نکته مهم: در معادله کسری که می خواهیم ساده کنیم باید ابتدا برابر صفر قرار دهیم در غیر اینصورت جواب ها حذف می شود

Date : / /
Sabject :

فصل اول

انتقال ها — افقی و عمودی
انتقال ها — انبساط و انقباض افقی و عمودی

انتقال عمودی: $\underbrace{y=f(x)+k}$ را از روی نمودار $f(x)$ رسم کنیم

$k>0$ ← نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای عمودی بالا می بریم

$k<0$ ← نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای عمودی پایین می بریم

تغییرات روی عرض ها است (برد تغییر می کند).

x ها (طول نقاط ثابت است) دامنه تابع ثابت است.

هر نقطه روی $f(x)$ در نظر بگیریم طول آن نقطه ثابت است ولی به عرض آن نقطه ($k>0$) k واحد اضافه می شود اگر ($k<0$) k واحد از عرض هر نقطه کم می شود.

$$A\Big|_{y_0}^{x_0} \in f(x) \xrightarrow{\text{متناظر}} A'\Big|_{y+k}^{x_0}$$

انتقال افقی: $y=f(x+k)$ از روی نمودار $f(x)$ رسم کنیم $f(x)$ را به $\underline{\underline{-k}}$ در راستای افقی انتقال می دهیم:

تذکر: دامنه تغییر می کند، برد ثابت است.

$$A\Big|_{y_0}^{x_0} \in f(x) \xrightarrow{\text{متناظر}} A'\Big|_{y_0}^{x_0-k} \in f(x+k)$$

مثال: اگر $A\Big|_{5}^{0}$ روی $f(x)$ باشد متناظر A روی ۱) $f(x+2)$ چه مختصاتی داریم؟

$\rightsquigarrow A'\Big|_{5}^{0-2} \to A'\Big|_{5}^{-2}$

۲) $f(x-5) \rightsquigarrow \Big|_{5}^{0+5} \to A'\Big|_{5}^{5}$

۳) $f(x)+7 \rightsquigarrow A'\Big|_{12}^{0} \leftarrow A'\Big|_{5+7}^{0}$

۴) $f(x)-9$ — $A'\Big|_{5-9}^{0} \to A'\Big|_{-4}^{0}$

DADA

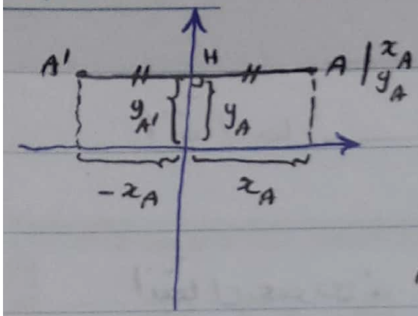
Date : / /

Subject :

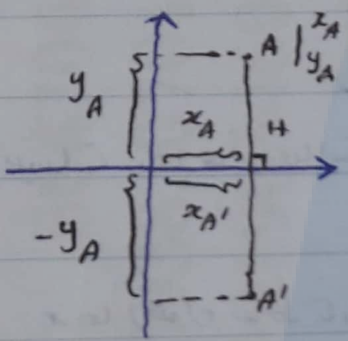
قرینه کردن نسبت به محورها:

— محور yها

— محور xها



$$A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right. \xrightarrow[\text{yها}]{\text{قرینه نسبت به محور}} A'\left|\begin{matrix}-x_A\\y_A\end{matrix}\right.$$



$$A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right. \xrightarrow[\text{xها}]{\text{قرینه نسبت به محور}} A'\left|\begin{matrix}x_A\\-y_A\end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases} y_1 = f(x) \\ y_2 = f(-x) \end{cases} \xrightarrow[\text{yها ثابت}]{\text{xها قرینه یکدیگرند}}$$

پس باید قرینه نمودار $f(x)$ را نسبت به محور yها بدست آوریم تا نمودار $y=f(-x)$ حاصل شود.

مثال: اگر نقطه $A\left|\begin{matrix}5\\-3\end{matrix}\right.$ روی $f(x)$ باشد مختصات متناظر A روی

1) $y=f(-x) \longrightarrow A'\left|\begin{matrix}-5\\-3\end{matrix}\right. \in f(-x)$

2) $y=-f(x) \longrightarrow A'\left|\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right. \in -f(x)$

$$\begin{cases} y_1 = -f(x) \\ y_2 = f(x) \end{cases} \xrightarrow[\text{yها قرینه یکدیگرند}]{\text{xها ثابت}}$$

پس باید قرینه نمودار $f(x)$ را نسبت به محورxها بدست آوریم تا نمودار $y=-f(x)$ حاصل شود.

انقباض و انبساط عمودی :

تغییرات روی عرض‌ها x ها ثابت می‌ماند
y ها تغییر می‌کند ← دامنه ثابت است

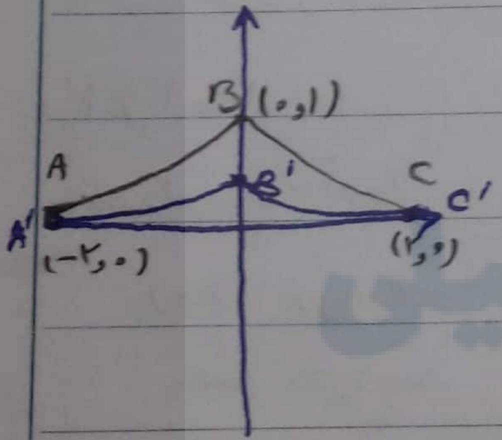
$y = k f(x) \Rightarrow$

$$A\left|\begin{matrix}x_0\\ y_0\end{matrix}\right. \in f(x) \xrightarrow{\text{متناظر}} A'\left|\begin{matrix}x_0\\ ky_0\end{matrix}\right. \in kf(x)$$

$0<k<1$ روی محور y ها منقبض (فشرده می‌شود)

$k>1$ روی محور y ها منبسط (کشیده می‌شود)

مثال : اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت زیر باشد نمودارهای زیر را رسم کنید ؟



$\to D_{f(x)}=[-2,2]$ ، $R_{f(x)}=[0,1]$

1) $y=\frac{1}{2}f(x) \to D=[-2,2]$ ، $R=[0,\frac{1}{2}]$ $\quad \underbrace{0<k=\frac{1}{2}<1}$

نمودار نسبت به نمودار f(x) فشرده یا منقبض در راستای عمودی

$$A\left|\begin{matrix}-2\\ 0\end{matrix}\right. \in f(x) \xrightarrow{\text{متناظر}} A'\left|\begin{matrix}-2\\ 0\times\frac{1}{2}\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}-2\\ 0\end{matrix}\right.$$

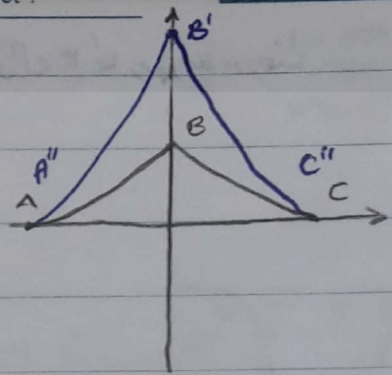
$$B\left|\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\right. \in f(x) \xrightarrow{\text{متناظر}} B'\left|\begin{matrix}0\\ 1\times\frac{1}{2}\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}0\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$$

PAPA

$$C\left|\begin{matrix}2\\ 0\end{matrix}\right. \in f(x) \xrightarrow{\text{متناظر}} C'\left|\begin{matrix}2\\ 0\times\frac{1}{2}\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}2\\ 0\end{matrix}\right.$$

Date : / /

Subject :



$2)\ y = 3f(x)$

$k = 3 > 1$ نمودار نسبت نمودار اولیه $f(x)$ منبسط یا کشیده می‌شود در راستای عمودی

$A''|\begin{smallmatrix}-2\\0\end{smallmatrix}$

$B''|\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}$

$C''|\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}$

$D = [-2,2]$

$R = [0,3]$

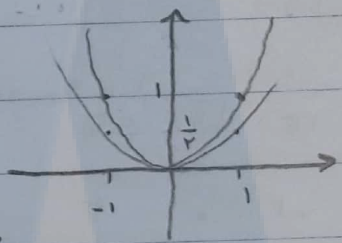
مثال: اگر $y = x^2$ مفروض باشد نمودارهای زیر را رسم کنید.

$1)\ y = \frac{1}{2}x^2$

$A|\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix} \to A'|\begin{smallmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{smallmatrix} \in \frac{1}{2}x^2$

$O|\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix} \to O'|\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix} \in \frac{1}{2}x^2$

$B|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} \to B'|\begin{smallmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{smallmatrix} \in \frac{1}{2}x^2$



منقبض

انقباض در راستای عمودی

انبساط و انقباض افقی:

$y = f(kx)$ تغییرات روی xها ← وارونه تغییر می‌کنند

yها ثابت ← بی‌ثابت

$A|\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\end{smallmatrix} \in f(x) \xrightarrow{\text{متناظر}} A'|\begin{smallmatrix}\frac{x_0}{k}\\y_0\end{smallmatrix} \in f(kx)$

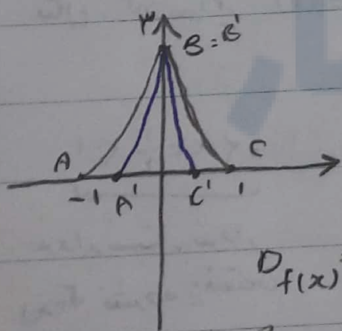
اگر $k>1$ نمودار فشرده یا منقبض در راستای محور xها (افقی)

اگر $0<k<1$ نمودار منبسط یا کشیده، در راستای محور xها (افقی)

مثال: نمودار $y=f(x)$ به صورت زیر است نمودار توابع زیر را رسم کنید

$k=2>1$

$1)\ y=f(2x)$



$A|\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix} \in f(x) \xrightarrow{\text{متناظر}} A'|\begin{smallmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{smallmatrix}$

$B|\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix} \in f(x) \xrightarrow{\text{متناظر}} B'|\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}$

$C|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} \in f(x) \xrightarrow{\text{متناظر}} C'|\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{smallmatrix}$

نمودار نسبت به نمودار $f(x)$ در راستای افقی فشرده شد

$D_{f(x)} = [-1,1]$

$R_{f(x)} = [0,3]$

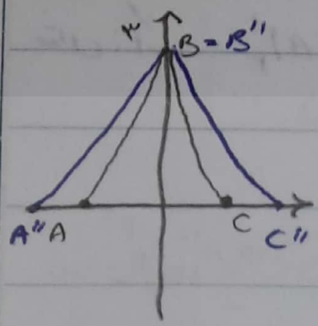
$D_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$R_1 = [0,3]$

PAPA

Date : / /

Subject :



۲) $y = f(\frac{1}{2})x$ $\quad 0 < k = \frac{1}{2} < 1$

نمودار در راستای افقی کشیده شده

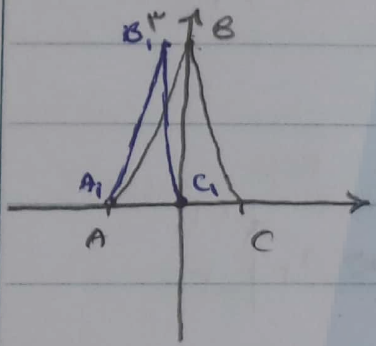
$A''\left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right.$

$B''\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$

$C''\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$

$D_2 = [-2,2]$

$R_2 = [0,3]$



۳) $y=f(2x+1)$

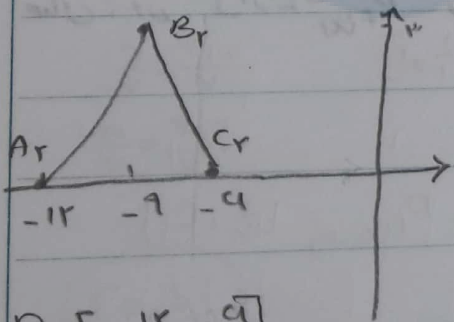
$A\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{متناظر}} A_1\left|\begin{matrix}\frac{-1-1}{2}\\0\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$

$B\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{متناظر}} B_1\left|\begin{matrix}\frac{0-1}{2}\\3\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\3\end{matrix}\right.$

$C\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{''}} C_1\left|\begin{matrix}\frac{1-1}{2}\\0\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$

$D_3=[-1,0]$

$R_3=[0,3]$



۴) $y = f(\frac{1}{3}x+3)$

$A_2\left|\begin{matrix}(-1-3)\times 3\\0\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}-12\\0\end{matrix}\right.$

$B_2\left|\begin{matrix}(0-3)\times 3\\3\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}-9\\3\end{matrix}\right.$

$C_2\left|\begin{matrix}(1-3)\times 3\\0\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}-6\\0\end{matrix}\right.$

$D=[-12,-6]$

$R=[0,3]$

x ها از برعکس عمل می کنند

y ها مستقیم عمل می کنند

۵) $y=2f(-3x+4)+5$

$A_3\left|\begin{matrix}\frac{-1-4}{-3}\\(0\times 2)+5\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}\frac{5}{3}\\5\end{matrix}\right.$

$B_3\left|\begin{matrix}\frac{0-4}{-3}\\(3\times 2)+5\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}\frac{4}{3}\\11\end{matrix}\right.$

$C_3\left|\begin{matrix}\frac{1-4}{-3}\\(0\times 2)+5\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right.$

$D = [1, \frac{5}{3}]$

$R = [5, 11]$

Date : / /

Subject :

مثال: اگر $A\Big|^{1}_{2}$ روی نمودار $f(x)$ باشد متناظر آن روی ۱) $y=f(3x+1)$ را بنویسیم.

$$\frac{x-1}{3}=\frac{1-1}{3}=0 \qquad A'\Big|^{0}_{2}$$

۲) $y=f(\frac{1}{2}x-5)$ $\qquad (x+5)\times 2=(1+5)\times 2=12 \Rightarrow A''\Big|^{12}_{2}$

۳) $y=2f(9x-2)+3$ $\qquad A_1\left|\begin{matrix}\frac{1+2}{9}=\frac{1}{3}\\ (2\times 2)+3=7\end{matrix}\right. \Rightarrow A_1\left|\begin{matrix}\frac{1}{3}\\ 7\end{matrix}\right.$

۴) $y=-5f(-\frac{1}{4}x+5)-11$

$$A_2\left|\begin{matrix}(1-5)\times -4\\ (2\times -5)-11\end{matrix}\right. \Rightarrow A_2\left|\begin{matrix}16\\ -21\end{matrix}\right.$$

مثال: اگر $D_{f(x)}=[0,2]$ و $D_{g(x)}=[-1,4]$ باشد دامنه

$h(x)=g(2x)-f(7x-3)$

$\div 2 \quad D_{g(2x)}=[-\frac{1}{2},2]$

$\frac{0+3}{7}=\frac{3}{7}$

$\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$

$D_{f(7x-3)}=[\frac{3}{7},\frac{5}{7}]$

$D_{h(x)}=D_{g(2x)}\cap D_{f(7x-3)}=$

$$[-\frac{1}{2},2]\cap[\frac{3}{7},\frac{5}{7}]=[\frac{3}{7},\frac{5}{7}]$$

نکته: اگر $D_{f(x+2)}=[0,1]$ باشد $D_{f(x)}$ کدام است

$$D_{f(x)}=[0+2,1+2]=[2,3]$$

مهم: اگر D انتقال داده شده را داشته باشیم بخواهیم دامنه $f(x)$ را به دست آوریم مستقیم عمل می‌کنیم.

مثال:

$D_{f(x-8)}=[1,9]$ $\qquad +8$

$D_{f(x)}=[1-8,9-8]=[-7,1]$

PAPA

Date : / /
Subject :

مثال: اگر $D_{f(3x+2)}=[-1,7]$ باشد $D_{f(x)}$ ؟

برعکس

$D_{f(x)} = [-1\times 3+2 , 7\times 3+2] = [-1, 23]$

نکته: اگر برد انتقال داده شده را داشته باشیم بخواهیم برد $f(x)$ را به دست آوریم معکوس عمل می‌کنیم (یعنی f را تنها می‌کنیم)

مثال: اگر $R_{2f(x)+3}=[-1,0]$ باشد $R_{f(x)}$ ؟

$2f(x)\cancel{+3}\cancel{-3} \xrightarrow{\div 2} f(x)$

$R_{f(x)} = \left[\frac{-1-3}{2} , \frac{0-3}{2}\right] = \left[-2, -\frac{3}{2}\right]$

راه حل ۲:

$-1 \leq 2f(x)+3 \leq 0 \xrightarrow{-3} -4 \leq 2f(x) \leq -3 \xrightarrow{\div 2}$

$-2 \leq f(x) \leq -\frac{3}{2}$

مثال: اگر $R_{3f(\frac{1}{2}x-5)+8}=[-1,0]$ باشد $R_{-5f(\frac{1}{2}x-5)-9}$ کدام است؟

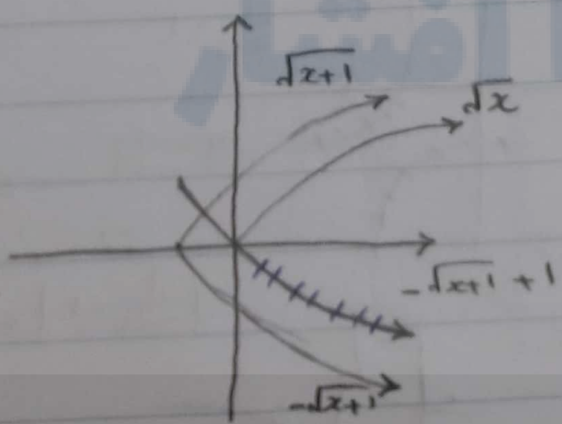
$[a,b]$
$a<b$

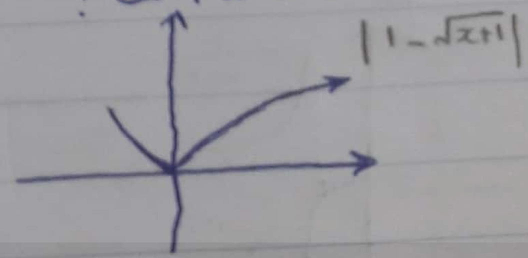
$R_{f(x)} = \left[\frac{-1-8}{3} , \frac{0-8}{3}\right] = \left[-3, -\frac{8}{3}\right]$

$R_{-5f(\frac{1}{2}x-5)-9} = \left[(-3\times -5)-9 , (-\frac{8}{3}\times -5)-9\right]$

$= \left[6 , \frac{13}{3}\right] = \left[\frac{13}{3}, 6\right]$

مثال: نمودار $y=|1-\sqrt{x+1}|$ کدام است؟





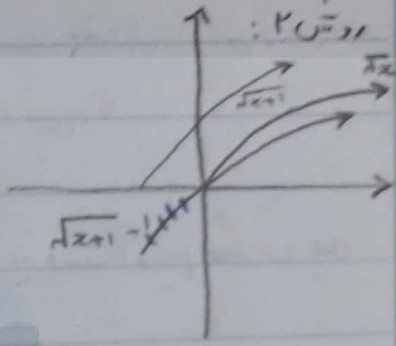
Date : / /

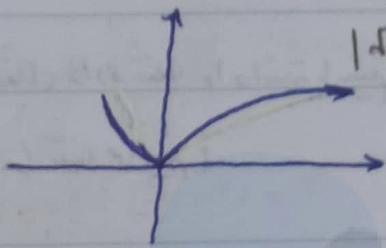
Subject :

* نکته : $|a-b| = |b-a|$

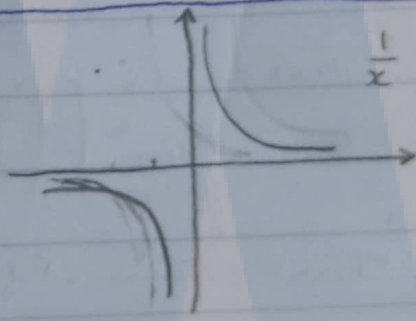
$$|1-\sqrt{x+1}| = |\sqrt{x+1}-1|$$

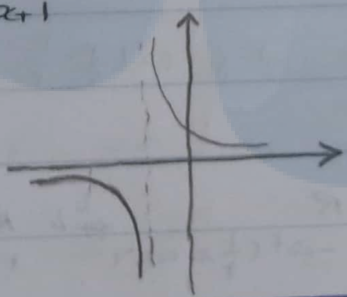
روش ۲ :





$y = \frac{1}{x+1}$ نمودار



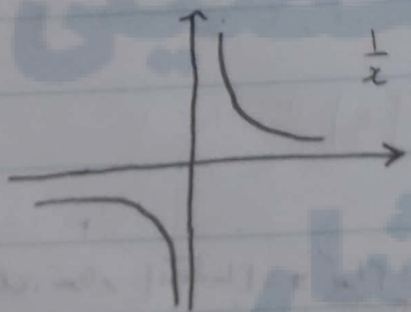


$y = \left|\frac{x-2}{x-1}\right|$

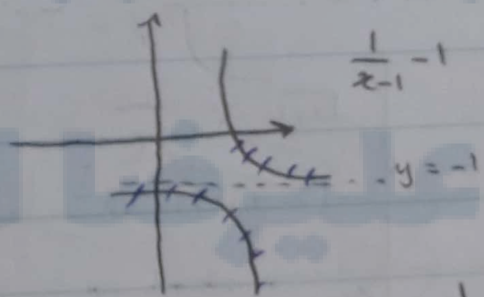
$$y = \left|\frac{x-2}{x-1}\right| = \left|\frac{x-1-1}{x-1}\right| = \left|\frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right| =$$

$$= \left|1 - \frac{1}{x-1}\right| \overset{*}{=} \left|\frac{1}{x-1} - 1\right|$$

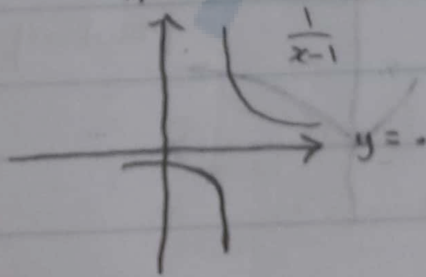
1)



3)

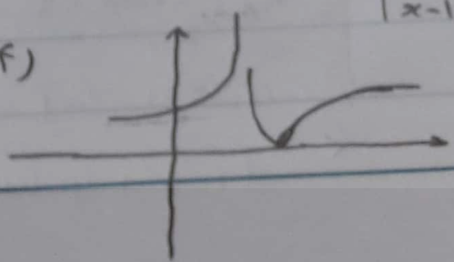


2)



$$\left|\frac{1}{x-1} - 1\right| = \left|\frac{x-2}{x-1}\right|$$

4)



