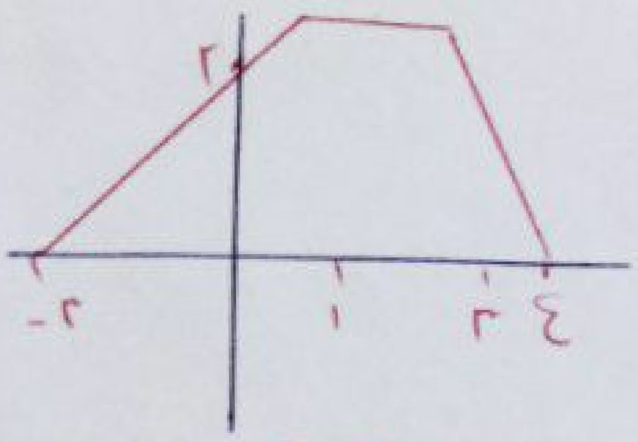
درس ۱ تبدیل نمودار تابع: در سالهای گذشته خواندید که برای رسم $f(x\pm a)$ باید انتقال طول انجام دهیم به عنوان مثال برای رسم $f(x+2)$ را از تابع $f(x)$ ۲ واحد به سمت راست و برای رسم $f(x-4)$، $f(x)$ ۴ واحد به چپ می‌رود.

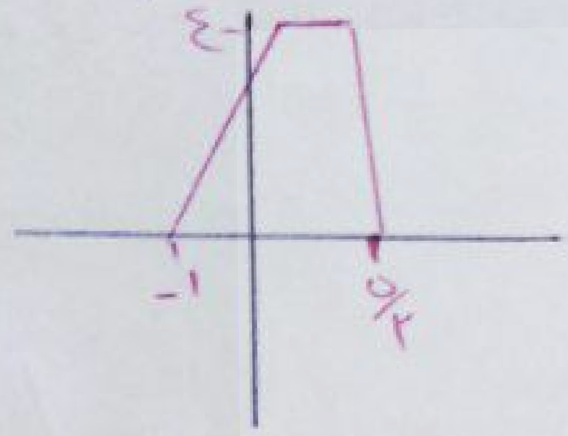


مثال ← تابع $f(x)$ رسم شده است. نمودار $f(2x-1)+1$ را رسم کنید.

حل: می‌دانیم دامنه تابع $f(x)$ به صورت $[-2,4]$ است پس:

$-2 \le 2x-1 \le 4 \rightarrow -1 \le x \le \frac{5}{2}$

$[-1,3] \rightarrow [0,4]$ برد تابع نیز یک واحد به بالا می‌رود یعنی



نکته: نمودار $f(-x)$ قرینه تابع $f(x)$ نسبت به محور y ها است.
نمودار تابع $-f(x)$ قرینه تابع نسبت به محور x ها است.

انبساط و انقباض محوری

★ برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافی است. به عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم در شکل‌های زیر نمودار تابع $y=kf(x)$ برای دو حالت $k>1$ و $0<k<1$ رسم شده است.

★ اگر $|k|>1$ باشد، نمودارهای $y=kf(x)$ را انبساط محوری نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0<|k|<1$ باشد. نمودار $y=kf(x)$ از انقباض محوری نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید.

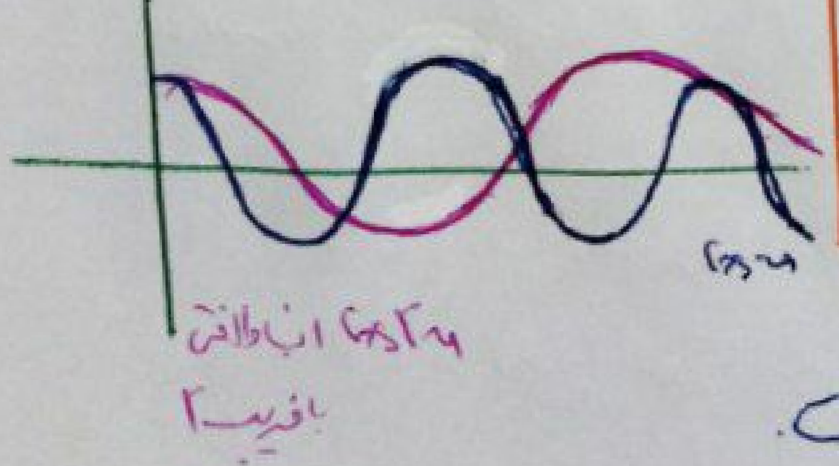
اگر عرض نقاط $y=f(x)$ را قرینه کنیم. نقاط تابع $y=-f(x)$ به دست می‌آید. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور x ها است.

دقت کنید در مورد انبساط و انقباض محوری که در جزوه گفته شده باید اصلاح کنیم. انبساط با ضریب ۲ یعنی شکل تابع $\times 2$

انبساط و انقباض افقی

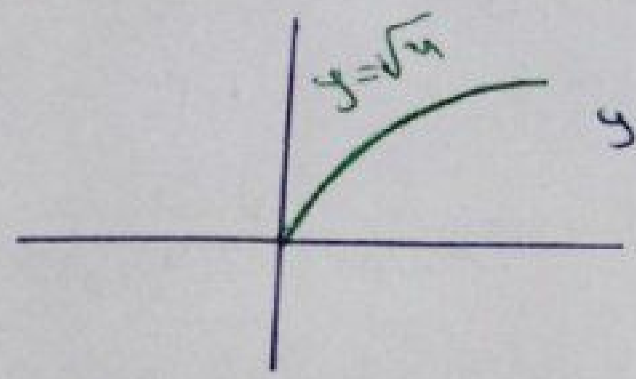
برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم

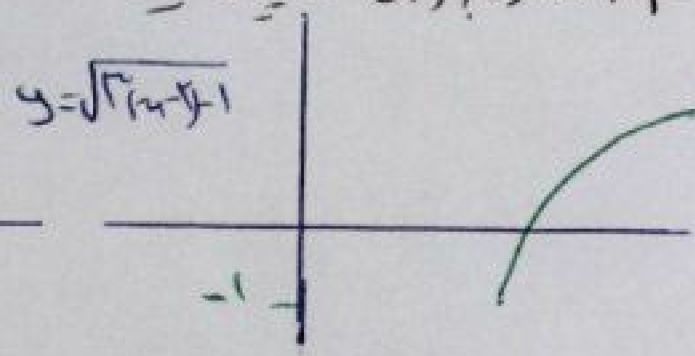
اگر $k>1$ باشد. نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید. و اگر $0<k<1$ باشد این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود



اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم نقاط تابع $y=f(-x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور y ها است.

مثال ← نمودار $y=\sqrt{2x-4}-1$ را رسم کرده دامنه و برد آن را تعیین کنید.





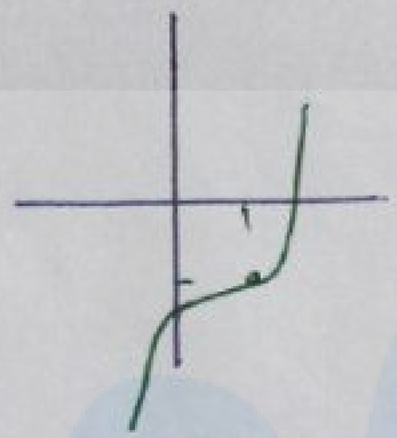
دامنه ← $[2,+\infty)$

برد ← $[-1,+\infty)$

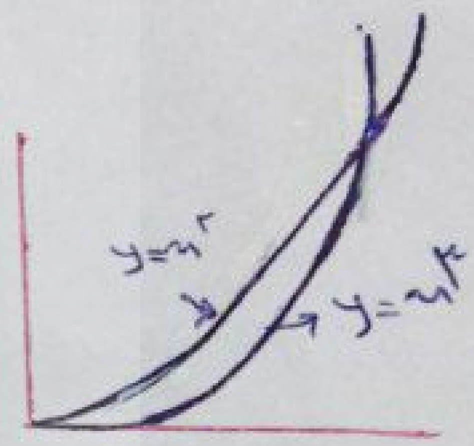
نکته: نمودار تابع $y=x^2$ و $y=x^3$ را باید بلد باشید.

مثال ← نمودار تابع $y=x^3-3x^2+3x-2$ را رسم کنید.

$y=(x-1)^3-1$



این نمودار کتاب درسی است.
در بازه $[0,1]$ نمودار $y=x^2$ بالاتر از $y=x^3$ قرار می‌گیرد.

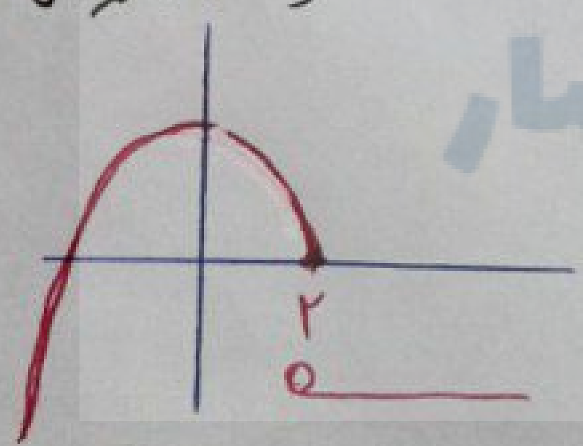


توابع صعودی و توابع نزولی

تعریف: اگر $a<b$ بوده و $f(a)<f(b)$ باشد f اکیداً صعودی است.
اگر $a<b$ بوده و $f(a)\le f(b)$ باشد f صعودی است.

و بالعکس: اگر $a<b$ ← $f(a)>f(b)$ اکیداً نزولی است.
اگر $a<b$ ← $f(a)\ge f(b)$، f نزولی است.

مثال ← با رسم نمودار تعیین کنید. نمودار $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & x\le 2\\ -1 & x>2\end{cases}$ در چه بازه‌ای صعودی در چه بازه‌ای نزولی است؟!

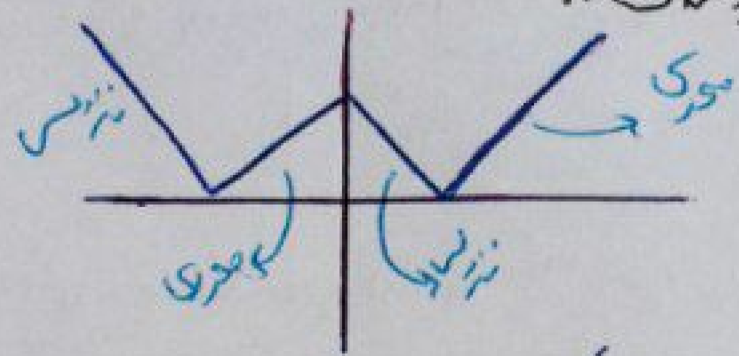


نزولی اکیداً ← $[0,2]$ اکیداً صعودی ← $(-\infty,0]$

صعودی نزولی ← $(2,+\infty)$ نزولی ← $(0,+\infty)$

چند نکته: ① حاصل‌ضرب جمله‌ای (x^2+2) و $y=(x-1)^2$ یک چندجمله‌ای درجه $n=1+2\times2$ می‌باشد.
② اگر در بازه‌ای تابع صعودی باشد ممکن است اکیداً صعودی نباشد ولی اگر اکیداً صعودی باشد صعودی هم است.
③ تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی با بی‌نهایت نقطه بحرانی دانسته هم می‌باشد.
④ اگر $f(x)$ صعودی باشد $-f(x)$ نزولی است. اگر f نزولی باشد $\frac{1}{f}$ صعودی است.

