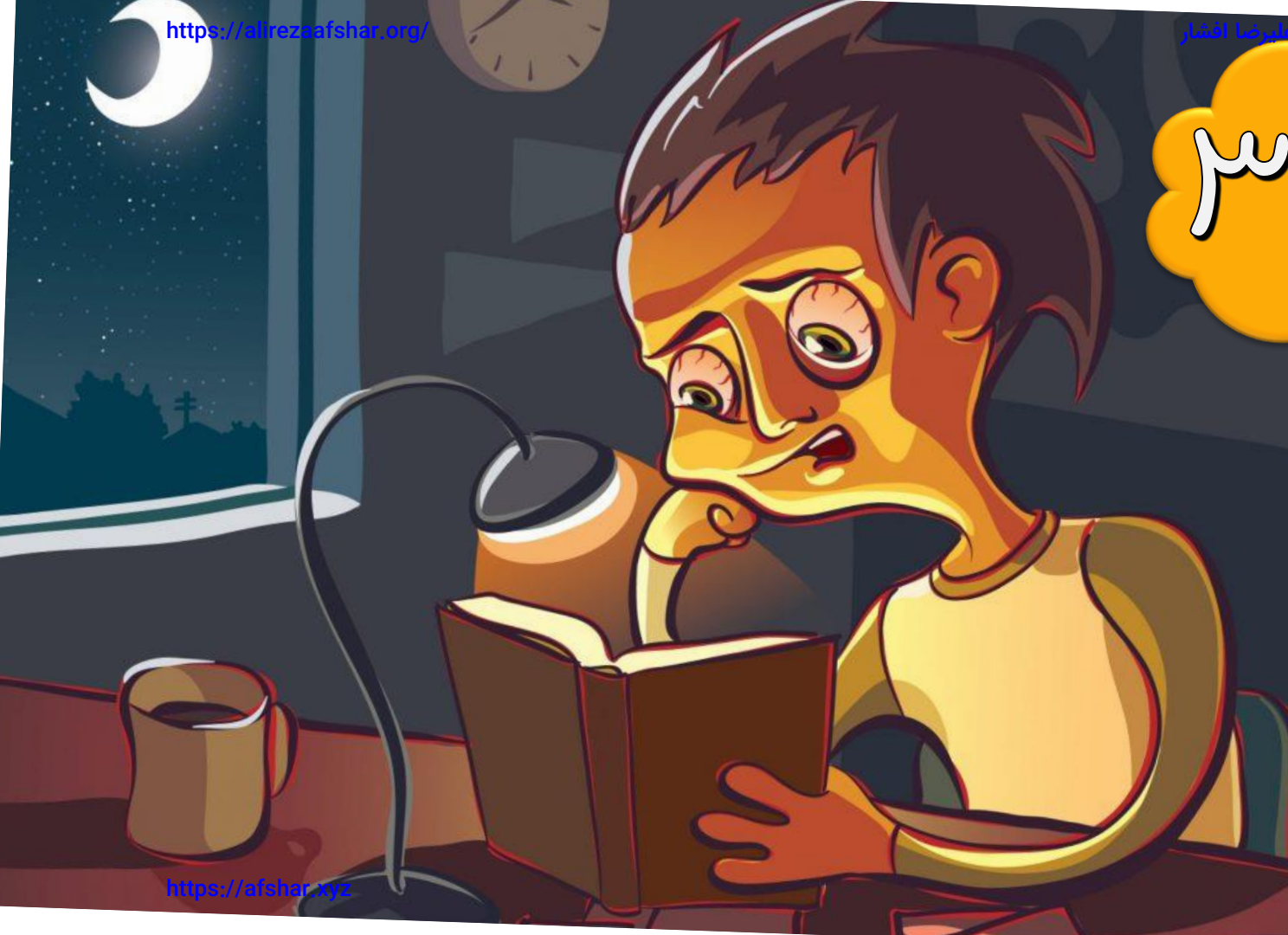


ریاضی ۳





فصل ۱ :

تابع

(۵/۷ نمره)

توابع چند جمله‌ای

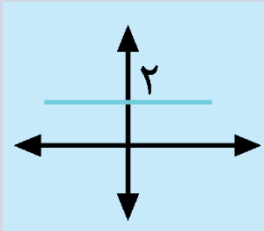
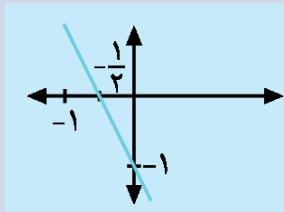
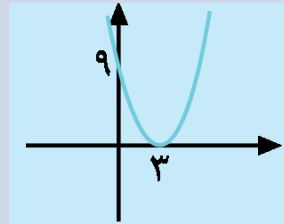
هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ که در آن ضرایب (a_i) از جنس اعداد حقیقی و

توان‌ها از جنس اعداد حسابی‌اند و $a_n \neq 0$

دامنه این توابع $\mathbb{R}$ است و بزرگترین توان در آن‌ها، درجه‌شان را مشخص می‌کند. مثلاً $y = 4$ یک چندجمله‌ای از

درجه صفر و $y = \sqrt{2}x^3 - 1$ یک چند جمله از درجه ۳ است.

حالات خاص توابع چند جمله‌ای را در جدول زیر ببینید : (مثال کتاب)

درجه تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجه ۲
ضابطه کلی	$f(x) = b ; b \in \mathbb{R}$	$f(x) = ax + b ; a \neq 0$	$f(x) = ax^2 + bx + c ; a \neq 0$
مثال			

مثال پشمک: نمودار تابع $f(x) = x^3$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

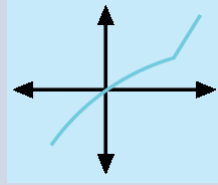
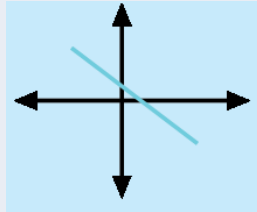
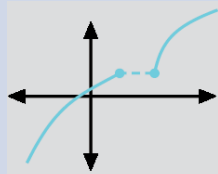
answer

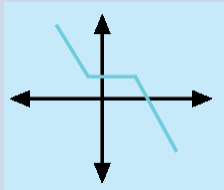
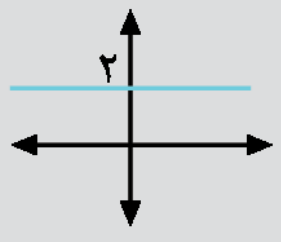
مثال: نمودار تابع $y = -2(x-1)^3 + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

توابع صعودی و توابع نزولی

صفر تا صد داستان، انتظار تان را می‌کشد!

نوع تابع	تعریف فارسی	تعریف ریاضی	مثال
اکیداً صعودی	با افزایش x ، مقدار y افزایش می‌یابد.	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	
اکیداً نزولی	با افزایش x ، مقدار y کاهش می‌یابد.	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$	
صعودی	با افزایش x ، مقدار y زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$	

نوع تابع	تعریف فارسی	تعریف ریاضی	مثال
نزولی	با افزایش x ، مقدار y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند.	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$	
ثابت (هم صعودی هم نزولی)	همواره مقدار y ثابت است.	به ازای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داریم: $f(x_1) = f(x_2)$	

ترکیب دو تابع f و g

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) \quad \text{و} \quad \text{fog}(x) = f(g(x))$$

نکته: خواست باشد تو محاسباتت باید به‌جای حرف **O**، پرانتز بگذاری. مثلا $\text{fogoh}(3)$ یعنی $f(g(h(3)))$
 محاسباتت رو از داخل شروع کن. تو همین مثال، اول $h(3)$ رو حساب کن! مثلا میشه k بعد $g(k)$ رو
 حساب کن! مثلا میشه m در آخر هم $f(m)$ حساب شه!

دامنه تابع مرکب

$$D_{\text{fog}} = \left\{ \overset{(1)}{\boxed{x \in D_g}} \mid \overset{(2)}{\boxed{g(x) \in D_f}} \right\} \quad D_{\text{fog}} = \left\{ x \mid \overset{(1)}{\boxed{x \in D_g}}, \overset{(2)}{\boxed{g(x) \in D_f}} \right\}$$

که این دو هیچ فرقی با هم ندارند!

نکته: دامنه تابع f همیشه از راه تعریف (که الان گفتیم) به دست بیارید نه از روی ساختن ضابطه!

مثال: (مثال و کار در کلاس کتاب) در هر قسمت، موارد خواسته شده را بیابید.

الف) $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$ ← دامنه و ضابطه $f \circ g(x)$ ؟

answer

ب) $f(x) = \frac{2}{x-1} \leftarrow$ دامنه و ضابطه $f \circ f(x)$ ؟

answer

مثال: توابع $f = \{(1, 2), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 3), (5, 6)\}$ مفروضند. تابع gof را به دست آورید.

answer

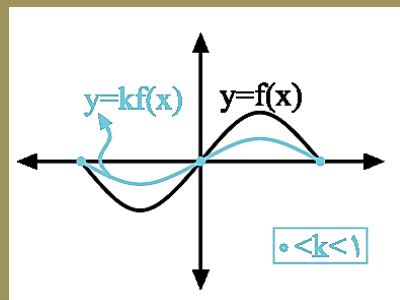
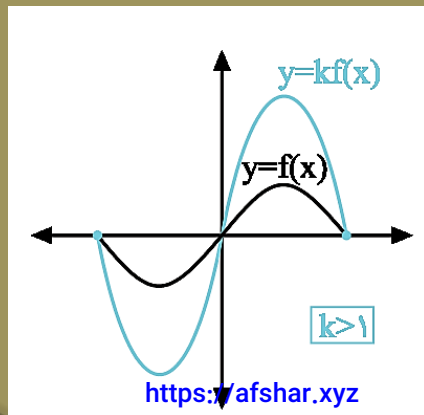
تبدیل نمودار توابع

۱- رسم نمودار : $y = kf(x)$

اگر $0 < |k| < 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب k به طور عمودی منقبض می شود.

اگر $|k| > 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب k به طور عمودی منبسط می شود.

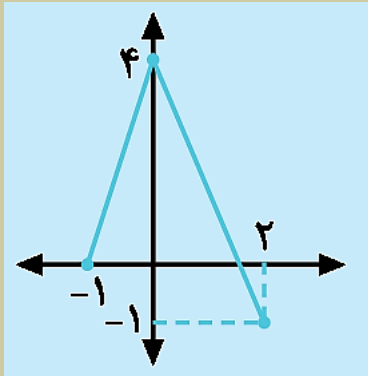
دامنه دو تابع $y = f(x)$ و $y = Af(x) + B$ یکی است، اما هر دو برد آن ها صرفاً یکی نیست.



نیم نگاهی به دو نمودار مقابل بیاندازید:

نکته: هواسـت باشـه اگر k منفی بود، اول بدون توجه به علامت منفی، انقباض یا انبساط عمودی رو انجام بده، بعد نسبت به محور x ها قرینه کن!

مثال: (مثال کتاب با تغییر) در شکل زیر، نمودار $y = f(x)$ داده شده، به کمک آن نمودار $y = -\frac{1}{3}f(x) + 1$ را رسم کنید.



answer

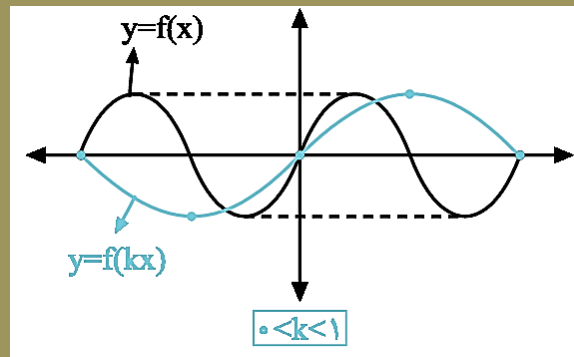
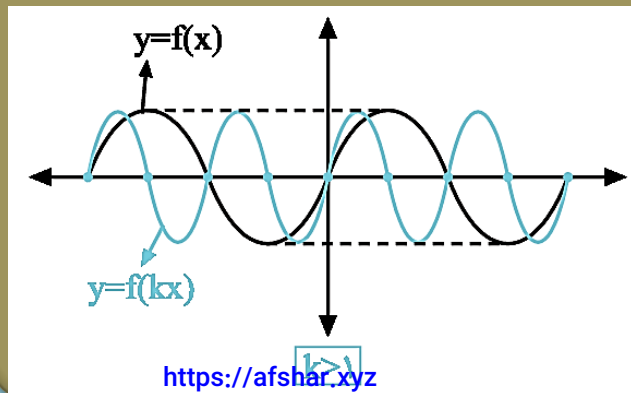
۲- رسم نمودار : $y = f(kx)$

اگر $0 < |k| < 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ به طور عمودی منبسط می شود.

اگر $|k| > 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ به طور عمودی منقبض می شود.

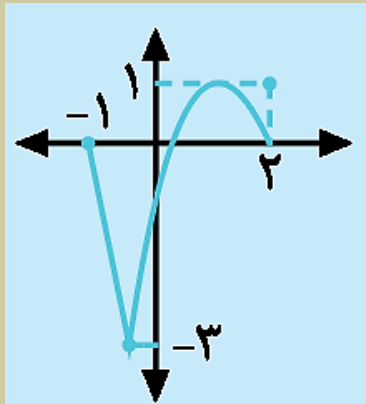
برد دو تابع $y = f(\square)$ و $y = f(\Delta)$ یکی است، اما دامنه آن ها صرفاً یکی نیست.