Date : / /

Sabject :

$y=\log_{10}\frac{1}{x+1}$

$\log_{10}^{a^n}=n\log_{10}^{a}$

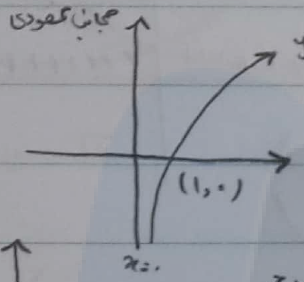
$=\log_{10}^{(x+1)^{-1}} = -\log_{10}^{(x+1)}$

1) $y=\log_{10}^{x}$

2) $y=\log_{10}^{x+1}$

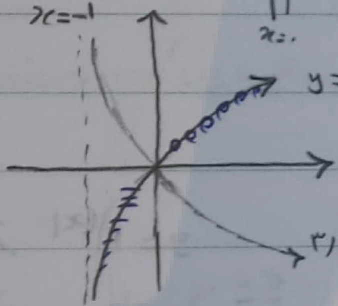
3) $y=-\log_{10}^{(x+1)}$

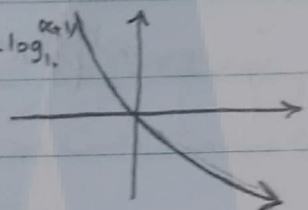
1) $10>1$



x ها ثابت و y ها قرینه شکل ۳ را نسبت به محور x ها به دست آورد

2)





مثال: اگر $y=\begin{cases}\frac{1}{1-x} & x<0\\ -\sqrt{x+2} & x\geq 0\end{cases}$ مفروض باشد نمودار کدام است؟

$* \; y=\begin{cases}\frac{1}{1-x} & x<0\\ -\sqrt{x+2} & x\geq 0\end{cases}$

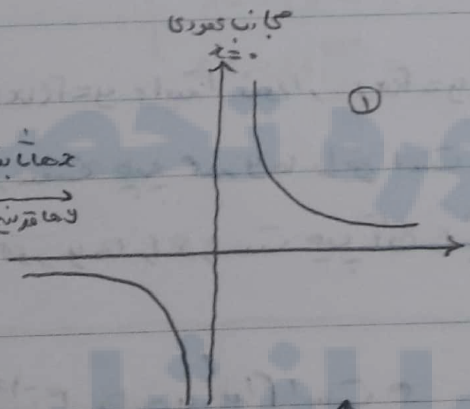
$y=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{-(x-1)}=-\frac{1}{x-1} \quad x<0$

1) $y=\frac{1}{x}$

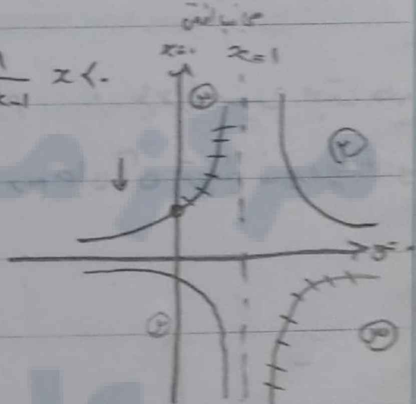
2) $y=\frac{1}{x-1}$

3) $y=-\frac{1}{x-1}$

x ها ثابت $\xrightarrow{}$ y ها قرینه



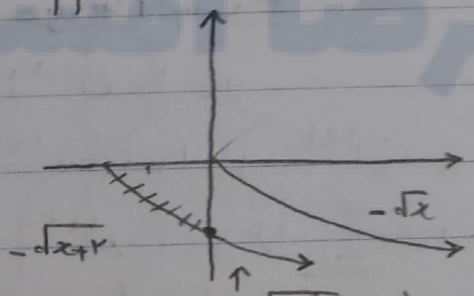
$-\frac{1}{x-1} \quad x<0$



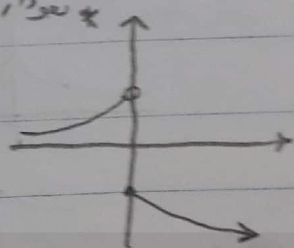
$y=-\sqrt{x+2}$

1) $y=-\sqrt{x}$

2) $y=-\sqrt{x+2}$



* نمودار نهایی



PAPA

Date : / /

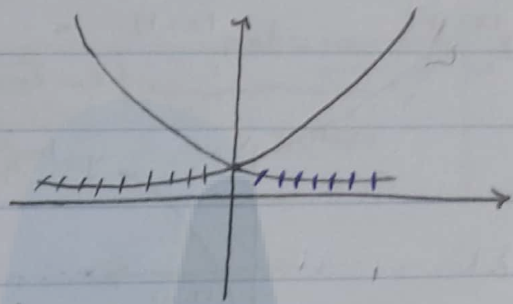
Subject :

مثال نمودار $y=2^{|x|}$ را رسم کنید

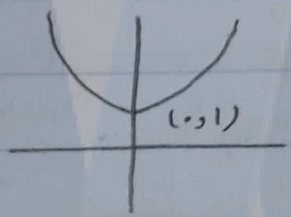
$2^{-x}=(2^{-1})^x=(\frac{1}{2})^x$

$$y=\begin{cases}2^x & x\geq 0\\ 2^{-x} & x<0\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}2^x & x\geq 0\\ (\frac{1}{2})^x & x<0\end{cases}$$



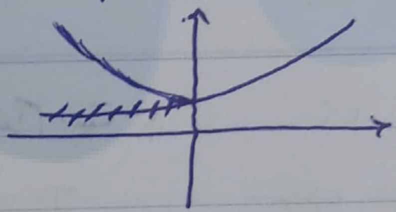
$y=2^{|x|}$



راه ساده‌تر $y=2^{|x|}$

نمودار را برای x های مثبت رسم کنیم. $x\geq 0$ $y=2^x$ قرینه آن را نسبت به محور y ها به دست آوریم

$y=f(|x|)$



نکته: برای رسم $y=f(|x|)$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم ($x\geq 0$) سپس بخش هایی از نمودار f که در سمت چپ محور y ها واقع است را حذف کرده و به جای آن قرینه نمودار $y=f(x)$ در سمت راست محور y ها را در سمت چپ آن را نیز رسم می‌کنیم

مثال: نمودار $y=1+3^{-|x|}$ کدام است؟

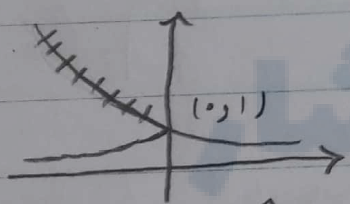
$y=1+(3^{-1})^{|x|}$

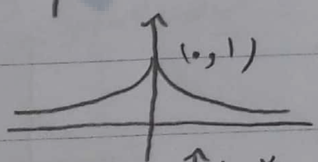
$y=1+(\frac{1}{3})^{|x|}$

1) $y=(\frac{1}{3})^{|x|}$

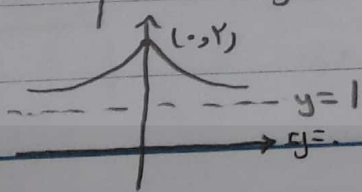
$y=(\frac{1}{3})^x$ $\quad 0<a<1$

2) $y=(\frac{1}{3})^x+1$





$y=(\frac{1}{3})^{|x|}$



Date : / /

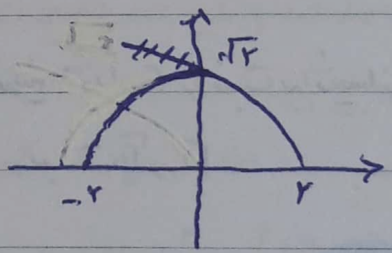
Subject :

مثال: نمودار $y=\sqrt{2-|x|}$ را رسم کنید؟

بدون قدر مطلق $x\geq 0$

$y=\sqrt{2-x}$

$2-x\geq 0 \to x\leq 2$



$\sqrt{2-x} \xrightarrow{x=0} y=\sqrt{2}$ / $\sqrt{2-x} \xrightarrow{x=2} \sqrt{2-2}=\sqrt{0}=0$

* نکته: برای رسم نمودار $y=f(-|x|)$ ابتدا سمت راست $f(x)$ را پاک کرده (حذف) و قرینه سمت چپ را در سمت راست می‌کشیم. *

تابع درجه ۳: درجه = ۰ ⟵ تابع ثابت غیرصفر $y=f(x)=k \begin{cases} k\neq 0 \\ k=0 \end{cases}$

$y=5=5\times x^0$ درجه ۵ صفر است

$y=0$ تابع ثابت صفر

$y=0\times x^1=0$ درجه ۱

$y=0\times x^2=0$ درجه ۲

$y=0\times x^{100}=0$ درجه ۱۰۰

$y=0\times x^{999}=0$ درجه ۹۹۹

$f(x)=0$ درجه تابع ثابت صفر تعریف نمی‌شود

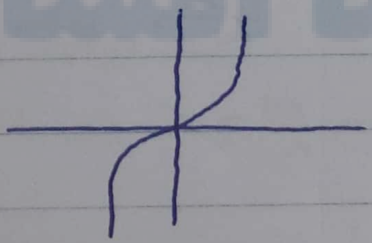
$y=ax+b \quad a\neq 0$ درجه ۱

$y=ax^2+bx+c \quad a\neq 0$ درجه ۲

$y=ax^3+bx^2+cx+d \quad a\neq 0$ درجه ۳

$D=\mathbb{R}$

$R=\mathbb{R}$

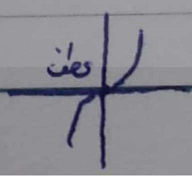


حالت خاص درجه ۳ $y=x^3$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۸	-۱	۰	۱	۸

یک به یک است پس وارون پذیر

عطف



$D=\mathbb{R}$
$R=\mathbb{R}$

Date : / /

Sabject :

توابع زیر چند جمله‌ای نیستند: $y=\sqrt{x^3}$, $y=\frac{x^1}{x}$, $y=x^{-2}+x$ و $y=x|x|$

چون با تعریف چند جمله ای مطابقت ندارد چند جمله ای از حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان های صحیح و نامنفی (حسابی) متغیر ها ایجاد می‌شود

همه جواب های حقیقی $4x^2-40[x]+51=0$ را بنویسید؟

$$4x^2-40[x]+51=0 \to [x]=\frac{4x^2+51}{40}$$ شرط وجود جواب $k\in \mathbb{Z}$, $k>0$

$$x^2=\frac{40k-51}{4} \leftarrow$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{40k-51}}{2} \Longrightarrow \left[\frac{\sqrt{40k-51}}{2}\right]=k \Rightarrow k\le\frac{\sqrt{40k-51}}{2}<k+1$$

غ ق ق ، $x>0$

$$\Longrightarrow 2k\le\sqrt{40k-51}<2k+2 \xrightarrow[\text{است و } k\in\mathbb{Z}]{k>0} 4k^2\le 40k-51<4k^2+8k+4$$

$4k^2-40k+51\le 0$, $0<4k^2-40k+8k+4+51$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4k^2-40k+51\le 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\le k\le\frac{17}{2} \\ 4k^2-32k+55>0 \Rightarrow k<\frac{5}{2} \text{ یا } k>\frac{11}{2} \end{cases} \overset{\cap}{\Longrightarrow} \frac{3}{2}\le k<\frac{5}{2} \text{ یا } \frac{11}{2}<k\le\frac{17}{2}$$

** حل تعیین علامت

$$\Longrightarrow k=2,6,7,8$$

$$x=\frac{\sqrt{29}}{2} , x=\frac{\sqrt{189}}{2} , x=\frac{\sqrt{229}}{2} , \frac{\sqrt{269}}{2}$$

- تابع چند جمله ای f از درجه سوم مفروض است اگر ریشه های معادله $\underbrace{f(x)}_{a}=0$ ، $x=1$ ، $x=-2$ و $x=3$ باشد $f(-1)=16$ ضابطه f را مشخص کنید

$$f(x)=a(x-1)(x+2)(x-3)$$

$$f(-1)=a(\overbrace{-1-1}^{-2})(\overbrace{-1+2}^{1})(\overbrace{-1-3}^{-4})$$

$$f(-1)=8a=16 \longrightarrow a=\frac{16}{8}=2$$

Date : / /

Sabject :

تابع صعودی ، تابع صعودی اکید ، تابع نزولی ، تابع نزولی اکید

تعریف تابع صعودی : تابع f را صعودی گوییم هرگاه با افزایش x ها ، y ها افزایش یابد یا y ها ثابت بماند
به عبارت دیگر با کاهش x ها ، y ها کاهش یابد یا y ها ثابت بماند

تعریف صعودی به زبان ریاضی :

$$\underset{\text{هر}}{\forall}\, x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

$$x_2 - x_1 > 0 \qquad f(x_2) - f(x_1) \ge 0$$

تعریف ۲ صعودی به زبان ریاضی :

طرفین $\div \overset{+}{(x_2 - x_1)}$

شیب $\leftarrow \boxed{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}} \ge \dfrac{0}{x_2 - x_1}$

تعریف ۲ صعودی (فصل مشتق) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0}$$

تعریف تابع صعودی اکید : تابع f را صعودی اکید گوییم هرگاه با افزایش x ها ، y ها فقط افزایش یابد به
عبارت دیگر با کاهش x ها ، y ها فقط کاهش یابد

تعریف تابع صعودی اکید به زبان ریاضی :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$$

تعریف ۲ تابع صعودی اکید (فصل مشتق)

طرفین $\div \overset{+}{(x_2 - x_1)}$

$$\underset{+}{x_2 - x_1} > 0 \qquad f(x_2) - f(x_1) > 0$$

شیب $\leftarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \dfrac{0}{x_2 - x_1} \longrightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \to \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0}$$

Date : / /
Sabject :

نتیجه: هر تابع صعودی اکید حتماً صعودی است اما صعودی حتماً صعودی اکید نیست.

تعریف تابع نزولی: تابع f را نزولی گوییم هرگاه با افزایش xها، yها کاهش یابد یا ثابت بماند یا به عبارت دیگر با کاهش xها، yها افزایش یابد یا ثابت بماند.

تعریف تابع نزولی به زبان ریاضی:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

تعریف ۲ تابع نزولی (فصل مشتق):

$$x_2 - x_1 > 0 \qquad f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \qquad \xrightarrow{\text{طرفین} \div \overset{+}{x_2 - x_1}}$$

$$\text{شیب} \leftarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{0}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{نزولی}$$

تعریف نزولی اکید: تابع f را نزولی اکید گوییم هرگاه با افزایش xها، yها فقط کاهش یابد یا به عبارت دیگر با کاهش xها، yها فقط افزایش یابد.

تعریف نزولی اکید به زبان ریاضی:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تعریف ۲

$$\underbrace{x_2 - x_1 > 0}_{+} \qquad f(x_2) - f(x_1) < 0 \qquad \xrightarrow{\overset{+}{x_2 - x_1} \div}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$$

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \quad \text{f نزولی اکید}$$

Date : / /

Subject :

نتیجه: نزولی اکید باشد حتماً نزولی هم است ولی نزولی حتماً نزولی اکید نیست.

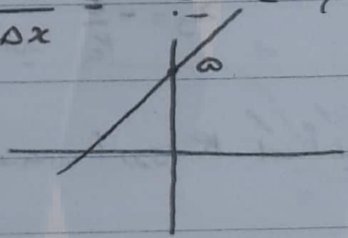
تذکر: اگر تابع f فقط صعودی اکید یا فقط نزولی اکید باشد می‌گوییم اکیداً یکنوا است.

تذکر: اگر تابع f فقط صعودی یا فقط نزولی باشد می‌گوییم یکنوا است.

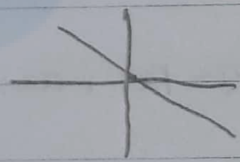
مثال: اکیداً یکنوایی یا یکنوایی توابع زیر را تحقیق کنید.

1) $y = 2x + 5$ $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ شیب $= 2 > 0$ صعودی اکید (صعودی)

x	y
0	5
1	7



2) $y = -3x$ $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -3 < 0$ نزولی اکید (نزولی)



3) $y = 8$ تابع ثابت $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ شیب

صعودی $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ $\rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$

هم صعودی و هم نزولی

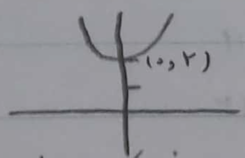
نکته: اگر $y = ax + b$ مفروض باشد داریم:

1) $a = 0 \leftarrow y = b$ ، هم صعودی و هم نزولی (تابع ثابت)

2) f صعودی اکید $\rightarrow a > 0$

3) f نزولی اکید $\rightarrow a < 0$

4) $y = x^2 + 2$



نزولی اکید: $(-\infty, 0]$

صعودی اکید: $[0, +\infty)$

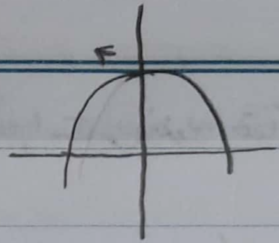
روی دامنه‌اش یکنوا نیست و اکیداً یکنوا هم نیست

همه جا یک رفتار را ندارد. (اگر دامنه را محدود کنیم)

PAPA

Date : / /
Subject :

۵) $y=-x^2+4$

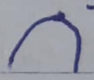


صعودی اکید : $(-\infty, 0]$

نزولی اکید : $[0,+\infty)$

روی R یک رفتار ندارد پس یکنوا و اکیدا یکنوا نیست

نکته: تابع $y=ax^2+bx+c$ باشد داریم $a\neq 0$



۱) $[-\infty,-\frac{b}{2a}]$ صعودی اکید

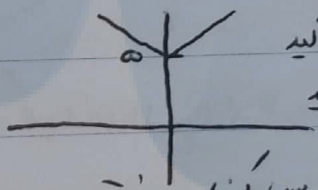
۲) $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ نزولی اکید

۱) $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ نزولی اکید

۲) $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ صعودی اکید

سهمی f روی R اکیداً یکنوا نیستند.

۶) $y=|x|+5$

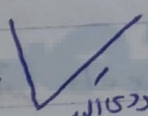


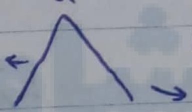
صعودی اکید $[0,+\infty)$

نزولی اکید $(-\infty,0]$

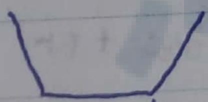
روی R یک رفتار را ندارد اکیداً یکنوا نیست پس یکنوا هم نیست.

نکته: $y=k|x-a|+b$ روی R اکید یکنوا و یکنوا نیستند





نکته: $y=|x-a|+|x-b|$ مفروض باشد داریم:



۱) $(-\infty,a]$: نزولی اکید

۲) $(-\infty,b]$: نزولی

۳) $[a,b]$: (تابع ثابت) هم صعودی هم نزولی

۴) $[a,+\infty)$: صعودی

۵) $[b,+\infty)$: صعودی اکید

PAPA

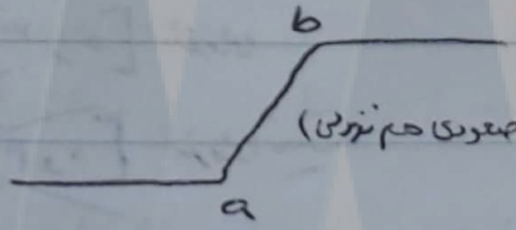
Date : / /

Sabject :

نکته: $y=|x-a|-|x-b|$ به صورت زیر است:

- حالت اول

$a<b$



1) $[b,+\infty)$ و $(-\infty,a]$: تابع ثابت (هم صعودی هم نزولی)

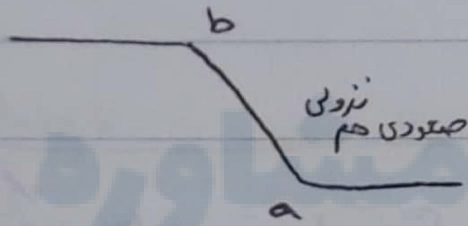
2) $(-\infty,b]$: صعودی

3) $[a,b]$: صعودی اکید

نتیجه حالت اول: $a<b$ تابع روی دامنه صعودی است در این حالت در هیچ بازه‌ای نزولی نیست

- حالت دوم

$a>b$



1) $[a,+\infty)$ و $(-\infty,b]$ تابع ثابت هم صعودی هم نزولی

2) $(-\infty,a]$: نزولی

3) $[b,a]$: نزولی اکید

نتیجه حالت دوم: روی R نزولی است در این حالت در هیچ بازه‌ای صعودی نیست

نکته بسیار مهم: تمرین کتاب درسی: اگر f صعودی اکید باشد $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \leq b$

اثبات: اثبات به روش برهان خلف $a \leq b$ نباشد یعنی $a > b$

$f(a) \leq f(b) \xrightarrow[\text{f را حذف کنیم}]{\text{f صعودی اکید}} a \leq b$

جهت عوض نمی‌شود.

$a > b \xrightarrow{\text{f صعودی اکید}} \underbrace{f(a) > f(b)}$

تناقض با فرض مسئله پس $a \leq b$

برهان خلف باطل حکم ثابت

نکته: اگر f نزولی اکید و $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \geq b$

اثبات: به روش برهان خلف $a \geq b$ نباشد یعنی $a < b$

$f(a) \leq f(b) \xrightarrow[\text{f نزولی اکید}]{\text{f حذف}} a \geq b$

جهت عوض می‌شود

$a < b \xrightarrow{\text{f نزولی اکید}} \underline{f(a) > f(b)}$

تناقض با فرض مسئله

$a \geq b$ برهان خلف باطل پس

مثال: اگر f صعودی اکید و $g(x) = \sqrt{f(|x|) - f(|2x-1|)}$ باشد D_g کدام است؟

$D_g: f(|x|) - f(|2x-1|) \geq 0 \to \cancel{f}(|x|) \geq \cancel{f}(|2x-1|)$

$\xrightarrow[\text{f حذف}]{\text{f صعودی اکید}} |x| \geq |2x-1| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 \geq (2x-1)^2$

$x^2 - (2x-1)^2 \geq 0 \to (x-2x+1)(x+2x-1) \geq 0$

$\to (-x+1)(2x-1) \geq 0$

$\frac{1}{3}$ ، 1 : $-$ 0 $+$ 0 $-$

1 ، $\frac{1}{2}$

$[\frac{1}{2}, 1]$

ax^2

$-2x^2$ $a < 0$

Date : / /

Subject :

مهم نکته : $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ روی $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ اکیداً یکنوا نیست ولی $ad-bc>0$ ،
$(-\infty,-\frac{d}{c})$ و $(-\frac{d}{c},+\infty)$ صعودی اکیداست اما ، $ad-bc<0$ باشد روی
$(-\infty,-\frac{d}{c})$ ، $(-\frac{d}{c},+\infty)$ نزولی اکید است ولی اکیداً یکنوا و یکنوا نیست .

