

# جنبه امتحان هفتی - فصل تابع

بر (دها)  $f(x)$  برز اولت

دافنه هها  $f(x)$  برز اولت

اصول انتقال

$x$  ه تغییر دونه  $\rightarrow$  افقی

عمودی  $\rightarrow$  طر تغییر دونه

راست  $f(x-a)$

بالا  $f(x)+a$

چپ  $f(x+a)$

پایین  $f(x)-a$

$f(-x)$   
قرینه نسبت به محور  $y$

$-f(x)$   
قرینه نسبت به محور  $x$

انبساط افقی  $f(\frac{x}{a})$

انبساط عمودی  $a f(x)$

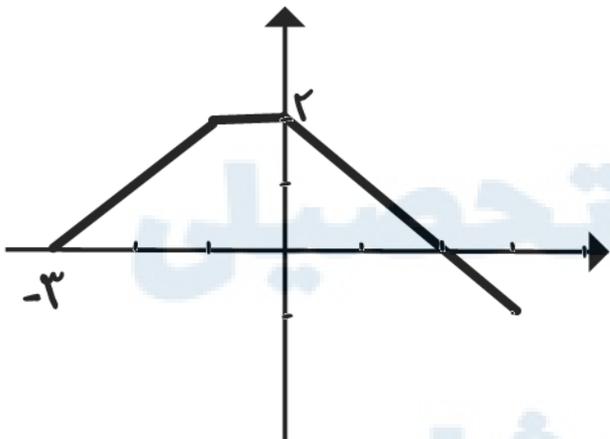
انقباض افقی  $f(ax)$

انقباض عمودی  $\frac{f(x)}{a}$

$$A f(ax+b) + B$$

(۳)   (۱)   (۴)  
ص   ب  
اولت   نین

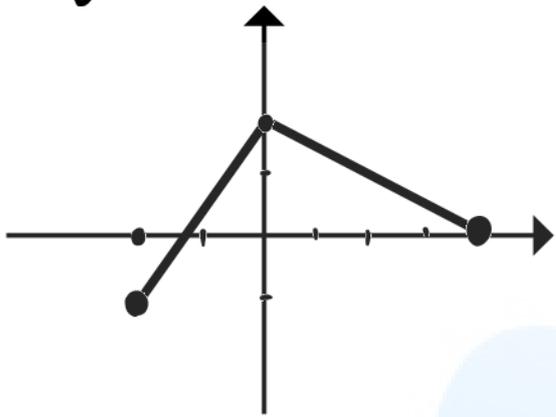
ادوات هها، کس تابع



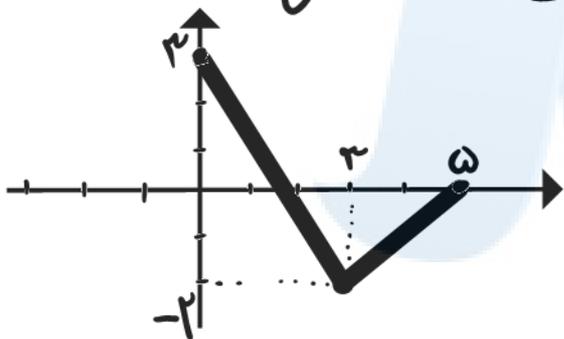
مثال ① نمودار تابع  $y = f(x)$ ، صورت زیر است. تابع  $g(x) = f(2x+1)$  را رسم کنید و دافنه در آن را تعیین کنید.

مثال ② نقطه  $A(1, -1)$  روی تابع  $y = f(x-1) - 2$  است. تبدیل یاضدی این نقطه (تابع)  $y = f(x+1) + 2$  را بنویسید.

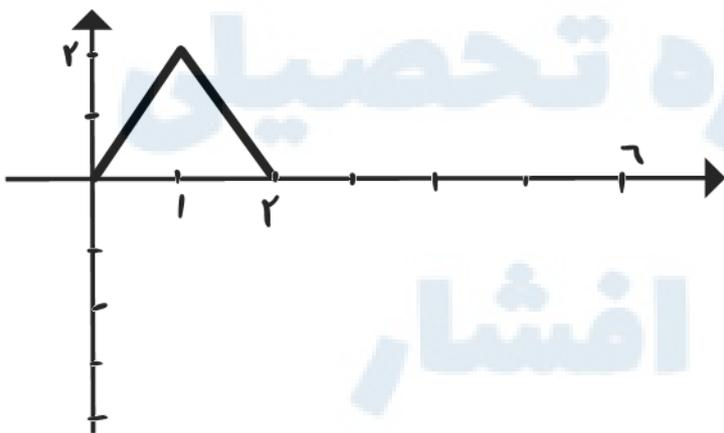
مسئله ۳) نمودار  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع  $g(x) = -f(2x)$  را رسم کنید پس دامنه و برد تابع و را تعیین کنید.



مسئله ۴) نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $g(x) = f(3-x)$  را رسم کرده و دامنه آن را تعیین کنید.



مسئله ۵) نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر است. با استفاده از آن  $y = -2f(\frac{1}{3}x)$  را رسم کنید.



مسئله ۶) اگر  $f(x) = (5x - 1)$  نمودارهای  $y = 6x - 1$  را رسم کنید.

تابع درجه ۳  
مسائل تابع زیر را رسم کنید.