مثال ← نمودار $y=||x|-2|$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟!



قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ کافیست $P(a)$ را محاسبه کنید.

چندجمله‌ای x^6-1 را بر عامل $x-1$ تجزیه کنید. $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

مثال ← a و b را طوری تعیین کنید تا $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$ بر $x-1$ بخش‌پذیر بوده و بر $x+2$ باقی‌مانده ۲ بدهد.

$P(1)=0 \rightarrow 1+a+b+1=0 \rightarrow a+b=-2$

$P(-2)=2 \rightarrow -8+4a-2b+1=2 \rightarrow \begin{cases}4a-2b=9\\2a+2b=-4\end{cases} \quad 6a=5 \quad a=\frac{5}{6}$

$b=-2-\frac{5}{6}=-\frac{17}{6}$

مثال ← چندجمله‌ای $f(x)=x^2+ax-3$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده $f(x)$ بر $x-2$ چقدر است؟!

$f(-1)=0 \rightarrow +1-a-3=0 \rightarrow a=-2$ $\quad f(2)=4-4-3=-3$

مثال ← در معادله $\log(2x-3) \ge \log(x+1)$ محدوده x چیست: (انجمن لگاریتم)

$a>b \rightarrow f(a)>f(b)$ $\quad (x+1) \le 2x-3$ $\quad$ چون $\log_{10}$ اکیداً صعودی است پس

$\boxed{x\ge 4}$ $\quad x>-1,\ x>\frac{3}{2} \longrightarrow [4,+\infty)$

نکته: اگر در عبارت x^n+a^n، n فرد باشد بر $x+a$ بخش‌پذیر است.

در عبارت x^n+a^n اگر n زوج باشد بر $x+a$ و $x-a$ بخش‌پذیر نیست.

در عبارت x^n-a^n اگر n فرد باشد بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

در عبارت x^n-a^n اگر n زوج باشد بر $x-a$ و $x+a$ بخش‌پذیر است.

تابع متناوب

تعریف: تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد. به‌طوری‌که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T، این خاصیت را دوره تناوب می‌گویند.

نکته: در تابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ و max برابر $|a|+c$ و min $-|a|+c$.

در تابع $y=\tan ax$ دوره تناوب $\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد.

مثال ← دوره تناوب، max و min تابع $y=\sqrt{5}-\pi\cos\frac{1}{3}x$ چقدر است؟

$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$ $\max=\sqrt{5}+\pi$ $\min=\sqrt{5}-\pi$

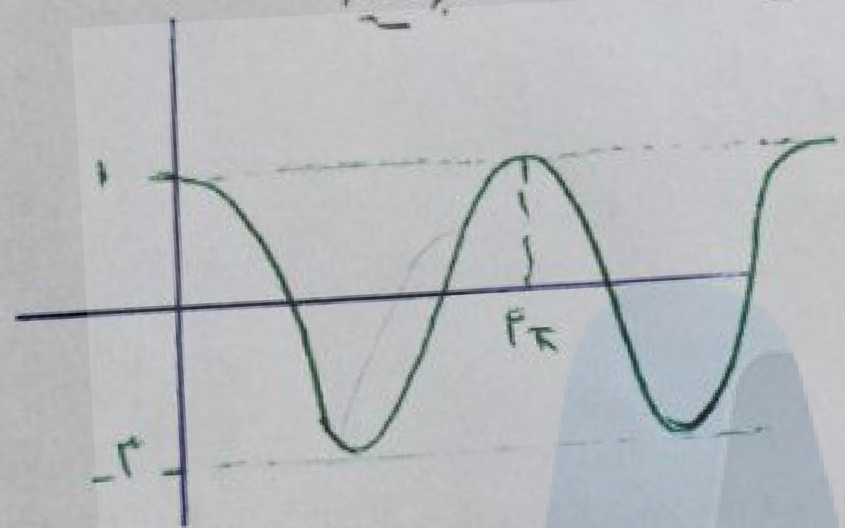
مثال ← تابعی به صورت $y=a\sin bx+c$ بنویسید که دوره تناوب آن ۳ و همچنین max و min آن به ترتیب ۵ و ۳- باشد.

$T=\frac{2\pi}{|b|}\Rightarrow 3=\frac{2\pi}{|b|} - |b|=\frac{2\pi}{3}$

$|a|+c=5$
$-|a|+c=-3$ → $2c=2$ → $\boxed{c=1}$
$|a|=4$ → $\boxed{a=\pm 4}$

$y=4\sin\frac{2\pi}{3}x+1$ یا $-4\sin\frac{2\pi}{3}x+1$

مثال ← با توجه به نمودار مقابل $y=a\cos bx+c$ مقادیر c، b و a را بنویسید.