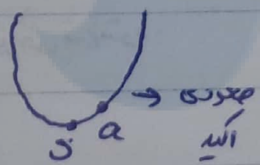
* نکته بسیار مهم : سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ داریم :

$$a\neq 0$$
$$x_S=-\frac{b}{2a}$$

شرط آنکه این تابع در بازه $[\alpha,+\infty)$ صعودی اکید باشد آن است که :

1) $a>0$

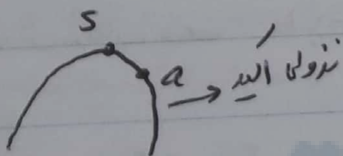
2) $\alpha\geq x_S$



شرط آنکه این تابع در بازه $[\alpha,+\infty)$ نزولی اکید باشد آن است که :

1) $a<0$

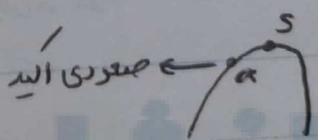
2) $\alpha\geq x_S$



* نکته : برای آنکه سهمی در بازه $(-\infty,\alpha]$ صعودی اکید باشد آن است که :

1) $a<0$

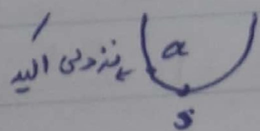
2) $\alpha\leq x_S$



برای آنکه سهمی در بازه $(-\infty,\alpha]$ نزولی اکید باشد آن است که :

1) $a>0$

2) $\alpha\leq x_S$



Date : / /
Subject :

بخش پذیری و تقسیم و مطالب مربوط به آن

$$\begin{array}{r|l} ۱۲ & ۵ \\ \hline ۱۰ & ۲ \end{array}$$
مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت، ۲ باقی‌مانده

باقی‌مانده + خارج قسمت × مقسوم علیه = مقسوم : رابطهٔ تقسیم

محاسبه باقی‌مانده و خارج قسمت $P(x)$ بر $ax+b$ (به ۳ روش)

$$\begin{array}{l|l} P(x) & ax+b \\ \hline \vdots & Q(x) \\ R & \end{array}$$

R (عدد مستقل از x و ثابت درجه ۱)

اتحاد $P(x)=(ax+b)\times Q(x)+R$: رابطهٔ تقسیم

$x=-\frac{b}{a}$ ریشه مقسوم علیه $\xrightarrow{*} P(-\frac{b}{a})=\overbrace{0\times Q(x)}+R$

$R=P(-\frac{b}{a})$

$$\boxed{R=P(\text{ریشه مقسوم علیه})}$$

مثال: خارج قسمت و باقی‌مانده $۳x^۲+۵x-۹$ بر $x-۱$ بدست آورید (به ۳ روش)

روش اول، ریاضی دهم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{۳x^۲}+۵x-۹ & x-۱ \\ \hline \ominus\cancel{۳x^۲}\oplus ۳x & ۳x+۸ \\ \hline ۸x-۹ & Q(x) \\ \ominus ۸x \oplus ۸ & \\ \hline -۱=R & \end{array}$$

رابطهٔ تقسیم : $۳x^۲+۵x-۹=(x-۱)(۳x+۸)+(-۱)$

روش دوم:

$R=P(\text{ریشه مقسوم علیه})=P(۱)=۳(۱)^۲+۵(۱)-۹=۳+۵-۹=\underline{\underline{-۱}}$

رابطهٔ تقسیم : $۳x^۲+۵x-۹=(x-۱)\underline{Q(x)}+(-۱)$

$cx+d \rightarrow ۳x+۸$

$۳x^۲+۵x-۹=cx^۲+dx-cx-d-۱$

$\underline{۳x^۲}+۵x-۹=\underline{cx^۲}+(d-c)x-d-۱$ هم ارز با متحد، اتحاد دادن، مقایسه کردن

$\boxed{c=۳}$ $\quad d-c=۵ \rightarrow d-۳=۵ \rightarrow \boxed{d=۸}$

PAPA

Date: / /
Subject:

روش سوم: جدول هرنر

۱	۳	۵	-۹
	۳	۸	-۱ → R همواره باقی مانده
	۳	۸	

÷۱ ضرب x مقسوم علیه

درجه مقسوم = ۲
درجه مقسوم علیه = ۱
درجه خارج قسمت = ۲-۱=۱

خارج قسمت: $3x+8$

مثال ۲: باقی مانده و خارج قسمت $4x^3+5x^2+8x-1$ بر $2x+1$ را به ۳ روش

۱) روش ریاضی دهم

$$\begin{array}{l|l} 4x^3+5x^2+8x-1 & 2x+1 \\ \hline -4x^3-2x^2 & 2x^2+\frac{3}{2}x+\frac{13}{4} \\ \quad 3x^2+8x & \\ \quad -3x^2-\frac{3}{2}x & \\ \quad\quad \frac{13}{2}x-1 & \\ \quad\quad -\frac{13}{2}x-\frac{13}{4} & \\ \quad\quad\quad -\frac{17}{4}=R & \end{array}$$

$\frac{4x^3}{2x}=2x^2$

$\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}x$

$\frac{\frac{13}{2}x}{2x}=\frac{13}{4}$

۲) روش جدول هرنر

اول خودش — ریشه مقسوم علیه

$-\frac{1}{2}$	۴	۵	۸	-۱
	۴	۳	$\frac{13}{2}$	$-\frac{17}{4}$ → R باقی مانده
	۲	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$	

÷۲ ضرب مقسوم علیه

درجه مقسوم = ۳
درجه مقسوم علیه = ۱
درجه خارج قسمت = ۳-۱=۲

$Q(x)=2x^2+\frac{3}{2}x+\frac{13}{4}$

۳) روش $r(x)=p(-\frac{b}{a})$

$R=P(-\frac{b}{a})=P(-\frac{1}{2})=-\frac{17}{4}$

$2x^2+\frac{3}{2}x+\frac{13}{4}$

$4x^3+5x^2+8x-1=(2x+1)(cx^2+dx+f)+(-\frac{17}{4})$

$4x^3+5x^2+8x-1=2cx^3+\underbrace{2dx^2+cx^2}_{(2d+c)x^2}+\underbrace{dx+2fx}_{(d+2f)x}+f$

$2c=4 \to \boxed{c=2}$

$2d+2=5 \to 2d=3 \to \boxed{d=\frac{3}{2}}$

$\frac{3}{2}+2f=8$

$2f=\frac{13}{2}$

$\boxed{f=\frac{13}{4}}$

PAPA

Date : / /

Subject :

مثال ۳: باقی مانده و خارج قسمت $5x^4+7x^3-2x-10$ بر $x-1$ به روش هورنر محاسبه کنید

باید توجه کنیم مقسوم استاندارد باشد $0x^2$

اگر نباشد ضریب آنهایی که نیستند صفر است

1	5	7	0	-2	-10
	5	12	12	10	$0 \to R$
$\div 1$	5	12	12	10	

درجه مقسوم = ۴

درجه مقسوم علیه = ۱

درجه خارج قسمت = ۴-۱=۳

$Q(x)=5x^3+12x^2+12x+10$ خارج قسمت

نتیجه: اگر باقی مانده تقسیم $P(x)$ (مقسوم) بر مقسوم علیه صفر شود گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است

در این حالت به مقسوم علیه و خارج قسمت فاکتورهای مقسوم می گویند.

$5x^4+7x^3+0x-2x+10=(x-1)(5x^3+12x^2+12x+10)+0$ رابطه تقسیم

مثال: m را طوری تعیین کنید که عبارت $3x^2+(2m-1)x+5$ بر $x-2$ بخش پذیر باشد.

$-\frac{b}{a}=2$

$r(x)=P(-\frac{b}{a})=3(2)^2+(2m-1)\times 2+5=0$

$12+4m-2+5=0$ $\quad 4m=-15$

$\boxed{m=-\frac{15}{4}}$

محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر عبارت درجه ۲ قابل تجزیه (اگر $\Delta>0$ ← قابل تجزیه اگر $\Delta<0$ قابل تجزیه نیست)

دو ریشه متمایز و حقیقی $\Delta>0$ چه
ریشه نداشته باشد $\Delta<0$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (ax+b)(cx+d) \\ \vdots & Q(x) \\ \hline R(x)=mx+h & \end{array}$$

اتحاد

رابطه تقسیم: $P(x)=\underbrace{(ax+b)}_{\text{ریشه}}\underbrace{(cx+d)}_{\text{ریشه}}Q(x)+mx+h$

$x=-\frac{b}{a} \qquad x=-\frac{d}{c}$

$$\begin{cases} P(-\frac{b}{a})=m\times -\frac{b}{a}+h \\ P(-\frac{d}{c})=m\times -\frac{d}{c}+h \end{cases}$$

در دستگاه فقط m, h مجهول هستند به روش حذفی دستگاه را حل می‌کنیم m و h را بدست می‌آوریم در $R(x)=mx+h$ جایگذاری می‌کنیم

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-2$ برابر ۳ و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x+5$ برابر ۱- باشد باقی‌مانده تقسیم را بر $x^2+3x-10$ بدست آورید

قابل تجزیه $(x+5)(x-2)$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x^2+3x-10 \\ \hline & Q(x) \end{array}$$

$R(x)=mx+h$

رابطه تقسیم: $P(x)=(x+5)(x-2)\times Q(x)+mx+h$

$x=-5 \to \underbrace{P(-5)}_{-1}=m\times -5+h$

$x=2 \to \underbrace{P(2)}_{3}=m\times 2+h$

$$\begin{cases} -5m+h=-1 \\ 2m+h=3 \end{cases}$$

$m=\frac{4}{7} \quad h=\frac{13}{7}$

$R(x)=\frac{4}{7}x+\frac{13}{7}$

PAPA

مثال: اگر باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+3$ برابر -7 و باقی مانده تقسیم آن بر $x+1$ برابر صفر باشد باقی مانده تقسیم x^2+4x+3 را به دست آورید.

تحلیل تجزیه: $(x+3)(x+1)$

$P(x)$ بر x^2+4x+3، خارج قسمت $Q(x)$

$R(x)=mx+n$

$$\boxed{R(x)=\frac{7}{2}x+\frac{7}{2}}$$

رابطه تقسیم: $P(x)=\overbrace{(x+3)(x+1)Q(x)}^{0}+mx+n$

$x=-3 \to \overbrace{P(-3)}^{-7}=m\times -3+n$

$x=-1 \to \underbrace{P(-1)}_{0}=m\times -1+n$

$$\begin{cases}-3m+\cancel{n}=-7\\ -m+\cancel{n}=0\end{cases} \longrightarrow -\frac{7}{2}+n=0 \qquad \boxed{n=\frac{7}{2}}$$

$$-2m=-7$$

$$m=\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2} \qquad \boxed{m=\frac{7}{2}}$$

محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر درجه ۲ غیر قابل تجزیه:

مثال: باقی مانده $3x^3+7x-9$ بر x^2+1 به روش ریاضی دهم به دست آوردیم.

$3x^3+7x-9$ بر x^2+1، خارج قسمت $3x$

$\cancel{\mp 3x^3}\mp 3x$

$R(x)=4x-9$

روش دوم:

$x^2+1=0 \to x^2=-1$

$R=3x^2\times x+7x-9$

$=3(-1)\times x+7x-9$

$=-3x+7x-9=4x-9$

Date : / /

Subject :

مثال: باقی مانده تقسیم $4x^5+3x^3+4x^2+1$ را بر x^2+2 به روش فوق بدست آورید

$$x^2+2=0 \to x^2=-2$$

$$R(x)=4(x^2)^2\times x+3(x^2)\times x+4x^2+1=4(-2)^2\times x+3(-2)x+4(-2)+1$$
$$=16x-6x-7=10x-7$$

باقی مانده تقسیم x^3+2x-4 را بر x^2+x+1 بدست آورید

$$x^2+x+1=0 \to x^2=-x-1$$

$$R(x)=x^2\times x+2x-4=(-x-1)\times x+2x-4=-x^2-x+2x-4$$
$$=-(-x-1)+x-4=x+1+x-4=2x-3$$

محاسبه باقی مانده و خارج قسمت $x^n\pm a^n$ بر $x\pm a$

$$x^n-a^n \,\big|\, x-a \qquad P(x)=x^n-a^n$$

$R=P($ریشه مقسوم علیه$)=P(a)=a^n-a^n=0$

نتیجه: x^n-a^n همواره بر $x-a$ بخش پذیر

مهم ← $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots+a^{n-2}x+a^{n-1})$

$$x^n-a^n \,\big|\, x+a \qquad P(x)=x^n-a^n$$

$R=P($ریشه مقسوم علیه$)=P(-a)=(-a)^n-a^n=\begin{cases}a^n-a^n=0 & \text{زوج } n\\ -a^n-a^n=-2a^n & \text{فرد } n\end{cases}$

نتیجه: x^n-a^n زمانی بر $x+a$ بخش پذیر است که n زوج باشد.

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots+a^{n-2}x-a^{n-1})$$

Date : / /

Subject :

$$x^7-128=x^7-2^7=(x-2)(x^6+2x^5+4x^4+8x^3+16x^2+32x+64)$$

$$=(x-2)(x^6+2x^5+2^2x^4+2^3x^3+2^4x^2+2^5x+2^6)$$

$$x^5-32=(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$$

$$x^6-64=(x+2)(x^5-2x^4+4x^3-8x^2+16x-32)$$

n زوج

$x^n+a^n \,|\, x+a$ $\qquad p(x)=x^n+a^n$ $\qquad a+x=0$

$x=-a$ ریشه مقسوم علیه

$$R=P(\text{ریشه مقسوم علیه})=P(-a)=(-a)^n+a^n=\begin{cases} a^n+a^n=2a^n & \text{n زوج} \\ -a^n+a^n=0 & \text{n فرد} \end{cases}$$

نتیجه: x^n+a^n زمانی بر $x+a$ بخش پذیر است که n فرد باشد

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\dots-a^{n-2}x+a^{n-1})$$

$x^n+a^n \,|\, x-a$ $\qquad p(x)=x^n+a^n$ $\qquad x-a=0$

$x=a$ ریشه مقسوم علیه

$$R=P(a)=a^n+a^n=2a^n$$

نتیجه: x^n+a^n هیچگاه بر $x-a$ بخش پذیر نیست

PAPA

Date : / /

Sabject :

مثال : حاصل عبارت A کدام است؟

$$A=\frac{(x^5+1)(x^2-x+1)}{x^3+1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x^4-x^3+x^2-x+1)\cancel{(x^2-x+1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x^2-x+1)}}$$

x^n+a^n بر $x+a$ بخش پذیر است وقتی n فرد

$$=\boxed{x^4-x^3+x^2-x+1}$$

$$B=\frac{(x^2-1)(x^6+x^5+\dots+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+\dots+1)}{x^{14}-1}$$

$$=\frac{(x-1)(x+1)(x^6+x^5+\dots+1)(x^6-x^5+x^4-\dots+1)}{x^{14}-1}=\frac{(x^7+1)(x^7-1)}{x^{14}-1}$$

$$=\boxed{\frac{x^{14}-1}{x^{14}-1}=1}$$

$(x-1)(x^6+x^5+\dots+1)=x^7-1$ ①

$(x+1)(x^6-x^5+x^4-\dots+1)=x^7+1$ ②

مثال : باقی مانده تقسیم $x^{10}-1$ برابر x^2+2x+4 بدست آورید؟

$$\underbrace{(x\pm a)}_{\text{لاغر}}\underbrace{(x^2\mp ax+a^2)}_{\text{چاق}}=x^3\pm a^3$$

$$x^2+2x+4=0\xrightarrow{(x-2)}\overbrace{(x-2)(x^2+2x+4)}^{x^3-8}=x^3-8\rightarrow x^3=8$$

$$R=(x^3)^3\times x-1=(8)^3x-1=\underline{512x-1}$$

$$x^9\times x-1=x^{10}-1$$

مثال : باقی مانده تقسیم $P(x)=x^{1386}+x^{50}+3x-1$ را بر x^2-x+1 بدست آوریم؟

درجه باقی مانده حداقل یک واحد باید مقسوم علیه کمتر باشد.

$$x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)\qquad x^3+1=0\rightarrow x^3=-1$$

$$(x^3)^{462}+(x^3)^{16}x^2+3x-1$$

$$=-1+x^2+3x-1=x^2+3x-2$$

$$x^2-x+1=0\rightarrow x^2=x-1\qquad x-1+3x-2=4x-3$$

Date : / /

Sabject :

نکته: برای محاسبه باقی‌مانده $P(x)$ بر $x^2+a^2\pm ax$ کافی است $P(x)$ بر $x^3\pm a^3$ تقسیم کنیم.

تست: باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)(x-2)$ برابر $2x+1$ است باقی‌مانده تقسیم $3x - P(x+2)$ بر $x+1$ کدام است؟

$$P(1) = (1-1)(1-2)Q(1) + \underbrace{2(1)+1}_{} = 3$$

$$P(x) = (x-1)(x-2)\times Q(x) + 2x+1$$

$$R = f(\text{ریشه مقسوم علیه}) = f(-1) = 3(-1) - P(-1+2) = -3 - P(1)$$

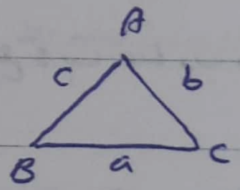
$$= -3 - 3 = \boxed{-6}$$

نکته: همیشه درجه باقی‌مانده باید حداقل یک واحد کمتر از درجه مقسوم علیه باشد.

فصل دوم

« مثلثات پایه ۱۲ »

یادآوری:



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B$$

قضیه سینوس‌ها:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

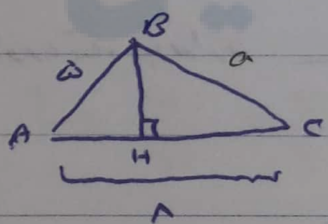
قضیه کسینوس‌ها:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$$

نکته: در چهار ضلعی که یکی از قطرها d و قطر دیگری d' باشد و زاویه حاده بین d و d' باشد α

$$S=\frac{1}{2}dd'\sin\alpha$$

مثال: مساحت مثلث ABC برابر ۱۴ واحد مربع است اگر $b=8$ و $c=5$ اندازه ضلع متوسط a کدام است؟



$$14=\frac{1}{\cancel{2}}\times 5\times \cancel{8}^{4}\sin A$$

$$\sin A=\frac{14}{20}=\frac{4}{5}$$

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{14}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

۱) $\sqrt{39}$
۲) $\sqrt{41}$
۳) $3\sqrt{5}$
۴) $5\sqrt{2}$

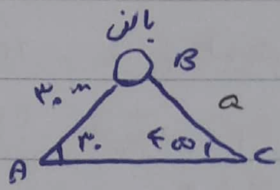
PAPA

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=64+25-2\times 8\times \cancel{5}\times\frac{3}{\cancel{5}}=41$$
$$a=\sqrt{41}$$

Date : / /
Subject :

یک بالن مطابق شکل زیر توسط دو طناب به زمین بسته شده است اگر طول یکی از طناب ها ۳۰ متر باشد طول طناب دوم تقریبا چند متر است؟

۲۰ (۱
۲۱ (۲
۲۳ (۳
۲۵ (۴



$$\frac{30}{\sin 45} = \frac{a}{\sin 30}$$

$$\frac{30}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{\frac{1}{2}} \longrightarrow 2a = \frac{60}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{\frac{60}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{60}{2\sqrt{2}} = \frac{60\sqrt{2}}{4} \simeq 21$$

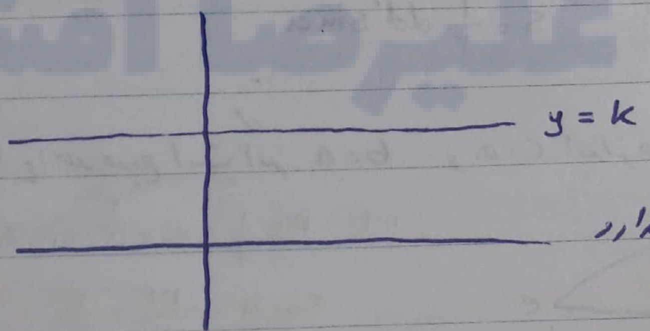
نکته مهم: توابع ثابت متناوب هستند ولی دوره تناوب ندارد (مربوط به مثال پایین)

$$y = a\sin^{2k-1}(bx+c)+d$$
$$y = a\cos^{2k-1}(bx+c)+d$$
$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$
ضریب ۲

$$\left.\begin{array}{l} y = a\sin^{2k}(bx+c)+d \\ y = a\cos^{2k}(bx+c)+d \\ y = a\tan^{k}(bx+c)+d \\ y = a\cot^{k}(bx+c)+d \end{array}\right\} T = \frac{\pi}{|b|}$$

مثال: دوره تناوب تابع های زیر را بدست آورید

1) $y = k$ (تابع ثابت)



دوره تناوب ندارد

Date : / /

Sabject :

نکته مهم: $y=\cot x\times\tan x$ متناوب است و دوره تناوب آن $T=\frac{\pi}{2}$ است

نکته: $y=\tan bx\times\cot bx$ متناوب است و دوره تناوب آن $T=\frac{\pi}{2|b|}$

۲) $y=\tan x\times\cot x \to y=\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin x\cos x}=\frac{\sin 2x}{\sin 2x}$

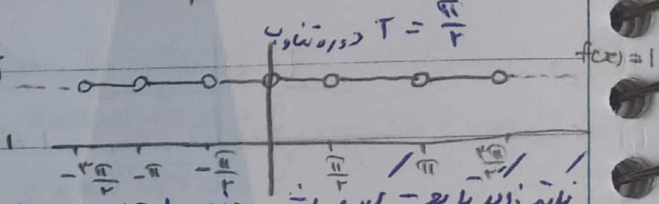
غلط $\forall x\in\mathbb{R}\quad y=f(x)=1$ $\qquad \sin 2x=0 \to 2x=k\pi$

$\forall x\in D_f : f(x)=1$ $\qquad \to x=\frac{k\pi}{2}$ ریشه مخرج

$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\dots,-\pi,-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2},\pi,\dots\right\}$

$\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\dots,-\pi,-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2},\pi,\dots\right\}\to f(x)=1$

دوره تناوب $T=\frac{\pi}{2}$



نکته: اگر تابع ترکیبی باشد یعنی (چپ و کل اصلی) بکار رفته باشد اول ساده کنیم بعد دوره تناوب را محاسبه کنیم

1) $f(x)=\cot 9x+\tan 9x=\frac{2}{\sin 2\times 9x}=\frac{2}{\sin 18x}$ $\qquad * \cot a+\tan a=\frac{2}{\sin 2a}$

$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|18|}=\frac{2\pi}{18}=\frac{\pi}{9}$

2) $f(x)=\cot 11x-\tan 11x$ $\qquad * \cot a-\tan a=2\cot 2a$

$f(x)=\underline{\underline{2}}\cot 22x$ $\qquad T=\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{22}$

۲ نقش ندارد

3) $y=\frac{\cos^4x-\sin^4x}{\tan x+\cot x}$

$y=\frac{\underbrace{(\cos^2x+\sin^2x)}_{1}\overbrace{(\cos^2x-\sin^2x)}^{\cos 2x}}{\frac{2}{\sin 2x}}=\frac{\frac{\cos 2x}{1}}{\frac{2}{\sin 2x}}=\frac{1}{2}\overbrace{\sin 2x\cos 2x}^{\frac{1}{2}\sin 4x}$

$=\frac{1}{4}\sin 4x$

$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

PAPA $\qquad \sin 2a=2\sin a\cos a$

$\sin 4a=2\sin 2a\cos 2a \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\sin 4a=\sin 2a\cos 2a$

Date : / /

Subject :

نکته :

$$y = a\cos(bx+c)+d$$

$$max = |a|+d$$

$$min = -|a|+d$$

$$d = \frac{max+min}{2}$$

$$y = a\sin(bx+\underline{c})+d$$

c نقش ندارد

$$max = |a|+d$$

$$min = -|a|+d$$

$$d = \frac{max+min}{2}$$

$$y = a\sin bx + c$$

$$y = a\cos bx + c$$

$$max = |a|+c$$

$$min = -|a|+c$$

$$c = \frac{max+min}{2}$$

Date : / /

Sabject :

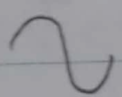
از روی نمودار ضابطه $y=a\cos bx+c$ و $y=a\sin bx+c$

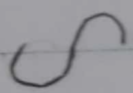
۱) اگر نقطه max یا نقطه min روی محور yها باشد نمودار مربوط به $y=a\cos bx+c$ است در غیر اینصورت مربوط به $y=a\sin bx+c$ است.