$$۱) y = |x^3 - 1|$$

$$۲) y = (x+1)^3$$

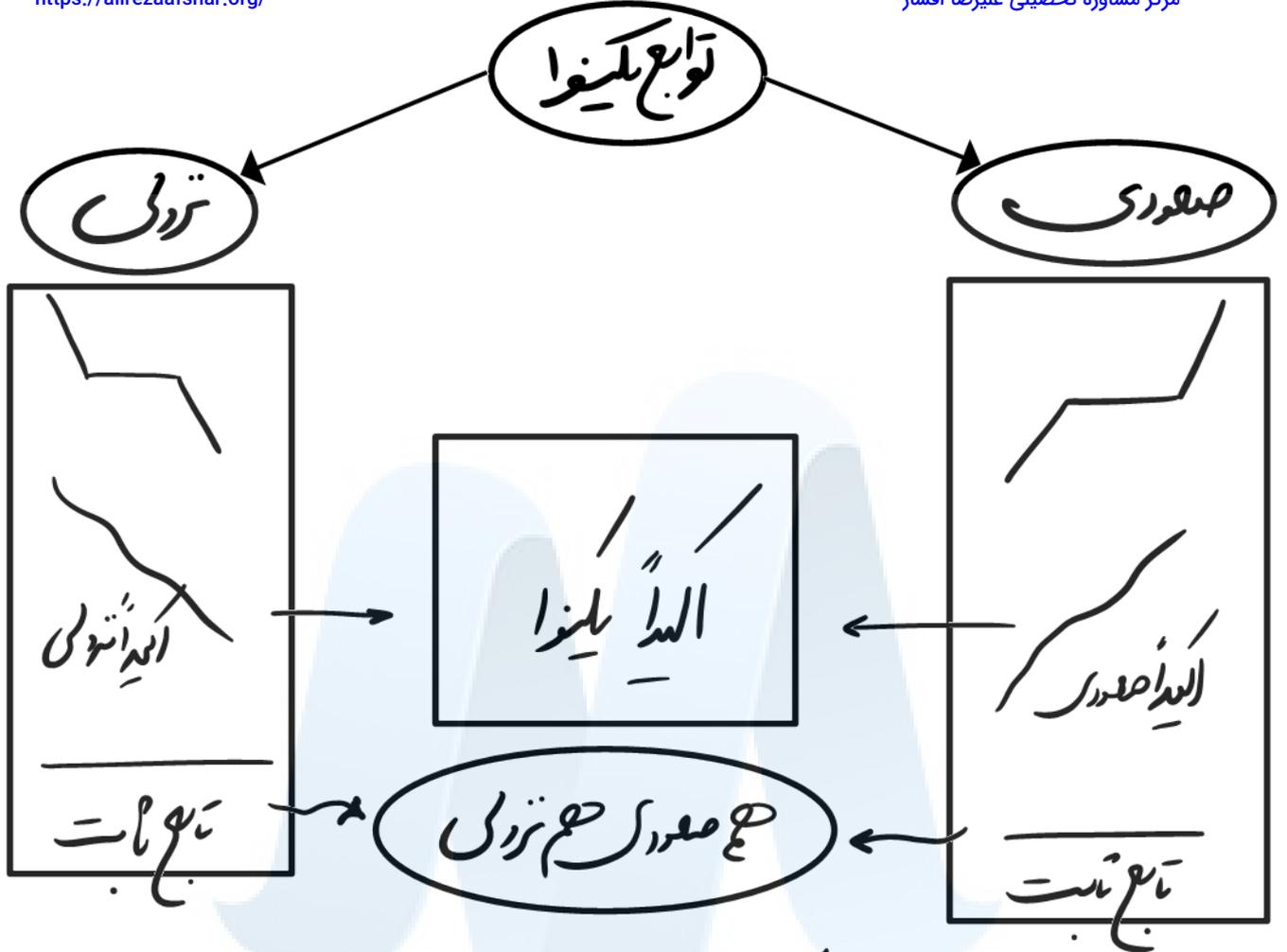
$$۳) y = (x-1)^3 + 2$$

$$۴) y = x^3 |x|$$

$$۵) y = -x^3 + 2$$

$$۶) y = -(x+2)^3 + 1$$

$$۷) y = -(x-2)^3 - 1$$



علی توابع زوج را سه گانه و شش گانه کنیم و اینها همی صدوری درجه بازه های فردی است.

الف)  $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$

ب)  $g(x) = x + |x|$

ج)  $y = 2^x - 2$

د)  $y = -\log_2 x + 2$

$$o) f(x) = \begin{cases} -2x-3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 2x-2 & x \geq 2 \end{cases}$$

مثال تابعی مثال زیرند که در بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد ولی در  $\mathbb{R}$  اکیداً  
صعودی نباشد.

مرکز مشاوره تحصیلی  
علیرضا افشار

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

\* برای همه دامنه  $f \circ g$  یا  $g \circ f$ :

① ابتدا دامنه تک تابع را پیدا می‌کنیم.

② پس دو طرف خط را به هم می‌زنیم.

③ از دو طرف خط استرک می‌گیریم.

مثال ① اگر  $f = \{(0, -1), (5, 2), (2, 5), (-2, 4)\}$  و  $g = \{(1, 2), (3, -1), (2, 0), (-1, 4), (5, -7)\}$  تابع  $g \circ f$  را بنویسید.

مرکز مشاوره تحصیلی

مثال ② اگر  $f(x) = \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = 2x^2 - 1$  فرض کنید  $g \circ f$  را بنویسید.

مثال ۳ اگر  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  و  $g(x) = \frac{2}{x}$ ، راضی و ضابطه توابع  $f \circ g$  را بدست آورید.

مثال ۴ اگر  $f(x) = \sqrt{3-2x}$  و  $g(x) = \frac{6}{3x-5}$  راضی و ضابطه  $f \circ g$  را بدست آورید.

مثال ۵ اگر  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  راضی و ضابطه  $f \circ g$  را بدست آورید.

علیرضا افشار

مثال ۶ اگر  $f(x) = 3x - 4$  و  $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ ، ضابطه  $g(x)$  را به دست آورید.

مثال ۷ هر یک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

مثال ۸ اگر  $f(x) = 2x - 5$  و  $g(x) = x^2 - 3x + 8$  معادل  $(f \circ g)(x) = 7$  را حل کنید.

مثال ۹ اگر  $f = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{7}, 0), (2, -5)\}$  و  $g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (2, 0), (-5, 2), (9, 6)\}$  باشد، تابع  $g \circ f$  را تشکیل دهید و دامنه آن بنویسید.

سؤال ۱۰) دو تابع  $f(x) = \sqrt{x-4}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$  را در نظر بگیرید. دامنه تابع  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف بدست آورید.

سؤال ۱۱) اگر  $f(x) = x^2 - 5$  و  $g(x) = \sqrt{x+6}$  باشد، دامنه تابع  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف بدست آورید.

مرکز مشاوره تحصیلی

سؤال ۱۲) اگر  $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 14$  و  $f(x) = 3x - 4$  باشد، دامنه تابع  $g(x)$  را بدست آورید.

مثال ۱۳) اگر  $f(x) = \sqrt{x-2}$  و  $g(x) = 2x-3$  در صورت  $(g \circ f)(4)$  و  $(f \circ g)(5)$  را بیابید.

مثال ۱۴) تابع  $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^2$  را در صورت ترکیب (دو تابع)  $f(x) = 2x^2 - 5x$  و  $g(x) = \dots$  را بیابید.

مرکز مشاوره تحصیلی  
علیرضا افشار

# وارون

- \* شرط وارون نندریک یک به یک بودن است.
- \* برای وارون کردن تابع صافی است جایی که  $x$  و  $y$  را با هم عوض کنیم
- \*  $D_{f^{-1}} = R_f$  و  $R_{f^{-1}} = D_f$
- \* اگر  $f$  وارون برگرداننده باشد  $(f \circ g)(x) = x$  و  $(g \circ f)(x) = x$  برقرار باشد.
- \* برای آنکه تابعی وارون نندریک باشد صافی است - (لغنه آن را طوری محدود کنیم تا تابع یک به یک شود)

مثال ① ضابطه وارون  $f(x) = \frac{-11x+3}{2}$  را بدست آورید.

مثال ② نشان دهید  $f(x) = \frac{-7}{4}x - 3$  و  $g(x) = -\frac{2x+4}{5}$  وارون برگرداننده.

## علیرضا افشار

ع/ع دانه تابع  $y = x^2 + 4x + 3$  را طوری محدود کنید که وارون نندریک باشد.

مسئله ۴) با محدود کردن دامنه تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  یک تابع یک به یک بسازید  
 آورده و دامنه و برد  $f$  و وارون آن را بنویسید.

مسئله ۵) اگر  $f(x) = \frac{1}{x} - 2$  و  $g(x) = x^3$  مقادیر زیر را بنویسید.

۱)  $(f \circ g)'(5) =$

۲)  $(g^{-1} \circ f^{-1})(5) =$

۳)  $(f^{-1} \circ f^{-1})(4) =$

مسئله ۶) نشان دهید توابع  $f(x) = 2x - 4$  و  $g(x) = \frac{x+4}{3}$  وارون یکدیگرند.

مثال ۷) وارث تابع  $y = \sqrt{x+2}$  را برت آورید.

\* با محمد در کلاس دامن تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  یک تابع بیب به دست آورید.

مثال ۸) ضابطه وارث  $f(x) = x^2 - 4x$  را برای  $x < 2$  برت آورید.

