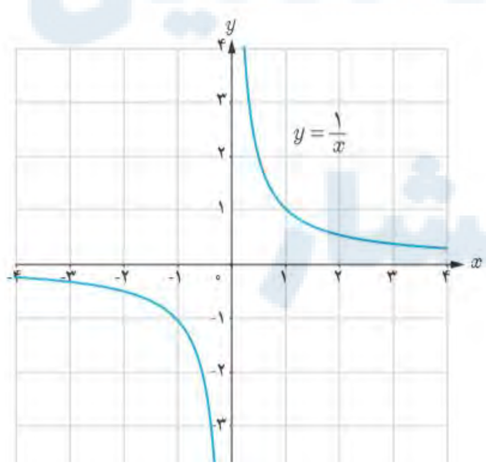
ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) < 0$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) = 0$، آزمون بی‌نتیجه است.

مثال : جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ تعریفشان به دست آورید.

الف) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

ب) $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$



حل : الف) داریم $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

اگر $x > 0$، آنگاه $f''(x) > 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(0\ ,\ +\infty)$ رو به بالاست.
اگر $x < 0$، آنگاه $f''(x) < 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-\infty\ ,\ 0)$ رو به پایین است.

نقطه عطف:

تعریف

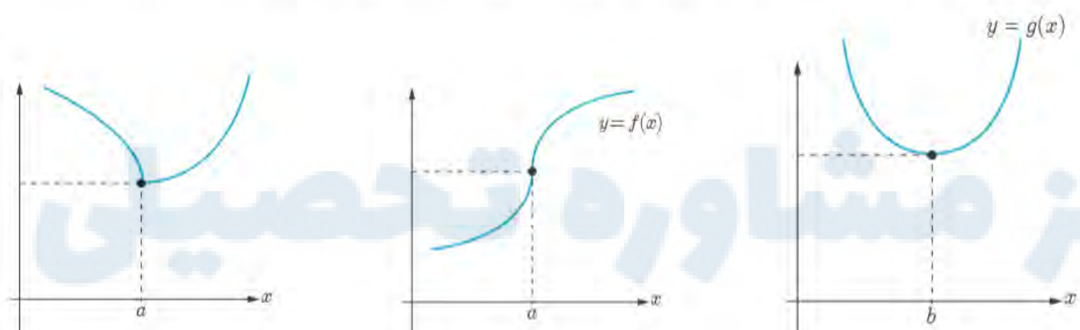
فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c\ ,\ f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) نمودار f در نقطه $(c\ ,\ f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر f در نقطه $(c\ ,\ f(c))$ تغییر کند.

مثال:

۱ در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.



(پ) (ب) (الف)

۲ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بیاورید.

الف) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.

ب) هر نقطه که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطهٔ عطف است.

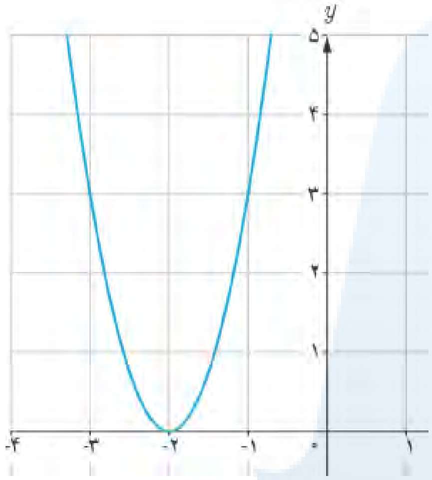
پ) هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است.

ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد.