۲) اگر نقطه max روی محور yها بود $a>0$ ـ اگر نقطه min روی محور yها بود $a<0$

۳) چون $\cos(bx)=\cos(-bx)$ است علامت b در کسینوس نقش ندارد قرارداد b را همیشه مثبت

۴) $c=\frac{max+min}{2}$ ← انتقال عمودی

۵) اگر در سمت راست محور yها اول max بعد min بود $a>0$  sin

اگر در سمت راست محور yها اول min بعد max بود $a<0$  -sin

۶) اگر در نمودار sin، اگر در سمت راست محور yها اول max بعد min ← a,b هم علامت $(ab>0)$

اگر در نمودار sin، اگر در سمت راست محور yها اول min بعد max ← a,b غیرهم علامت $(ab<0)$

Date : / /

Subject :

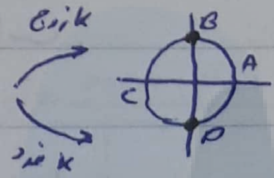
۱_ دامنه تابع $y=\tan x$ $\qquad y=\frac{\sin x}{\cos x}$ کسر

۲_ یکنوایی $y=\tan x$ در چهار ناحیه بررسی کنیم

۳_ نمودار $y=\tan x$

$D_y=\mathbb{R}-\{$ ریشه مخرج $\}$

مخرج $=0 \to \cos x=0 \to x=k\pi+\frac{\pi}{2}$



$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ B

$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ D

حالت خاص

ریشه مخرج : $k\pi+\frac{\pi}{2}$

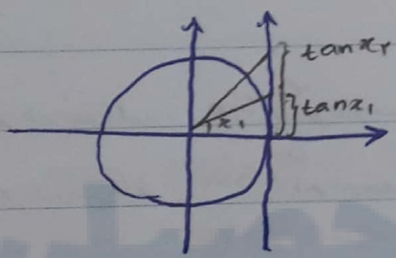
$D=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}=\mathbb{R}-\{\dots,-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\dots\}$

$f(x)=\tan 5x=\frac{\sin 5x}{\cos 5x}$

$\cos 5x=0 \xrightarrow{D,B} 5x=k\pi+\frac{\pi}{2} \to x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$ ریشه مخرج

$D=\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\}$

یکنوایی در چهار ناحیه:



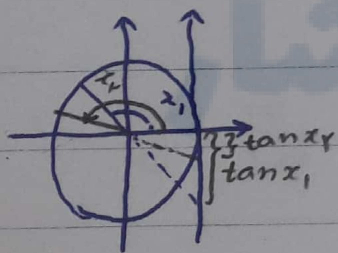
ناحیه اول $0<x<\frac{\pi}{2}$

$x\uparrow \to \tan x\uparrow$

$x\uparrow \to y\uparrow$

صعودی اکید $\quad x_1<x_2 \to \tan x_1<\tan x_2$

در ناحیه اول $y=\tan x$ صعودی اکید شد



ناحیه دوم $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

$x\uparrow \to \tan x\uparrow$

$x\uparrow \to y\uparrow$ صعودی اکید

صعودی اکید $\quad x_1<x_2 \to \tan x_1<\tan x_2$

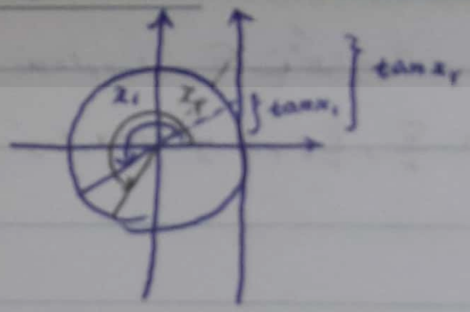
$-0.9<-0.2$

در ناحیه دوم هم صعودی اکید شد

PAPA

Date : / /

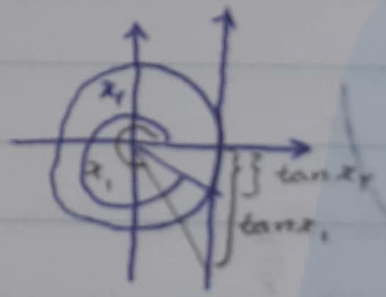
Subject :



در ناحیه سوم $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

$x\uparrow \rightarrow \underbrace{\tan x}_{y} \uparrow$

$x\uparrow \Rightarrow \tan x\uparrow$ صعودی اکید



در ناحیه چهارم $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

$x\uparrow \rightarrow \underbrace{\tan x}_{y} \uparrow$

$x\uparrow \Rightarrow \tan x\uparrow$ صعودی اکید

تابع $y = \tan x$ همواره در دامنه اش صعودی اکید است (نادرست است) مثل تابع $y=\frac{1}{x}$ همه جا نزولی نیست

مثال نقض $x_1 < x_2 \rightarrow \overset{1}{\tan x_1} > \overset{-1}{\tan x_2}$

$x_1 = \frac{\pi}{4} = 45$

$x_2 = \frac{3\pi}{4} = 135$

$x\uparrow \rightarrow \tan x\downarrow$

$\tan x_1 = \tan 45 = 1$

$\tan x_2 = \tan\frac{3\pi}{4} = \tan\left(\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

تابع $y = \tan x$ در هر بازه که تعریف باشد تابع صعودی است (درست)

ناحیه‌ای

PAPA

Date : / /

Subject :

نمودار در بازه π عیناً تکرار می‌شود

نمودار $y=\tan x$ در $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ را می‌خواهیم رسم کنیم

$D=\mathbb{R}-\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\}$

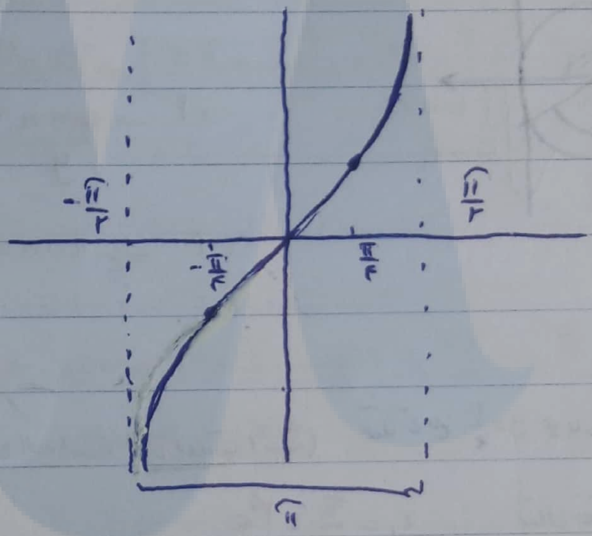
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	$\parallel$	$\nearrow -1$	$\nearrow 0$	$\nearrow 1$	$\parallel$

$y=\tan x$

$T=\pi$

$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

قرارداد جهانی

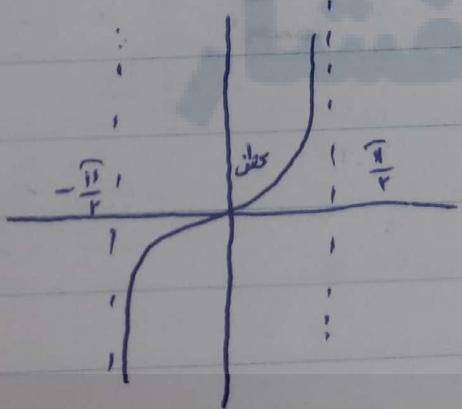


نتیجه مهم: تابع $y=\tan x$ در دامنه‌اش صعودی اکید نیست.

یعنی $y=\tan x$ (مثل $y=\frac{1}{x}$) اکیداً یکنوا نیست.

نتیجه: تابع $y=\tan x$ در هر بازه قابل تعریف شده صعودی اکید است

نتیجه: نمودار $y=\tan x$ در $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ به صورت:



PAPA

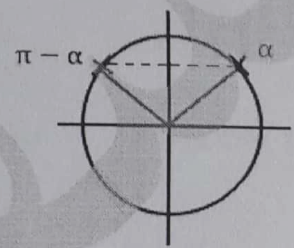
معادلات مثلثاتی

معادله مثلثاتی ، معادله ایی است که مجهول آن در کمان یک نسبت مثلثاتی واقع شده باشد.

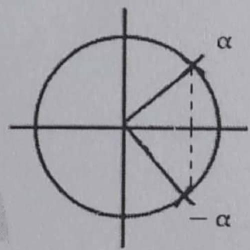
به عنوان مثال $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$ یک معادله مثلثاتی است ولی $\sqrt{x}\sin 2 + 1 = 0$ معادله مثلثاتی نیست.

حل هر معادله ی مثلثاتی ساده باید به یکی از ۴ مورد زیر برسد :

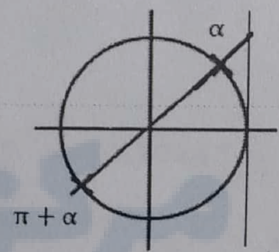
۱) $\sin x = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$



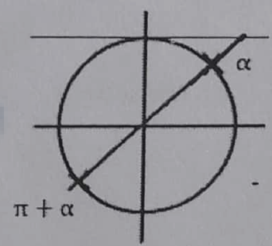
۲) $\cos x = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi \pm \alpha$



۳) $\tan x = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad x = k\pi + \alpha$

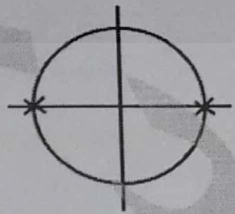


۴) $\cot x = \cot\alpha \quad \Rightarrow \quad x = k\pi + \alpha$

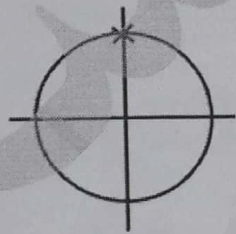


بعضی از معادلات مثلثاتی ساده ی معروف به شرح زیر هستند :

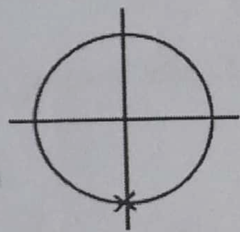
۱) $\sin x = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = k\pi$



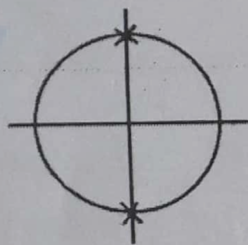
۲) $\sin x = ۱ \quad \Rightarrow \quad x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$



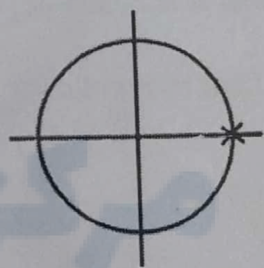
۳) $\sin x = -۱ \quad \Rightarrow \quad x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$



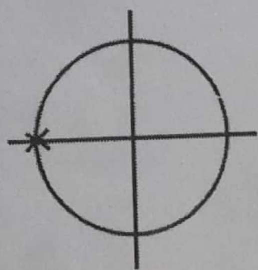
۴) $\cos x = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$



۵) $\cos x = ۱ \quad \Rightarrow \quad x = ۲k\pi$



۶) $\cos x = -۱ \quad \Rightarrow \quad x = ۲k\pi + \pi$



۷) $\tan x = ۰ \quad \Rightarrow \quad \sin x = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = k\pi$

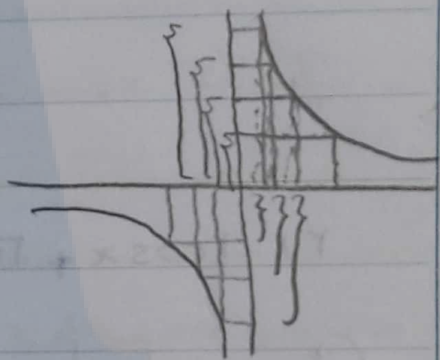
۸) $\cot x = ۰ \quad \Rightarrow \quad \cos x = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

فصل سوم

حدهای نامتناهی

یعنی حاصل حد بی نهایت می شود یعنی x از سمت چپ و راست به قدر کافی به c میل می کنند f(x) بی کران افزایش می یابد یا x از چپ و راست به قدر کافی به c میل میکنند f(x) بی کران کاهش می یابد.

$f(x) = \frac{1}{x}$



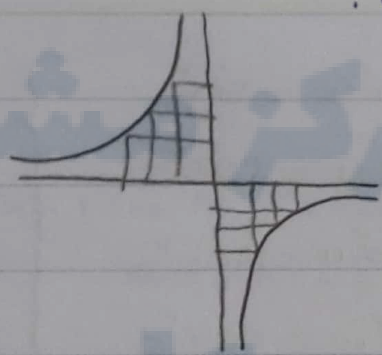
1) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

2) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} =$ وجود ندارد

مطلوبست:

$f(x) = -\frac{1}{x}$



1) $\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty = \frac{-1}{0^+}$

2) $\lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty = \frac{-1}{0^-}$

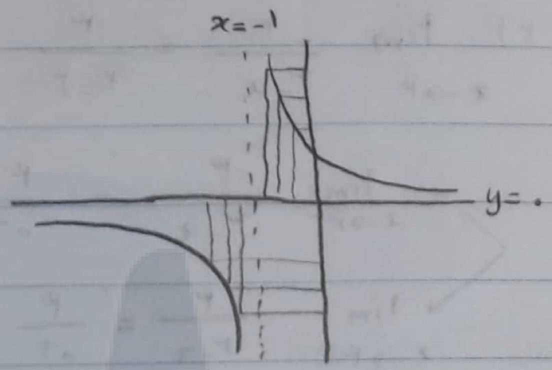
3) $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x} =$ وجود ندارد

PAPA

Date : / /

Sabject :

$f(x) = \frac{1}{x+1}$ $\qquad x+1=0 \to x=-1$



مجانب عمودی

1) $\lim_{x \to (-1)^+} \frac{1}{x+1} = +\infty = \frac{1}{0^+}$

2) $\lim_{x \to (-1)^-} \frac{1}{x+1} = -\infty = \frac{1}{0^-}$

3) $\lim_{x \to (-1)} \frac{1}{x+1} =$ وجود ندارد

$0^+ = 0/00000001$

$0^- = -0/00000001$

$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$

$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$

$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$

$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$

$0 = \frac{0 \text{ مطلق}}{0 \text{ حدی}}$ $\quad \frac{0 \text{ مطلق}}{0^+} = \frac{0}{0/0001} = 0$ $\quad \frac{0 \text{ مطلق}}{0^-} = \frac{0}{-0/0001} = 0$

$\frac{\text{عدد غیر صفر}}{0 \text{ مطلق}} =$ ت ن

مثال: حاصل حدهای زیر را به دست آورید

$x \to 2^+ \to x = 2/0000001$

1) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0 \text{ حدی}}$

$x \to 2^+$

$x > 2 \to x-2 > 0$

		2	
x-2	⊖		⊕

$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x \to 2^-$

$x < 2 \to x-2 < 0$

PAPA $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} =$ وجود ندارد

Date : / /

Subject :

$x \to 3^-$

$x = 2{,}9999$

2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3}{3-x} = \dfrac{3}{3-3} = \dfrac{3}{0}$ صفر

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3}{3-x} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3}{3-x} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$

3		
+	0	−

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3}{3-x} =$ وجود ندارد

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{x^2-4} = \dfrac{3}{0}$ صفر

		-2		2	
x^2-4	+	0	−	0	+

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3}{x^2-4} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3}{x^2-4} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{x^2-4} =$ وجود ندارد

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x+5}{x^2-x} = \dfrac{10}{0}$ صفر

		0		1	
x^2-x	+	0	−	0	+

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{5x+5}{x^2-x} = \dfrac{10}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{5x+5}{x^2-x} = \dfrac{10}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x+5}{x^2-x} =$ وجود ندارد

Date : / /

Sabject :

به خاطر توان ۲ نوع صفر همیشه 0^+ است

$$۵)\ \lim_{x\to 1} \frac{7x-3}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{7x-3}{(x-1)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

به خاطر اینکه حاصل قدر مطلق ها همواره مثبت است نوع 0^+

$$۶)\ \lim_{x\to 0}\frac{9x+3}{|x^2-7x|} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{9x+3}{|x^2-7x|}$

۱) وجود ندارد ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ یا $+\infty$

جواب هر نا متناهی باشد می گوییم وجود ندارد

$$۷)\ \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{[x]-2} = \text{حد ندارد}\ (\text{وجود ندارد})$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{\underbrace{[x]}_{2}-2} = \frac{4}{\text{صفر مطلق}} = \text{تن} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{\underbrace{[x]}_{1}-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{-1} = \lim_{x\to 2^-}(-x-2) = -2-2 = -4$$

$$۸)\ \lim_{x\to 3}\frac{[x]+3}{[x]-3} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\overbrace{[x]}^{3}+3}{\underbrace{[x]}_{3}-3} = \frac{6}{\text{صفر مطلق}} = \text{تن} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\overbrace{[x]}^{2}+3}{\underbrace{[x]}_{2}-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{5}{-1} = -5$$

Date : / /

Subject :

۹) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{\circ} =$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ ناحیه سوم، در ناحیه سوم علامت سینوس منفی

$\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ ناحیه دوم، در ناحیه دوم علامت سینوس مثبت

۱۰) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{\circ}$

وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ ناحیه ۲، در ناحیه ۲ cos علامتش $\ominus$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ ناحیه اول، در ناحیه اول cos علامتش $\oplus$

۱۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1-\sin x} = \dfrac{1}{\circ} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

نکته:

$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} 1 \geq -\sin x \geq -1 \xrightarrow{+1} 2 \geq 1-\sin x \geq 0$

$0 \leq \underbrace{1-\sin x}_{+} \leq 2$

نکته:

$0 \leq 1-\sin x \leq 2$

$0 \leq 1-\cos x \leq 2$

$-2 \leq \sin x - 1 \leq 0$

$-2 \leq \cos x - 1 \leq 0$

۱۲) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = +\infty$

PAPA

Date : / /

Subject :

$0 \times \pm\infty = 0$ مطلق

نکات / اعمال جبری روی حدود نامتناهی

۱) $(+\infty) + L = +\infty$

$L \in \mathbb{R}$

۲) $(-\infty) + L = -\infty$

۳) $L \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & L > 0 \\ -\infty & L < 0 \\ \boxed{0 \times +\infty = 0} & L = 0 \end{cases}$

مطلق

حدی $0 \times \pm\infty =$ مبهم

۴) $L \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & L > 0 \\ +\infty & L < 0 \\ \boxed{0 \times -\infty = 0} & L = 0 \end{cases}$

مطلق

حدی $0 \times -\infty =$ مبهم

۵) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

۶) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

۷) $(+\infty) - \underbrace{(+\infty)}_{-\infty} =$ مبهم

۸) $(-\infty) - \underbrace{(-\infty)}_{+\infty} =$ مبهم

۹) $\begin{cases} +\infty \times +\infty = +\infty \\ +\infty \times -\infty = -\infty \\ -\infty \times -\infty = +\infty \end{cases}$

۱۰) $\frac{+\infty}{-\infty}$ یا $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$ مبهم

۱۱) $(+\infty)^n = +\infty$

PAPA

Date : / /

Subject :

12) $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوج} \\ -\infty & n \text{ فرد} \end{cases}$

13) $|+\infty| = +\infty$

14) $|-\infty| = +\infty$

15) $[\pm\infty] = \pm\infty$

16) $\sqrt{+\infty} = +\infty$

17) $\sqrt[2k-1]{-\infty} = -\infty$

رفع ابهام بی نهایت منهای بی نهایت $(\infty - \infty)$ شماره ۸،۷ ص متن

1) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2-1} \right)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2-1} \right) = \dfrac{1}{0^+} - \dfrac{1}{0^+} = +\infty - (+\infty)$ مبهم ①

$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2-1} \right) = \dfrac{1}{0^-} - \dfrac{1}{0^-} = -\infty - (-\infty)$ مبهم ②

① رفع ابهام : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

② رفع ابهام : $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ وجود ندارد

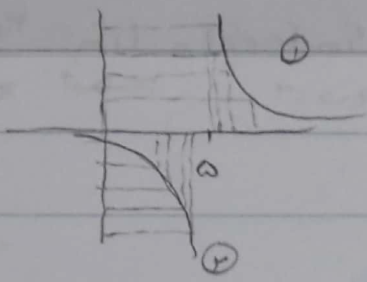
چون نامتناهی هم ندارد

Date : / /
Subject :