مثال ۹) اگر  $f(x) = x^3 + 2$  و  $g(x) = \sqrt{x-1}$  باشد حاصل  $(f \circ g)(x)$  کدام است؟

مرکز مشاوره تحصیلی

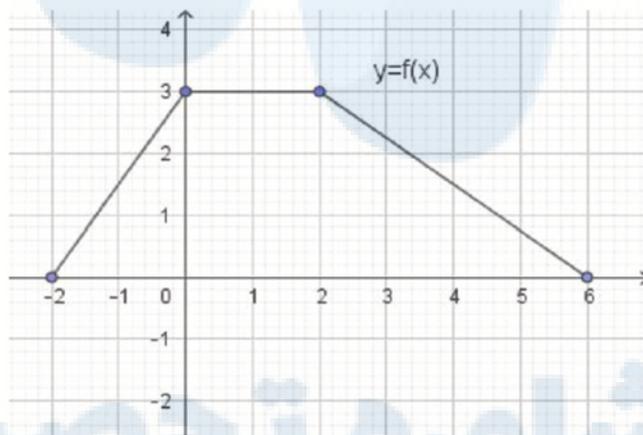
علیرضا افشار

اگر  $f(x) = \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = 2x^2 - 1$  باشد،

الف) دامنه تابع  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

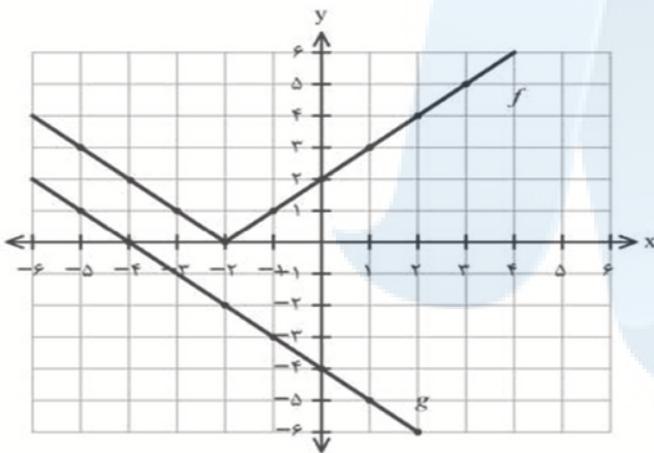
ب) ضابطه تابع  $f \circ g$  را بنویسید.

نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل زیر رسم شده است.



نمودار تابع  $y = \frac{1}{3} f(2x)$  را رسم کنید.

در بازه  $(0, 1)$ ، نمودار تابع  $y = x^3$ ، ..... نمودار تابع  $y = x^2$  قرار دارد.



با توجه به نمودارهای تابع  $f, g$  به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) مقدار  $f \circ g(-1)$  را محاسبه کنید.

ب) اگر  $g(3t - 1) = 0$  آنگاه مقدار  $t$  را به دست آورید.

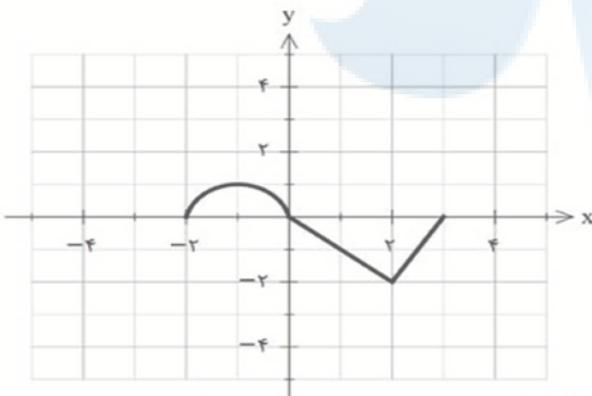
پ) با محدود کردن دامنه  $f$ ، بازه ای را مشخص کنید که تابع  $f$  یک به یک شود.

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

ضابطه وارون تابع  $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$  را به دست آورید.

نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل زیر رسم شده است.



الف) نمودار تابع  $y = 3f\left(\frac{1}{3}x\right)$  را رسم کنید.

ب) دامنه تابع  $y = 3f\left(\frac{1}{3}x\right)$  را تعیین کنید.

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

# جنبه کسائی - فصل دوم

\* همواره ی مثلثی

$$y = a \sin bx + c$$

$$y = a \cos bx + c$$

$$\text{Max} = |a| + c \quad \text{min} = -|a| + c \quad T = \frac{2\pi}{|b|}$$

میان دوره تناوب، مقدار کمترین و بیشترین از تابع زیر را بیابید

۱)  $y = 1 + 2 \sin 7x$

۲)  $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x$

۳)  $y = -\pi \sin \frac{x}{\pi} - 2$

۴)  $y = -2 \cos \frac{\pi x}{3} - 1$

میان ضابطی تابعی بداند  $T = \pi$ ,  $\text{Max} = 9$ ,  $\text{min} = 3$  باشد.

مثال ۳ ضابطی تابعی را پیدا کنید که  $I = 3$ ،  $\max = -1$  و  $\min = -7$  باشد.

مثال ۴ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟  
(۱) تابع تنازلی در دامنه اش صعودی است.

(۲) می توان بازه ای یافت که تابع تنازلی در آن نزولی باشد.

(۳) می توان بازه ای یافت که تابع تنازلی در آن غیر صعودی باشد.

(۴) تابع تنازلی در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

مثال ۵ دامنه تابع  $y = \tan 4x$  را بیابید.

مثال ۶ دوره تناوب تابع  $y = \tan x$  را بیابید. همچنین برد این تابع را بیابید.

مثال ۵) با توجه به محورهای سینوس و کسینوس و تناوب و مقادیر  $\sin \alpha$  و  $\tan \alpha$  در صورت زیر پاسخ دهید.

الف)  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

ب)  $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$

مثال ۶) در هر مورد، مقادیر  $\min$  و  $\max$  تابع زیر را بیابید.

۱)  $y = 2 - 3 \sin 4x$

۲)  $y = \sqrt{5} - \cos(\sqrt{2}x)$

۳)  $y = -2(\cos 2\pi x + 1)$

۴)  $y = 1 - 2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right)$

مثال ۹) اگر در یک تابع مثلثاتی دوره تناوب  $2\pi$  و مقدار ماکزیمم ۱- و مقدار مینیمم ۷- باشد تابع سینوسی آن را بنویسید.

روابط مثلثاتی مهم

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} 22,5^\circ \\ 75^\circ \\ 15^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

مثال ۱) مقدار  $\sin 22,5^\circ$  را بدست آورید.

مثال ۲) مقدار  $\cos 75^\circ$  را بدست آورید.

مثال ۳ اگر  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$  و  $\alpha$  زاویه حاد باشد،  $\cos \alpha$  را بیابید.

مثال ۴ اگر  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  و  $\alpha$  زاویه ای در نیمه اول باشد  $\sin 2\alpha$  را بیابید.

مرکز مشاوره تحصیلی  
علیرضا افشار

# معادلاتی

$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

مثال معادله‌های مشابهی زیر را حل کنید.