$T=4\pi \to \frac{2\pi}{b}=4\pi$ $\boxed{b=\frac{1}{2}}$

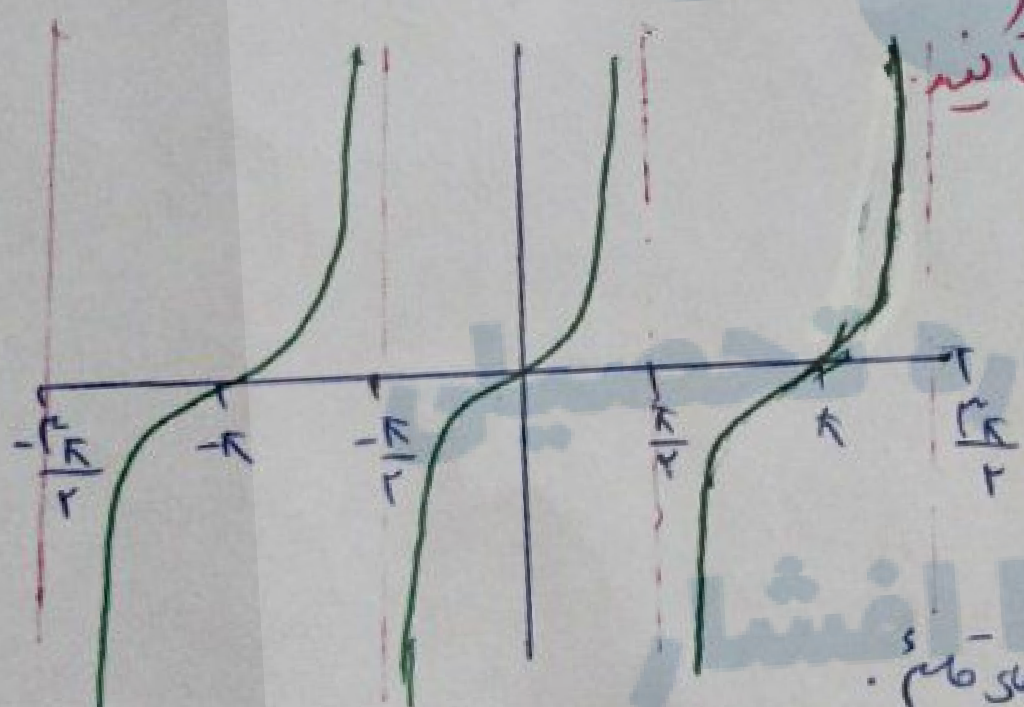
$a+c=1$
$-a+c=-3$ → $\boxed{c=-1}$ $\boxed{a=2}$

$y=2\cos\frac{1}{2}x-1$

نکته: مجموعه دامنه تابع $y=\tan ax$ به صورت زیر است.

$ax=k\pi+\frac{\pi}{2} \to x\neq\frac{k\pi}{a}+\frac{\pi}{2a}$ $D=R-\{\frac{k\pi}{a}+\frac{\pi}{2a}\}$

نمودار: نمودار $\tan x$ را مشاهده می‌کنید. به نکات زیر دقت کنید.



① دامنه تابع $R-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$ است.

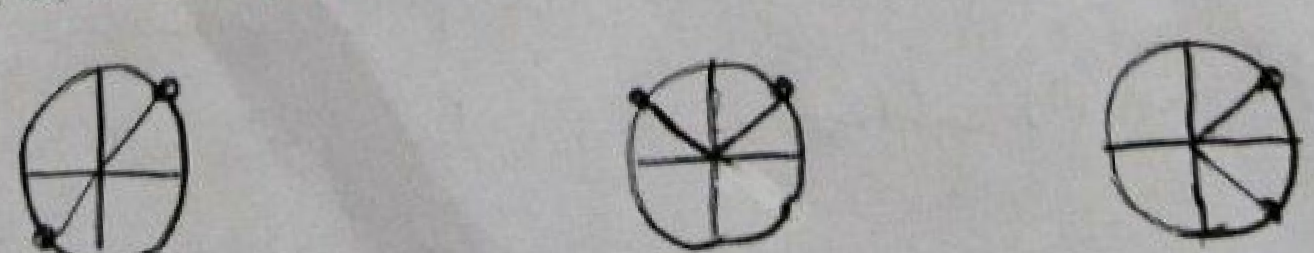
② تابع در بین مجانب‌های قائم صعودی اکید است مثلاً $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ صعودی است.

③ دوره تناوب تابع π می‌باشد (فرمول $\frac{\pi}{|a|}$)

④ tan در دامنه‌اش صعودی نیست به دلیل وجود مجانب‌های قائم.

معادلات مثلثاتی

فرمول‌ها ← $\cos x=\cos a$ $\sin x=\sin a$ $\tan x=\tan a$



$x=2k\pi\pm a$ $x=2k\pi+a$, $x=2k\pi+\pi-a$ $x=k\pi+a$

مثال ← معادلات مثلثاتی را حل کنید و جواب کلی را پیدا کنید.

$\sin x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{4} \longrightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{12}}$

$2x=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{5\pi}{12}}$

$\cos 3x-\cos x=0$

$\cos 3x=\cos x$

$3x=2k\pi+x \longrightarrow \boxed{x=k\pi}$

$3x=2k\pi-x \longrightarrow 4x=2k\pi \longrightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}}$

$2\sin 3x-\sqrt{2}=0$

$\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$3x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \longrightarrow \boxed{x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}}$

$3x=2k\pi+\frac{3\pi}{4} \longrightarrow \boxed{x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}}$

$\cos 2x+\cos x+1=0$

$2\cos^2 x-1+\cos x+1=0 \longrightarrow \cos x(2\cos x+1)=0$

$\cos x=0 \longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{2}}$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ $\begin{cases} x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \\ x=2k\pi-\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

$\sin 3x=\sin 2x$

$3x=2k\pi+2x \longrightarrow \boxed{x=2k\pi}$

$3x=2k\pi+\pi-2x \longrightarrow \boxed{x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{5}}$