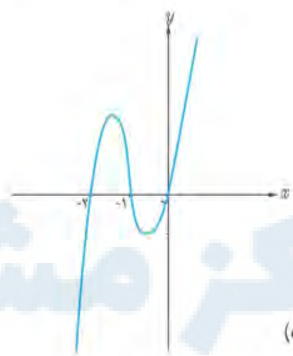
ث) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

دو تمرین اساسی:

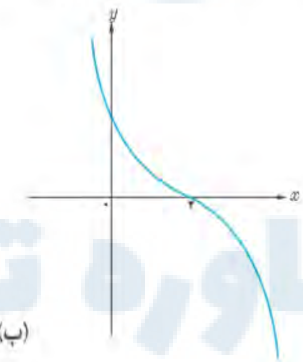
۱ اگر شکل کشیده شده در صفحهٔ شطرنجی مربوط به نمودار تابع f' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟



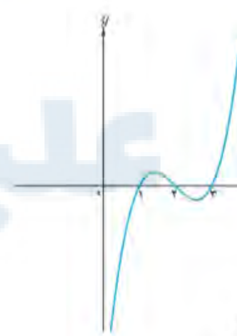
۲ اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع f'' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟



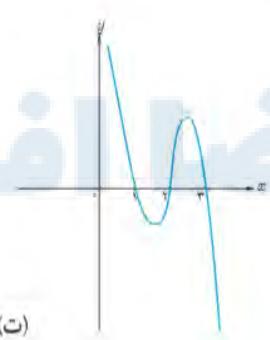
(الف)



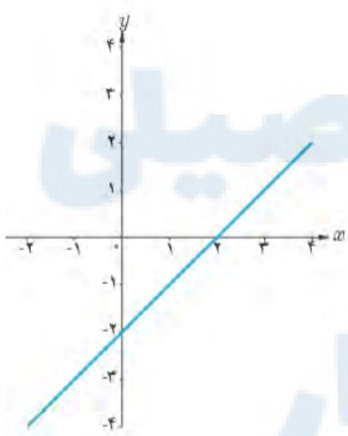
(ب)



(پ)



(ت)



۱ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطهٔ عطف نباشد.

۲ جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ آنها بررسی کرده و نقطهٔ عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$ ب) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ پ) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

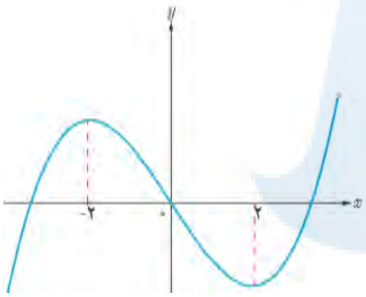
۳ برای هر مورد یک تابع درجهٔ ۳ مثال بزنید که نقطهٔ داده شده نقطهٔ عطف آن باشد.

الف) نقطهٔ $(0,0)$ ب) نقطهٔ $(0,1)$ پ) نقطهٔ $(1,0)$ ت) نقطهٔ $(2,2)$

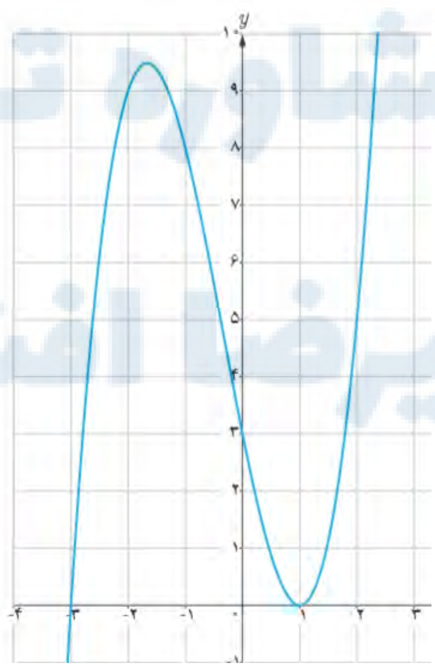
۴ مقادیر a، b و c را در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(0)=1$ و $f(1)=2$ و $x=\frac{1}{2}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f باشد.

۵ اگر $(0,0)$ نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطهٔ $y=x^3+ax^2+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a، b و c را پیدا کنید.



رسم نمودار:



مثال : جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2(x+3)$ را رسم کنید.