۱)  $\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1$

۲)  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۳)  $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

۴)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۵)  $2 \sin^2 x - \sqrt{2} = 0$

$$4) \sin x - \cos 2x = 0$$

$$5) \sin x + \cos 2x = 1$$

$$6) \cos 2x + 2\cos x = -1$$

$$7) \sin^2 x - 2\cos x = -2$$

$$8) \cos x (2(\cos x - 2)) = 5$$

$$11) \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$$

$$12) 2 \sin x - \cos 2x = -1$$

$$13) \sin^2 x = \sin 2x$$

$$14) 2 \sin^2 x - \sqrt{2} = 0$$

$$15) 2 \sin^2 x + 9 \cos x + 3 = 0$$

$$۱۶) \cos 2x - \cos x = 0$$

$$۱۷) \cos 2x + \cos x + 1 = 0$$

$$۱۸) \cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



# مرکز مشاوره تحصیلی علیرضا افشار



# مرکز مشاوره تحصیلی علیرضا افشار

## جنبه‌های - فصل حد

کلمه حد توابع کسری: ابتداء عدد را در مخرج تابع جایگزین می‌کنیم. (در صورتی که صریح  
 0/0 شود، صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم) (در صورت نیز تقسیم می‌کنیم) و عامل  
 صفرشونده را ساده می‌کنیم.

۱)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

۲)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^2 + 8}$

۳)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$

۴)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$

۵)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2}$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x - 9} - 2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{3x} - 2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x^3 - 12x^2 + 14x - 9}$$

مرکز مشاوره تحصیلی  
علیرضا افشار

# حدهای نامتناهی

$$\frac{x > 0}{0^+} = +\infty \quad \frac{x > 0}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{x < 0}{0^-} = +\infty \quad \frac{x < 0}{0^+} = -\infty$$

برای تشخیص عدم قطعیت صفر بر صفر یا بی‌نهایت بر بی‌نهایت  
 لیمیت عدم قطعیت کنید.

در صورتی که فرج قدر مطلق، توانهای زوج، رادیکال،  $\pm \sin x$ ،  $\pm \cos x$  یا بهر چه قدرتی است.  
 مثال - صدهای زیر را می‌توانید بکنید.

۱)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x]-2}{3-x} =$

۲)  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{[x] + \frac{1}{2}}{|2x+1|} =$

۳)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+1}}{4-x^2} =$

۴)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} =$

۵)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-2+[x]}{|2x-1|} =$

۶)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x =$

۱۱)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-2}{x-3} =$

۷)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} =$

۱۲)  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \cot x =$

۸)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} =$

۱۳)  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-2x}{x^2-4} =$

۹)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\cos x} =$

۱۴)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{x^2} =$

۱۰)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{|x-2|} =$

صدهای بی‌نهایت زمانی که  $x \rightarrow \pm\infty$  میل می‌کند از قانون پرتلاخ استفاده می‌کنیم.

مثال - صدهای زیر را جواب بده.

۱)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^5 + |x+2|} - x}{2x-1} =$

۲)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 + 3x^5 + 1}{-2x^6 + 3x^5 + 2} =$

۳)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-5} - \frac{2}{x} =$

۴)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + x - 1) =$

۵)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 - 2x} =$

۶)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^5 - 2x} + 1}{x^5 + 5x - 2} =$

۷)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{9x^5 + 5x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x} + 2} =$

۸)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - 9t^5}{t^5 + 2t} =$

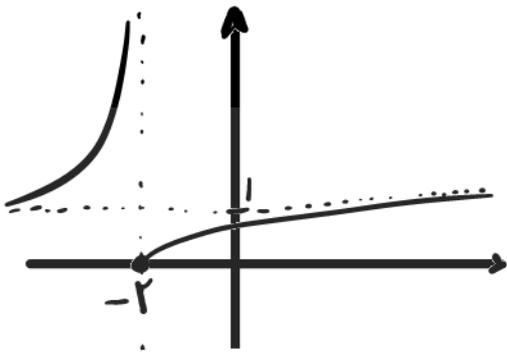
۹)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x-2} =$

۱۰)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[5]{x-1}} =$

۱۱)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 9 + \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) =$

۱۲)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5 + 5x^2}{\sqrt[3]{x^3} + 9} =$

مثالی بنویسید، نمودار زیر هر حال خود را رسم کرده و آن را رسم کنید.

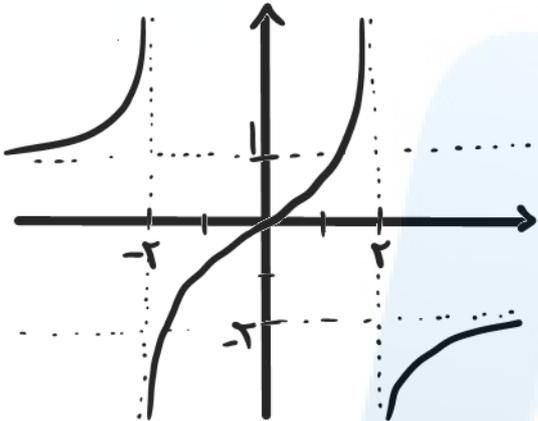


$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

مثال تابعی رسم کنید،  $f(0) = 2$ ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  برقرار باشد.

مثالی بنویسید، نموداری رسم کنید که شرایط زیر را دارا باشد:

الف)  $f(1) = f(-2) = 0$     ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$     ج)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$     د)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

# تقسیم درجتهای ندری

برای عدد (درجتهای) باقیمانده تقسیم  $P(x)$  بر  $ax+b$  ابتدا  $ax+b$  را با ضریب قدری در  $ax+b$  ضرب می‌کنیم تا ضریب  $x$  در  $P(x)$  و  $ax+b$  برابر شود.

توجه -  $P(x)$  بر  $ax+b$  بخش ندری است در صورتی که باقیمانده تقسیم برابر صفر شود.  
 مثال آیه ضمیمه‌های  $x^2-5x-2$  بر  $x-2$  بخش ندری است؟

مثال مقادیر  $a, b$  را طوری تعیین کنید که ضمیمه‌های  $x^3+ax^2+bx+1$  بر  $x-2$  و  $x+1$  بخش ندری باشد.

## مرکز مشاوره تحصیلی

مثال اگر باقی مانده  $x^3+kx^2+2$  بر  $x-2$  برابر 6 باشد،  $k$  را تعیین کنید.

## علیرضا افشار

## جزوه امتحان نهائی - فصل مشتق

---

تعریف مشتق:  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

مسئله ۱) اگر  $f(x) = -x^2 + 10x$  باشد،  $f'(2)$  را بیابید و تعریف مشتق را به کار ببرید.

---

مسئله ۲) مشتق تابع  $f(x) = x^3 - 2$  را با استفاده از تعریف (نقطه‌ای به طول  $-1$  در  $x$  بیابید).

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



سؤال ۴) مشتق پذیری تابع  $f(x) = |x^2 - 4|$  را در  $x=2$  بررسی کنید.

سؤال ۵) نشان دهید نقطه‌ای با طول  $x = -1$ ، نقطه‌ای گوشه‌ای برای تابع  $f(x) = |x^2 + x|$  می‌باشد.

تابع  $y = \sqrt{x}$  در  $x=0$ ،  
ناپذیر است پس  
مشتق ناپذیر است.

توجه: در نقطه گوشه‌ای مشتق وجود دارد:  
حالت ۱) مماسی نامرکز هستند  
حالت ۲) مماسی مماسی نامرکز است.

سؤال ۶) ثابت کنید اگر تابع  $f$  در  $x=a$  مشتق پذیر باشد آن گاه  $f$  در  $x=a$  پیوسته است.

پاسخ: کافی است نشان دهیم  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$$= 0 \times f'(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

مثال ۷) اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$  نشان دهید  $f'_+(0)$  و  $f'_-(0)$  موجودند ولی  $f'(0)$  موجود نیست.

مثال ۸) مشتق ندری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$  در  $x=2$  بررسی کنید.