$\sin x+\cos x=1$

$[0,2\pi]$

$\sin x=1-\cos x$

$\sin^2 x=1+\cos^2 x-2\cos x \longrightarrow 1-\cos^2 x=\cos^2 x(1+\cos x)$

$2\cos^2 x-2\cos x=0 \longrightarrow \cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}✓,\ \frac{3\pi}{2}✗$

$\cos x=1$, $x=0,\ 2\pi$ ✓

$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ 2\pi$

$\tan x=\tan 5x$

$5x=k\pi+x \longrightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{4}} \longrightarrow k\neq 4n+2$

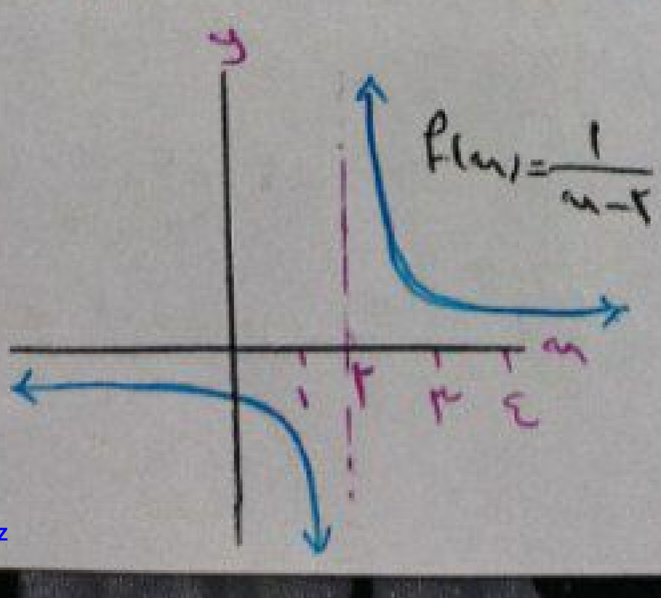
مثال ← مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه ۲ ضلع آن ۲, ۶ cm باشد. چند مثلث با این خاصیت می‌توان ساخت؟! آنگاه ضلعش

$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$\frac{1}{2}\times 2\times 6\times\sin\theta=3 \longrightarrow \sin\theta=\frac{1}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ $\theta=\frac{5\pi}{6}$

۲ مثلث



نمودارهای مجانبی - حد در بی‌نهایت

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

مثال ← حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{[x]+1}{x+1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x+1}{\tan x}=\frac{+}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-x^3}{3x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{x}{3}=+\infty \qquad \lim_{x\to2^-}\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}=\frac{+}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x-5}-\frac{2}{x}=\lim_{x\to+\infty}3-0=3 \qquad \lim_{x\to0^-}\frac{2-\cos 2x}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

مثال ← مجانب های قائم و افقی $f(x)=\frac{4x^2+1}{2x^2+x}$ را به دست آورید.

در مجانب افقی $x\to\pm\infty$ را به دست آوریم. در مجانب قائم ریشه های مخرج را که صورت را صفر نکند دقت کنید ریشه مشترک X

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2+1}{2x^2+x}=2 \quad \boxed{y=2} \text{ افقی} \qquad 2x^2+x=0 \quad \boxed{x=0}\ \boxed{x=-\tfrac{1}{2}} \longrightarrow \text{قائم}$$

مثال ← نمودار $y=\frac{1}{x-|x|}$ و $y=\frac{x+1}{x^3+x}$ در اطراف مجانب قائم خود چگونه است.

$x^3+x=0 \qquad x(x^2+1)=0 \quad \boxed{x=0}$

$y=\frac{1}{x-|x|}$ دامنه $\boxed{x<0}$

$x\to0^+ \quad \frac{1}{0^+}=+\infty$

$x\to0^- \quad \frac{1}{0^-}=-\infty$

$x\to0^+$ ت.ن

$x\to0^- \quad \frac{1}{0^-}=-\infty$

مثال ← آیا $x=2$ مجانب قائم $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$ می باشد؟

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

خیر چون حد عدد شد.

مشتق تعریف: $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

در مشتق پذیری ابتدا به پیوستگی در نقطه مشتق چپ و راست را بررسی کنید.

مثال ← مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$$f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=1$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=-1$$

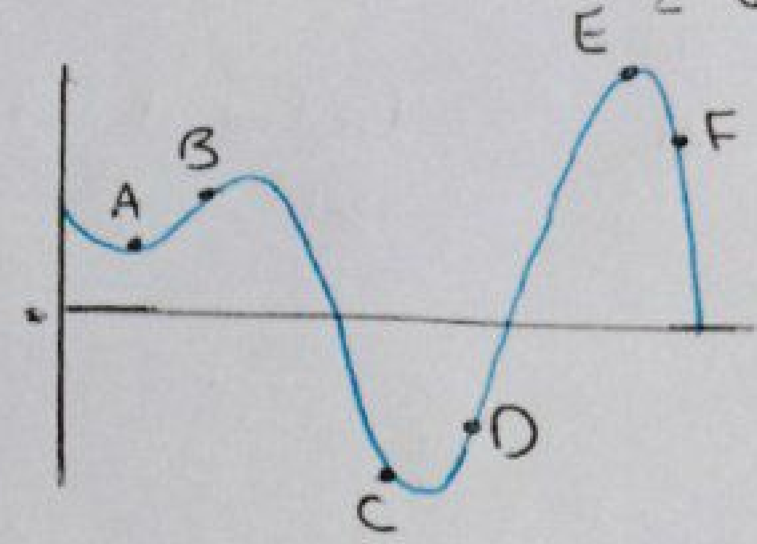
در $x=2$ پیوسته است چون ← $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=0$