نیم نگاهی به دو نمودار زیر بیاندازید:



نکته: اگر $k < 0$ ، اول بدون توجه به علامتش انقباض یا انبساط افقی رو بزن، بعد نمودارو نسبت به محور y ها قرینه کن!

مثال: نمودار تابع g داده شده است. به کمک آن نمودار $g(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.



answer

وارون f

اگر وارون f خود یک تابع باشد، آنگاه می‌گوییم f وارون‌پذیر است و این اتفاق زمانی می‌افتد که f یک به یک باشد.

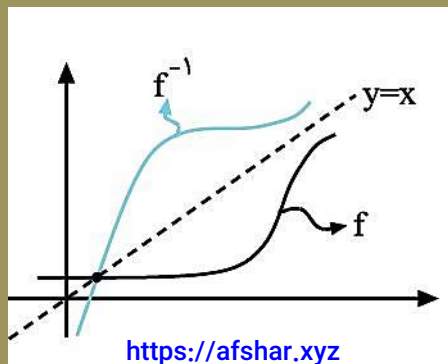
وارون کردن f از روی زوج مرتب

کافی است جای مولفه‌های اول و دوم را عوض کنید.

نتیجه: اگر $A(a, b)$ روی f باشد آنگاه $A'(b, a)$ روی f^{-1} است و بالعکس.

وارون کردن f از روی نمودار

نمودار توابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ (نیم‌ساز اول و سوم) قرینه‌اند. به شکل روبه‌رو به عنوان یک مثال دقت کن دوست من $\Leftarrow$



$$\text{نکته: } R_f = D_{f^{-1}} \quad \text{و} \quad D_f = R_{f^{-1}}$$

نکته: هر جا لازم بود $D_{f^{-1}}$ را بیابید، می‌توانید R_f را مناسبه کنید، تمام!

نکته: ترکیب دو تابع f و f^{-1} همانی است. یعنی:

$$۱) \quad f^{-1} \circ f(x) = x \quad ; \quad x \in D_f = R_{f^{-1}} \quad ۲) \quad f \circ f^{-1}(x) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}} = R_f$$

نکته: پس دقت کنید که درست است که $f^{-1} \circ f(x)$ و $f \circ f^{-1}(x)$ هر دو می‌شوند x ، اما هر دو x برای این دو لزوماً برابر نیست. برای اولی شد D_f و R_f برای دومی (همون $D_{f^{-1}}$).

مثال: اگر $f = \{(1, 4)(2, 3)(3, 5)\}$ ، f^{-1} ، $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را بیابید.

answer

یک نتیجه از بحث‌های گوشت تلخ فوق!

با استفاده از نکته زیر می‌توان پی برد که آیا دو تابع f و g معکوس هم هستند یا خیر. به این صورت که:

اگر $f \circ g(x) = x$ & $g \circ f(x) = x$ آنگاه f و g معکوس یکدیگرند.

مثال: مثال کتاب نشان دهید توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

answer

روش به دست آوردن ضابطه وارون تابع f

برای محاسبه وارون f ، ابتدا X را بر حسب Y بنویسید (X ، رویه طرف تنها کن) بعد به جای X بنویسید $f^{-1}(x)$ و به جای Y بنویسید X

مثال: (کار در کلاس) ضابطه وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

$$\text{الف) } h(x) = x^2 + 1$$

answer

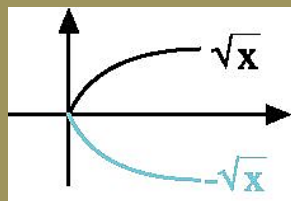
$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2} \quad (\text{ب})$$

answer

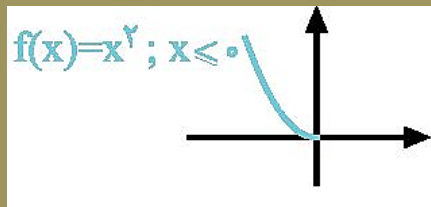
محدود کردن دامنه f (تحدید کردن f)

گاهی f در دامنه تعریفش غیر یک به یک و در نتیجه وارون ناپذیر است. در این صورت دامنه آن را طوری محدود می‌کنیم (دلفواه) که f در دامنه جدیدش وارون پذیر شود. به این عمل تحدید کردن f می‌گویند.

مثلاً با توجه به اینکه $y = x^2$ یک سهمی است، وارون ناپذیر است. اگر بروید سراغ مقایسه



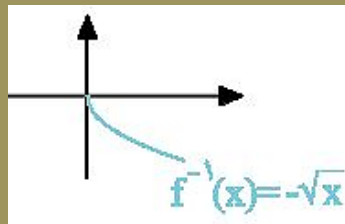
$f^{-1} = \pm\sqrt{x}$ به f^{-1} می‌رسید که تابع نیست. $\Leftarrow$



با محدود کردن دامنه f به طور دلفواه، مثلاً $x \leq 0$ ، f یک به یک و معکوس پذیر می‌شود $\Leftarrow$

$$\begin{cases} D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 0] \end{cases}$$

دقت شود که



و نمودار معکوس f هم می‌شود

$$y = (x - 1)^3 - 1$$

۱- (تمرین کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص نمایید.

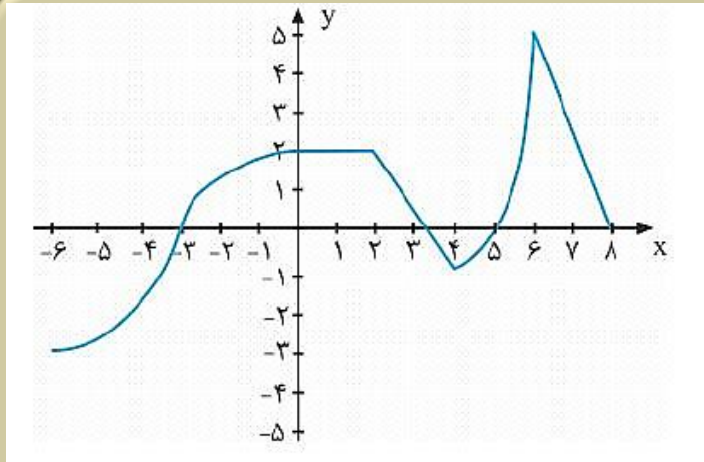
answer

۲- (تمرین کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

answer

۳- (تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



answer

۴- (تمرین کتاب) تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2^x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آن‌ها توضیح دهید.

answer

۵- (تمرین کتاب) تابع $y = x^2 |x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

answer

۶- (تمرین کتاب) در هر قسمت، موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $g(x) = \frac{6}{3x-5}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

answer

ب) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2-16}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

answer

پ) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

answer

۷- (تمرین کتاب) اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

answer

مرکز مشاوره تحصیلی علیرضا افشار
۱- (تمرین کتاب) مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$

answer

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

answer

پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(fog)(4) = 5$

answer

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$

answer

۹- (تمرین کتاب) تابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

$$h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

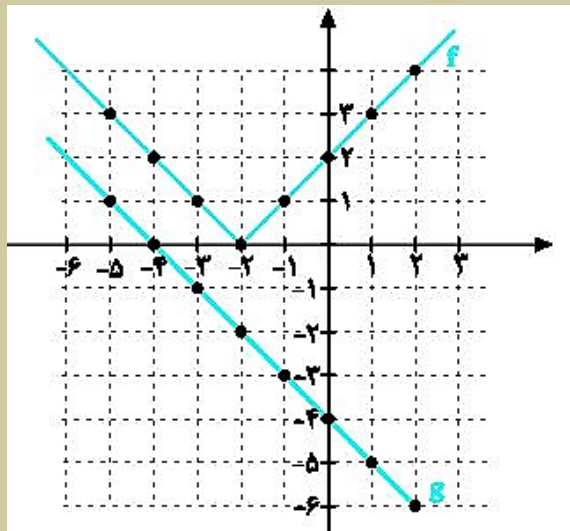
answer

۱۰- (تمرین کتاب) با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(f \circ g)(-1)$

answer

ب) $(g \circ f)(0)$



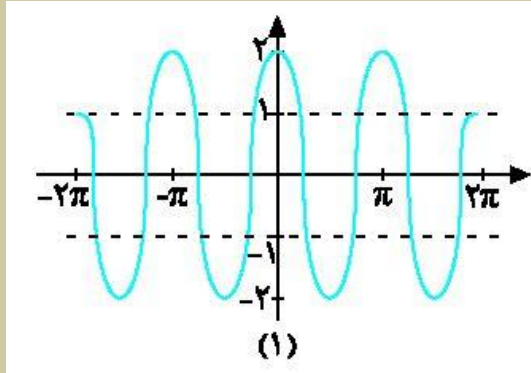
۱۱- (تمرین کتاب) با توجه به ضابطه‌ی توابع f و g ، معادله مورد نظر را تشکیل داده و آن را حل کنید.

$$f(x) = 2x - 5, \quad g(x) = x^2 - 3x + 8 : (f \circ g)(x) = 7$$

answer

۱۲- (تمرین کتاب) با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است، فاصله‌های هر نمودار را مشخص کنید.

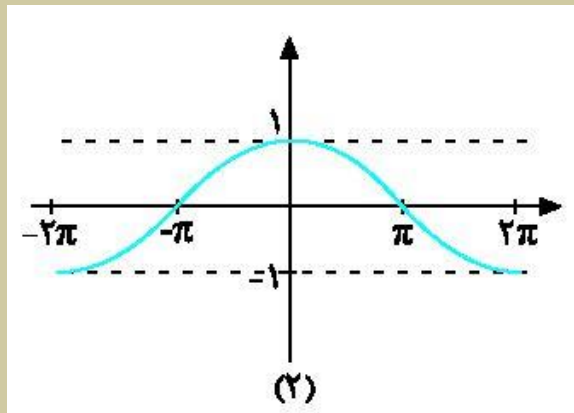
الف)



answer

answer

ب)



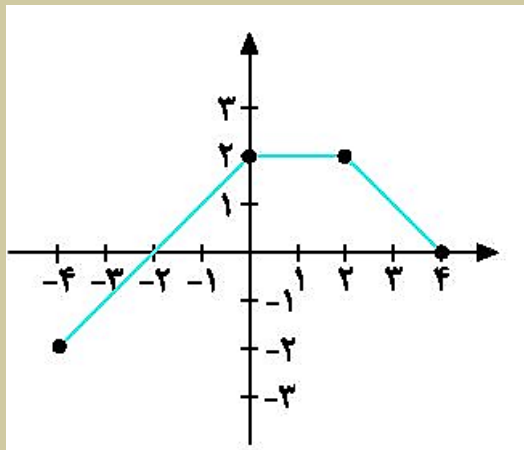
۱۳- (تمرین کتاب) نمودار تابع $y = -\sin 2x - 1$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

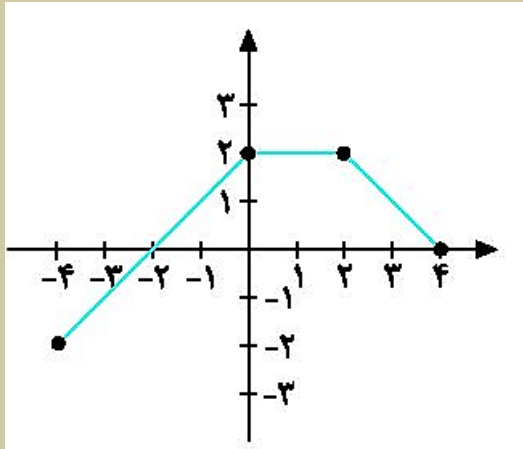
answer

۱۴- (تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

الف) $y = -f(-x) + 2$

answer





ب) $y = 2f(x - 1) - 3$

answer

$$g(x) = -5 - \sqrt{3x + 1}$$

answer

$$f(x) = -\sqrt{x-1} \quad , \quad g(x) = 1+x^2; x \leq 0$$

answer

۱۷- (تمرین کتاب) توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آن‌ها توابعی یک به یک بسازید.

الف) $f(x) = |x|$

answer

ب) $g(x) = -x^2$

۱۸- (تمرین کتاب) اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

(الف) $(f \circ g)^{-1}(5)$

answer

ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

$$g(x) = x^2 \quad f(x) = \frac{1}{8}x - 3$$

answer

ب) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

$$g(x) = x^3 \quad f(x) = \frac{1}{8}x - 3$$

answer



فصل ۲ :

مثلثات

(۵/۶ نمره)

تناوب و تابع متناوب

تابع f را متناوب می‌گوییم، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم

• $f(x \pm T) = f(x)$ و $x \pm T \in D_f$

(یعنی نمودارش هر T واحد یک بار تکرار می‌شود.) کوچکترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

توابع $y = a \sin bx + C$ و $y = a \cos bx + C$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + C$ و مقدار مینیمم $-|a| + C$

و دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال (مثال کتاب درسی) دوره تناوب و مقادیر $\min$ و $\max$ هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

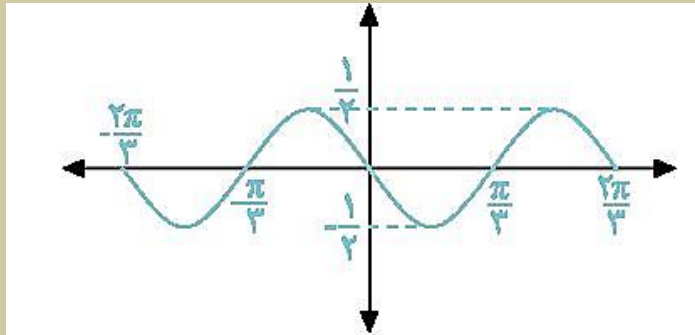
answer

$$y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x) \quad \text{ب)}$$

answer

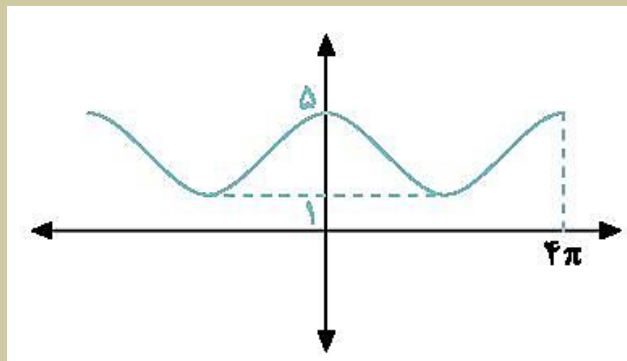
مثال (مثال کتاب) هر یک از نمودارهای زیر مربوط به $y = a \sin bx + C$ یا $y = a \cos bx + C$ است. با تشخیص $\max$ و $\min$ و دوره تناوب، ضابطه هر کدام را مشخص کنید.