مثال ۹) مشتق ندری تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را در  $x=0$  بررسی کنید.

		حسابه مشتق					
تابع	عبارت	$Ax+B$	$x^n$	$u^n$	$\sqrt{u}$	$\sqrt[m]{u}$	$\sqrt[m]{u^n}$
مشتق	0	A	$nx^{n-1}$	$nu'u^{n-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$
تابع	$f \cdot g$	$f/g$	$f \circ g(x)$	$g \circ f(x)$			
مشتق	$f'g + g'f$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$	$g'(x) f'(g(x))$	$f'(x) \cdot g'(f(x))$			

# مسئله ۱۵) مشتق توابع زیر را می‌گیرید.

$$۱) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x - 5} \rightarrow$$

$$۲) y = \frac{\sqrt{x} + 3}{x^2 - 2x^2} \rightarrow$$

$$۳) y = (2x^2 + \sqrt{x} - 1)^4 \rightarrow$$

$$۴) y = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} \rightarrow$$

$$۵) y = \frac{9x-2}{\sqrt{x}} \rightarrow$$

$$۶) y = (2x^2 + 1)(-x^2 + \sqrt{x} - 2)^2 \rightarrow$$

$$۷) y = \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x^2 + 1} \rightarrow$$

$$۸) y = \left( \frac{-2x-1}{x^2 + 5x} \right)^4 \rightarrow$$

$$۹) y = \frac{3x^2 + 4\sqrt{x}}{x-2} \rightarrow$$

$$۱۰) y = \sqrt{x} \cdot (x-1)^2 \rightarrow$$

$$۱۱) y = (x^2 - 2x)^6 \rightarrow$$

$$۱۲) y = \frac{\sqrt{x}}{1-x} \rightarrow$$

$$۱۳) y = \frac{1}{x} (\sqrt{x}-1)^2$$

$$۱۴) y = \frac{9x-2}{\sqrt{x}} \rightarrow$$

$$۱۵) y = (x^2+1)^2 (2x-1) \rightarrow$$

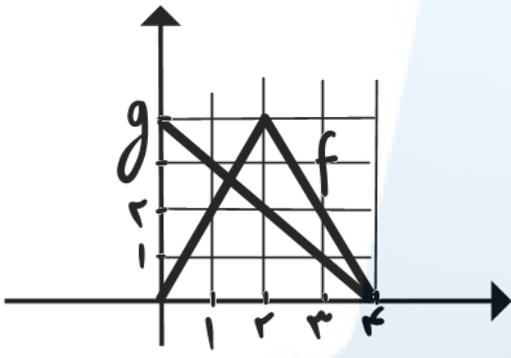
$$۱۶) y = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^5 \rightarrow$$

$$۱۷) y = x^2 (\sqrt{x+1}) \rightarrow$$

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

سوال ۱۱) اگر  $f$  و  $g$  تابع مشتق پذیر باشند و  $f(2) = 3$  و  $f'(2) = 1$  و  $g(2) = -3$  و  $g'(2) = 2$  مقادیر  $(fg)'(2)$  و  $(f+g)'(2)$  را بیابید.



سوال ۱۲) نمودار تابع  $f$  و  $g$  را در شکل مقابل (تقریباً) در نظر بگیرید. اگر  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  باشد،  $h'(1)$  را بیابید.

سوال ۱۳) اگر  $f(2) = 3$  و  $f'(2) = 5$  و  $g(2) = 5$  باشند آنگاه حاصل عبارت  $(2g - f)'(2)$  کدام است؟

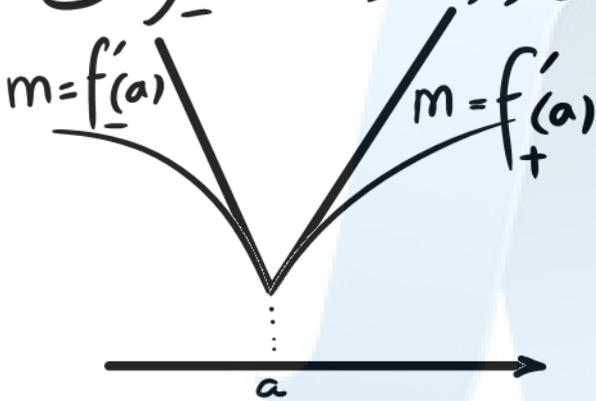
سوال ۱۴) مشتق تابع  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  در نقطه  $x = 1$  برابر ۳ است. اگر  $f(1) = 0$  و  $f'(1) = -4$  مقدار  $g(1)$  کدام است؟

\* **تیب خط هم** (رنگ)  $x=a$  = مستقیم در  $x=a$

\* برای پیدا کردن مدار خط هم ابتدا نقطه را پیدا می کنیم پس با جاگذاری در مستقیم تیب خط هم را پیدا می کنیم.

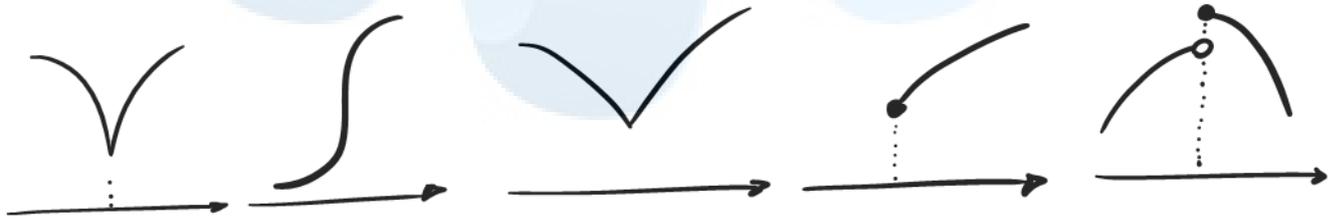
\* **تیب نیم هم راست** برابر مستقیم راست یعنی  $f'_+(a)$  است.

\* **تیب نیم هم چپ** برابر مستقیم چپ یعنی  $f'_-(a)$  است.

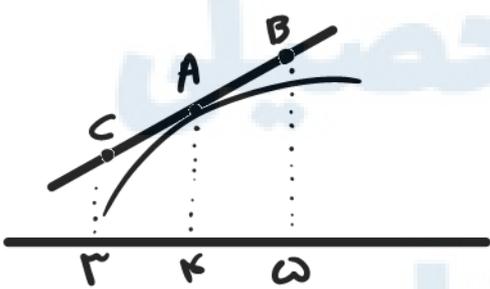


\* **نقاط مستقیم ناپدید**

- (۱) ناپدید است
- (۲) گوشه ای
- (۳)  $\infty$  مستقیم

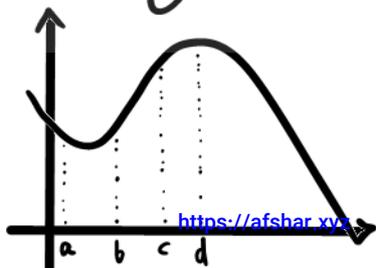


مثال (۱۵) برای  $f$  در شکل بود داریم  $f'(4)=1$  و  $f(4)=24$  با توجه به شکل، قسمت نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  را بنویسید.