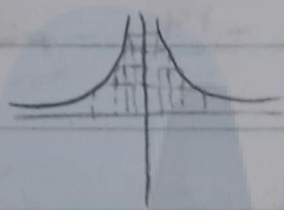
نمودار رسم کنید که

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad (2)$$



$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$



چپ و راست به ۰ نزدیک حد هردو $+\infty$ و نتیجه حد $+\infty$

تعریف مجانب قائم (مجانب عمودی) کاربرد حدهای نامتناهی

خط $x=a$ مجانب عمودی تابع f گوییم هرگاه یکی از چهار شرط روبه‌رو اتفاق بیفتد

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

$x=a$

1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

3) $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

4) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

تذکر: از بین ریشه‌های مخرج

ریشه مخرج — مجانب عمودی نیست $x=a$:
- همیشه از همسایگی چپ یا راست a تعریف نشده باشد
- ریشه مخرج، ریشه صورت هم باشد، بعد از رفع ابهام حاصل عدد شود

مجانب های عمودی تابع های زیر را به دست آورید

1) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

$x-2=0$

$x=2$ ادامه می‌بینیم مجانب عمودی

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \to x=2$$

مجانب عمودی $f(x)$ است

Date : / /

Subject :

۲) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2+7x}$

$x^2+7x=0$

$x(x+7)=0 \quad \begin{cases} x=0 & \text{ادامه می‌دیم} \\ x=-7 & \text{مورد مجانب عمودی} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x-5}{x^2+7x} = \dfrac{-5}{0^+} = -\infty$

$-7 \qquad 0$

$+ \quad | \quad - \quad | \quad +$

$\lim\limits_{x\to (-7)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to (-7)^+} \dfrac{3x-5}{x^2+7x} = \dfrac{-26}{0^-} = +\infty$

۲ مجانب عمودی دارد

---

۳) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3+2x}$ $\qquad D_f = x \geq 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ وجود ندارد

$(0-\varepsilon, 0) \not\subset D_f$

$x(x^2+2)=0 \quad \begin{cases} x=0 & \text{ادامه می‌دیم} \\ x^2=-2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x^3+2x} \times \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x^2+2)\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\times 0^+} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

۴) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x+3} - \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to (-3)^+} f(x) =$ وجود ندارد $\qquad \lim\limits_{x\to (-3)^-} f(x) =$ وجود ندارد

$(-3-\varepsilon, -3) \not\subset D_f$

$(-3, -3+\varepsilon) \not\subset D_f$

$x+3=0 \qquad x=0$

ادامه می‌دیم $\quad x=-3$

$D_f : x-1 \geq 0 - \{-3, 0\}$

$D_f : x \geq 1 - \{-3, 0\} = x \geq 1$

$-3 \qquad 0 \qquad 1$

ادامه‌ها غلط (فاقد مجانب عمودی است)

$\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) =$ وجود ندارد

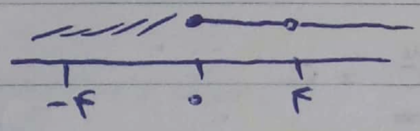
$(0, 0+\varepsilon), (0-\varepsilon, 0) \not\subset D_f$

Date : / /

Subject :

۵/ $\frac{\sqrt{x}}{x^2-16}$ $D_f = x \geq 0 - \{\pm 4\} = x \geq 0 - \{4\}$

$\begin{cases} x=-4 \ \times \\ x=4 \end{cases}$



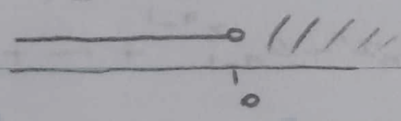
$$\lim_{x\to 4^+} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x}}{x^2-16} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

اگر حد راست یا چپ عدد شد باید حد چپ یا راست را به دست آوریم تا بفهمیم مجانب عمودی است یا نه

نمودار $f(x)=\frac{1}{x-|x|}$ در اطراف مجانب قائم چگونه است (تمرین ۶ کتاب)

$$\begin{cases} \frac{1}{x-x} = \frac{1}{0} \ \times & x \geq 0 \\ \frac{1}{x-(-x)} = \frac{1}{2x} & x<0 \end{cases}$$

$x \to 0^+$ نداریم

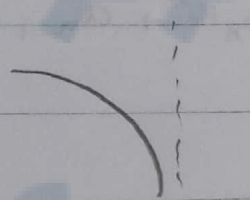


$f(x)=\frac{1}{2x}$ $x<0 \to 2x=0$

$x=0$

ادعا می‌کنیم

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$



$x=0$

Date : / /

Subject :

حد در بینهایت

$x \to +\infty$: x بی کران افزایش

یا

$x \to -\infty$: x بی کران کاهش

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim C = C$$

$f(x) = C$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \overset{\text{عدد}}{C} = C}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(2x+5) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(-x+5) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+5) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}(-x+5) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(-x^2+3) = -\infty \qquad \boxed{-(+)^2 = -} \qquad \lim_{x\to+\infty}(x^3+5) = +\infty \qquad (+)^3 = +$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^2+3) = -\infty \qquad \boxed{-(-)^2 = -} \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^3+5) = -\infty \qquad (-)^3 = -$$

نتیجه:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ چندجمله‌ای ها

حاصل حدهای زیر را به دست آورید

1) $\lim_{x\to+\infty}(-4+7x) = \lim_{x\to+\infty} 7x = +\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}(3x-x^2) = \lim_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty \qquad -(-)^2 = -\times + = -$

3) $\lim_{x\to+\infty}(-7x^5-9x^7+8x) = \lim_{x\to+\infty} -9x^7 = -\infty \qquad -(+)^7 = -$

4) $\lim_{x\to-\infty}(x^2+7x-3x^3) = \lim_{x\to-\infty} -3x^3 = +\infty \qquad -(-)^3 = +$

Date : / /

Subject :

ه) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-7x^{101}-8x^{103}-8x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}-8x^{103}=+\infty$ $\quad -(-)^{103}=-\times-=+$

۶) توابع کسری:
- صورت و مخرج چندجمله‌ای
- صورت یا مخرج رادیکال
- صورت یا مخرج شامل قدرمطلق
- صورت یا مخرج دارای براکت

۱) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{3x+5}=\dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم

رفع ابهام در امتحان: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cancel{x}(2+\cancel{\frac{1}{x}})}{\cancel{x}(3+\cancel{\frac{5}{x}})}=\dfrac{2}{3}$

نکته: $\dfrac{\text{عدد}}{\pm\infty}=0$ مطلق

در تست: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}=\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

$\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\right]=[0^+]=0$ براکت

$[0/001]=0$

$\left[\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\right]=[0^-]=-1$

$[-0/001]=-1$

عدد به روی بی‌نهایت

در براکت صفر حدی می‌شود

۲) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x^2+5x-4}{8x^2-9x+11}=\dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم

رفع ابهام: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cancel{x^2}(7+\cancel{\frac{5}{x}}-\cancel{\frac{4}{x^2}})}{\cancel{x^2}(8-\cancel{\frac{9}{x}}+\cancel{\frac{11}{x^2}})}=\dfrac{7}{8}$

$=\dfrac{\infty}{\infty}=$ مبهم

۳) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^{10}+7x^{11}-9}{9x^{11}-7x^2+x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cancel{x^{11}}(\cancel{\frac{1}{x}}+7-\cancel{\frac{9}{x^{11}}})}{\cancel{x^{11}}(9-\cancel{\frac{7}{x^9}}+\cancel{\frac{1}{x^{10}}})}=\dfrac{7}{9}$

رفع ابهام

۴) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+2}{x^2+3x+8}=\dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم

رفع ابهام: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cancel{x}(1+\cancel{\frac{2}{x}})}{x^{\cancel{2}}(1+\cancel{\frac{3}{x}}+\cancel{\frac{8}{x^2}})}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\pm\infty}=0$

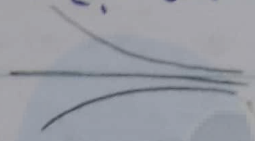
PAPA

Date : / /

Subject :

مجانب افقی (کاربرد حد در بی‌نهایت)

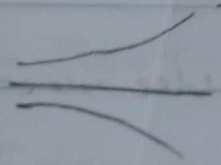
تعریف مجانب افقی: خط y مساوی با b را مجانب افقی تابع f گوییم هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشند



$b>0$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$



$b<0$

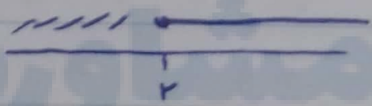
مجانب افقی تابع های زیر را به دست آورید

1) $f(x)=\sqrt{x-2}$ فاقد مجانب افقی

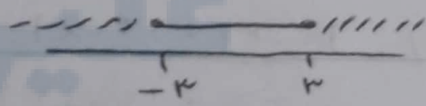
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2} = \sqrt{+\infty-2} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x-2}$ وجود ندارد

$D_f: x-2\geq 0 \to x\geq 2$



2) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ فاقد مجانب افقی $\quad D_f: 9-x^2\geq 0 \to D=[-3,3]$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ وجود ندارد

Date : / /

Subject :

نکته: نمودار تابع در مجاورت مجانب افقی

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$

1) $f(x)$ ... $y=b$

2) ... $y=b$

1) $f(x)>b \to \lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)-b\big)>0$

2) $f(x)<b \to \lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)-b\big)<0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$

3) ... $y=b$

4) ... $y=b$

3) $f(x)>b \to \lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x)-b\big)>0$

4) $f(x)<b \to \lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x)-b\big)<0$

نکته: $f(x)=\log_a \dfrac{h(x)}{g(x)}$ و g و h چند جمله‌ای باشند ریشه‌های غیرمشترک g و h مجانب‌های عمودی f هستند به شرط اینکه f حداقل در یک همسایگی راست یا چپ این نقطه تعریف شده باشد

نکته: هر وقت مخرج صفرمطلق شود حد وجود ندارد یعنی همسایگی آن نقطه جزو دامنه نیست.

Date : / /

Sabject :

فصل 4

مشتق و مطالب مربوط به آن (جزوه)

$$\left.\begin{matrix} B \to A \\ x \to a \\ D \to \Delta \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} x \to a \\ D \to \Delta \end{cases} \to \begin{cases} x \to a \\ m_D \to m_\Delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \to a \\ m_D \to \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases} \cong \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m_D$$

$$m_{\text{خط مماس}} = \underset{\text{طول نقطه مماس}}{f'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$A \Big|_{f(x)}^{x} \quad B \Big|_{f(x+h)}^{x+h} \quad m = \frac{f(x+h) - f(x)}{\cancel{x} + h - \cancel{x}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1) $m_{\text{خط مماس}} = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

2) $f'(x) = m_D = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$f'(a) = m_D = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

نکته تستی:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+mh) - f(x+nh)}{h} = \left(\frac{m - n}{k}\right) f'(x)$$

مثال: حاصل $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+3h) - f(1-2h)}{5h}$ کدام است؟

راه تستی:

$k = 5$

$m = 3$

$n = -2$

$x = 1$

$$= \frac{(3 \boxed{-} 2))}{5} f'(x) = f'(x)$$

PAPA

قضیه: اگر f در a مشتق پذیر باشد f در a پیوسته است

فرض: f در a مشتق پذیر $\Rightarrow$ $\underset{\text{عدد متناهی}}{f'(a)}$

$$\underset{\text{عدد}}{f'(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\overset{\text{عدد}}{f(x) - f(a)}}{x-a}$$

یادآوری حسابان ۱:

$$\lim_{x\to x_0} \overset{\text{عدد}}{k} = k \qquad \lim_{x\to a} \overset{\text{عدد}}{f(a)} = f(a)$$

$\underset{\text{عدد}}{f(a)}$

$$**\ \lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a)$$

حکم: f در a پیوسته: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a) = 0 \rightarrow \lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) = 0$$ حکم

طرف چپ حکم $\lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) \times \frac{x-a}{x-a}$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \times (x-a) \right) = \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)} \times \underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)}_{a-a=0}$$

$$\overset{\text{عدد}}{f'(a)} \times 0 = 0$$

Date : / /
Subject :

عکس قضیه: f در a پیوسته باشد آنگاه f در a مشتق پذیر است (نادرست)
مثال نقض

اگر $f(x)=|x|$ مفروض باشد f در ۰ پیوسته

۱) پیوستگی در ۰ بررسی کنید است

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = |0| = 0$$
$$f(0) = |0| = 0$$

۲) $f'(0)$ را محاسبه کنید

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \longrightarrow$ f در ۰ مشتق پذیر نیست

$f'(0)$ وجود ندارد.

① پیوسته نباشد حتماً مشتق پذیر نیست

② پیوسته باشد باید مشتق پذیری بررسی شود (از راه تعریف مشتق)

③ مشتق پذیر باشد حتماً پیوسته است.

قاعده هوپیتال:

فقط این دو مبهم از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\boxed{\frac{0}{0} \text{ یا } \frac{\infty}{\infty}}\xrightarrow{HOP}\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

به جای این، این را حساب می‌کنیم

$\underbrace{f'(x)}_{\text{شیب}}$

$f(x)=0$

$\underbrace{f'(x)}_{\text{شیب}}=0$

$f(x)=0\to f'(x)=0$

مشتق اعداد صفر

قضیه ②

① $f(x)=C\to f'(x)=0$

قاعده: تابع ثابت

$f(x)=\frac{1}{2}\to f'(x)=0$

$f(x)=7$

$f'(x)=0$

PAPA

Date : / /
Subject :

نکته ② $f(x) = ax + b \to f'(x) = a$

مشتق شیب است پس مشتق تابع خطی شیب آن است (a) یا همان ضریب x

مثال
$$\begin{cases} f(x) = 3x + 5 \to f'(x) = 3 \\ f(x) = 1x \to f'(x) = 1 \\ f(x) = \frac{x+2}{7} = \frac{1x}{7} + \frac{2}{7} \to f'(x) = \frac{1}{7} \end{cases}$$

$f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x$

$f(x) = x^3 \to f'(x) = 3x^2$

نکته ③ $f(x) = x^n \to f'(x) = n x^{n-1}$

مثال
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

نکته ④ $y = \sqrt{x} \to y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = \sqrt{x^3} \to y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}$

مشتق $x^3 = 3x^2$

$y' =$ صورت، مشتق زیر رادیکال مخرج، ۲ برابر y است

نکته ④ حالت کلی $y = \sqrt{u(x)} \to y' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Date : / /

Subject :

تعمیم ⑤

$$y = \underbrace{k}_{\text{عدد}} \times f(x) \longrightarrow y' = k \times f'(x)$$

مثال

$$y = 5x^4 \to y' = 5 \times 4x^3 = 20x^3$$

$$y = 10x^9 \to y' = 10 \times 9x^8 = 90x^8$$

$$y = 100x^4 \to y' = 100 \times 4x^3 = 400x^3$$

تعمیم ⑥

$$y = ax^2 + bx + c \longrightarrow y' = 2ax +$$

$$y = \underbrace{3x^2}_{3 \times 2x} + \underline{7}x + 5 \longrightarrow y = 6x + 7$$

$$y = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{\frac{1}{2} \times 2x} + \underline{9}x - 7 \longrightarrow y = x + 9$$

$$y = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)$$

$$y' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \dots \pm f_n'(x)$$

مشتق هرکدام را جدا به دست آورده سپس از هم کم یا باهم جمع می‌کنیم

Date : / /
Subject :

مسابان ۱ $\lim_{x\to 1} \dfrac{\underbrace{x^3}_{3x^2}+\underbrace{4x-5}_{\text{خط}}}{\underbrace{x^7}_{7x^6}+\underbrace{3x-4}_{\text{خط}}} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to 1} \dfrac{3x^2+4}{7x^6+3} = \dfrac{3(1)^2+4}{7(1)^6+3} = \dfrac{7}{10}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3x+2}-\overbrace{\sqrt{2}}^{\text{عدد}}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{HOP}{=}} \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}-0}{1} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

صفر را قرار دادیم

$\sqrt[n]{u^m}$ مشتق

قاعده ۷ $\left(\sqrt[n]{u^m}\right)' = \dfrac{m \times u'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

برای هر فرمولی

مثال: $y = \sqrt[4]{(\underbrace{2x+5}_{u \text{ خطی}})^1} \longrightarrow y' = \dfrac{1\times 2}{4\sqrt[4]{(2x+5)^3}} = \dfrac{2}{4\sqrt[4]{(2x+5)^3}}$

مشتق تابع خطی ضریب x

مشتق عدد صفر

مثال: $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2x+4}-\overline{2}}{\underbrace{x^2}_{2x}-\underbrace{4}_{0}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 2} \dfrac{\frac{1\times 2}{3\sqrt[3]{(2x+4)^2}}-0}{2x-0}$

x جای ۲ می‌گذاریم

$= \dfrac{\frac{2}{3\sqrt[3]{(2\times 2+4)^2}}}{2\times 2} = \dfrac{\frac{2}{3\times 4}}{4} = \dfrac{2}{48} = \dfrac{1}{24}$

Date : / /

Subject :

قضیه ⑧ $f(x)=u(x)\times v(x)$

قانون ضرب

$$f'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$$

مثال : $f(x)=\overbrace{2x^2}^{u(x)}\overbrace{(x^3+2x^2-6)}^{v(x)}$

راه دوم: $f'(x)=4x\times(x^3+2x^2-6)+(3x^2+4x-0)\times 2x^2$

قانون ضرب

راه اول : $f(x)=2x^5+4x^4-12x^2 \longrightarrow f'(x)=10x^4+16x^3-24x$

قضیه ⑨ $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$

قانون تقسیم

$$\longrightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}$$

مثال $f(x)=\dfrac{1}{x}\longrightarrow f'(x)=\dfrac{\overbrace{(1)'}^{0}\times x-\overbrace{(x)'}^{1}\times 1}{x^2}=\dfrac{-1}{x^2}$

$$f(x)=\frac{1}{x}\longrightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

PAPA

Date : / /
Subject :

هموگرافیک $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$$y' = \frac{(ax+b)'(cx+d) - (cx+d)'(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

$$y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{\cancel{acx} + ad - \cancel{acx} - bc}{(cx+d)^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}}$$

مشتق هموگرافیک ←

مثال $y = \dfrac{2x+5}{3x-9} \to y' = \dfrac{\overset{-12}{2\times -9} - \overset{15}{(5\times 3)}}{(3x-9)^2} = \boxed{\dfrac{-27}{(3x-9)^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x + b^x \approx \lim a^x \quad (a>b)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x + b^x \approx \lim b^x \quad (a>b)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (3^x + 7^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 7^x = 7^{+\infty} = +\infty \quad 7>3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (3^x + 7^x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3^x = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

PAPA

مشتق توابع مثلثاتی

$$f(x)=\sin x \rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\overset{\sin(x+h)}{\widetilde{f(x+h)}}-\overset{\sin x}{\widetilde{f(x)}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+\overset{0}{h})-\sin x}{\underset{0}{h}}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\text{رفع ابهام}: \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\times\cos\frac{2x+h}{2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\times\boxed{\lim_{h\to 0}\cos\frac{2x+\overset{0}{h}}{2}}\rightarrow\cos\frac{2x}{2}=\cos x$$

$$\cos x$$

$$=\underbrace{\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}}_{1}\times\cos x=1\times\cos x=\cos x$$

$$\boxed{\begin{aligned}f(x)&=\sin x\\ f'(x)&=\cos x\end{aligned}}$$

PAPA

Date : / /

Subject :

$f(x) = \sin 3x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin 3(x+h) - \sin 3x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overset{p}{\sin(3x+3h)} - \overset{q}{\sin 3x}}{h} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\sin \frac{3x+3h-3x}{2} \times \cos \frac{3x+3h+3x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2\frac{\sin \frac{3h}{2}}{h} \times \lim_{h \to 0} \cos \frac{6x+3h}{2} \quad \cos 3x$$

$$= 2 \times \frac{3}{2} \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{3h}{2}}{\frac{3}{2}h} \times \cos 3x = 3\cos 3x$$

$f(x) = \sin 3x \quad f'(x) = 3\cos 3x$

مهم $f(x) = \sin u(x) \longrightarrow f'(x) = u'(x) \cos u(x)$ (1)

مشتق توابع زیر را بیابید

1) $y = \sin 5x$

$y' = 5\cos 5x$

2) $y = \sin(x^2+2)$

$y' = (x^2+2)' \cos(x^2+2) = 2x\cos(x^2+2)$

$y = \sin^2 x \longrightarrow 2\cos x \sin x = \sin 2x$

$y = \sin x \times \sin x$

$y' = (\sin x)' \sin x + (\sin x)' \sin x = 2(\sin x)' \sin x = 2\cos x \sin x$

$= \sin 2x$

$y = \sin^2 x \longrightarrow y' = \sin 2x$

PAPA

Date : / /

Subject :

قانون توان $y = (u(x))^n$

$y' = n\, u'(x)\, (u(x))^{n-1}$

$y = \sin^3 x = (\sin x)^3 \longrightarrow y' = 3(\sin x)'(\sin x)^2 = 3\cos x \sin^2 x$

$y = \sqrt{\sin(x^3 - 8x)} \qquad y' = \dfrac{(\sin(x^3-8x))'}{2\sqrt{\sin(x^3-8x)}} = \dfrac{(x^3-8x)'\cos(x^3-8x)}{2\sqrt{\sin(x^3-8x)}}$

$y = \sqrt{u(x)} \longrightarrow y' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin(x)$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$* \cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p-q}{2}\sin\dfrac{p+q}{2}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2\sin\dfrac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{2}\sin\dfrac{x+h+x}{2}}{h}$

$= -\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \lim\limits_{h\to 0} \sin\dfrac{2x+\overset{0}{h}}{2} = -1 \times \sin x = -\sin x$

$1 \qquad \sin x$

$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \cos u(x) \longrightarrow f'(x) = -u'(x)\sin u(x)$

PAPA

Date : / /
Subject :

مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y = \cos\sqrt{x}$

$y' = -(\sqrt{x})' \sin\sqrt{x}$

$y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}$

۲) $y = \underbrace{\sin \omega x}_{1} \times \underbrace{(\cos(x^2+2) - \sin x)}_{2} \xrightarrow{\text{قانون ضرب}}$

$y' = \underbrace{(\sin \omega x)'}_{\omega\cos\omega x} (\cos(x^2+2) - \sin x) + \underbrace{(\cos(x^2+2) - \sin x)'}_{-2x\sin(x^2+2) - \cos x} \sin\omega x$

۳) $y = \tan x$

$y = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow{\text{قانون تقسیم}}$

$y' = \frac{\overbrace{(\sin x)'}^{\cos x} \times \cos x - \overbrace{(\cos x)'}^{-\sin x} \times \sin x}{(\cos x)^2}$

$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$y = \tan x \longrightarrow y' = 1 + \tan^2 x$

$y = \tan u(x) \longrightarrow y' = u'(x)(1 + \tan^2 u(x))$

Date : / /

Subject :

۴) $y = \cot u(x)$

$$y = \frac{\cos u(x)}{\sin u(x)}$$

$$y' = \frac{\overbrace{(\cos u(x))'}^{-u'(x)\sin u(x)} \times \sin u(x) - \overbrace{(\sin u(x))'}^{u'(x)\cos u(x)} \times \cos u(x)}{(\sin(u(x)))^2}$$

$$y' = \frac{-u'(x)\sin^2 u(x) - u'(x)\cos^2 u(x)}{(\sin u(x))^2}$$

$$y' = \frac{-u'(x)(\sin^2 u(x) + \cos^2 u(x))}{\sin^2 u(x)} = -u'(x)\left(\frac{1}{\sin^2 u(x)}\right)$$

$$= -u'(x)(1 + \cot^2 u(x))$$

$$f(x) = \cot u(x) \rightarrow f'(x) = -u'(x)(1 + \cot^2 u(x))$$

$$\sin^2 u(x) = 2u'(x)\sin u(x)\cos u(x)$$

$u(x)\sin^2 u(x)$

مشتق تابع مرکب : مشتق ترکیب توابع

$$y = fog(x)$$

$$y = f(g(x)) \longrightarrow y' = (g(x))' f'(g(x))$$

$$y' = (x)' g'(x) f'(g(x)) = g'(x) f'(g(x))$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = fog(x) = f(g(x)) \\ y' = g'(x) f'(g(x)) \end{array}}$$

یادآوری نکته :

$$y = \frac{1}{x} \longrightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{k}{x} \longrightarrow y' = -\frac{k}{x^2}$$

$$\left(\frac{3}{x}\right)' = \frac{-3}{x^2}$$

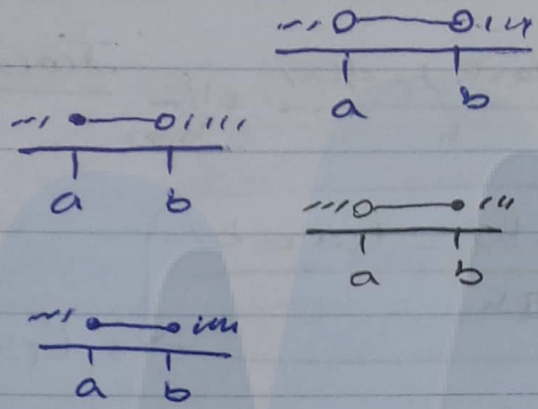
PAPA

Date : / /
Sabject :

همسایگی راست b در دامنه نیست پس حد راست ندارد پس پیوستگی چپ ندارد ~~مشتق راست هم ندارد~~

مشتق پذیری روی بازه ها

همسایگی چپ a در دامنه نیست یعنی حد چپ ندارد پس پیوستگی چپ ندارد و مشتق چپ هم ندارد



1) (a,b)
2) $[a,b)$
3) $(a,b]$
4) $[a,b]$

1) تابع f روی (a,b) مشتق پذیر است هرگاه تابع f در نقطه متعلق به بازه (a,b) مشتق پذیر است

$\forall x \in (a,b)$ f در مشتق پذیر باشد

2) تابع f روی $[a,b)$ مشتق پذیر است هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) f در هر نقطه متعلق به (a,b) مشتق پذیر باشد

ب) f در a مشتق راست داشته باشد

3) تابع f روی $(a,b]$ مشتق پذیر است هرگاه، دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) f در هر نقطه متعلق به (a,b) مشتق پذیر باشد.