الف)



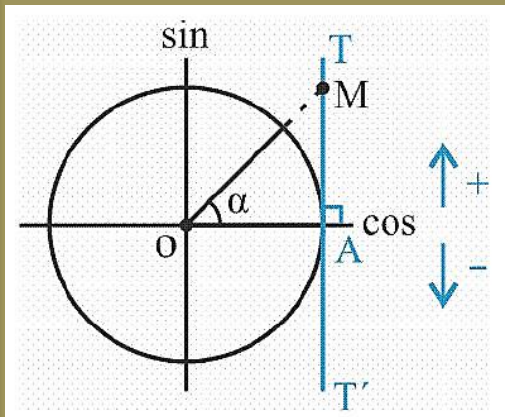
answer

ب)



answer

تangent



در دایره مثلثاتی روبه‌رو، انتهای ضلع متمرک زاویه α را امتداد می‌دهیم تا محور عمودی

TAT' را در نقطه M قطع کند. در مثلث قائم‌الزاویه OAM داریم:

$$\tan \alpha = \frac{MA}{OA} \xrightarrow{OA=1} \tan \alpha = MA$$

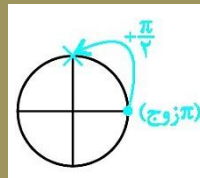
نتیجه: محور قائم TAT'، همان محور $\tan$ هاست (موازی Sin). برای به دست آوردن $\tan$ یک زاویه دلخواه، کافی

است انتهای ضلع متمرک آن زاویه را امتداد دهید تا محور $\tan$ ها را قطع کند!

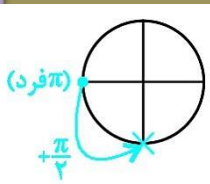
تغییرات tan

قبل از هر چیزی عرض کنم که $\tan x$ در مقادیری که مخرجش صفر است (یعنی $\cos x = 0$) تعریف نمی شود

($x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ که $k \in \mathbb{Z}$). اگر به k اعداد زوج بدهیم،



این مقادیر در بالای دایره مثلثاتی قرار می گیرند



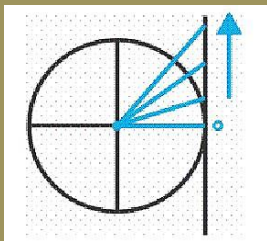
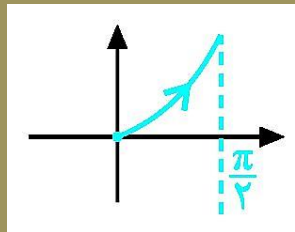
و اگر k فرد باشد، در پایین دایره قرار می گیرند.

لازم به ذکر است که این نقاط مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ هستند $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ و هنگام رسم نمودار، در این طول ها،

یک خط چین قائم رسم می کنیم. (x که به این نقاط میل می کنه، $\tan x$ تشریفشو می بیره ∞). فبا با این

مقدمات برویم سراغ بررسی داداش تانژانت در نواحی مفتلف و رسم نمودارش!

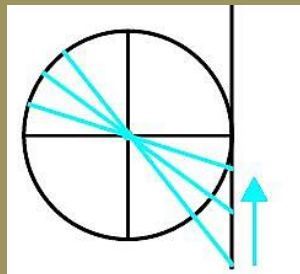
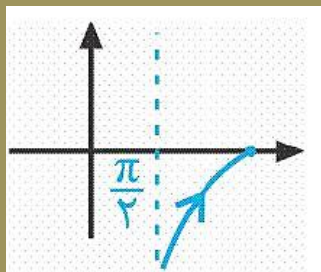
۱- ناهیه اول : در شروع این ربع مقدار $\tan$ صفر می شود. هر چه مقدار زاویه بیشتر شود، مقدار $\tan$ زاویه هم



بیشتر می شود تا به $+\infty$ میل کند. نمودارش را ببینید $\Leftarrow$

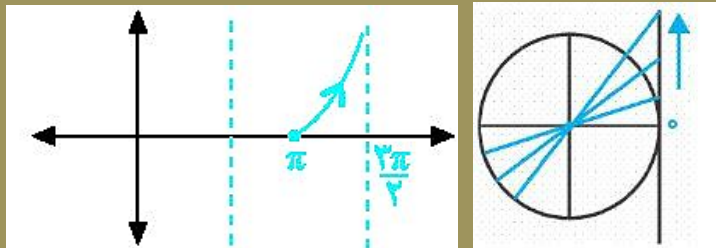
نتیجه : در ربع اول، تابع $\tan x$ یک تابع صعودی است. (البته صعودی اکیدا)

۲- ناهیه دوم : در شروع این بازه، مقدار $\tan x$ ، $-\infty$ است. (منفی بی نهایت چون در ربع دوم $\tan x$ منفی است)



هر چه مقدار کمان بیشتر می شود، $\tan x$ این کمان هم زیادتر می شود تا اینکه بشود صفر. این هم نمودارش $\Leftarrow$

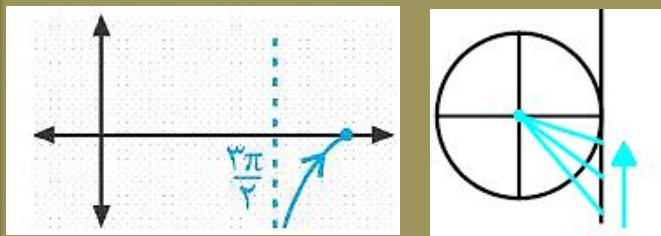
نتیجه: در ربع دوم هم تابع $\tan x$ تابعی صعودی آکید است.



۳- نامیه سوم: در شروع این بازه مقدار $\tan$ ، صفر است و رفته رفته

به میل $+\infty$ می کند. این هم نمودارش $\Leftarrow$

نتیجه: در ربع سوم هم $\tan x$ تابعی صعودی آکید است.



۴- نامیه چهارم: در شروع این بازه مقدار $\tan$ ، $-\infty$ است. رفته رفته

زیاد و زیادتر می شود تا اینکه به صفر برسد. این هم نمودارش $\Leftarrow$

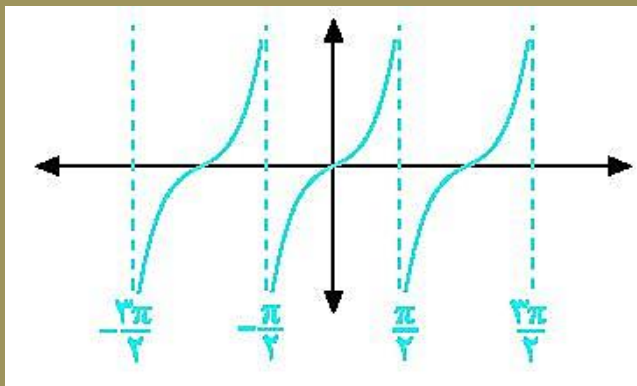
نتیجه: در ربع چهارم هم $\tan x$ تابعی صعودی آکید است.

تابع tan

این تابع به ازای هر زاویه دلفواه در دایره (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ که $k \in \mathbb{Z}$) تعریف شده است. پس دامنه آن

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \Leftarrow \text{می شود}$$

اگر تکه‌هایی از نمودار $\tan$ را که برایتان رسم کردم، به هم بپسبانبند، به نمودار کلی $\tan$ می‌رسید:



ویژگی‌هایی از تابع که از نمودار قبل برداشت می‌شوند:

- ۱- این تابع متناوب است با دوره تناوب π . به طور کلی دوره تناوب تابع $y = A \tan(ax) + B$ می‌شود: $T = \frac{\pi}{|a|}$
- ۲- این تابع در کل دامنه‌اش غیر یکنواست.
- ۳- این تابع در بازه‌هایی که ریشه مفرزش در آن بازه نباشد (یعنی بازه‌ها بین دو خط‌چین باشد و خط‌چینی تو بازه نباشد) صعودی اکید است.

نسبت‌های مثلثاتی زاوایی دو برابر کمان

در محاسبات فنی‌ای که جلوتر به آن برخورد خواهیم کرد (معادلات مثلثاتی) به ۴ فرمول زیر نیاز داریم:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha & \cos 2\alpha &\begin{cases} \longrightarrow = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \longrightarrow = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \longrightarrow = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

مثال: (مثال کتاب) مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

answer

معادلات مثلثاتی

معادلاتی اند که مجهول در آن‌ها، کمان نسبت‌های مثلثاتی است. مثلاً $\sin x = 1$ یک معادله مثلثاتی است و منظور از حل آن یعنی یافتن کمان‌هایی که سینوس آن‌ها برابر یک می‌شود. در کتاب شما، فوشبختانه طراحان دل‌رهمی به فرج داده‌اند و فقط ۲ مدل از این معادلات را زیر ذره‌بین برده‌اند! (فدایشان غیر دها!!)

مدل ۱: معادلات سینوسی به فرم $\sin x = \sin \alpha$ که جوابش می‌شود $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ که $k \in \mathbb{Z}$

مثال: (کار در کلاس کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 2 \sin x - \sqrt{3} = 0$$

answer

نکته: اگر $\sin$ مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید، زاویه α را به دست بیاورید بعد منفی را بپذیرید داخل

$$\text{ب) } 4 \sin x + \sqrt{8} = 0$$

answer

مدل ۲: معادلات کسینوسی به فرم $\cos x = \cos \alpha$ که جوابش می شود $x = 2k\pi \pm \alpha$ که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: (مثال کتاب) معادله $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

answer

نکته: اگر $\cos$ مساوی یک عدد منفی شد، کاری به منفی نداشته باشید و زاویه α را بیابید.

در نهایت جلوی $\cos$ بنویسید. $\pi - \alpha$

$$\text{ex) } \cos(2x) = -\frac{1}{2}$$

۱- (تمرین کتاب) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

answer

$$y = -\frac{3}{4} \cos 3x \quad (\text{ب})$$

answer

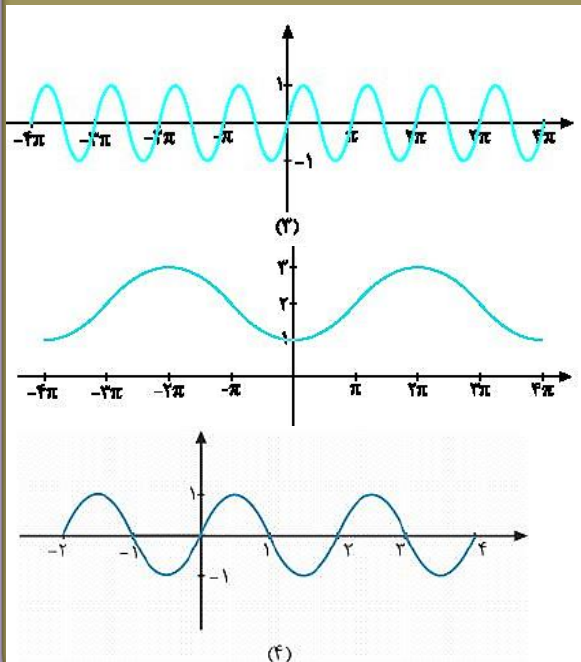
الف) $y = \sin \pi x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2} x$

پ) $y = \sin 2x$

مرکز مشاوره تحصیلی علیرضا افشار
۲- (تمرین کتاب) هر یک از توابع داده شده را به نمودارهای زیر نظیر کنید.

answer



۳- (تمرین کتاب) در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

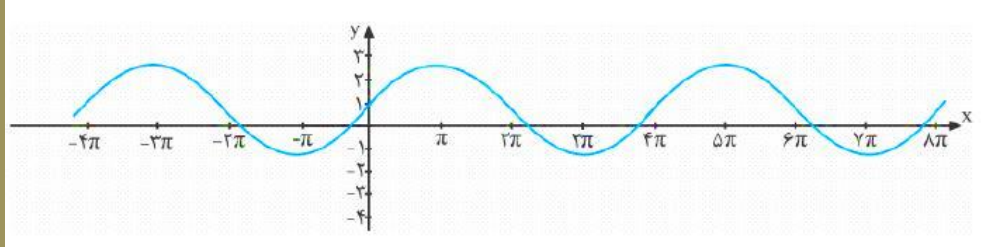
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

answer

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

answer

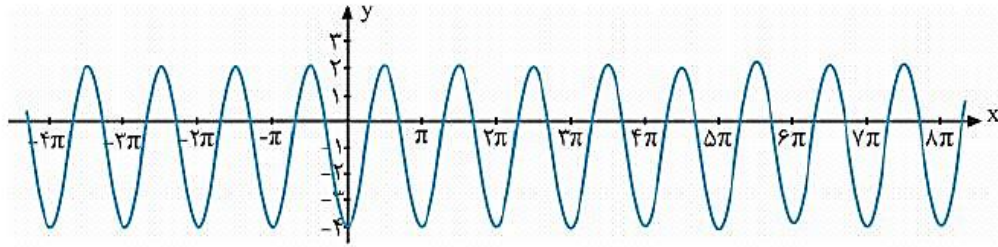
۳- (تمرین کتاب) ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



(الف)

answer

(ب)



answer

۵- (تمرین کتاب) کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

answer

۶- (تمرین کتاب) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

answer

(ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

answer

۷- (تمرین کتاب) فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

answer

۱- (تمرین کتاب) نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

answer

۹- (تمرین کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$

answer

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

answer

پ) $\cos X = \cos 2X$

answer

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

answer

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \quad \text{ث)}$$

answer



فصل ۳ :

حد

بخش پذیری چند جمله‌ای بر عبارت درجه اول $ax + b$

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه دوم $ax + b$ ، باقی مانده تقسیم می‌شود $f(-\frac{b}{a})$

(در واقع $ax + b$ رو باید مساوی صفر بزاری $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. بعد این ریشه رو قرار بدی تو چند جمله‌ای!)