پس مشتق چپ و راست برابر نیست X

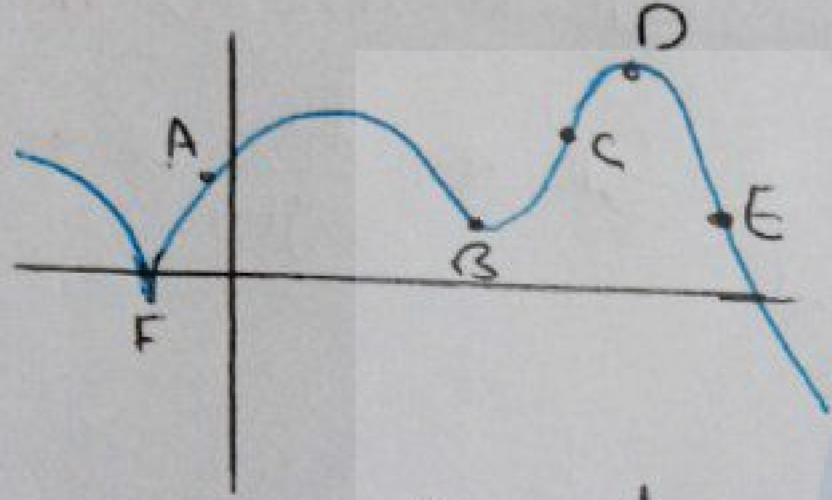
(6)

مثال ← نمودار منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول تطبیق کنید.

شیب	نقطه
−۳	F
−۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D



مثال ← با توجه به نمودار به سؤالات جواب دهید:



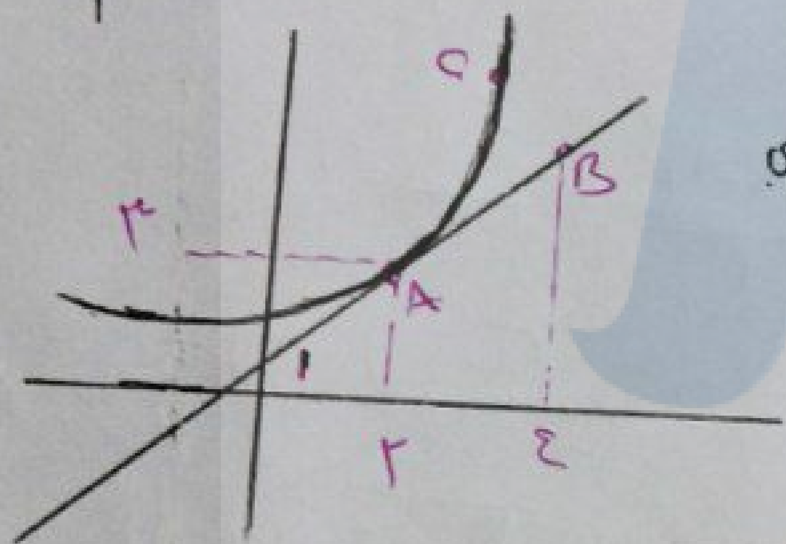
نقطه‌ای با شیب مثبت: C

کمترین شیب بین نقاط: E

نقطه مشتق‌ناپذیر: F

نقاط اکسترمم‌های تابع: B ، D

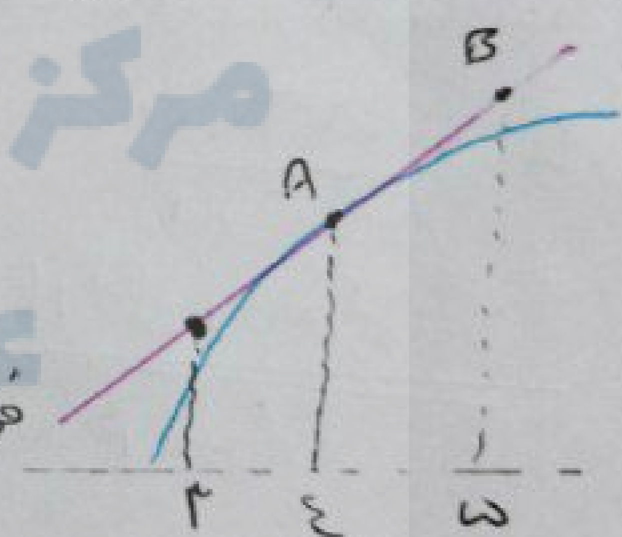
بیشترین شیب بین نقاط: C



مثال ← نمودار تابع f در همسایگی نقطه A رسم شده است. مشتق تابع f در این نقطه چقدر است؟ خط مماس بر f چیست؟!

$m_{AB}=\frac{3-1}{2-0}=1 \qquad f'(A)=f'(2)=1 \qquad y=x+1$

مثال ← برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(4)=110$ و $f(4)=25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A و B و C را بیابید.



$$f'(4)=\frac{f(B)-f(A)}{x_B-x_A}=\frac{f(5)-25}{5-4}=110$$

$$f'(4)=\frac{f(A)-f(C)}{x_A-x_C}=\frac{25-f(C)}{1}=110$$

$f(C)=22/5$

مثال ← اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=2$ و $f'(2)=0$ و $g(2)=8$ و $g'(2)=-4$ مقدار $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست آورید.