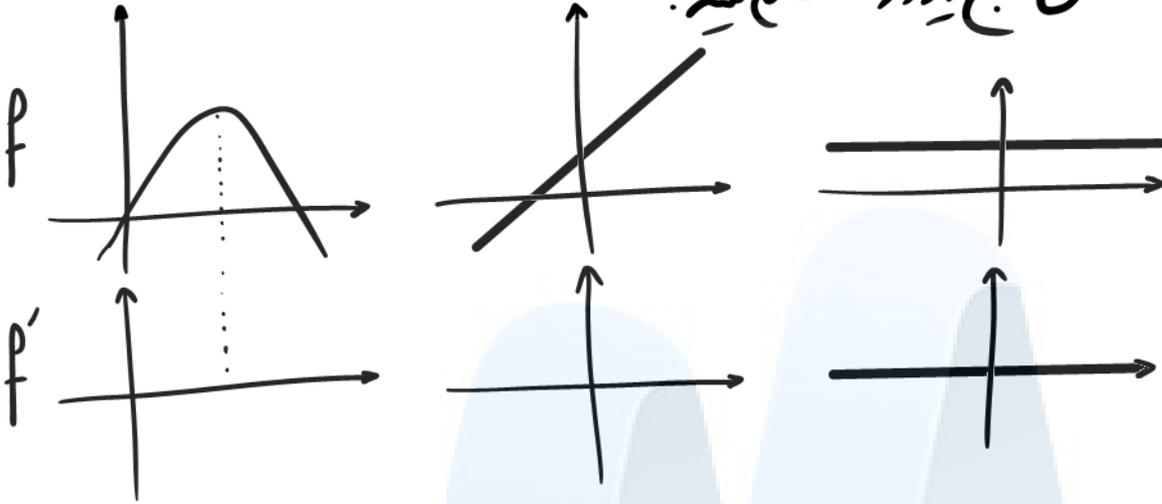
علیرضا افشار

مثال (۱۶) با در نظر گرفتن نمودار  $f$  در شکل، نقاط  $a$ ،  $b$ ،  $c$ ،  $d$  را با مستقیم صاف (از) در جدول نظیر کنید.



$x$	
$f'(x)$	0 $\infty$ ۲ $-\infty$

مثال ۱۷) معدار مشتق تابع زیر را رسم کنید.



مثال ۱۸) تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$  را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید  $f'(0)$  وجود ندارد. ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید و آن را رسم کنید.

مثال ۱۹) معادله خط مماس بر منحنی  $y = x^2 - 3x$  را در نقطه ای، طول آن ۲- باشد.

علیرضا افشار

مثال ۲۰) اگر  $f(x) = \begin{cases} \omega x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ ، راضی  $f$  و ضابطه  $f'$  را رسم کنید.

\* آهنگ کظای در  $x=a$  یعنی مشتق تابع  $f$  در  $x=a$  پس برابر  $f'(a)$

\* آهنگ متوسط در بازه  $[a, b]$  تابع  $f$  برابر است با  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

سوال (۲۱) گنجینه ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در کظ  $t=0$  سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از  $t$  ثانیه از رابطه  $V(t) = 40(1 - \frac{t}{100})^2$  بدست آید. در چه زمانی آهنگ تغییر کظای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه  $[0, 100]$  می شود.

سوال (۲۲) معادله حرکت شگونی به صورت  $f(t) = t^2 - t + 10$  (بازه زمانی  $[0, 5]$  داده شده است. در کدام کظ سرعت کظای با سرعت متوسط در بازه  $[0, 5]$  با هم برابرند.

سوال (۲۳) آهنگ تغییر کظای تابع  $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$  (رابطه  $x=2$  ضد برابر آهنگ تغییر کظای آن در  $x=-1$  است؟

علیرضا افشار

سوال (۲۴) آهنگ تغییر متوسط تابع  $f(x) = x^3 - 2x$  را در بازه  $[0, 2]$  و آهنگ تغییر کظای تابع  $f$  را در  $x=1$  بیابید.

مسئله (۱۵) تابع  $f(x) = \sqrt{x+50}$  که متوسطه کورداخ را بر حسب سانی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد، که در آن مدت زمان پس از تولد است. آهنگ متوسطه را چه در بازه زمانی  $[0, ۲۵]$  چقدر است؟

مسئله (۱۶) کدام عبارت درست و کدام یک غلط است؟

(۱) آهنگ تغییر متوسطه همیشه کمتر از شیب مماس است.

(۲) تابعی وجود ندارد که هم  $f(a) = 0$  و  $f'(a) = 0$ .

(۳) تابع  $y = \sqrt{x}$  در  $x=0$  ضامن قائم دارد.

(۴) اگر  $f$  پیوسته باشد لزوماً مشتق پذیر است.

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

یک توده باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$  گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی  $1 \leq t \leq 4$  چند گرم افزایش می یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه  $t = 4$  چقدر است؟

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

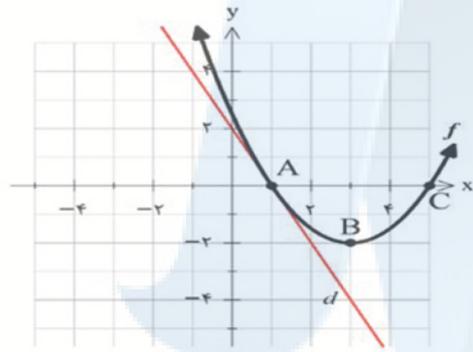
الف)  $f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8$

ب)  $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(\sqrt{3x+2})$

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع  $f(x) = |x^2 - 4|$  را در نقطه  $x = -2$  بررسی کنید.

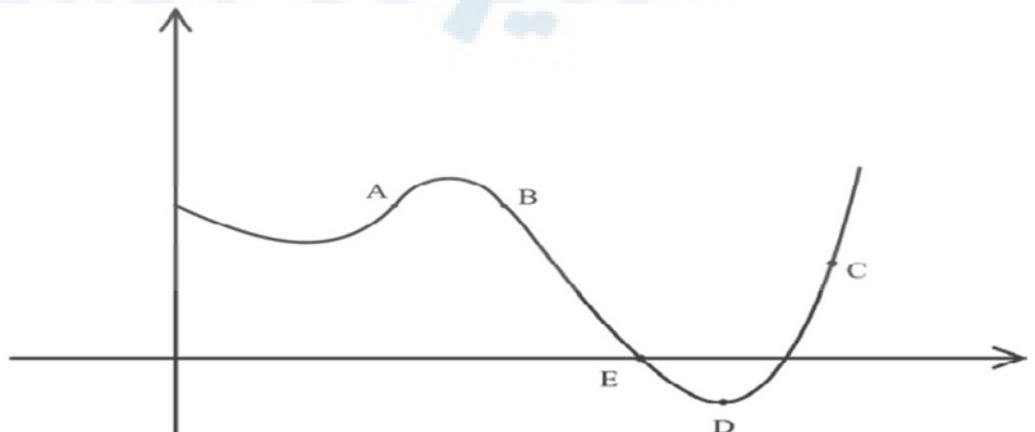


در نمودار مقابل خط  $d$  در نقطه  $x = 1$  بر نمودار  $f$  مماس شده است:  
الف) مشتق تابع  $f$  را در نقطه  $x = 1$  محاسبه کنید.  
ب) شیب نمودار را در نقاط  $C, B$  مقایسه کنید.

# مرکز مشاوره تحصیلی

نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یک نقطه اضافی است).