نتیجه: اگر $f(-\frac{b}{a})$ صفر شود، آنگاه $f(x)$ بر $ax + b$ بخش پذیر است و بالعکس. از این نتیجه برای تجزیه

چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌شود.

مثال: (کار در کلاس کتاب) نشان دهید $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دو جمله‌ای $x + 2$ بخش پذیر است.

answer

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع کسری

ممکن است از این قسمت دو مدل سؤال ببینید:

مدل اول: اگر در صورت، مفرج یا هر دو، یک تابع چندجمله‌ای دیدید که وقتی $x \rightarrow a$ ، مقدارش صفر می‌شود، یعنی

آن چندجمله‌ای بر $x - a$ بخش‌پذیر است. با تقسیم این چندجمله‌ای بر $x - a$ ، آن را تجزیه کنید و تمام!

مدل دوم: اگر کسر داده شده شامل عبارتی رادیکالی بود که در نقطه عددی داده شده مقدارش صفر می‌شد، با ضرب

صورت و مفرج کسر در مزدوج عبارت رادیکالی و حذف عامل صفرساز از صورت و مفرج، گره از کارمان باز می‌شود

انشا... و دیگر ریفت نس $\frac{0}{0}$ را نفواهیم دیدا

مثال: (مثال کتاب) حد تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 8}$ را در نقطه $x = -2$ در صورت وجود بیابید.

answer

مرکز مشاوره تحصیلی علیرضا افشار
مثال: (مثال کتاب) حد تابع $g(x) = \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه $x = 5$ در صورت وجود بیابید.

answer

نکته: گاهی فرجه رادیکال، ۳ است. در این صورت باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنید. اگر قسمت لاغر (یا چاق) اتحاد داده شده بود، صورت و مفرج را در قسمت چاق (یا لاغر) اتحاد ضرب کنید.

مثال: (مثال کتاب) حد تابع $h(x) = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$ را در $x = 8$ در صورت وجود بیابید.

answer

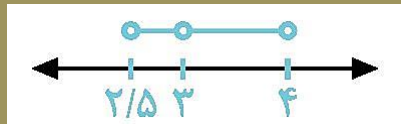
همسایگی

هر بازه باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی برای آن عدد می‌نامیم (x_0 ابتدا و انتهای بازه نباشد و درون بازه باشد).

مثال: بازه‌های $(0, 4)$ و $(0, 5)$ یک همسایگی برای عدد ۳ می‌باشند. اما مثلاً بازه $(1, 3]$ ، $(0, 3)$ و $(1, 2)$ همسایگی عدد ۳ نیستند. چون ۳ داخل این بازه‌ها نیست.

همسایگی محذوف

اگر بازه (a, b) یک همسایگی برای x_0 باشد، مجموعه $(a, b) - \{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می‌شود.



مثال: مجموعه $(\frac{5}{2}, 4) - \{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ است. ببینید:

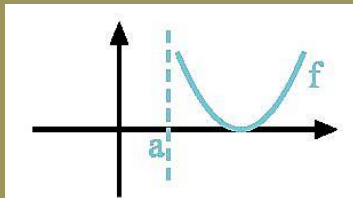
همسایگی چپ و راست

اگر ϵ عددی مثبت باشد، آنگاه بازه $(x_0, x_0 + \epsilon)$ یک همسایگی راست و بازه $(x_0 - \epsilon, x_0)$ یک همسایگی چپ برای x_0 به حساب می آیند.

مثال: بازه $(3, 5)$ یک همسایگی راست و $(2/9, 3)$ یک همسایگی چپ برای ۳ است.

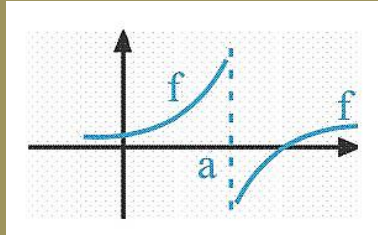
حد پی نهایی

خلاصه عرض کنم که گاهی، وقتی $x \rightarrow a$ (یا $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$) میل می کند، مقدار تابع به $-\infty$ یا $+\infty$ میل می کند. به نمودارهای زیر توجه کنید:

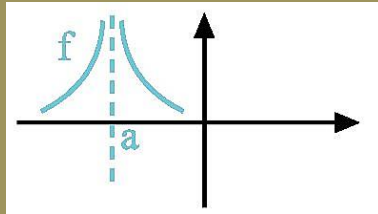


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

(الف)



$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{(ب)}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{(پ)}$$

نکته: دقت شود که حد در بی‌نهایت، حالت خاصی از عدم وجود حد است.

مثال: (مثال کتاب) نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را رسم کنید و به وسیله آن، حد چپ و راست این تابع
در $x = 2$ را در بیابید.

answer

نکته: هواست باشد که برای تعیین علامت صفر مخرج، گاهی لازم است مخرج را تعیین علامت کنیم.

مثال: (کار در کلاس) حدود زیر را مقاسبه کنید.

(الف)

answer

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$$

(ب)

answer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}$$

(پ)

answer

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x - 3|}$$

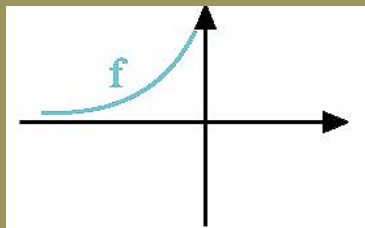
(ت)

answer

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

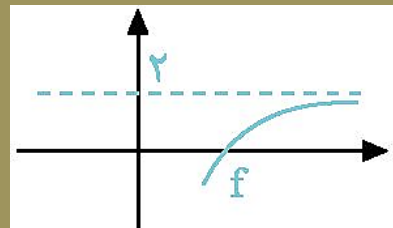
حد در پی نهایت

خلاصه عرض کنم، گاهی x به $+\infty$ (انتهای راست محور x ها) و یا به $-\infty$ (انتهای چپ محور x ها) میل می کند. در این حالت باید ببینیم f (همان عرض تابع) به چه عددی میل خواهد کرد. به نمودارهای زیر دقت کنید:



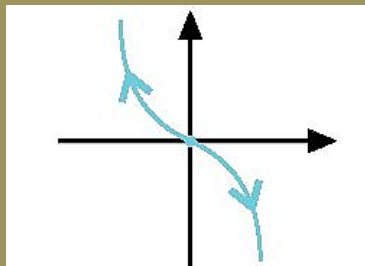
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

(ب)



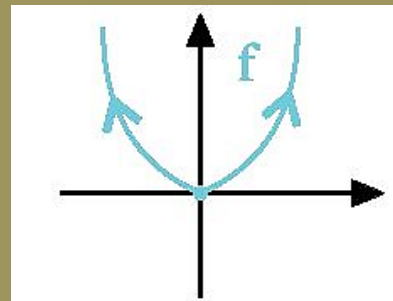
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

(الف)



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

(د)



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

(ج)

نکته : عدد (غیر صفر) به روی ∞ می شود صفر !

هم ارزی پر توان (معم)؛ اگر $X \rightarrow \pm\infty$ ، هر چند جمله ای، هم ارز (یعنی هم ارزش و معادل) جمله ای است که

$$-3X^3 - 4X + 1 \sim -3X^3 \quad 4X^2 - 2X^{1^0} + 4 \sim -2X^{1^0} \quad \text{بهترین توان را داراست.}$$

$X \rightarrow -\infty$

مثال؛ (کار در کلاس) مقدار حدود زیر را مشخص کنید.

(الف)

(ب)

answer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - 3x}$$

answer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 5t^2}{t^2 + 3t}$$

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^2 - 8x + 1}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$$

۱- (تمرین کتاب) نشان دهید چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله‌ای $x + 1$ بخش‌پذیر است.

سپس به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

answer

۲- (تمرین کتاب) عددهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$$

۳- (تمرین کتاب) عددهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x - 1}}{x^2 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 16}{\sqrt[3]{x} + 2}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$$

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$$

(ت)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - 5x}{x^2 - 9}$$

(ث)

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2 - 4}$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$$

(ح)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$$

(خ)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

(د)

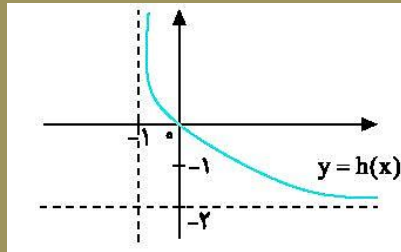
۵- (تمرین کتاب) نمودار هر یک از تابع های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

(الف)

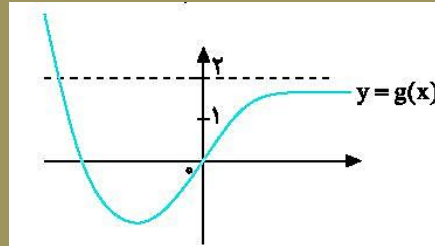
(ب)

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} : \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

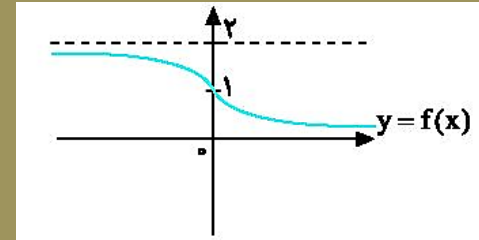
$$f(x) = \frac{1}{x} : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$



(پ)



(ب)



(الف)

۱- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

۲- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

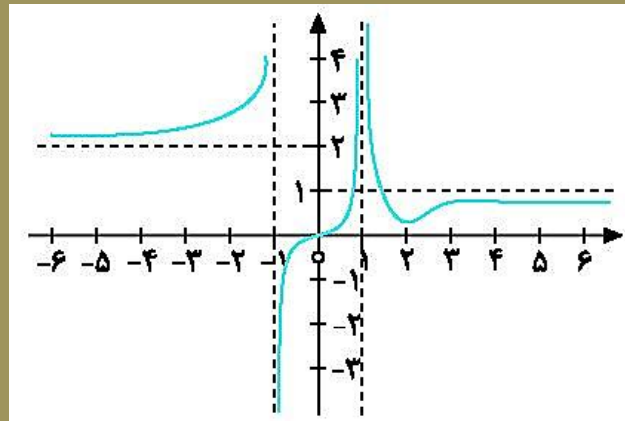
۳- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

۴- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

۵- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

۶- $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x)$

۷- (تمرین کتاب) نمودار تابع f به شکل زیر است. ورود خواسته شده را بنویسید.



$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

(ت)

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

(ث)

الف)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$$

پ)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

ت)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$$

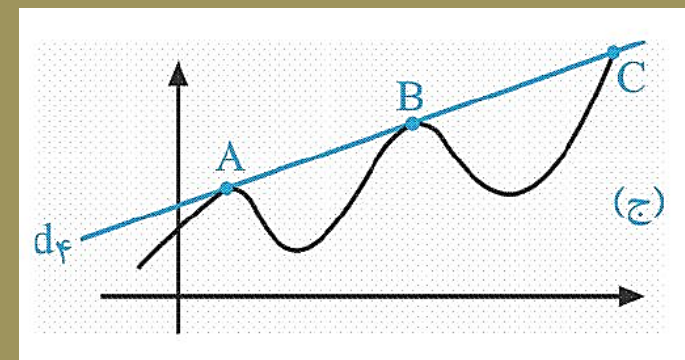
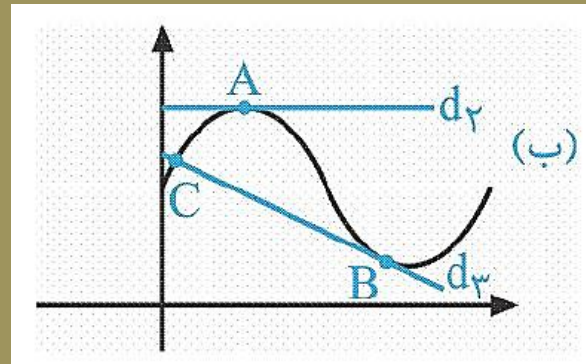
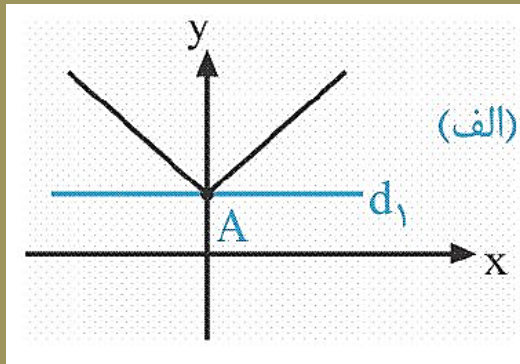


فصل ۴ :

مستقی

خط مماس بر یک منحنی به روایت تصویر!