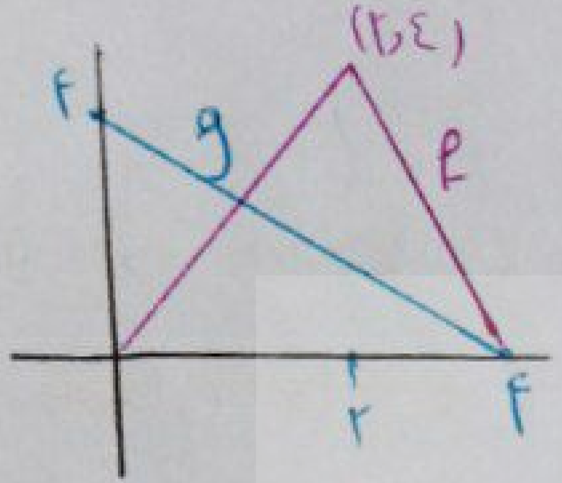
$$\frac{f'(2)g(2)-g'(2)f(2)}{g^2(2)}=\frac{0\times 8-(-4)2}{64}=\frac{40+18}{64}=\frac{58}{64}=\frac{29}{32}$$

مثال ← مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه ۱ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 4x & x<1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ $\quad$ $f'(x)\begin{cases} 2x & x\geq 1 \\ 2 & x<1 \end{cases}$

پیوسته X نیست مشتق ندارد.



مثال ← نمودار تابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x)g(x)$ مطلوب است: $h'(1)$

ب) اگر $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است: $k'(2)$

الف) $f(x)=2x \quad g(x)=4-x \quad f.g=2x(4-x)=8x-2x^2$

$f.g'=8-4x=8-4=4$

ب) $f(x)=-2x+8 \quad \frac{8-2x}{4-x}=2 \quad k'(2)=0$

$g(x)=4-x$

روش ۲ → $\frac{f'(2)g(2)-g'(2)f(2)}{g^2(2)}=\frac{-2\times 1-(-1)^2}{1}=\frac{-2+2}{1}=0$

مثال ← مشتق توابع داده شده را بدست آورید

الف) $f(x)=(2x^2-4)(2x-5)^3$

$4x(2x-5)^3+3(2x-5)^2\,2(2x^2-4)$

ب) $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{-3x+2}$

$\frac{(3x^2-2)(-3x+2)-(-3)(x^3-2x+1)}{(-3x+2)^2}$

پ) $f(x)=\sqrt{4x+2}\,(x^2+1)$

$\frac{4}{2\sqrt{4x+2}}(x^2+1)+2x\,2\sqrt{4x+2}$

ت) $f(x)=\frac{9x-4}{\sqrt{x}}$

$\frac{9\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-4)}{x}$

مثال ← مشتق توابع مثلثاتی زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$

$2\sin x\cos x-2\sin x\cos x$

ب) $f(x)=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$\frac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}$

پ) $f(x)=\tan^2x-2\cos x$

$2\tan x(1+\tan^2x)+2\sin x$

ت) $f(x)=\sin x\cos^2x$

$\cos x\cos^2x-2\sin^2x\sin x$

مثال ← معادله خط مماس بر منحنی $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ در $x=2$ واقع بر منحنی را بنویسید.

$y'=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}=\frac{-8}{9}$ $\quad \left|\begin{matrix}2\\ \frac{5}{3}\end{matrix}\right.$ $\quad y=\frac{-8}{9}x+\frac{16}{9}+\frac{5}{3}$

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

از فرمول $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ به دست می‌آید.

مثال ← معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^2-t+1$ برحسب متر در بازه زمانی $[0,5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,5]$ با هم برابرند.

$\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{21-1}{5}=4 \qquad 2t-1=4 \qquad t=\frac{5}{2}$

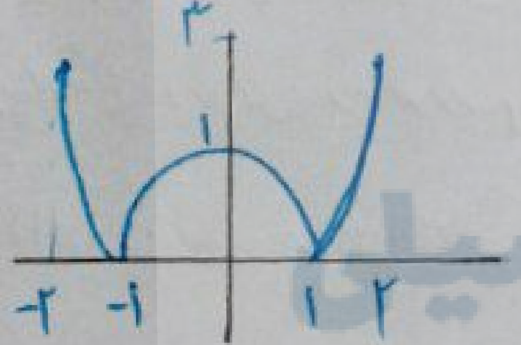
مثال ← یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+t^2$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=9$ چقدر است؟

$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+2t=\frac{1}{6}+18=18\frac{1}{6}$

کاربردهای مشتق

مثال ← مختصات ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x)=|x^2-1|$ را روی بازه $[-2,2]$ پیدا کنید.

به کرانه‌ها دقت کنید!



$x=1$, $x=-1$ min نسبی و مطلق

max نسبی $\quad$ min نسبی $\quad x=\pm 2$ max مطلق

مثال ← در کره‌ای به شعاع R استوانه‌ای رسم کرده‌ایم. ماکزیمم حجم استوانه چقدر است؟

$V=\pi r^2 h \qquad R^2=r^2+\frac{h^2}{4} \longrightarrow r^2=R^2-\frac{h^2}{4}$

$V=\pi(R^2h-\frac{h^3}{4}) \qquad R^2-\frac{3h^2}{4}=0 \qquad \boxed{h=\frac{2}{\sqrt{3}}R} \qquad r^2=R^2-\frac{4}{3}\cdot\frac{R^2}{4}$

$V=\pi\times\frac{2}{3}R^2\times\frac{2}{\sqrt{3}}R=\pi R^3\frac{4}{3\sqrt{3}} \qquad \boxed{r=\sqrt{\frac{2}{3}}R}$

تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

مثال ← تابع $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است:

$y'=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

	0	
−		+
نزولی		صعودی

مثال ← a و b را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=x^3+ax+b$ در $(1,2)$ اکسترمم داشته باشد.