ب) f در b مشتق چپ داشته باشد

4) تابع f در $[a,b]$ مشتق پذیر است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد

الف) f در هر نقطه متعلق به بازه (a,b) مشتق پذیر باشد

ب) f در a مشتق راست داشته باشد

پ) f در b مشتق چپ داشته باشد

Date : / /

Sabject :

نکته: f همواره مشتق‌پذیر است یعنی روی R مشتق‌پذیر است یعنی در تمام نقاط مشتق‌پذیر است

(a,b)

$(-\infty,+\infty)$

شامل نقطه مرزی

یعنی غیر مستقیم در نقطه مرزی مشتق‌پذیر است

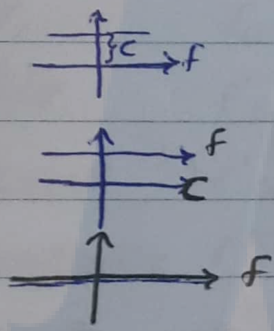
رابطه بین نمودار f و f':

$f(x) = \overset{\text{عدد}}{c}$ (تابع ثابت)

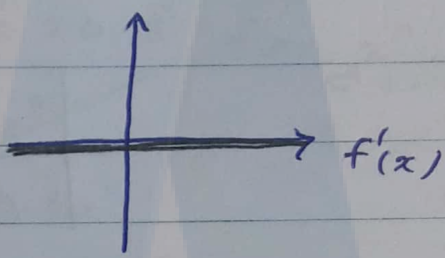
$c>0$

$c<0$

$c=0$



نمودار f



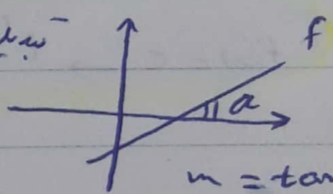
نمودار f'

$f(x) = ax+b \quad a \neq 0$

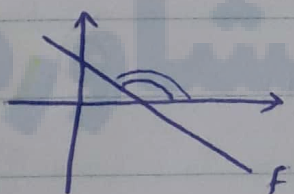
تبدیل به تابع ثابت نشود

$a>0 \rightarrow$ شیب خط مثبت

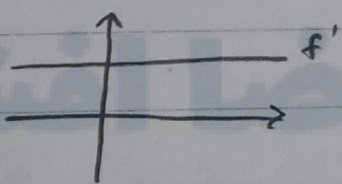
$a<0 \rightarrow$ شیب خط منفی



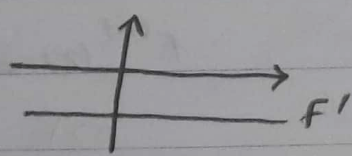
$m = \tan\alpha =$ شیب مثبت



$a>0 \quad f'(x) = \overset{\text{عدد}}{a}$



$a<0 \quad f'(x) = a$



PAPA

Date : / /

Sabject :

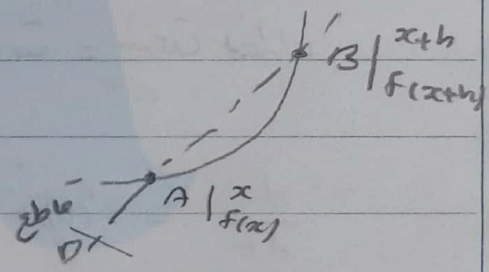
آهنگ تغییرات: دو نوع است:
۱- آهنگ تغییر متوسط ← آهنگ متوسط
۲- آهنگ تغییرات آنی یا نقطه‌ای ← آهنگ آنی

آهنگ تغییر متوسط: مثل سرعت متوسط - شتاب متوسط - شدت جریان متوسط و ... که به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط در } [x, x+\overset{\Delta x}{\widetilde{h}}] = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$m_D = m_{\text{قاطع}} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



$$\vec{v}(t) = \text{سرعت متوسط} = \text{آهنگ متوسط } \underbrace{\overset{x}{\text{مسافت}}}_{t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$$

تغییر مسافت $\overset{t}{}$ زمان

$$\text{شتاب متوسط} = \text{آهنگ متوسط سرعت} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$$

تغییر سرعت $\overset{t}{}$ زمان

تعبیر هندسی آهنگ متوسط یعنی شیب خط قاطع

$A\Big|\begin{matrix}x\\ f(x)\end{matrix}$ $\qquad$ $B\Big|\begin{matrix}x+h\\ f(x+h)\end{matrix}$ $\qquad$ $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{\underbrace{\cancel{x}+h-\cancel{x}}_{h}}$

Date : / /

Sabject :

۲) آهنگ آنی یا لحظه‌ای: مثل سرعت لحظه‌ای ـ شتاب لحظه‌ای ـ شدت جریان لحظه‌ای ... که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{آهنگ آنی در یک نقطه} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

آهنگ آنی ← یعنی مشتق تابع برحسب متغیر

شیب خط مماس

$$\text{سرعت لحظه‌ای} = \text{آهنگ آنی مسافت} = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = x'(t)$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

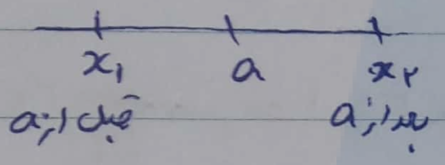
$$\frac{dv}{dt} = v'(t)$$

$$\text{شتاب لحظه‌ای} = \text{آهنگ آنی سرعت} = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

قرارداد: آهنگ منظور آهنگ آنی (مشتق)

مقدار تقریبی : $f'(a)$ ← شیب خط مماس

مقدار واقعی: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ← شیب قاطع واقعی



اگر فقط نقطه قبل a را داشته باشیم (همسایگی چپ a)

$$f'(a) \approx \underline{\frac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1}} = \frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \quad ①$$

اگر فقط نقطه بعد a را داشته باشیم (همسایگی راست a)

$$f'(a) \approx \underline{\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}} = \frac{f(a)-f(x_2)}{a-x_2} \quad ②$$

$$f'(a) = \frac{\frac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1}+\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}}{2} \quad ③$$

Date : / /

Subject :

برای نقاط زیر مقدار تقریبی $f'(a)$ را محاسبه کنید.

x	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	۱٫۲	۲٫۱	۳٫۲	۲٫۷
$f'(x)$	$f'(1)$	$f'(2)$	$f'(3)$	$f'(4)$

۰٫ راه شماره ②

$$f'(1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{2.1-1.2}{2} = 0.9$$

۰٫ راه شماره ③

$$f'(2) = \frac{\frac{f(2)-f(1)}{2-1} + \frac{f(3)-f(2)}{3-2}}{2} = \frac{0.9 + \frac{3.2-2.1}{1}}{2} = 1$$

۰٫ راه شماره ③

$$f'(3) = \frac{\frac{f(3)-f(2)}{3-2} + \frac{f(4)-f(3)}{4-3}}{2} = \frac{1.1-0.5}{2} = 0.3$$

۰٫ راه شماره ①

$$f'(4) = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{2.7-3.2}{1} = 0.5$$

Date : / /
Sabject :

فصل پنجم

- یکنوایی تابع (صعودی یا نزولی) به کمک مشتق
- اکسترمم های تابع (max یا Min) تابع به کمک مشتق
- بهینه سازی (به کمک مشتق)
- نقطه عطف به کمک مشتق
- رسم نمودار ها به کمک مشتق

f صعودی است $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \longrightarrow$ شیب $\longrightarrow f'(x) > 0$

f نزولی است $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \longrightarrow$ شیب $\longrightarrow f'(x) < 0$

قضیه: آزمون مشتق اول: اگر f در $[a,b]$ پیوسته و (a,b) مشتق پذیر باشد داریم:

1) $\forall x \in (a,b) \rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f روی $[a,b]$ صعودی است

2) $\forall x \in (a,b) \rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f روی $[a,b]$ نزولی است

3) $\forall x \in (a,b) \rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$ f تابع ثابت است (هم صعودی هم نزولی)

مثال: یکنوایی توابع زیر را به کمک مشتق تعیین کنید

1) $y = f(x) = 5x + 2$

$f'(x) = 5 \quad f'(x) > 0 \longrightarrow$ f صعودی است

2) $f(x) = -4x + 7$

$f'(x) = -4 \quad f'(x) < 0 \longrightarrow$ f نزولی است

3) $f(x) = 7$

$f'(x) = 0 \quad f'(x) = 0 \longrightarrow$ f هم صعودی هم نزولی

Date : / /
Subject :

نزولی اکید ↘ ↗ صعودی اکید

۴) $f(x) = x^2 + 3x + 5$

$f'(x) = 2x + 3$

$2x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ نزولی اکید ↘	$f(-\frac{3}{2})$ min	↗ صعودی اکید $+\infty$

$x < -\frac{3}{2} \rightarrow f'(x) < 0 \longrightarrow$ f نزولی اکید

$x > -\frac{3}{2} \rightarrow f'(x) > 0 \longrightarrow$ f صعودی اکید

مینیمم

min

$x \rightarrow \pm\infty$

$f(x) \longrightarrow ?$

پرتوان

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (x^2 + 3x + 5) = \lim_{x \to \pm\infty} (x^2) = (\pm\infty)^2 = +\infty$

$f(-\frac{3}{2}) = (-\frac{3}{2})^2 + 3(-\frac{3}{2}) + 5 = \frac{11}{4}$

۵) $f(x) = -x^2 + 7x - 3$

$f'(x) = -2x + 7 \longrightarrow -2x + 7 = 0$

$f(\frac{7}{2}) = -(\frac{7}{2})^2 + 7(\frac{7}{2}) - 3 = \frac{37}{4}$ $x = \frac{7}{2}$ ریشه مشتق

x	$-\infty$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$

$f(\frac{7}{2}) = \frac{37}{4}$

max

max

پرتوان $\longrightarrow y = -x^2 = -(-\infty)^2 = -(+\infty) = -\infty$

$y = -x^2 = -(+\infty)^2 = -(+\infty) = -\infty$

تذکر: به کمک جدول تغییرات بعنوان تابع والستر عم‌های تابع مشخص می شوند.

$y = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b \longrightarrow 2ax + b = 0 \rightarrow 2ax = -b \rightarrow x = -\frac{b}{2a}$

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

ریشه مشتق

min

PAPA

$f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c = -\frac{\Delta}{4a}$

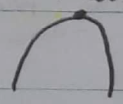
پرتوان $x^2 \longrightarrow (\pm\infty)^2 \rightarrow (+\infty)^2 = +\infty$

Date : / /

Subject :

$a<0$ $\quad y' = 2ax+b$

max.



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$

$-\frac{\Delta}{4a}$ max

بزرگترین توان $-x^2 \Rightarrow -(+\infty)^2 = -\infty$

$-(-\infty)^2 = -\infty$

$y = x^3 + 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$3x^2 + 6x = 0$

$3x(x+2) = 0$ → $x=0$ ریشه ساده ; $x+2=0 \to x=-2$ ریشه ساده

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗		↘		↗ $+\infty$

max $f(-2)=4$ $\quad$ min $f(0)=0$

بزرگترین توان $x^3 \to (-\infty)^3 = -\infty$

$(+\infty)^3 = +\infty$

$y = -x^3 + 3x^2$

$y' = -3x^2 + 6x$

$-3x^2 + 6x = 0$

$3x(-x+2) = 0$ → $x=0$ ریشه ساده ; $-x+2=0 \to -x=-2 \to x=2$ ریشه ساده

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘		↗		↘ $-\infty$

min $f(0)=0$ $\quad$ $f(2)=4$ max

$f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2$

$= -8 + 12 = 4$

بزرگترین توان

$-(-\infty)^3 = +\infty$

$-(+\infty)^3 = -\infty$

PAPA

$$\underbrace{-\sqrt{a^2+b^2}}_{min} < a\sin x + b\cos x < \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{max}$$

Date : / /

Subject :

$y = x^3$

$y' = 3x^2$

$3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ ریشه مضاعف

همه جا موافق علامت a

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$F(0)=0$

• ریشه مضاعف است ولی چون f' در آن تغییر علامت نداده نه max و نه min است.

نکته: توابع درجه ۳ ریشه مضاعف همیشه طول اکسترمم نیست مثل مثال قبل

نکته تستی: اگر $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ اگر $a \neq 0$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$\Delta_{y'} < 0 \rightarrow a > 0$

$-\infty$				$+\infty$
	$+$	$+$	$+$	

$\rightarrow a < 0$

$-\infty$				$+\infty$
	$-$	$-$	$-$	

x	$-\infty$	$+\infty$
	همه جا موافق علامت a	

فاقد اکسترمم

$\Delta_{y'} > 0 \rightarrow max$, min

همه توابع درجه ۳ دارای اکسترمم نیستند

$\Delta_{y'} < 0 \rightarrow$ اکسترمم ندارد

$\Delta_{y'} > 0 \rightarrow$ دو اکسترمم دارد → max , min

جدول تغییرات: جدولی است که $f(x)$ تعیین علامت می شود

← کیفیت این تابع

→ اکسترمم های تابع

جدول تغییرات:

$$y=\sqrt[3]{x^2}$$

$$y'=\frac{2(x)'}{3\sqrt[3]{x^{3-2}}}=\frac{2}{\underbrace{3}_{+}\sqrt[3]{x}}$$

علامت مشتق فقط به علامت

$\sqrt[3]{x}$ بستگی دارد (باید تعیین علامت کنیم)

$\sqrt[3]{x}=0 \to x=0$

ریشه مخرج y'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0 min	$\nearrow +\infty$

$f(0)=0$

در دامنه f' نیست دو خط می‌کشیم

در f هست یک خط می‌کشیم

f' در $\frac{-}{}$ وجود ندارد یعنی f در $\frac{-}{}$ مشتق پذیر نیست ولی چون f' در $\frac{-}{}$

تغییر علامت داده پس اکسترمم است

$$y=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow \sqrt[3]{(-\infty)^2}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$$

$$y=\sqrt[3]{+\infty^2} \to \sqrt[3]{+\infty}=+\infty$$

PAPA

Date : / /

Sabject :

$y = -x^4 + 7x^3 - 2$

$y' = -4x^3 + 21x^2$

$-4x^3 + 21x^2 = 0 \rightarrow x^2(-4x+21) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 & \text{ریشه مشتق} \\ x = \frac{21}{4} & \text{ریشه مشتق} \end{cases}$

x		0		$\frac{21}{4}$	
x^2	$+$	0	$+$		$+$
$-4x+21$	$+$		$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$		$\nearrow$		$\searrow -\infty$
		اکسترمم ندارد $f(0)$		max $f(\frac{21}{4})$	

فقط یک max دارد

$-x^4$ پرتوان

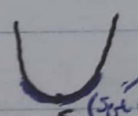
$-(-\infty)^4 = -(+\infty) = -\infty$

$-(+\infty)^4 = -(+\infty) = -\infty$

نکته: ممکن است f در یک نقطه مشتق نداشته باشد ولی در آن نقطه مشتق تغییر علامت دهد طول اکسترمم شود مهم

اکسترمم های نسبی و مطلق تابع از روی نمودار:

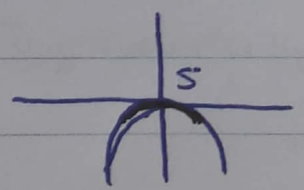
$y = x^2$



S min نسبی (در همسایگی)

S min مطلق (در کل دامنه)

$y = -x^2$



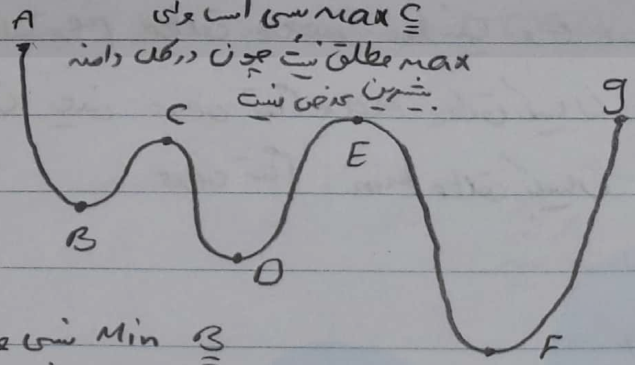
S max نسبی

S max مطلق

PAPA

Date : / /

Subject :



G: max نسبی است ولی max مطلق نیست چون در کل دامنه بیشترین عرض نیست

A: max مطلق ولی max نسبی نیست چون همسایگی چپ ندارد

B: Min نسبی ولی Min مطلق نیست چون در کل دامنه B کمترین عرض نیست

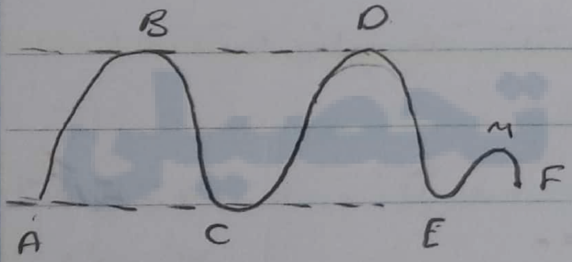
D: Min نسبی است ولی Min مطلق نیست به همان دلیل (B)

E: max نسبی است ولی max مطلق نیست به همان دلیل (C)

g: اکسترمم نسبی نیست چون همسایگی راست ندارد و اکسترمم مطلق نیست

F: Min نسبی است
Min مطلق است

نکته: اکسترمم های نسبی و مطلق منحصر به فرد نیستند یعنی تابع ممکن است
چند نقطه Max و Min نسبی داشته باشد
چند نقطه max و Min مطلق داشته باشد



A: Min نسبی و max نسبی نیست
چون همسایگی چپ A تعریف نشده

A: Min مطلق است

C: Min نسبی است

C: Min مطلق است

B: max نسبی است

B: max مطلق است

M: max نسبی است

max مطلق نیست

D: max نسبی است

D: max مطلق است

F: min, max نسبی نیست
همسایگی راست ندارد

min , max مطلق نیست
همسایگی راست ندارد

PAPA

Date : / /
Subject :

نقاط اکسترمم مطلق منحصر به فرد نیست ولی عرض اکسترمم‌های مطلق منحصر به فرد است یعنی عرض تمام max مطلق یکسان
عرض تمام min مطلق یکسان

$A \left| \begin{matrix} x_A \\ f(x_A) \end{matrix} \right.$ مقدار ماکزیمم تابع

$B \left| \begin{matrix} x_B \\ f(x_B) \end{matrix} \right.$ مقدار مینیمم تابع

نکته : $y = \sqrt[3]{x^2}$
در صفر مشتق نداشت $x=0$ اکسترمم نسبی بود

$y = x^2 + 2x$
در صفر مشتق صفر بود و $x=0$ اکسترمم بود

A اکسترمم نسبی باشد
در A تابع مشتق‌پذیر باشد

در A، $f' = 0$

$f'(x_A) = 0$

نکته : اکسترمم $A \left| \begin{matrix} x_A \\ y_A \end{matrix} \right. \xrightarrow[\text{باشد}]{\text{در A، f مشتق‌پذیر}} \begin{cases} A \in f \\ f'(x_A) = 0 \end{cases}$

PAPA

Date : / /

Subject :