به سه شکل زیر دقت کنید. در شکل الف، خط d_1 بر منحنی در A مماس نیست. در شکل ب، خط d_2 در A و خط d_3 در B بر منحنی مماس است. در همین شکل اما، خط d_3 در C بر منحنی مماس نیست، متقاطعند! در شکل ج، خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس است. اما در C مماس نیست، متقاطعند!

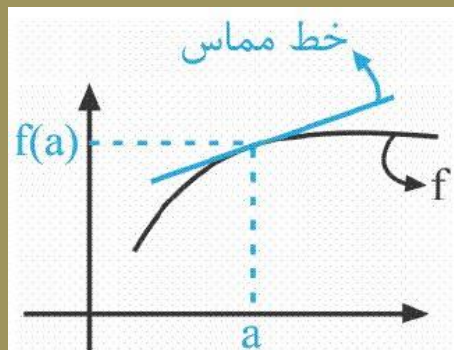


مشتق تابع f در نقطه $A(a, f(a))$

مشتق تابع f در نقطه $x = a$ را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهند، که برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

نکته: زمانی f' در $x = a$ تعریف می‌شود که هر فوق موجود و متناهی باشد.



نکته: مشتق تابع f در $x = a$ برابر است با:

شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه A

مثال: (مثال کتاب) معادله خط مماس بر منحنی $y = -x^2 + 10x$ را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ واقع بر منحنی بیابید.

answer

تعریف دیگر برای مشتق f در $x = a$

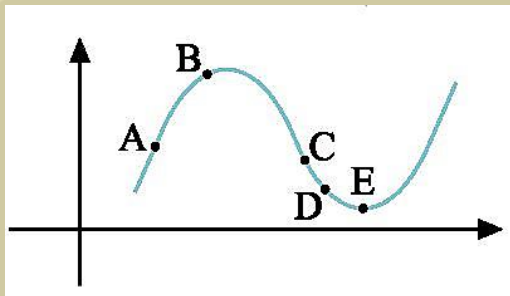
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \Leftarrow \text{می شود؛}$$

در صورتی که هر گفته شده موجود و متناهی باشد، مشتق f در a وجود خواهد داشت.

نکته: هیچ تفاوتی بین ۲ تعریف گفته شده وجود ندارد و استفاده از هر کدام، دلفواه است.

نکته: علامت مشتق (یا همان شیب خط مماس) با وضعیت یکنوایی تابع، به این صورت در ارتباط است که اگر در نقطه داده شده، تابع در حال صعود بود، $f' > 0$ ، اگر در حال نزول بود $f' < 0$ و اگر در نوک قله یا قعر نمودار بود، مقدار f' برابر صفر است.

مثال: فرض کنید شیب نقاط مشخص شده در منحنی زیر، -5 ، -1 ، 0 ، 2 ، 4 هستند. مشخص کنید کدام شیب مربوط به کدام نقطه است؟



answer

مشتق چپ و راست f در $x = a$

مشتق چپ و راست تابع f در $x = a$ را با نمادهای $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شروط مشتق‌پذیری f در $x = a$

مشتق‌پذیری f در $x = a$ ، ۲ شرط لازم دارد:

۱- f در $x = a$ پیوسته باشد.

۲- شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست برابر باشند. یعنی $f'_-(a) = f'_+(a)$

مثال: (مثال کتاب) مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

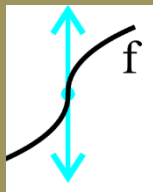
answer

مثال: (مثال کتاب) مشتق پذیری توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ را در صفر بررسی کنید.

answer

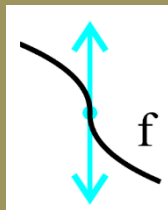
مماس قائم

اگر f در $x = a$ پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند، f در a مشتق پذیر نیست، اما خط مماس در این نقطه موجود است، که به آن مماس قائم می‌گویند.



$$f'_-(a) = f'_+(a) = +\infty$$

(مثبت شد چون صعودی است)



$$f'_-(a) = f'_+(a) = -\infty$$

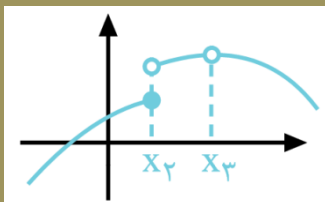
(منفی شد چون نزولی است)

مثال: (مثال کتاب) آیا تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ دارای فط مماس است؟

answer

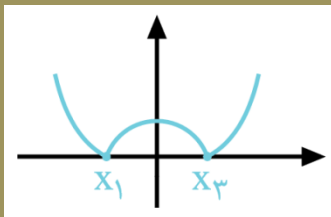
مثال: آیا تابع $y = \sqrt[3]{x^2}$ در $x = 0$ دارای فط مماس است؟

answer

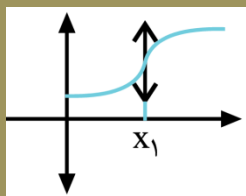


در نمودار یک تابع، نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق ناپذیر است عبارتند از:

۱- نقاط ناپیوستگی؛ مثلا نقاط x_2 و x_3 در نمودار مقابل $\Rightarrow$



۲- نقاط تیزی (زاویه‌دار)؛ مثلا x_3 و x_1 در نمودار مقابل $\Rightarrow$



۳- نقاطی که در آن‌ها مماس قائم تولید می‌شود؛ مثلا x_1 در دو نمودار مقابل $\Rightarrow$

برابر است با $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ مشروط بر آن که این حد موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از

دامنه f که f' برای آن‌ها موجود باشد را $D_{f'}$ می‌گوییم.

مثال (مثال کتاب) اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. سپس $f'(3)$ را بیابید.

چند فرمول مشتق‌گیری مشتق بینیم صفا کنیم!

مشتق‌گیری! (صفر تا صد)

۱ $y = a (a \in \mathbb{R}) \rightarrow y' = 0$

۲ $y = ax \rightarrow y' = a$

۳ $y = a\Delta^n \rightarrow y' = an(\Delta)^{n-1} \cdot \Delta'$

رمز

• نما در ضرب ضرب همیشه!
• یکی از نما کم همیشه!
• در مشتق پایه ضرب همیشه!

ex $y = \frac{-2}{x^4}$

ex $y = \frac{1}{5}(-5x)^{12}$

۴ $y = f \pm g \pm \dots \rightarrow y' = f' \pm g' \pm \dots$

۵ $y = f.g \rightarrow y' = f'.g + g'.f$

ex $y = \frac{6}{x^3} - x^2 \sqrt[3]{x} + 4x$

۶

$$y = \sqrt{\Delta}$$



$$y' = \frac{\Delta'}{2\sqrt{\Delta}}$$

۷

$$y = \frac{f}{g}$$



$$y' = \frac{f'g - gf'}{g^2}$$

ex

$$y = \frac{(2x-1)\sqrt{x}}{x^3}$$

۸

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$



$$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

۹

$$y = \frac{1}{U}$$



$$y' = \frac{-U'}{U^2}$$

ex

$$\text{if } f(x) = \left(\frac{2x-1}{2+3x}\right)^2 \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = ?$$

بفوانید : مشتقِ داخلش در اِف پریم داخلش! تمام :

$$y = f(\Delta) \longrightarrow y = \Delta' \cdot f'(\Delta)$$

(کنکور ۹۲)

اگر $f(x) = \frac{x^2 - 2}{1 + x^2}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \times g'(x)$ کدام است؟

$$\frac{x-3}{x^3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3x} \quad (3)$$

$$\frac{3}{x^2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{x} \quad (1)$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{-2x}$ و $g(x) = (2x+1)^2$ ، آنگاه مشتق تابع $\text{gof}(x)$ در $x = -2$ را با استفاده از قاعده زنجیری به دست بیاورید.

answer

مثال: (کار در کلاس) مشتق‌های توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = (x^2 + 1)^3 (5x - 1) \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5} \right)^8 \quad (\text{ب})$$

answer

مشتق پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد. همچنین تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد، در a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

نکته (کار در کلاس) تابع f روی $[a, b]$ $((a, b])$ مشتق پذیر است هرگاه در (a, b) مشتق پذیر باشد و در a مشتق راست (در b مشتق چپ) داشته باشد.

مثال : (مثال کتاب) نمودار $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کنید و مشتق پذیری آن را روی بازه‌های $[-2, 1]$ ، $(1, +\infty)$ و $[1, 2]$ بررسی کنید.

answer

مشتق مرتبه دوم

اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به صورت $y'' = f''(x)$ (خوانده شود

ایگدگ زگوند) می نویسیم و برای مناسبه آن از تابع y' مشتق می گیریم.

مثال: (مثال کتاب) اگر $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ ، آنگاه تابع y' و y'' را بیابید.

answer

مثال: (مثال کتاب با تغییر) رابطه $h(t) = -5t^2 + 40t$ ، ارتفاع جسم $(h(t))$ را t ثانیه پس از پرتاب از سطح زمین نشان می‌دهد.

الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[0, 2]$ را بر حسب $\frac{m}{s}$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه $t = 2$ مقدار است؟

ج) جسم چند ثانیه پس از پرتاب، به نقطه اوج می‌رسد؟

answer

کاربردی دیگر از آهنگ تغییرات تابع: آهنگ رشد

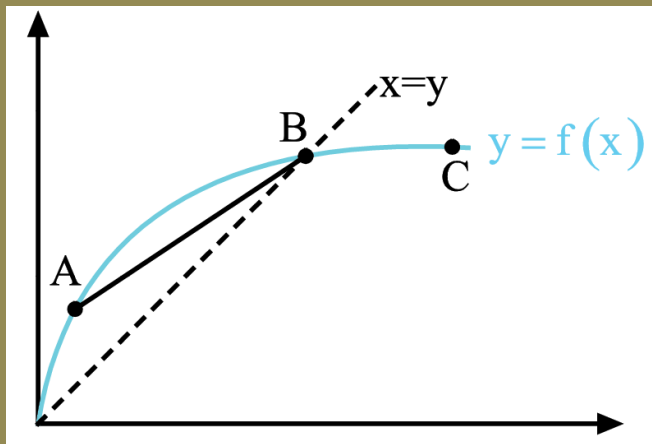
مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را x ماه پس از تولد، بر حسب $\frac{\text{cm}}{\text{month}}$ مشخص می‌کند. آهنگ متوسط رشد یک کودک را از ۱ ماهگی تا ۳۶ ماهگی بیابید.

answer

۱- (تمرین کتاب) اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

answer

۲- (تمرین کتاب) برای نمودار $y = f(x)$ ، شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



$m_1 \leftarrow$ A (الف) شیب نمودار در نقطه

$m_2 \leftarrow$ B (ب) شیب نمودار در نقطه

$m_3 \leftarrow$ C (پ) شیب نمودار در نقطه

$m_4 \leftarrow$ AB (ت) شیب خط

$m_5 \leftarrow$ (ث) شیب خط

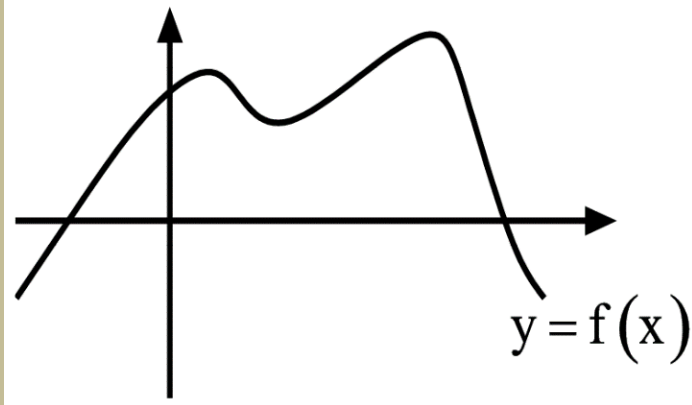
$m_6 \leftarrow$ (ج) شیب خط

که:

الف) نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن با صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

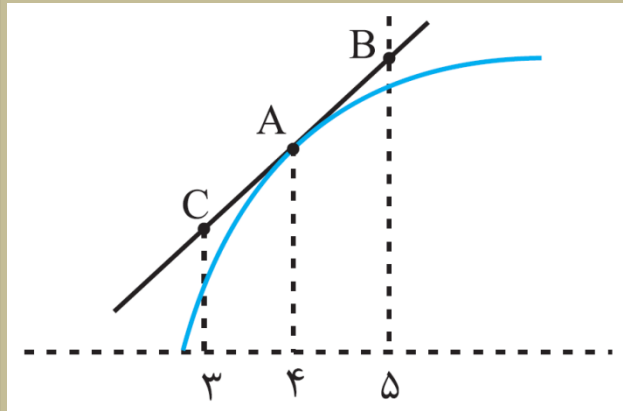


ت) نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن با صفر است.