$f(1)=2 \longrightarrow 1+a+b=2 \quad a+b=1$

$f'(1)=0 \quad 3x^2+a=0 \longrightarrow 3+a=0 \quad \boxed{a=-3} \quad \boxed{b=4}$

۳ ← برای پیدا کردن اکسترمم مطلق باید نقاط بحرانی را پیدا کنیم:

۱- مشتق = ۰   ۲- مشتق وجود ندارد   ۳- اول و آخر بازه در صورت بسته بودن

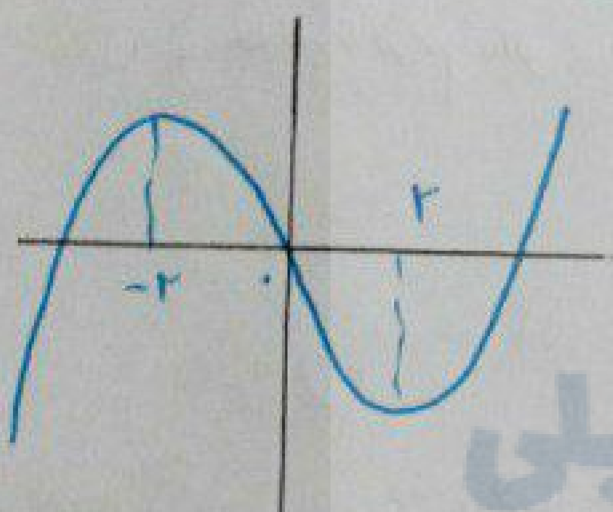
مثال ← max و min مطلق تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ در بازه $[-1,2]$ تعیین کنید.

$f'(x)= \longrightarrow 6x^2+6x-12=0 \quad \boxed{x=1} \quad x=-2$ ✗ در بازه نیست $\quad \boxed{x=-1} \quad \boxed{x=2}$

x	1	-1	2
f	-7	14	4
	min مطلق	max مطلق	

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن.

نقطه عطف نقطه‌ای است که مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد و جهت تقعر تابع عوض می‌شود.



مثال ← اگر $(0,0)$ نقطه عطف تابع درجه ۳ با ضابطه $y=x^3+ax^2+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل روبرو رسم شده است a، b و c را پیدا کنید.

$y'=3x^2+2ax+b \quad x=\pm 2 \longrightarrow 12+b=0 \longrightarrow \boxed{b=-12}$

$y''=6x+2a=0 \longrightarrow \boxed{a=0} \quad (0,0) \quad \boxed{c=0}$

مثال ← جهت تقعر و نقطه عطف توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $y=x^3-2x-1$ $y'=3x^2-2$

$y''=6x=0 \quad \boxed{x=0}$ نقطه عطف

x		0	
y''	$-$		$+$
	$\cap$		$\cup$

ب) $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$ $y'=\dfrac{-3}{(2x+1)^2} \longrightarrow y''=\dfrac{6}{(2x+1)^3}$

x		$-\frac{1}{2}$	
y''	$-$		$+$
	$\cap$		$\cup$

در $(-\frac{1}{2},+\infty)$ تقعر رو به بالاست. در $(-\infty,-\frac{1}{2})$ تقعر رو به پایین ولی نقطه عطف ندارد

چون $x=-\frac{1}{2}$ در دامنه تابع نیست.

مثال ← جدول رفتار و نمودار تابع $y=\frac{2x-1}{x+4}$ را رسم کنید.

$x=-4$ مجانب قائم

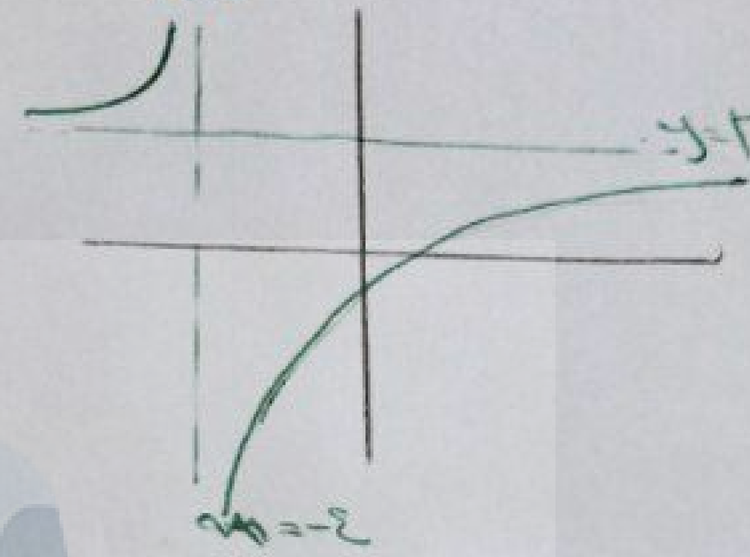
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x+4}=2$

$y=2$ مجانب افقی

$y'=\frac{2(x+4)-1(2x-1)}{(x+4)^2}=\frac{9}{(x+4)^2}>0$

$y''=\frac{-18}{(x+4)^3}$ $x\neq-4$

	$-\infty$	-4	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y''	$+\cup$		$-\cap$
y	$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 2$



حل ← جدول تغییرات و نمودار تابع $y=x^3+3x^2-1$ را رسم کنید.

$y'=3x^2+6x=0$ $x=0$ $x=-2$

$y''=6x+6$ $x=-1$

	-2		-1		0	
f'	$+$		$-$	$-$		$+$
f''	$\cap$		$\cap$	$\cup$		$\cup$
	$\nearrow$	3	$\searrow$	1 $\searrow$	-1	$\nearrow$