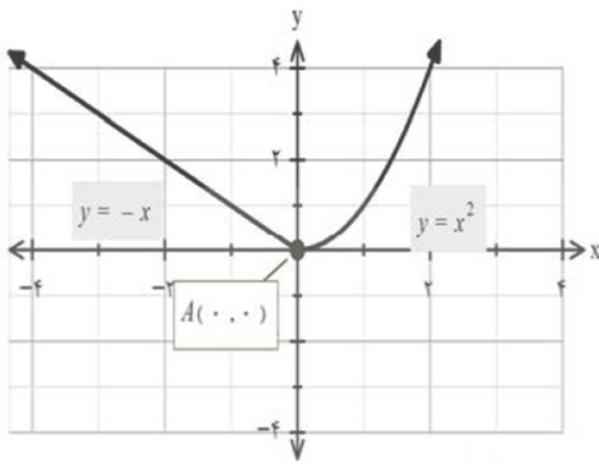
شیب	نقطه
-3	
-1	
0	
1	



با محاسبه مشتق چپ و راست تابع داده شده

در نقطه  $A$ ، نشان دهید این تابع در نقطه  $A$

مشتق پذیر نیست.



یا توجه به نمودار  $y = f(x)$ ،

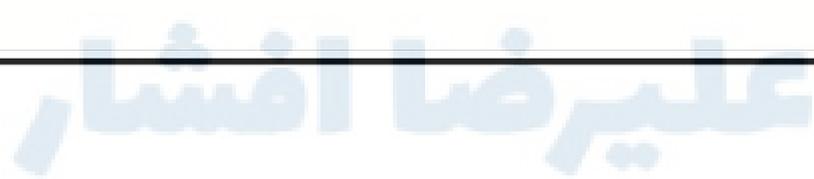
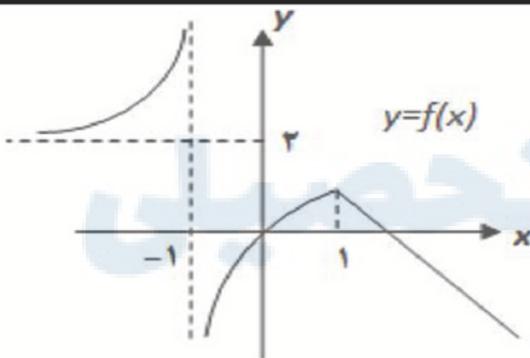
الف) حدود خواسته شده را بنویسید

۱)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

۲)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ب) تابع  $y = f(x)$  در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده،

مشتق پذیر نیست؟



# حسره گهانی - کاربرد مشتق

یگرانی

\* اگر تابع صعودی باشد  $f' > 0$  است و اگر تابع نزولی باشد  $f' < 0$  است.

\* برای تشخیص صعودی و نزولی کافی است مشتق بگیریم و تعیین علامت کنیم.

\* تعریف ماکزیمم نسبی: گوئیم تابع  $f$  در نقطه  $c$  در نقطه  $c$  ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از  $c$  مانند  $I \subseteq D_f$  باشد که برای هر  $x \in I$  داشته باشیم  $f(x) \leq f(c)$ .

\* برای تشخیص استدم‌های نسبی کافی است مشتق بگیریم و تعیین علامت کنیم.

\* اگر نقطه  $(a, b)$  استدم‌های نسبی تابع  $y = f(x)$  باشد:  $f'(a) = 0$  و  $f(a) = b$ .

\* ابتدا انتخابی نمودار استدم‌های نسبی نیست.

مثال ① تابع  $y = x^3 - 3x^2$  در چه بازه‌هایی استدم‌های نسبی صعودی و در کدام بازه‌ها استدم‌های نسبی نزولی است؟

مرکز مشاوره تحصیلی

مثال ② استدم‌های نسبی تابع  $|x-2| = |x-2|$  را در بازه  $[-5, 3]$  با رسم شکل بیابید.

علیرضا افشار

مثال ③ صعودی و نزولی بودن  $(x+1)^3 = y$  را بررسی کنید.

# مثال ۳) استریم‌های بی‌بعضی زیر را بنویسید.

$$۱) y = -x^2 + 3x$$

$$۲) y = -x^2 + 2x + 3$$

$$۳) y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$۴) y = -2x^2 + 3x^2 + 12x - 9$$

---

مثال ۴) اگر نقطه  $(a, 1)$  نقطه استریم‌بندی بی‌بعضی  $f(x) = x^2 + bx + d$  باشد، مقادیر  $b, d$  را بنویسید.

علیرضا افشار

---

مثال ۵) اگر تابع  $f(x) = ax^2 + bx$  در  $x = 1$  دارای ماکزیمم‌بندی بی‌بعضی باشد، مقادیر  $a, b$  را بدست آورید.

مثال ۶) جدول تغییرات تابع  $f(x) = x^3 - 12x + 4$  را رسم کنید و نقاط ماکزیمم و مینیمم آن را در صورت وجود مشخص کنید.

مثال ۷) جدول تغییرات تابع  $f(x) = 2x^3 + 12x^2 - 12x$  را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم آن را مشخص کنید.

مثال ۸) تابع  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$  درجه بازهای صعودی و درجه بازهای نزولی است.

مثال ۹) اگر مقدار ماکزیمم بنی تابع با ضرایب  $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + m$  برابر ۸ باشد، مقدار  $m$  را بیابید.

علیرضا افشار

# نقطه‌های

\* نقطه‌های طول  $c$  از دنباله تابع  $f$  را به نقطه‌های برای این تابع می‌نامیم هرگاه  $f(c)$  برابر صفر باشد یا  $f'(c)$  موجود نباشد.

\* برای پیدا کردن نقاط بحرانی ریشه‌های داخل قدر مطلق و در افعال را پیدا می‌کنیم پس مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم.

مثال (۱) نقاط بحرانی تابع زیر را بیابید.

$$۱) y = |x-2|$$

$$۲) y = -x^2 - 1$$

$$۳) y = -x^3 + 2x$$

$$۴) y = (x-1)^3$$



مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

اکتدم‌های مطلق

برای پیدا کردن اکتدم‌های مطلق تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$  ابتدا و انتها بازه را در تابع قرار می‌دهیم پس نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم و در تابع جایگذاری می‌کنیم، هر کدام عرض بیشتری داشته باشد ماکسیمم مطلق و هر کدام عرض کمتری داشته باشد مینیمم مطلق است.

مسئله ۱۱) نقاط استه‌م مطلق تابع  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$  را در بازه  $[-1, 3]$  تعیین کنید.

مسئله ۱۲) نقاط بحرانی تابع زیر را تعیین کنید.

۱)  $y = \sqrt{4-x^2}$

۲)  $y = x^3 + 3x^2 - 4$

۳)  $y = \sqrt{x}$

مسئله ۱۳) تابعی که هم‌اکنون در تصویر نقطه بحرانی تابع  $y = f(x)$  باشد.

مسئله ۱۴) استه‌م‌ها را مطلق تابع  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$  را در بازه  $[-1, 3]$  بدست آورید.

مسئله ۱۵) مقادیر ماکزیمم و منیمم مطلق تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$  را در بازه  $[0, 2]$  تعیین کنید.

مسئله ۱۶) تابع باضابطه  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$  را در بازه  $[-2, 2]$  (در نظر بگیرید و استریم‌های مطلق آن را در این بازه بیابید.)

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

سؤال ۱) بهترین سمت از بین مستطیل‌های که محیط آن ۴ باشد را بیابید.

سؤال ۲) ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر، در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع  $x$  برش بزنیم و آن‌ها کنار یکدیگریم. پس لبه‌ی جدید را به اندازه  $x$  برمی‌گردانیم تا یک جدید در باز ساخته شود. مقدار  $x$  چه قدر باشد تا حجم جدید حداکثر مقدار ممکن گردد.