حل :

دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است و این تابع همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$f(x)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-3$

بنابراین نقاط $(1\,,\,0)$ و $(-3\,,\,0)$ محل‌های برخورد با محور xها است

$x=0 \Rightarrow y=3$

بنابراین نقطهٔ $(0\,,\,3)$ محل برخورد با محور y هاست

$f'(x)=2(x-1)(x+3)+(x-1)^2=(x-1)(3x+5)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-\frac{5}{3}$

لذا نقاط $(1\,,\,0)$ و $(-\frac{5}{3}\,,\,\frac{256}{27})$ نقاط بحرانی‌اند

$f''(x)=(3x+5)+3(x-1)=6x+2$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

از آنجا که مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=-\frac{1}{3}$ وجود دارد و f'' در دو طرف نقطهٔ $x=-\frac{1}{3}$ تغییر علامت می‌دهد، نقطهٔ $\left(-\frac{1}{3}\,,\,\frac{128}{27}\right)$ نقطهٔ عطف تابع است، از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'		+	0	−		−	0	+	
f''		$\frown$		$\frown$	0	$\smile$		$\smile$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	$\frac{128}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			ماکزیمم		عطف		مینیمم		

تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq 0$ است تابع هموگرافیک می‌نامیم.

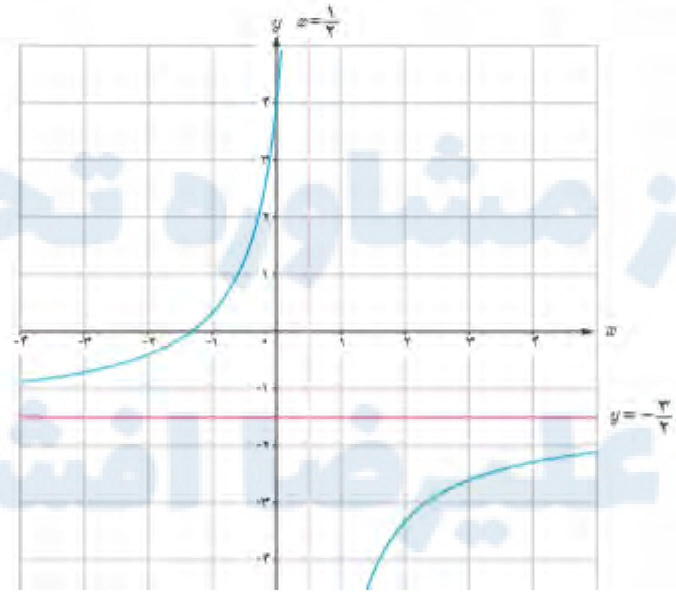
مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\frac{۳x+۴}{-۲x+۱}$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{۱}{۲}\right\}$ است. داریم $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\frac{۳}{۲}$ ، لذا $y=-\frac{۳}{۲}$ مجانب افقی این تابع است و از طرفی $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^-} f(x)=+\infty$ ، لذا $x=\frac{۱}{۲}$ مجانب قائم این تابع است. همچنین نمودار در نقاط $(۴ , ۰)$ و $(-\frac{۴}{۳} , ۰)$ محورهای مختصات را قطع می‌کند.

$$f'(x)=\frac{۱۱}{(-۲x+۱)^{۲}} \quad \text{و} \quad x\neq\frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$		$-\frac{۴}{۳}$		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		+		+		+		+	
y''		$\smile$ +		$\smile$ +		$\smile$ +		$\frown$ −	
y	$-\frac{۳}{۲}$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	۴	$\nearrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\nearrow$	$-\frac{۳}{۲}$

توجه به اطلاعات این جدول و به کمک چند نقطهٔ کمکی می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت زیر رسم کرد.



موفق و سربلند باشید. خرداد ۹۹ دبیرستان امام صادق(ع) تهیه و تنظیم: سعید میری