ث) نقاط E و F، نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

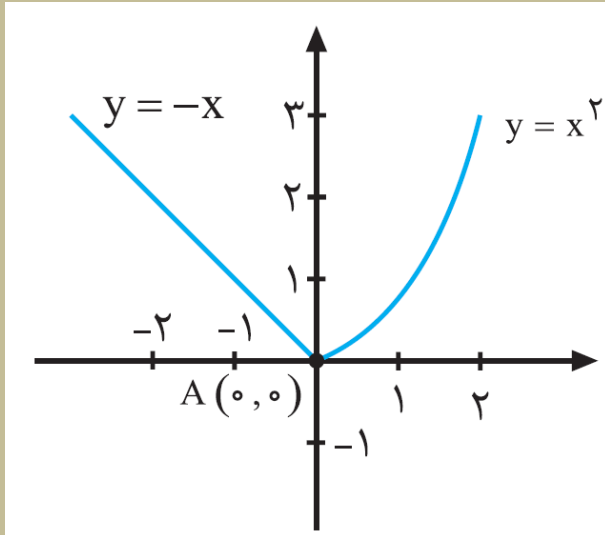
ج) نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن با مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

۵- (تمرین کتاب) برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل،
مقتضات نقاط A و B و C را بیابید.



answer

۶- (تمرین کتاب) با مناسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع داده شده در نقطه A نشان دهید که این تابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



answer

۱- (تمرین کتاب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود. ب) در $x=2$ برابر ۳ شود. پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد. ث) در تمام نقاط منفی باشد.

answer

۹- (تمرین کتاب) مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

answer

۱۰- (تمرین کتاب) اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاطی به طول های ۲ و ۲- بررسی کنید.

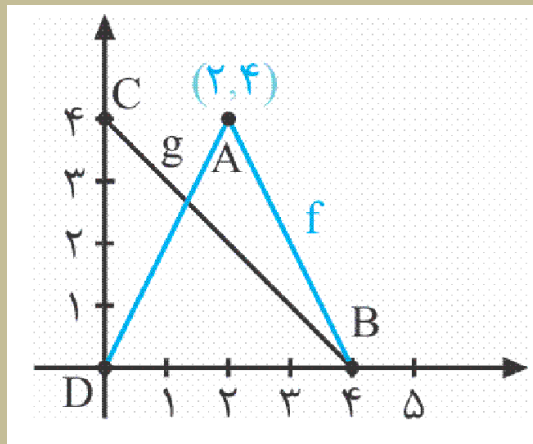
answer

۱۲- (تمرین کتاب) اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$.

answer

۱۳- (تمرین کتاب) نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

اگر $h(x) = f(x).g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ و $h'(2)$ ، $h'(3)$.



۱۴- (تمرین کتاب) اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ ، نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی مشتق موجود نیست.

answer

۱۵- (تمرین کتاب) مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$

answer

ب) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

answer

۱۷- (تمرین کتاب) معادله حرکت متمرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$

داره شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

answer

۲۰- (تمرین کتاب) کنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مرکز مشاوره تحصیلی علیرضا افشار

مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟



فصل ۵ :

کاربرد مشتق

آزمون یکنوایی توابع

برای تابع مشتق پذیر f داریم:

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید است؟

answer

اکسترم‌های نسبی توابع

نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی یک تابع را نقاط اکسترمم نسبی آن تابع می‌گویند.

ماکزیمم نسبی: نقطه $A \in D_f$ ، نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است، هرگاه یک همسایگی اطراف A وجود داشته باشد، به طوری که عرض A از عرض تمام نقاط همسایگی بیشتر یا مساوی باشد. مقدار ماکزیمم نسبی، همان مقدار عرض این نقطه است.

مینیمم نسبی: نقطه $A \in D_f$ نقطه مینیمم نسبی تابع f است، هرگاه یک همسایگی اطراف A وجود داشته باشد، به طوری که عرض A از عرض نقاط همسایگی کمتر یا مساوی باشد. مقدار ماکزیمم نسبی، همان مقدار عرض این نقطه است.

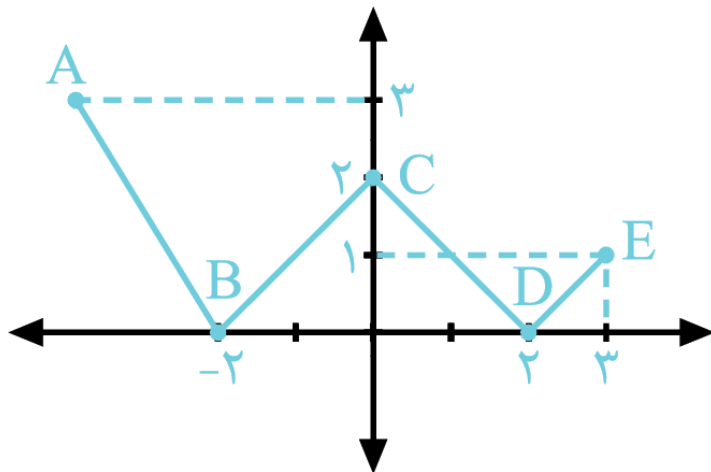
نکته: وجود همسایگی (هم چپ، هم راست) برای این که یک نقطه اکسترمم نسبی شود، شرطی لازم است. (یعنی مثلا نقاط ابتدا و انتهای یک بازه هیچ وقت نمی‌تونن اکسترمم نسبی بشن)

نکته: برای اکسترمم نسبی شدن یک نقطه، نه پیوستگی اهمیت دارد نه مشتق‌پذیری!
همه رسانه های ما

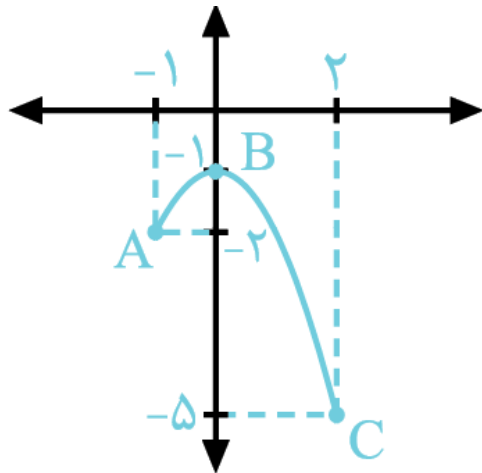
مثال: (کار در کلاس) برای نقاط مشخص شده در هر یک از توابع زیر، نوع اکسترمم نسبی، مقدار اکسترمم نسبی و

مقدار مشتق را در آن نقطه مناسبه کنید.

الف) $f(x) = ||x| - 2|; x \in [-5, 3]$



(ب) $g(x) = -x^2 - 1; x \in [-1, 2]$



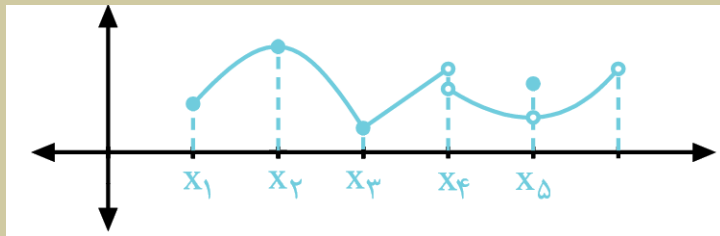
answer

نکته: نقاط روی توابع ثابت (به شرط وجود همسایگی) هم $\max$ نسبی به حساب می آیند هم $\min$ نسبی.

نقطه بحرانی تابع

فرض کنید $c \in D_f$ در این صورت c یک نقطه بحرانی f است، هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

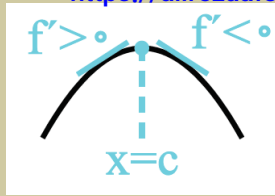
مثال: کدام یک از نقاط مشخص شده در نمودار زیر بحرانی اند، کدام نیستند؟ (با ذکر دلیل)



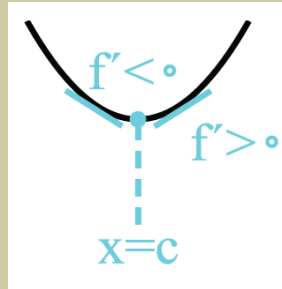
قضیه فرما: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول C اکسترمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ است.

نتیجه: هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی f ، حتماً بحرانی نیز هست، اما هر نقطه‌ی بحرانی، اکسترمم نسبی نیست.

آزمون مشتق اول



(الف) اگر علامت f' قبل از $x=c$ مثبت و بعد از آن منفی باشد، آنگاه C طول $\max$ نسبی f است.

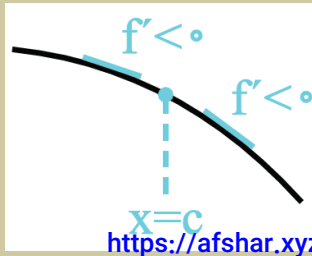


(ب) اگر علامت f' قبل از $x=c$ منفی و بعد از آن مثبت باشد، آنگاه

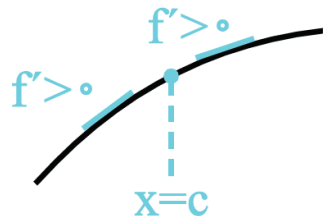
C طول $\min$ نسبی f است.

(پ) اگر علامت f' قبل و بعد از $x=c$ تغییر نکند، آنگاه C ، نه طول

$\min$ نسبی f است نه طول $\max$ نسبی آن.



یا



مثال: با استفاده از آزمون مشتق اول، نقاط اکسترمم نسبی و مقادیر آنها را برای تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$ به دست آورید.

answer

اکسترمم مطلق توابع

به $\max$ و $\min$ مطلق توابع، اکسترمم مطلق آن‌ها می‌گوییم.

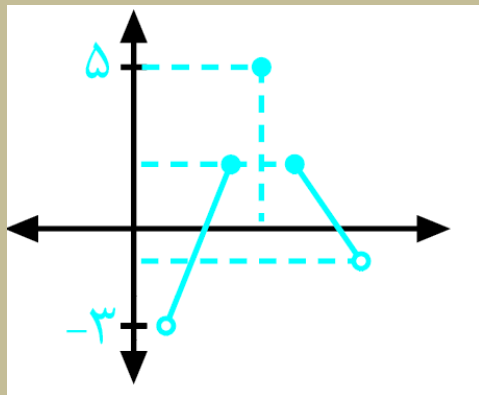
ماکزیمم مطلق: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ یک نقطه $\max$ مطلق برای تابع f است، هرگاه عرض این نقطه از عرض تمام نقاط دامنه f بیشتر یا مساوی باشد. مقدار $\max$ مطلق همان مقدار عرض این نقطه، یعنی $f(c)$ است.

مینیمم مطلق: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ یک نقطه $\min$ مطلق برای تابع f است، هرگاه عرض این نقطه از عرض تمام نقاط دامنه f کمتر یا مساوی باشد. مقدار $\min$ مطلق همان مقدار عرض این نقطه یعنی $f(c)$ است.

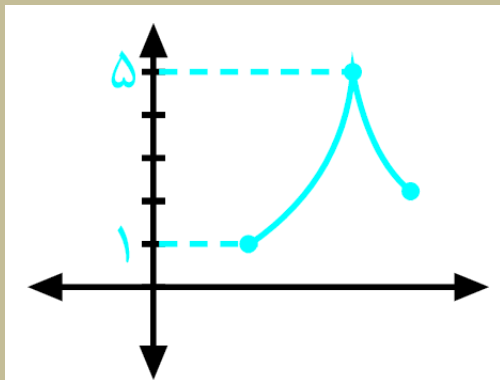
نکته: وجود همسایگی برای این که یک نقطه اکسترمم مطلق شود، نه شرط لازم است نه کافی! یعنی اصلاً وجود همسایگی این با موهوم نیست! برخلاف اکسترمم‌های نسبی که وجود همسایگی و آشنون شرط لازم بودن.

مثال: در هر مورد از نمودارهای زیر، مقادیر و مطلق را بیابید.

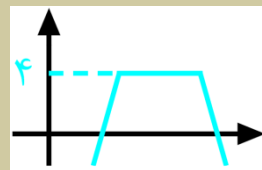
الف



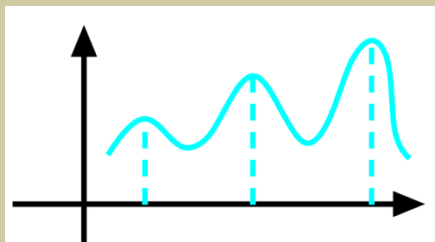
ب



نکته: یک تابع می تواند در بی نهایت نقطه دارای اکسترمم مطلق باشد، اما مقدار آن ها یکتا است.



مانند که بی شمار نقطه $\max$ مطلقند و مقدار آن ها ۴ است. اما یک تابع می تواند



بی شمار نقطه اکسترمم نسبی با مقادیر مختلف داشته باشد. مانند

قضیه: فرض کنید f در $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت در این بازه هم $\max$ مطلق دارد هم مطلق.

مثال (فعالیت کتاب) آیا تابع $y = |x^2 - 1|$ در $[-2, 3]$ دارای اکسترمم مطلق است؟ در صورت وجود با رسم نمودار مقادیر آن‌ها را بیابید.

answer

روش محاسبه اکسترمم‌های مطلق تابع f در بازه بسته $[a, b]$

گام اول: مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f' را می‌یابیم.

گام دوم: مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم.

گام سوم: در گام دوم، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار $\max$ مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها، $\min$ مطلق.