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

مثال ۳) دو عدد  $a, b$  را طوری بیابید که داشته باشیم  $2a + b = 90$  و حاصل ضرب آنها بیشترین مقدار ممکن گردد.

مثال ۴) دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها اِیابتر و حاصل ضرب آن کمترین مقدار ممکن گردد.

مثال ۵) دو عدد پیدا کنید که مجموع آن ها ۴۰ و مجموع مربعات آنها کمترین مقدار ممکن باشد.

## مرکز مشاوره تحصیلی

مثال ۶) غلظت یک داروی شیمیایی در خون  $t$  ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه  $C(t) = \frac{14t}{t^2 + 27}$  بدست می آید، چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

مثال ۱۵ می خواهم عمری به شکل ملک مستطیل در باز سازیم که حجم آن ۱۰ و طول کف عمزن  
در برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این عمزن برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار  
تومان و این قیمت برای دیواره ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است. عرض کف عمزن چهار  
باشد تا هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود.



مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

مثال ۵) آرتان نقطه قایم در نقطه  $P$  قرار دارد که فاصله آن از نزدیکترین نقطه ساحل یعنی نقطه  $A$ ، معادل  $۳$  کیلومتر است. او می خواهد به نقطه  $B$  در ساحل برسد که در  $۸$  کیلومتری  $A$  قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق  $\frac{1}{2} \text{ km/h}$  و سرعت پیاده روی آرتان در ساحل  $\frac{1}{4} \text{ km/h}$  باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به  $B$  برسد در چه نقطه ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی  $B$  پیاده روی کند؟



مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

نعل ۹) فرخا هم یک قوطی نازی استوانه ای شکل و در با زب زلم که کنی پس ان (مقاید  
لیته مابته. ابعاد قوطی حقدرباسته تا مقدار فلتر به کار رفته در تولید آن منیم لگور.



مرکز مشاوره تحصیلی  
علیرضا افشار

سوال ۱۵) هزینه رفت یک قطار در هوسامت برای حرکت با سرعت ۷ کیلومتر بر ساعت، برای  $۳۲۰۷^۲$  تومان است. همچنین سایر هزینه‌های برای هوسامت، صرف نظر از سرعت قطار، برای ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر کمترین مقدار ممکن باشد.



مرکز مشاوره تحصیلی

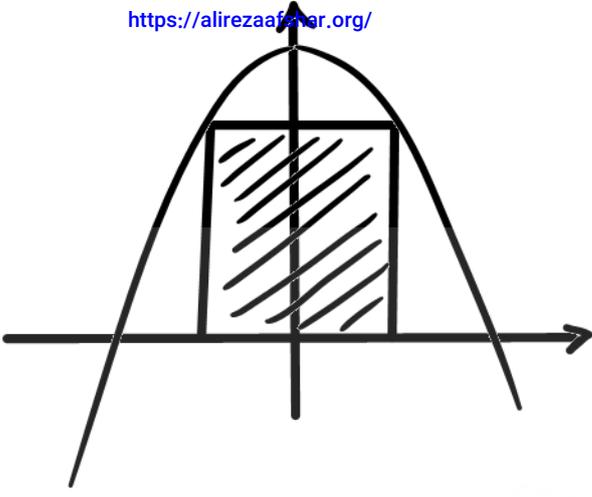
علیرضا افشار

مسئله ۱۱) پنجویں به شکل یک مستطیل و نیم دایره ای بر روی آن می باشد، طوری که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجویں ۵۴ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.



مسئله ۱۳) یک کشاورزی می خواهد دو یک فرعی مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دایره کشی کند. هزینه هر متر دایره های شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دایره های شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است. ابعاد فرعی را تعیین کنید تا هزینه دایره کشی به حداقل مقدار ممکن برسد.

علیرضا افشار



مثال ۱۳) ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را  
تعیین کنید که در آن مساحت آن روی محور  $y$  برابر دو باشد  
رگرسیس با پای محور  $x$  ها و روی  $y$   $y = 12 - x^2$  باشد.



مثال ۱۴) می خواهیم کنار رودخانه ای یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را از زمین بکشیم  
به طوری که قاعده مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر زمین ۵۰ متر مربع را در اختیار داشته  
باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

علیرضا افشار

مثال (۱۵) هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب چسبی، شامل یک متن با مساحت ثابت ۴۲ تراصد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است در هر صفحه با دو دین هر صفحه ۲cm و در هر صفحه کندی هر کلام یک سنتی متر در نظر گرفته شود. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.



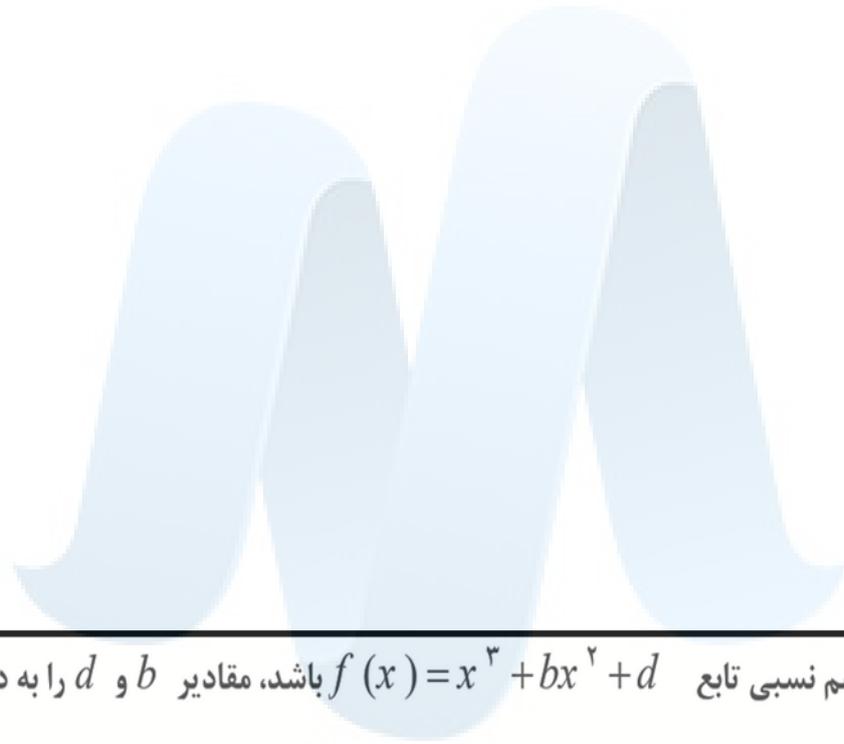
مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

تابع  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$  در نظر بگیرید:

الف) با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

ب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع  $f$  در بازه  $[0, 3]$  در صورت وجود به دست آورید.



اگر نقطه  $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = x^3 + bx^2 + d$  باشد، مقادیر  $b$  و  $d$  را به دست آورید.

مرکز مشاوره تحصیلی  
علیرضا افشار



مرکز مشاوره تحصیلی  
علیرضا افشار

راه‌های ارتباطی مرکز مشاوره

تلگرام

اینستاگرام

وبسایت



AlirezaAfsharOfficial

AlirezaAfsharOriginal

www.AlirezaAfshar.org

رزور مشاوره خصوصی علیرضا افشار

برای رزور مشاوره خصوصی تک جلسه و ماهانه  
به شماره ۰۹۳۵۸۹۶۰۵۰۳ در واتساپ پیام دهید

Afshar.xyz

آدرس تمام رسانه ها :