تعریف نقطه بحرانی: نقطه به طول $c \in D_f$ را طول نقطه بحرانی تابع f گوییم هرگاه

$f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد

f در c مشتق پذیر نباشد

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را محاسبه کنید

طول بحرانی هم کرض بحرانی

1) $f(x) = 5$ تابع ثابت $D_f = \mathbb{R}$

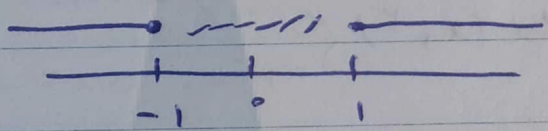
$\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) = 0$ طول نقاط بحرانی : $x \in D_f$ ~~[illegible]~~ تمام

$y=\sqrt{x^2-1}$ $\qquad D_f = x^2-1 \geq 0$ $\qquad$ ریشه: -1 , 1

	-1		1	
$+$		$-$		$+$

$A \left| \begin{matrix} -1 \\ f(-1)= \end{matrix} \right.$ بحرانی $\qquad B \left| \begin{matrix} 1 \\ f(1)= \end{matrix} \right.$ بحرانی

$(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$



f در $+1$ چپ ندارد

f در -1 همسایگی راست ندارد حد راست ندارد پیوستگی راست ندارد ← مشتق راست ندارد

f در -1 $+1$ مشتق ندارد

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$\sqrt{x^2-1} = 0$ مخرج مشتق

$y' = 0 \xrightarrow{\text{صورت مشتق}} x=0 \notin D_f$ $\qquad$ غ ق ق

$x = \pm 1 \in D_f$ $\qquad$ ۲ بحرانی دارد

نکته: اگر مشتق یک تابع کسری بود برای محاسبه نقاط بحرانی کافی است $x \in D_f \leftarrow 0 =$ صورت مشتق

و $0 =$ مخرج مشتق $\longrightarrow x \in D_f$ اگر $x \in D_f$ شدند نقاط بحرانی هستند

PAPA

Date : / /

Subject :

$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x} \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (x-1)'_x \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})'(x-1)$

$= \sqrt[3]{x} + \dfrac{1 \times 1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-1) = \dfrac{3x+x-1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{4x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

مشتق در $\frac{1}{4}$ صفر شده

صورت مشتق $= 0 \to 4x-1=0 \to x=\frac{1}{4} \in D_f$

بحرانی $A\left|{}^{\frac{1}{4}}_{f(\frac{1}{4})=?}\right.$

مخرج مشتق $= 0 \to 3\sqrt[3]{x^2}=0 \to x^2=0$

$x=0 \in D_f$

f در صفر مشتق ندارد بحرانی $B\left|{}^{0}_{f(0)=0}\right.$

$f(x) = \sqrt{9-x^2} \qquad D = 9-x^2 \geq 0$

$3 \quad -3$

$D_f : [-3, 3]$ ۳ تا بحرانی

بحرانی $B\left|{}^{3}_{f(3)=}\right.$

(بحرانی به دلیل بحرانی بودن f در -3 ـ مشتق ندارد) بحرانی $A\left|{}^{-3}_{f(-3)=?}\right.$

$f'(x) = \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

صورت مشتق $= 0 \to -x=0 \to x=0 \in D_f$ قق $C\left|{}^{0}_{f(0)=}\right.$

بحرانی

مخرج مشتق $= 0 \to \sqrt{9-x^2}=0 \to 9-x^2=0 \to x^2=9$

$x=\pm 3 \in D$

$f(x) = \sqrt{-12x+x^2} \qquad D = -12x+x^2 \geq 0$

$x(-12+x)$

$0 \quad 12$

0		12	
+	−	+	
ق	غ	ق	ق

بحرانی (مشتق در ۰ وجود ندارد) $A\left|{}_{f(0)=}\right.$

بحرانی $B\left|{}^{12}_{f(12)=}\right.$

(مشتق در ۱۲ وجود ندارد)

$0 \qquad 12$

$(-\infty, 0] \cup [12, +\infty)$

۲ تا بحرانی

PAPA

Date : / /
Subject :

$$f'(x) = \frac{-12+2x}{2\sqrt{-12x+x^2}}$$

صورت مشتق $= 0 \rightarrow -12+2x=0 \rightarrow x=6 \notin D_f$ غ ق ق

مخرج مشتق $= 0 \rightarrow \sqrt{-12x+x^2}=0 \rightarrow -12x+x^2=0 \rightarrow x(x-12)=0$

$x=0$ ، $x=12$ گوشه ای / ابتدایی

نکته:

$$([x])' = \begin{cases} \text{مشتق وجود ندارد} & x \in Z \\ 0 & x \notin Z \end{cases}$$

$y=[x]$ در نقاط صحیح پیوسته نیست پس مشتق پذیر نیست

$y=[x]$ در نقاط غیر صحیح حاصل براکت عدد می‌شود ، مشتق هر عدد برابر ۰ است

$* \; f(x) = x - [x] \qquad [0,3]$

$f(0) =$ ۰ | A بحرانی $\qquad f(3)=$ ۳ | B بحرانی

$0<x<1 \rightarrow [x]=0 \xrightarrow{*} y=x$

$1<x<2 \rightarrow [x]=1 \xrightarrow{*} y=x-1$

$2<x<3 \rightarrow [x]=2 \xrightarrow{*} y=x-2$

$x=3 \rightarrow [x]=[3]=3 \xrightarrow{*} y=3$

۴ تا بحرانی

$$f(x) = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ x-1 & 1<x<2 \\ x-2 & 2<x<3 \\ 3 & 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 1 & 1<x<2 \\ 1 & 2<x<3 \\ \text{وجود ندارد} & x=0 \\ \text{وجود ندارد} & x=1 \\ \text{وجود ندارد} & x=2 \\ \text{وجود ندارد} & x=3 \end{cases}$$

حد راست در ۱ $= 0 = f(1)$

حد چپ در ۱ $=1$

f در ۱ پیوسته نیست f در ۱ مشتق پذیر نیست

حد راست در ۲ $= 0 = f(2)$

حد چپ در ۲ $=1$

PAPA

$f(1)=$ ۱ | C بحرانی $\qquad f(2)=$ ۲ | D بحرانی

f در ۲ پیوسته نیست در ۲ مشتق پذیر نیست

Date : / /

Sabject :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & x\geq 0 \\ -2x^2+x+1 & x<0 \end{cases} \rightarrow \cup_R$$

$D=R=(-\infty,+\infty)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1=f(0)$

در صفر پیوسته نیست پس مشتق پذیر نیست

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & x>0 \\ -4x+1 & x<0 \\ \text{وجود ندارد} & x=0 \end{cases}$$

۲تا بحرانی دارد

بحرانی $A\,\Big|\,\begin{matrix}0\\ f(0)=\end{matrix}$

$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}\in(x>0)$ ق ق

بحرانی $B\,\Big|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ f(\frac{1}{2})=\end{matrix}$

$-4x+1=0 \rightarrow x=\frac{1}{4}\notin(x<0)$ غ ق ق

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}=f'(x)$ هموگرافیک

$f'(x)=\dfrac{-2-1}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

فاقد نقطه بحرانی

صورت مشتق $=0 \rightarrow -3=0$ غ ق ق

مخرج مشتق $=0 \rightarrow (x-1)^2=0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1\notin D_f$ غ ق ق

$f'_+(1) = 2$ $\quad$ $f'_+(-1) = 2$ $\quad$ $f(-1) = 0 =$ حد راست در -1

Date :

$f'_-(1) = 2$ $\quad$ $f'_-(-1) = -2$ $\quad$ $0 =$ حد چپ در -1

Sabject :

$$y = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \cup x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$-\infty$		-1		1		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \cup x > 1 \\ -2x & -1 < x < 1 \\ \text{وجود ندارد} & x = -1 \\ \text{وجود ندارد} & x = 1 \end{cases}$$

بحرانی $A \begin{vmatrix} -1 \\ f(-1) = \end{vmatrix}$

بحرانی $B \begin{vmatrix} 1 \\ f(1) = \end{vmatrix}$

غ ق ق $x < -1 \cup x \geq 1$ $\notin 0$ $\quad$ غ ق ق $\quad$ $2x = 0 \rightarrow x = 0$

ق ق $-1 < x < 1$ $\in 0$ $\quad$ ق ق $\quad$ $-2x = 0 \rightarrow x = 0$

۳ بحرانی $\quad$ بحرانی $C \begin{vmatrix} 0 \\ f(0) \end{vmatrix}$

اکسترمم های مطلق تابع بدون نمودار (تعیین بدون رسم تابع)

قضیه: اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f در بازه ذکر شده حتماً دارای ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق است

تذکر: اگر f در $[a,b]$ پیوسته نباشد ممکن است در بازه max یا min مطلق داشته باشد، ممکن است نداشته باشد

شرایط قضیه برقرار باشد مراحل زیر را برای محاسبه اکسترمم های مطلق

۱) نقاط بحرانی را محاسبه می‌کنیم

۲) عرض نقاط بحرانی را با هم مقایسه می‌کنیم

۳) نقطه ای که بیشترین عرض را دارد نقطه ماکزیمم مطلق است و عرض آن نقطه مقدار ماکزیمم تابع است (max)

۴) نقطه ای که کمترین عرض را دارد نقطه مینیمم مطلق است و عرض آن نقطه مقدار مینیمم تابع است (min)

مثال: برد توابع زیر را بیابید یا اکسترمم های مطلق توابع را محاسبه کنید

1) $f(x) = x^2+2x \quad [-1, 3]$

توابع چند جمله ای (مثل خطی، سهمی، ...) همه جا پیوسته در نتیجه $[-1,3]$ پیوسته است طبق قضیه f در این بازه حتماً اکسترمم مطلق دارد (هم max مطلق دارد) (هم min مطلق دارد)

PAPA

Date : / /
Subject :

اول: نقاط بحرانی

$A \left| {}^{-1}_{f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) = 1 - 2 = -1} \right.$

بحرانی $A \left| {}^{-1}_{-1} \right.$ نقطه min مطلق

$B \left| {}^{3}_{f(3) = 3^2 + 2(3) = 9 + 6 = 15} \right.$ بحرانی $B \left| {}^{3}_{15} \right.$ نقطه max مطلق

$f'(x) = 2x + 2$ در ۱- مشتق صفر نیست

$2x + 2 = 0 \to x = -1 \in D_f$ $\boxed{\text{در ۱- مشتق وجود ندارد}}$

به این دلیل ۱- نقطه بحرانی است

$R = [-1, 15]$

---

۲) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x \quad [-2, 3]$

$A \left| {}^{-2}_{f(-2) = -\frac{2}{3}} \right.$ بحرانی $A \left| {}^{-2}_{-\frac{2}{3}} \right.$ نقطه min مطلق (min نسبی)

f چند جمله‌ای از درجه ۳ است پس همه جا پیوسته درنتیجه در $[-2, 3]$ پیوسته است طبق قضیه حتماً در این بازه دارای مقدار ماکزیمم مطلق و مقدار مینیمم مطلق است.

$B \left| {}^{3}_{f(3) = 6} \right.$ بحرانی $B \left| {}^{3}_{6} \right.$ نقطه max مطلق (max نسبی نیست)

$f'(x) = \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}x^2 - 1 = x^2 - 1$

$x^2 - 1 = 0 \to x^2 = 1$ ، $x = 1 \in D$ ، $x = -1 \in D$

$C \left| {}^{1}_{f(1) = -\frac{2}{3}} \right.$ min مطلق و نسبی

$D \left| {}^{-1}_{f(-1) = \frac{2}{3}} \right.$ min مطلق و نسبی

max $= 6$
min $= -\frac{2}{3}$

$R = [\min, \max] = [-\frac{2}{3}, 6]$

PAPA

Date : / /

Subject :

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1 \qquad [-2,1]$

f چند جمله ای درجه ۴ است همه جا پیوسته پس در $[-2,1]$ پیوسته طبق قضیه درباره نقاط حتماً ماکزیمم مطلق (max) دارد
مینیمم مطلق (min) دارد

$A \Big|_{f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^3 + 1 = 16 + 16 + 1 = 33}^{-2}$ بحرانی $A \Big|_{33}^{-1}$ ← max مطلق

$B \Big|_{f(1) = 1 - 2 + 1 = 0}^{1}$ بحرانی $B \Big|_{0}^{1}$ ← min مطلق

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \qquad x^2(4x - 6) = 0$
- $x = 0 \in D_f$
- $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \notin D_f$ بحرانی نیست

$C \Big|_{f(0) = 1}^{0}$ $C \Big|_{1}^{0}$ بحرانی

$R = [\min, \max] = [0, 33]$

$\max = 33$

$\min = 0$

$y = \underbrace{\sin^2 x}_{\text{پیوسته}} + \underbrace{2\cos x}_{\text{پیوسته}} \qquad [0, 2\pi]$

جمع دو تابع پیوسته همه جا پیوسته

در $[0, 2\pi]$ هم پیوسته شرایط قضیه را دارد

$A \Big|_{f(0) = \sin^2 0 + 2\cos 0 = 2}^{0}$ بحرانی $A \Big|_{2}^{0}$

$B \Big|_{f(2\pi) = \sin^2 2\pi + 2\cos 2\pi = 2}^{2\pi}$ بحرانی $B \Big|_{2}^{2\pi}$

$0 \quad 2\pi$

$y' = \sin 2x + 2(-\sin x) = 0$

$2\sin x \cos x - 2\sin x = 0 \rightarrow 2\sin x(\cos x - 1) = 0 \qquad y' = 0$

$2\sin x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi$

$\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi$

k	x	
0	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
1	π	$\cancel{2\pi}$
2	$\cancel{2\pi}$	—
3	—	—

بهینه سازی: ماکزیمم یا مینیمم کردن یک تابع

- تابع درآمد خانه $\max f$
- تابع هزینه خانه $\min f$

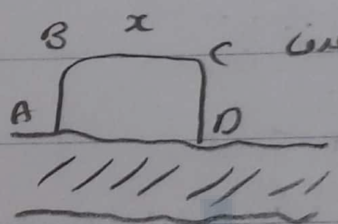
۱) تابع هدف: تابعی است که می خواهیم بهینه سازی کنیم

۲) تابع کمکی: صورت سوال مستقیم می دهد یا از مفروضات مسئله تابع کمکی را می نویسیم

۳) به کمک تابع کمکی، تابع هدف را یک متغیره می کنیم

۴) از تابع هدف یک متغیره است، مشتق می گیریم ریشه های مشتق را محاسبه می کنیم (یک ریشه جواب سوال) است

مثال: به کمک ۶۰ (محیط) متر طناب می خواهیم زمین مستطیل شکلی کنار رودخانه محصور کنیم به طوری که مساحت زمین ماکزیمم گردد؟



تابع هدف: $S = x \times y$

تابع کمکی: $2y + x = 60 \rightarrow 2y = 60 - x \rightarrow y = \dfrac{60 - x}{2}$

$$S = x \times \frac{60 - x}{2} = x\left(30 - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$$

تابع هدف یک متغیره شده

PAPA

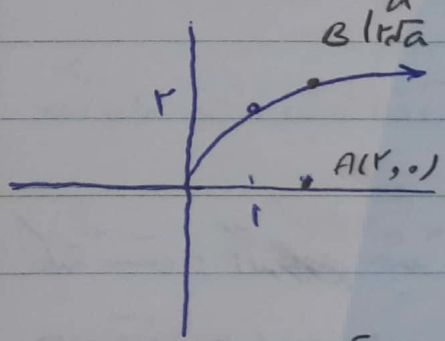
Date : / /

Subject :

$$s'(x) = -\frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}x + 30 = 0 \quad -x + 30 = 0 \quad \boxed{x = 30}$$

$$S = x \times \left(\frac{90-x}{2}\right) = 30 \times 15 = 450$$

نقطه‌ای روی $y=2\sqrt{x}$ بیابید که از نقطه $A|^{2}_{0}$ کوتاه‌ترین فاصله را داشته باشد.



$$\underset{\text{با اضلاع}}{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(a-2)^2 + (2\sqrt{a} - 0)^2}$$

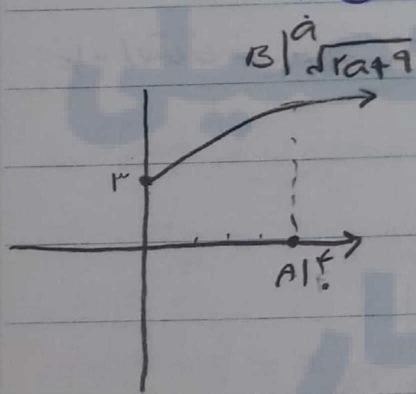
$$f(a) = \underset{\text{متغیره}}{\text{تابع هدف یک}}\ AB = \sqrt{a^2 - \cancel{4a} + 4 + \cancel{4a}} = \sqrt{a^2+4}$$

$$f(a) = \sqrt{a^2+4}$$

$$f'(a) = \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}\sqrt{a^2+4}} \rightarrow a = 0 \qquad B\Big|^{a}_{2\sqrt{a}} = B\Big|^{0}_{0}$$

مثال: کوتاه‌ترین فاصله از $A|^{4}_{0}$ از $y=\sqrt{2x+9}$ کدام است؟

1) $\sqrt{17}$ 2) 6 3) 8 4) هیچکدام



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(a-4)^2 + (\sqrt{2a+9} - 0)^2}$$

$$AB = \sqrt{a^2 - 8a + 16 + 2a + 9} = \sqrt{a^2 - 6a + 25}$$

$$f(a) = \sqrt{a^2 - 6a + 25} \qquad f'(a) = \frac{2a-6}{2\sqrt{a^2-6a+25}} = 0$$

$$2a - 6 = 0 \rightarrow a = 3$$

$$f(3) = \sqrt{3^2 - 6(3) + 25} = \sqrt{34 - 18} = \sqrt{16} = 4$$

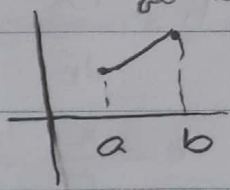
PAPA

Date : / /

Sabject :

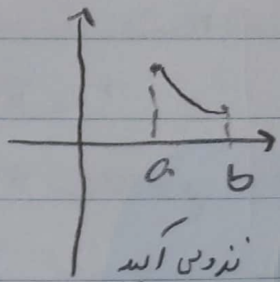
نقطه عطف و مطالب مربوط به آن

تقعر منحنی



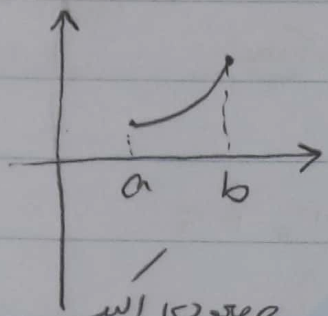
صعودی اکید

$f' > 0$



نزولی اکید

$f' < 0$



صعودی اکید

$f' > 0$

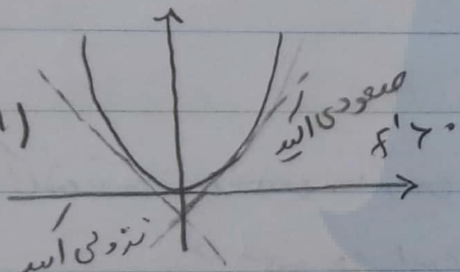
نتیجه: از علامت f'، تقعر منحنی مشخص نمی‌شود

$y = x^2$ روی R: تقعر رو به بالا

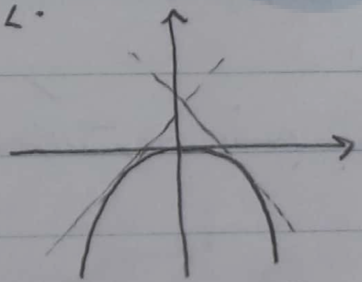
$y' = f'(x) = 2x$

$y'' = f''(x) = 2 > 0$ تقعر رو به بالا

1)



2)



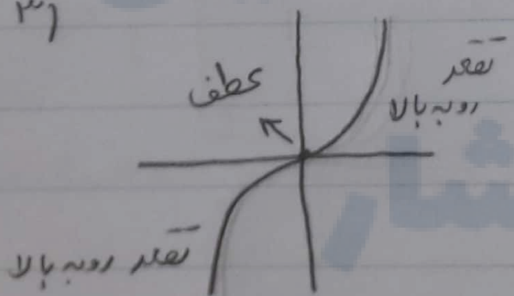
تقعر رو به پایین

$y = -x^2$

$y' = -2x$

$y'' = -2 < 0$

3)



$y = x^3$

$y' = 3x^2$

$y'' = 6x$

$x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	تقعر رو به پایین $\cap$	عطف	تقعر رو به بالا $\cup$	$+\infty$

$x < 0 \rightarrow$ تقعر f رو به پایین

$x > 0 \rightarrow$ تقعر f رو به بالا

Date : / /

Sabject :

تذکر: به جدولی که y'' را تعیین علامت می‌کنیم جدول تقعر می‌گویند از روی جدول تقعر، تقعر منحنی و نقاط عطف منحنی مشخص می‌شود

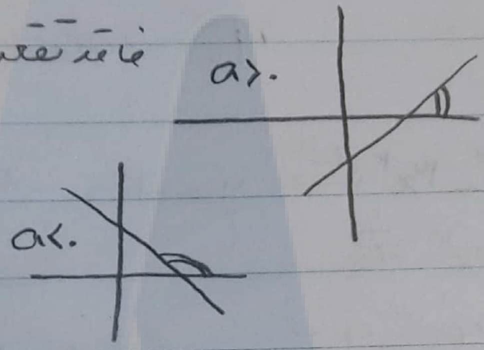
جدول تقعر توابع زیر را تعیین کنید

1) $y = ax^2 + b \quad a \neq 0$

فاقد تقعر

$y' = a$

$y'' = 0$ آزمون بی نتیجه است



$\forall x \in D_f : f''(x) = 0$

2) $y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$

$y' = 2ax + b \rightarrow y'' = 2a$ ↗ $a > 0$ ↘ $a < 0$

$a > 0$

x	$-\infty$			$+\infty$
y''	+	+	+	+
y	∪	∪	∪	∪

توابع درجه ۱ و درجه ۲ نقطه عطف ندارند

$a < 0$

x	$-\infty$			$+\infty$
y''	−	−	−	−
y	∩	∩	∩	∩

m را طوری بیابید که تابع $y = (3m^2 + 2m)x^2 + \frac{1}{3}x - 2$ که این تابع در دامنه‌اش تقعر رو به بالا داشته باشد ($y'' > 0 \leftarrow a > 0$)

$3m^2 + 2m > 0 \qquad m(3m+2) > 0$

x		$-\frac{2}{3}$		0	
	+	0	−	0	+

$m < -\frac{2}{3}$ و $m > 0$

PAPA

Date : / /
Subject :

$y = 3x^3 + 2x$

$y' = 9x^2 + 2 \longrightarrow y'' = 18x$

x		0	
y''	$-$	0	$+$
y	$-\infty$ $\cap$	0 عطف	$\cup$ $+\infty$

یک نقطه عطف با عرض ۰ $\quad I\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$

$y = x^3 - 3x^2 \xrightarrow{x=1} y = -2$

$y' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 6x - 6$

$6x - 6 = 0$

$x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$-\infty$ $\cap$	-2 نقطه عطف	$\cup$ $+\infty$

$I\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$ نقطه عطف

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y'' = 6ax + 2b$

$6ax + 2b = 0$

$2(3ax + b) = 0$

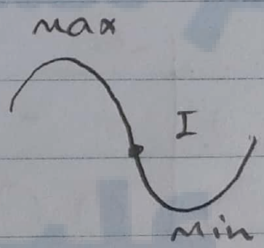
$3ax + b = 0$

$x = -\frac{b}{3a}$

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$-\infty$ $\cap$		$\cup$ $+\infty$

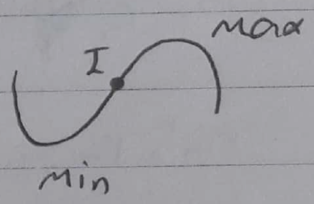
$f(-\frac{b}{3a})$
عطف



$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$
y''	$+$	0	$-$
y	$+\infty$ $\cup$		$\cap$ $-\infty$

$f(-\frac{b}{3a})$



Date : / /
Subject :

نکات توابع درجه ۳:

① تمام توابع درجه ۳ یک نقطه عطف دارند که طول نقطه عطف آن $-\frac{b}{3a}$ است که همان طول ریشه مشتق مرتبه دوم است.