مثال: (مثال کتاب) نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1, 3]$ تعیین کنید.

بهینه‌سازی یا optimization

یعنی پیدا کردن بهترین حالت! مثل کمترین مقدار برای زمان، هزینه، فاصله یا بیشترین مقدار برای سود
مسامت یا مهم! مسائل بهینه‌سازی معمولا با **بیان فارسی** و **کلمات کمترین یا بیشترین** همراهند!

روش حل مسائل بهینه‌سازی با استفاده از رمز **نقتم** !!

۱ **ن : نمادگذاری**، رسم شکل (در صورت نیاز) و قرار دادن معلوم‌ها و نمادهای مجهولات $\leftarrow X$ و Y

۲ **ف : f** ضابطه‌ی تابعی که قرار است بهینه شود را بنویسید

۳ **ت : تک متغیرش کن!** آکه اف دو متغیره بود، تک متغیرش کن! (با استفاده از یه رابطه از دل سوال!)

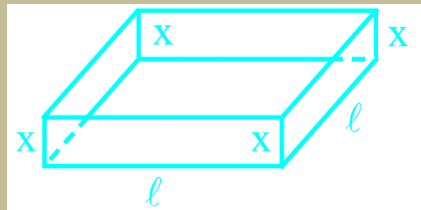
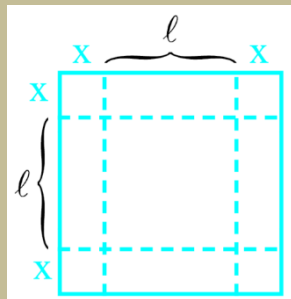
۴ **م : max-min** عرض اکسترمم (عالا یا ماکزیمم یا مینیمم) تابع تک متغیره رو بدست بیار!

مثال: (مثال کتاب) نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن با هم برابر باشند.

answer

مثال (مثال کتاب) مطابق شکل، ورقه فلزی به طول 30cm را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از ۴ گوشه آن

مربع‌هایی کوچک به ضلع x را برداشته و سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌ها، جعبه‌ای در باز



بسازیم. مقدار x مقدار باشد تا حجم قوطی حداکثر شود؟

۱- (تمرین کتاب) بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

answer

۲- (تمرین کتاب) با تشکیل جدول تغییرات تابع صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

answer

۳- (تمرین کتاب) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

answer

ب) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

answer

پ) $h(x) = \sqrt[3]{x}$

answer

۴- (تمرین کتاب) در تابع زیر ابتدا نقاط بحرانی را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

answer

۵- (تمرین کتاب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \quad ; \quad x \in [-1, 2]$$

answer

۶- (تمرین کتاب) اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

answer

۸- (تمرین کتاب) الف) می‌خواهیم کنار رودخانه، یک موه‌به به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟ ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مساله را حل کنید.

answer

۹- (تمرین کتاب) هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت ۳۲ فواید بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه ۲ و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

answer

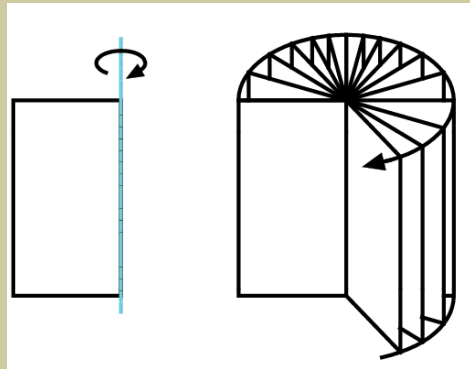


فصل ۶ :

هندسه

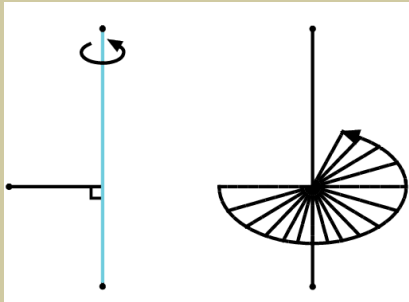
دوران حول محور

وقتی شکل‌های هندسی متفاوت، حول یک محور دوران داده شوند، جسم‌های مختلف هندسی ساخته می‌شوند.
مثال زیر را ببینید.

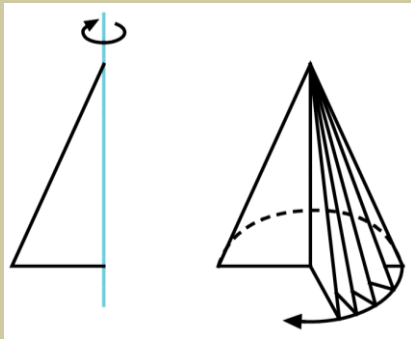


مثال (فعالیت کتاب)

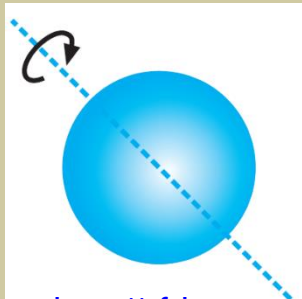
الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن،
یک استوانه است.



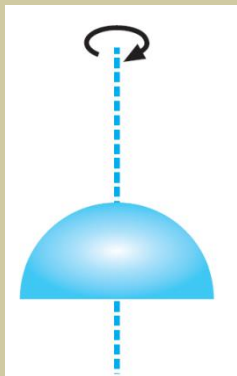
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره‌خط، حول پاره‌خط دیگری که بر آن عمود است، یک دایره است.



پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه، یک مخروط است.



ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن، یک کره است.



ث) شکل حاصل از دوران یک نیم‌دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن، یک نیم‌کره است.

برش

از دوران شکل حول یک محور، یک جسم دو بعدی یا سه بعدی تشکیل می‌شود. حالا فرض کنید می‌خواهیم اجسام سه بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن‌ها را بعد از برش تبسم کنیم. ابتدا یک تعریف!

سطح مقطع

شکلی که از بر خورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن جسم نامیده می‌شود.

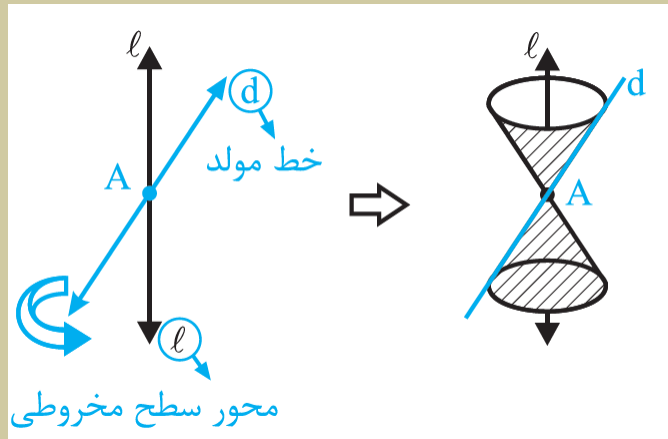
مثال: (فعالیت کتاب) سطح مقطع حاصل از برافورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟

answer

آشنایی با مقاطع مخروطی

دو خط d و l در نقطه‌ای مانند A متقاطعند. اگر d را حول A بچرخانیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی است.

(انگار دو تا نون بستی قیفی رو از نوک A بهم چسبونندیم!)



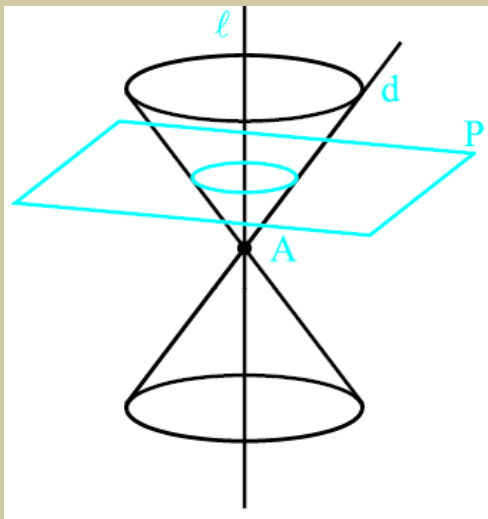
مقاطع مخروطی

وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، معمولاً سطح مقطع، یک منحنی است. از آن‌جا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، مقاطع مخروطی نامیده می‌شوند. بسته به میزان انحراف

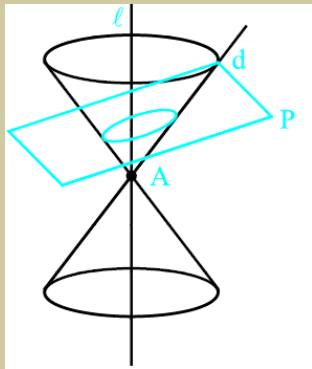
صفحه برش دهنده نسبت به محور سطح مخروطی، حالات زیر پدید می‌آید:

الف) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن

A عبور نکند، شکل حاصل یک دایره خواهد بود.

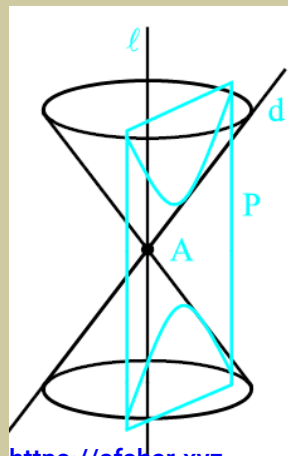


ب) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با خط مولد سطح مخروطی d موازی نشود و و از رأس نگذرد، شکل حاصل بیضی خواهد بود.



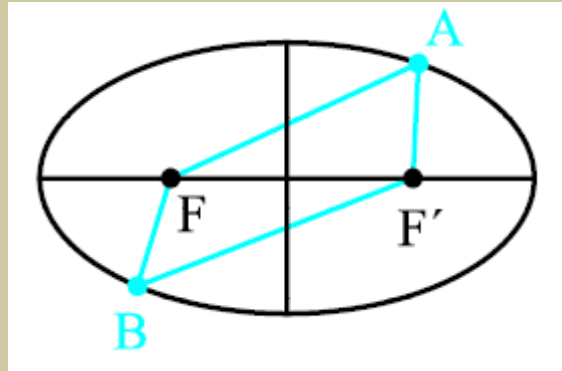
ب) اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی d موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی خواهد بود. و اگر این صفحه هم در

قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی سطح مخروطی را قطع کند و از رأس عبور نکند



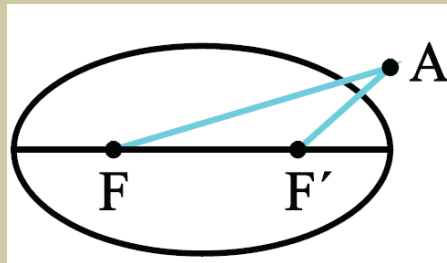
بیضی

مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت (کانون‌های بیضی) همواره برابر مقداری ثابت است.



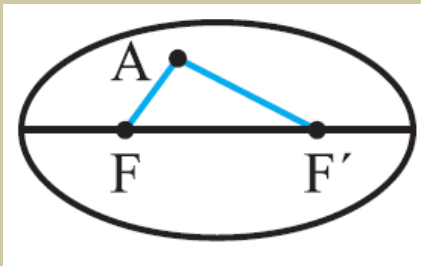
بیضی

هواستان باشد، اگر نقطه دلفواه A بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از نقاط F و F' بیشتر از



$$\Rightarrow AF + AF' > \ell \quad \Leftarrow \quad \text{شده فواصل}$$

و اگر A درون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از F و F' ،



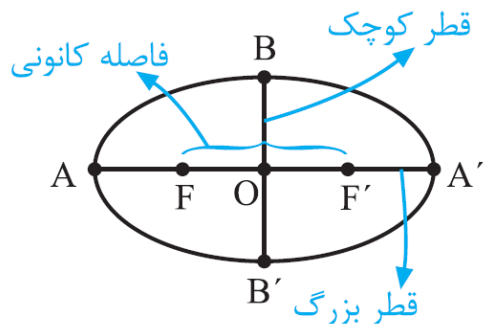
$$\Rightarrow AF + AF' < \ell$$

کمتر از ℓ فواصل شده.

نام گذاری ها در بیضی

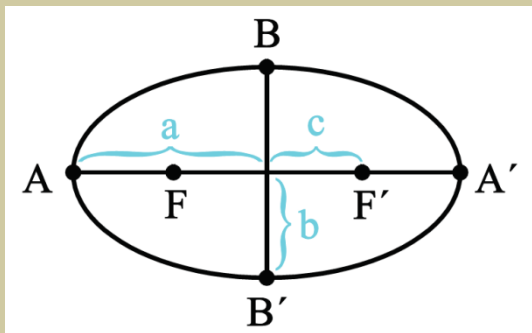
بیضی مقابل را در نظر بگیرید:

در این بیضی کانون ها را F و F' می نامیم. در هر بیضی، اندازه FF' ، فاصله کانونی بیضی نامیده می شود. نقطه میانی پاره خط FF' ، مرکز بیضی است که آن را O می نامیم. پاره خطی که از کانون های بیضی می گذرد، یعنی AA' ، قطر بزرگ یا قطر کانونی است. پاره خطی که در مرکز بیضی بر قطر بزرگ عمود است، یعنی قطر BB' ، قطر کوچک بیضی نامیده می شود. نقطه O وسط قطرهای بزرگ و کوچک بیضی هم هست.



نکته: اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن بیضی را بیضی افقی () و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی را بیضی قائم () می نامیم.

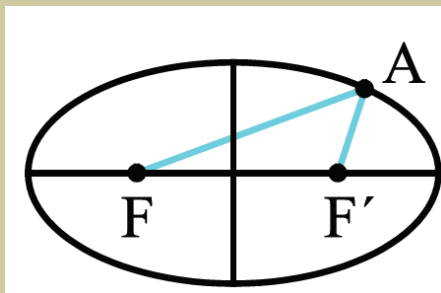
نکته: فاصله کانونی بیضی برابر $2c$ ($|FF'| = 2c$)، طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ ($|AA'| = 2a$) و طول قطر کوچک بیضی برابر $2b$ ($|BB'| = 2b$) است.



ارتباط بین a و b و c در هر بیضی داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

نکته: گفتیم در بیضی مجموع فواصل هر نقطه روی آن از دو کانون، برابر مقدار ثابتی است آن مقدار ثابت، همان طول قطر بزرگ بیضی ($2a$) می باشد.



$$\Rightarrow AF + AF' = 2a$$

مثال (کار در کلاس) در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(4,5)$ باشد،
الف) فاصله کانونی بیضی را بیابید. ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همپنین کانون‌ها.

answer

طریقه تشخیص بیضی افقی و قائم

فرض کنید مفتصات مرکز بیضی $O \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right.$ است. اگر عرض نقاط A, A', F, F' بشود β و طول نقاط B, B' بشود α ، بیضی افقی است. اما اگر طول نقاط A, A', F, F' بشود α و عرض نقاط B, B' بشود β ، بیضی قائم است.

خروج از مرکز بیضی

مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند و آن را با e نشان می‌دهند. چون در بیضی $a > c$ پس $0 < e < 1$ ، هر چه نسبت $\frac{c}{a}$ به 1 نزدیک‌تر باشد، بیضی کشیده‌تر و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی تپل‌تر و به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

دایره

مجموعه‌ای از نقاط صفحه است که از یک نقطه ثابت (همون مرکز دایره) به یک فاصله ثابت (همون شعاع دایره) می‌باشد.

معادله استاندارد دایره

معادله استاندارد یک دایره به مرکز $O|\alpha_\beta$ و شعاع r به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ است.

نکته: هواستان باشد که مجموعه جواب نامعادله $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2$

($(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 > r^2$) نقاطی از صفحه را مشخص می کنند که درون (بیرون) دایره به مرکز $O|\alpha_\beta$ و شعاع r

می باشند.

معادله گسترده دایره

اگر به کمک اتحاد اول، دستی به سر و گوش معادله استاندارد دایره بکشیم، با اندکی ساده سازی به معادله ای به فرم

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

می رسیم که به آن معادله گسترده دایره می گوییم. در این فرم، مفروضات مرکز دایره

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ و شعاع آن برابر } r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} \text{ می شود.}$$

نکته: در فرم گسترده، ضرایب x^2 و y^2 یک است. اگر مثلاً A بود، اول باید طرفین را بر A تقسیم کنید، بعد مفروضات مرکز و شعاع را بیابید! در فرم استاندارد هم ضریب پشت x و y داخل پرانتز یک بود! تو رو خدا هواستان را جمع کنید! جان من!!

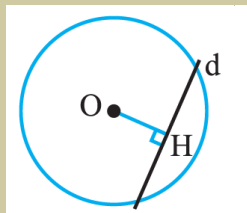
مثال (کار در کلاس با کمی شیطونی!) معادله گسترده دایره‌ای به شکل $-2x^2 - 2y^2 + 4x + 12y = 12$ است. مفتصات مرکز و شعاع آن را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

answer

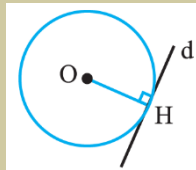
دایره $C(o,r)$ را در نظر بگیرید. فاصله خط داده شده از مرکز آن را می‌یابیم (OH) و اندازه آن را با شعاع دایره

مقایسه می‌کنیم. ۳ حالت ممکن است رخ دهد:

حالت ۱: اگر $OH < r$ ، خط d و دایره $C(o,r)$ در دو نقطه متقاطعند.

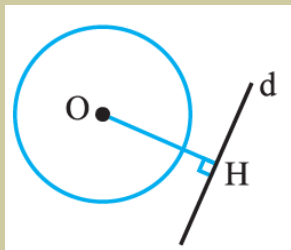


حالت ۲: اگر $OH = r$ ، خط d و دایره $C(o,r)$ بر هم مماسند.



توجه: خط مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.

حالت ۳: اگر $OH > r$ ، خط d و دایره $C(o,r)$ متقاطع نیستند.



مثال: وضعیت دایره $(2x-4)^2 + (2y+6)^2 = 16$ و خط $4x + 3y - 3 = 0$ ، نسبت به هم مشخص کنید.

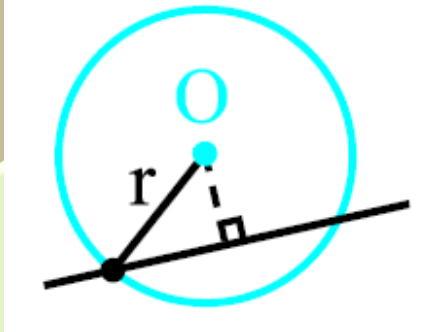
answer

مثال: (کار در کلاس) معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن نقطه $C(1, 2)$ باشد.

answer

مثال: (کار در کلاس) مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. مطابق شکل، این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$

وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.

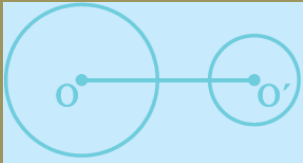
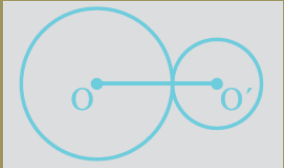


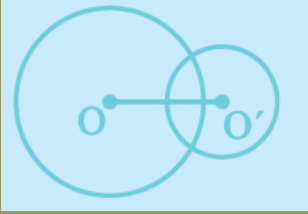
answer

اوضاع نسبی دو دایره

دو دایره $C(o, r)$ و $C'(o', r')$ را با فرض $r > r'$ در نظر بگیرید. فکری که مرکز دو دایره را به هم وصل می‌کند، خط المרכזین نامیده می‌شود که در این جا آن را با d نشان می‌دهیم. اوضاع نسبی دو دایره در جدول زیر نشان داده

شده!

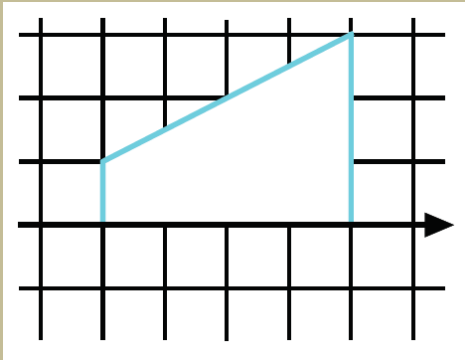
	$d > r + r'$	۱- دو دایره بیرون هم (متخارج)
	$d = r + r'$	۲- دو دایره مماس بیرون

	$r - r' < d < r + r'$	۳- دو دایره متقاطع
	$d = r - r'$	۴- دو دایره مماس درون
	$d < r - r'$	۵- دو دایره متداخل
	$d = 0$	۶- دو دایره هم مرکز

مثال: (مثال کتاب) وضعیت دو دایره $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید و سپس نمودار دو دایره را رسم کنید.

answer

۱- (تمرین کتاب) در شکل زیر می‌خواهیم دوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.
الف) حجم شکل حاصل را مناسبه کنید.

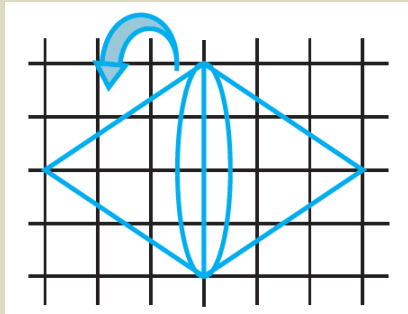


answer

ب) سطح مقطع این شکل در برافورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟

answer

۳- (تمرین کتاب) اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟



answer

۴- (تمرین کتاب) کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ است.
الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.
ب) اگر $a = 6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

answer

۵- (تمرین کتاب) خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$

، مرکز آن $(-1, -4)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶

واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را مناسبه کنید.

ب) مقصودات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

answer

۷- (تمرین کتاب) در حالت‌های زیر معادله دایره را بنویسید:
الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2, -1)$ باشد.

answer

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2, 3)$ و نقطه $(-3, -9)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

answer

پ) دایره‌ای که نقاط $(0, 3)$ و $(-4, -1)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

answer



فصل ۷ :

احتمال

یادآوری

هتما در سال‌های قبل، همکاران بزرگوار بنده، سینه احتمال را برایتان شکافته‌اند. در زیر خلاصه‌ای از مطالب سال‌های قبل احتمال آورده شده، ببینید ...

۱- پدیده تصادفی: پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲- فضای نمونه‌ای: مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای آن می‌گوییم و با S نشان می‌دهیم.

۳- پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه‌ای از S ، یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴- پیشامدها و اعمال روی آنها: فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند، داریم:

الف) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد: پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد $\Leftrightarrow p(A') = 1 - p(A)$

۵- رابطه مناسبه احتمال وقوع یک پیشامد: $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

۶- رابطه مناسبه احتمال اجتماع دو پیشامد A و B : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

۷- پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B نتوانند با هم رخ دهند، به بیان

دیگر $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت داریم:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

۸- تعمیم پیشامدهای ناسازگار: پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ را دو به دو ناسازگار می‌گوییم، هرگاه هیچ

دوتایی از آن‌ها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$$

۹- احتمال شرطی: منظور از «احتمال A به شرط B » که آن را با $p(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است به شرط آن که بدانیم B رخ داده و داریم:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}; (p(B) \neq 0)$$

۱۰- پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B از هم مستقل اند، هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری بی‌تاثیر باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B ، معادل است با این‌که:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

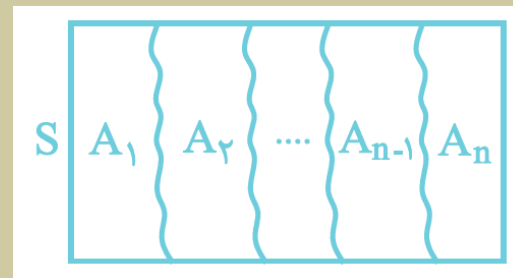
افراز

فرض کنیم $A_1, A_2, \dots, A_n$ زیرمجموعه‌هایی ناتهی از مجموعه S باشند، به گونه‌ای که اجتماع همه آن‌ها برابر S و اشتراک هر دوتای آن‌ها برابر $\emptyset$ باشد، در این صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها، یک افراز روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم:

$$۱) \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

$$۲) \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_2 \cap A_3 = \emptyset, \dots, \quad A_{n-1} \cap A_n = \emptyset \Rightarrow$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad 1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j$$



مثال (مثال کتاب) کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال (مثال کتاب) اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \{1\}$ باشند، در این صورت A و B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی هستند.

مثال (مثال کتاب) مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم، یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

قانون کلی

حال اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$p(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i)p(B|A_i)$$

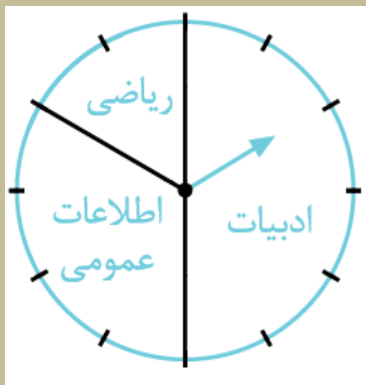
نکته: مسائل قانون احتمال کل را می توان با نمودار درختی نیز حل کرد! توضیح خواهم داد.

مثال: (مثال کتاب درسی) اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر $0/08$ و نوزاد دختر $0/03$ باشد و خانواده ای قصد بچه دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آن ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

مثال: (مثال کتاب) ۴ طرف یکسان داریم. در اولین طرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تایی آن‌ها قرمز است. در طرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در طرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تایی آن‌ها قرمزند و در طرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با پشم بسته یکی از طرف‌ها را انتخاب کرده و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره انتقابی قرمز باشد، چقدر است؟

answer

مثال: (مثال کتاب) سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سوال، یکی شامل ریاضی، یکی اطلاعات عمومی و دیگری ادبیات ارائه شده است. اگر بسته سوال‌های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد، اگر بسته سوال‌های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر اطلاعات عمومی به او بدهند، به احتمال ۱۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با پرفرماندن عقربه پرفران در شکل مقابل نوع سوال‌هایی که به او داده می‌شود مشخص شود، تعیین کنید او با چه احتمالی برنده خواهد شد؟



مثال (مثال کتاب) دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

answer

۱- (تمرین کتاب) دو جعبه داریم. درون یکی از آن‌ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آن‌ها معیوب‌اند، درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آن‌ها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

answer

۲- (تمرین کتاب) فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشد و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلاست؟

answer

۳- (تمرین کتاب) یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

answer



مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

راه‌های ارتباطی مرکز مشاوره

تلگرام



AlirezaAfsharOfficial

اینستاگرام



AlirezaAfsharOriginal

وبسایت



www.AlirezaAfshar.org

رزور مشاوره خصوصی علیرضا افشار

برای رزرو مشاوره خصوصی تک جلسه و ماهانه
به شماره ۰۹۳۵۸۹۶۰۵۰۳ در واتساپ  پیام دهید

Afshar.xyz

آدرس تمام رسانه ها :