② مختصات نقطه عطف در تابع صدق می کند چون روی تابع است.

③ $f''(\text{طول عطف})=0$

$$y = x^4 + 3x^2 - 3x + 2$$
$$y' = 4x^3 + 6x - 3$$
$$y'' = 12x^2 + 6$$

$12x^2 = -6$

$x^2 = -\frac{6}{12}$ ریشه ندارد

x	$-\infty$			$+\infty$
y''	+	+	+	+
y	∪	∪	∪	∪
	$-\infty$			$+\infty$

فاقد نقطه عطف

تقعر رو به بالا

$$y = 2x^4 - 3x^3 + 4x + 5$$
$$y' = 8x^3 - 9x^2 + 4$$
$$y'' = 24x^2 - 18x$$
$$6x(4x-3) = 0$$
$$6x = 0 \rightarrow x = 0$$
$$4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{4}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
y''		+	0	−	0	+	
y		∪		∩		∪	
		$+\infty$	$f(0)$		$f(\frac{3}{4})$		$+\infty$

تقعر رو به بالا

۲ نقطه عطف

توابع درجه ۴ دارای دو نقطه عطف است

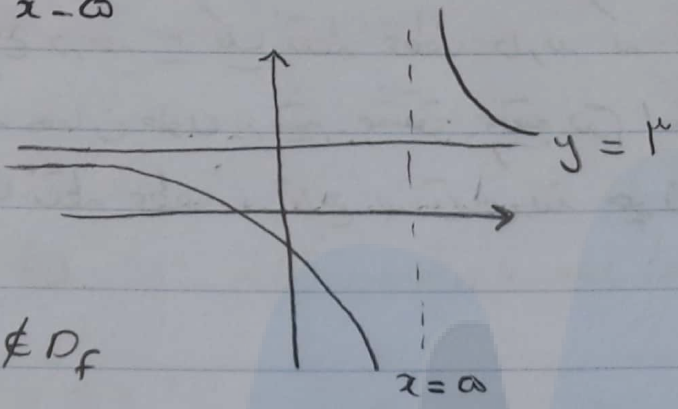
بازه $0 \in$ | عطف
$f(0)$

PAPA

Date : / /

Subject :

$$y = \frac{3x+2}{x-5} \qquad D = R - \{5\}$$



فاقد عطف

$5 \notin D_f$

$$y' = \frac{(ad-bc)}{(cx+d)^2}$$

$$y' = \frac{-15 - 2}{(x-5)^2} = \frac{-17}{(x-5)^2}$$

$$y'' = \frac{0 - ((x-5)^2)' \times -17}{(x-5)^4} = \frac{17 \times 2 \times 1\,(x-5)}{(x-5)^4}$$

فاقد عطف

	$-\infty$	5	$+\infty$
y''	$-$	‖	$+$
y	$\cap$	‖	$\cup$

عطف نیست

$5 \notin D_f$

توابع هموگرافیک نقاط عطف ندارند

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad y = x^{\frac{1}{3}} \qquad y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$D_y = \mathbb{R} \qquad y'' = \frac{1}{3} \times -\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}}$$

Date : / /

Subject :

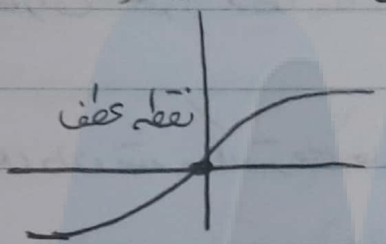
$$y'' = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}} \rightarrow y'' = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$D_{y''} = \mathbb{R} - \{0\}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	$+$	$\Vert$	$-$
y	$-\infty$ $\cup$	0 عطف	$\cap$ $+\infty$

$0 \in D_f$

مهم



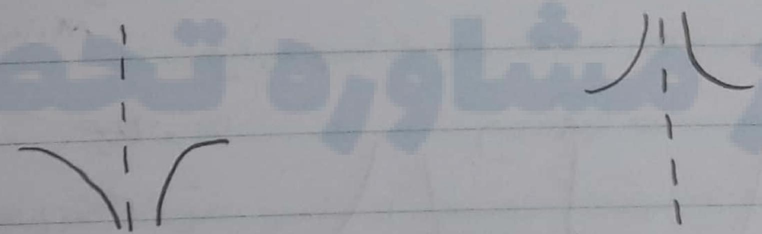
در این مثال مشاهده می کنیم y'' در صفر وجود ندارد ولی 0 طول نقطه عطف است

تشخیص نقاط عطف نمودار f با مفروض بودن نمودار f'

اگر تابع f در بازه I پیوسته باشد و نمودار f' در بازه ی I در اختیار باشد داریم :

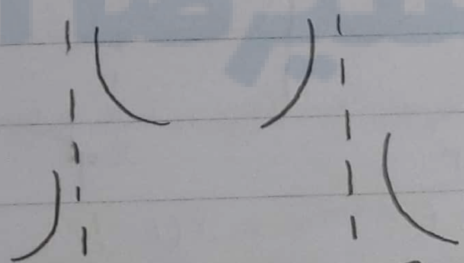
۱) نقاط اکسترمم های نسبی f'، همان نقاط عطف f است

۲) $x=a$ مجانب عمودی مضاعف f' باشد آنگاه $x=a$ طول نقطه عطف f است



$x=a$ مجانب عمودی مضاعف　　$x=a$ مجانب عمودی مضاعف

$x=a$ در مجانب عمودی ساده طول اکسترمم نسبی f است



$x=a$　　$x=a$

مجانب عمودی ساده　　مجانب عمودی ساده

Date : / /
Subject :

یا وجود ندارد یا مشتق ندارد

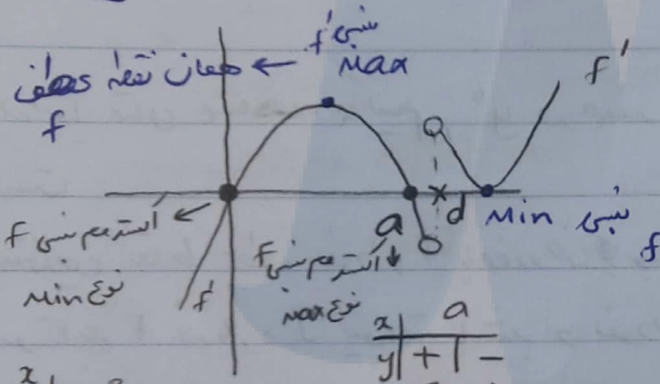
تشخیص اکسترمم های نسبی f از روی نمودار f'

۱) خط $x=a$ مجانب عمودی ساده ی f' همان اکسترمم های نسبی تابع f است

۲) محل تلاقی نمودار f' با محور x ها به شرطی که از آن عبور کند

۳) نقاط پرش در اطراف محور x ها

مثال: با توجه به شکل داده شده، اکسترمم های نسبی f و نقاط عطف f را تشخیص دهید.



نقاط عطف: ۲ نقطه عطف دارد

$\underline{2}$ Min نسبی
$\underline{1}$ max نسبی
همان نقطه عطف f ← f'

x		a	
y'	+		−

↗ ↘ max

x		0	
y	−		+

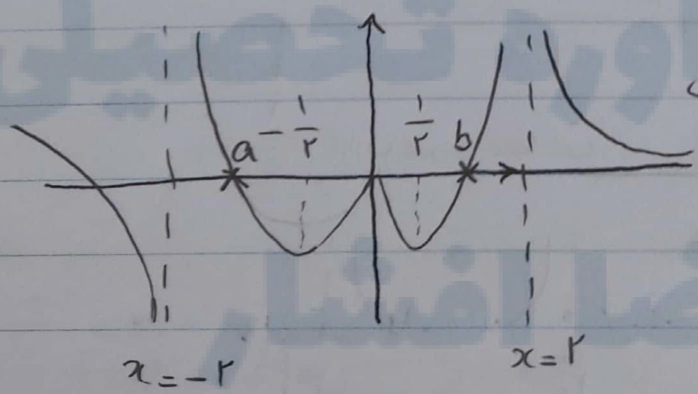
↘ ↗ Min

در d جهش یا پرش داریم

اکسترمم نسبی f Min

		d	
y'	−	‖	+

↘ ↗ Min



۱) $x=2$ طول عطف f است چون $x=2$ مجانب عمودی مضاعف f' است

۲) $x=-\frac{1}{2}$ طول عطف f است چون Min نسبی f' است

۳) $x=0$ طول عطف f است چون Max نسبی f' است

۴) $x=\frac{1}{2}$ طول عطف f است چون Min نسبی f' است

۱) $x=-2$ Min نسبی f چون $x=-2$ مجانب عمودی ساده f'

		-2	
	−	‖	+

۲) $x=a$ Max نسبی چون f' محور x ها را قطع کرده و عبور کرده

۳) $x=b$ Min نسبی چون f' محور x ها را قطع کرده و عبور کرده

		0	
	−		−

رسم نمودار ها به کمک مشتق: (جدول تغییرات)

$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$

برای رسم این نوع تابع مراحل زیر را اجرا می کنیم

۱. دامنه تابع را به دست می آوریم. $D = \mathbb{R}$

2. x را مساوی صفر قرار می دهیم تا بدانیم نمودار محور y ها در چه نقطه ای قطع می کند.

3. y را مساوی صفر قرار می دهیم تا بدانیم نمودار محور x ها در چه نقطه ای قطع می کند معادله درجه ۲ حاصل می شود در صورت امکان ریشه ها را به دست می آوریم.

4. y' را محاسبه می کنیم

5. y' را مساوی صفر قرار می دهیم معادله درجه ۱ حاصل می شود ریشه حاصل می شود

ریشه طول راس سهمی یا اکسترمم است.

PAPA

Date : / /
Subject :

⑥ در صورت نیاز از نقاط کمکی استفاده می‌کنیم.

⑦ جدول تغییرات را رسم می‌کنیم.

⑧ از روی جدول تغییرات نمودار رسم می‌شود.

مثال: جدول تغییرات و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

1) $y = x^2 + 2x$

$D = \mathbb{R}$ * $\boxed{x=0} \to y = 0^2 + 2(0) \to y = 0$

$\boxed{y=0} \to 0 = x^2 + 2x$

$x(x+2) = 0$ → $\boxed{x=0}$ * , $\boxed{x=-2}$ *

$y' = 2x + 2$

$2x + 2 = 0 \to \boxed{x=-1}$ *

طول راس سهمی یا طول اکسترمم (min نسبی)

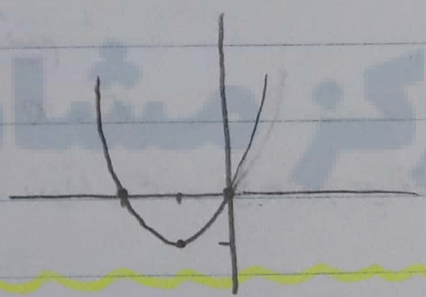
جدول تغییرات

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
y	$+\infty$ ↘	↘	↗	↗	$+\infty$

$x^2 = (-\infty)^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) = 4 - 4 = 0$.

$f(-1) = (-1)^2 + (-2) = -1$



2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$

$D = \mathbb{R}$ * $\boxed{x=0} \to y = -\frac{1}{2}(0) + 3(0) - 1 \to y = -1$

$y = 0 \to 0 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$ $\Delta = 9 - 4(-\frac{1}{2})(-1) = 7$

$y' = -x + 3$ * $x = \frac{-3+\sqrt{7}}{-1} = 3 - \sqrt{7}$

$-x + 3 = 0 \to \boxed{x=3}$ *   * $x = \frac{-3-\sqrt{7}}{-1} = 3 + \sqrt{7}$

طول راس سهمی یا اکسترمم

PAPA

Date : / /

Subject :

$a>0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$

$a<0$

x		$-\frac{b}{3a}$	
y''	$+$	0	$-$
y	$\cup$		$\cap$

رسم توابع درجه ۳ به کمک مشتق (جدول تغییرات)

فرم کلی تابع درجه ۳

$$y = ax^3+bx^2+cx+d \qquad a\neq 0$$

مراحل زیر را اجرا می‌کنیم

$$y' = 3ax^2+2bx+c$$

$$y'' = 6ax+2b \rightarrow 6ax+2b=0$$

$$x = \frac{-b}{3a}$$

① دامنه را به دست می‌آوریم

② $x=0$ ، y را به دست می‌آوریم

③ $y=0$ ، یک معادله درجه ۳ حاصل می‌شود درصورت امکان معادله درجه ۳ را حل می‌کنیم

④ y' را محاسبه می‌کنیم

⑤ y' را مساوی صفر قرار می‌دهیم معادله درجه ۲ حاصل می‌شود درصورت امکان ریشه را به دست آورید اگر ریشه داشت ریشه ها طول های اکسترمم هستند

⑥ y'' را محاسبه می‌کنیم

⑦ $y''=0$ قرار می‌دهیم یک معادله درجه ۱ حاصل می‌شود ریشه آن را به دست می‌آوریم که ریشه طول عطف یا طول ~~[illegible]~~ مرکز تقارن

⑧ درصورت نیاز از نقاط کمکی استفاده می‌کنیم

⑨ جدول تغییرات را رسم کرده و سپس از روی آن نمودار می‌کشیم

مثال:

$y = x^3+3x^2 \qquad D=\mathbb{R} \qquad \boxed{x=0} \rightarrow y=0$

$y=0 \rightarrow 0 = x^3+3x^2$

$x^2(x+3)=0 \quad \boxed{x=0} \quad \boxed{x=-3}$

PAPA

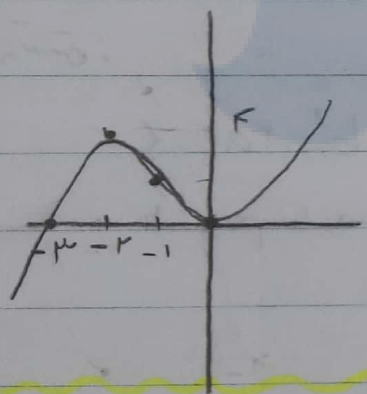
Date : / /
Subject :

$y' = 3x^2 + 6x$

$3x^2 + 6x = 0 \qquad 3x(x+2) = 0 \qquad \boxed{x=0} \quad \boxed{x=-2}$

$y'' = 6x + 6 \qquad 6x + 6 = 0 \rightarrow \boxed{x=-1}$

x	$-\infty$		-3		-2		-1 (عطف)		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
					max				min		



$y = -x^3 + 3x$

$D = \mathbb{R} \qquad \boxed{x=0} \rightarrow y = 0$

$y = 0 \rightarrow -x^3 + 3x = 0$

$x(-x^2+3) = 0 \quad \boxed{x=0} \quad \boxed{x=\pm\sqrt{3}}$

$y' = -3x^2 + 3$

$-3x^2 + 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \quad \boxed{x=1} \quad \boxed{x=-1}$ طول های اکسترمم — max ني min ني

$y'' = -6x \qquad \boxed{x=0}$ طول عطف

PAPA

$y = x^{۳} - ۵x + ۵$

$D = \mathbb{R}$

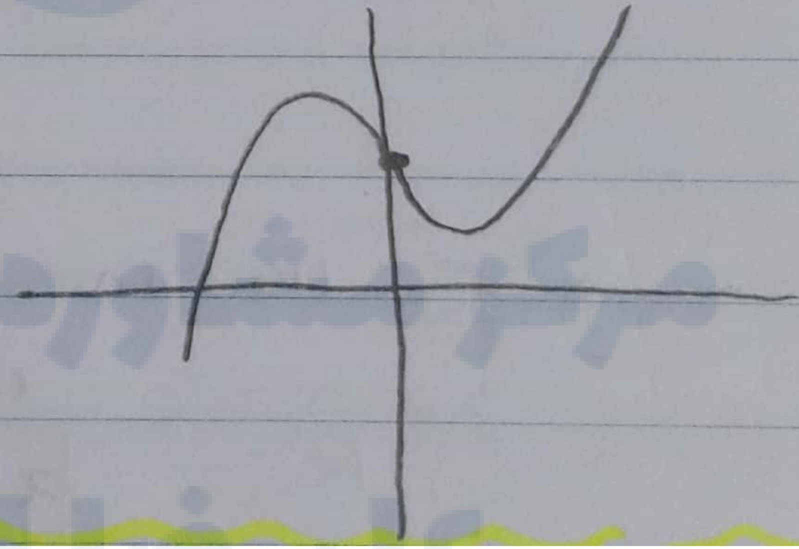
$\boxed{x = ۰} \rightarrow y = ۵$

$y = ۰ \rightarrow x^{۳} - ۵x + ۵ = ۰$ غیرقابل حل

$y' = ۳x^{۲} - ۵ \xrightarrow{y' = ۰} x^{۲} = \frac{۵}{۳} \longrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{۵}{۳}}}$

$y'' = ۶x \xrightarrow{y'' = ۰} \boxed{x = ۰}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{۵}{۳}}$		۰		$\sqrt{\frac{۵}{۳}}$		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	a	$\searrow$	۵	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	$+\infty$



Date : / /

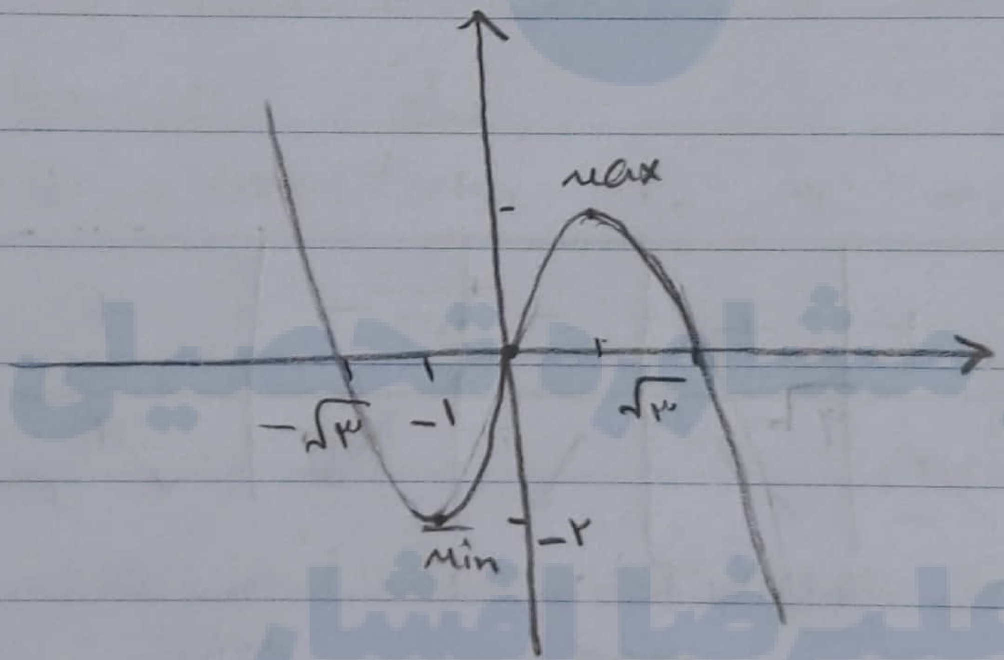
Subject :

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + 3x^2)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -x^3 = -(-\infty)^3 = +\infty$$

جدول تغییرات

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



Date : / /
Subject :

رسم توابع هموگرافیک به کمک مشتق (جدول تغییرات یا جدول رفتار)

$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad c \neq 0$

اگر $c = 0 \rightarrow y = \frac{ax+b}{0x+d} = \frac{ax+b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$

تابع هموگرافیک تبدیل به تابع خطی

اگر $ad - bc = 0 \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad * \quad y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a(x+\frac{b}{a})}{c(x+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c}$

$y = \frac{a}{c}$ تابع هموگرافیک تبدیل به تابع ثابت

m را طوری بیابید که تابع $y = \frac{3x+2}{5-(3m+7)x}$ تبدیل به تابع خطی شود
$c = 0$

$c = 0 \rightarrow -(3m+7) = 0 \rightarrow 3m + 7 = 0 \rightarrow \boxed{m = -\frac{7}{3}}$

تبدیل به تابع ثابت $ad - bc = 0$

$15 + 2(3m+7) = 0 \rightarrow 15 + 6m + 14 = 0$

$6m + 29 = 0 \rightarrow \boxed{m = -\frac{29}{6}}$

برای رسم توابع هموگرافیک به کمک مشتق مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) دامنه را تعیین می‌کنیم $\quad cx + d = 0 \rightarrow x = -\frac{d}{c}$ ریشه مخرج

$D = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$

۲) در صورت امکان x را مساوی صفر قرار داده y را محاسبه می‌کنیم

(یعنی می‌خواهیم بدانیم نمودار محور y ها را در کجا قطع می‌کند)

Date : / /
Subject :

۱۳/ در صورت امکان y را مساوی ۰ قرار داده و x را به دست می‌آوریم
(یعنی می‌خواهیم بدانیم نمودار، محور x ها را کجا قطع می‌کند)

۱۴/ مشتق را محاسبه می‌کنیم $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ ، $ad-bc \neq 0$

صعودی اکید: $ad-bc>0 \rightarrow y'>0$ در همه بازه‌ها

نزولی اکید: $ad-bc<0 \rightarrow y'<0$ در همه بازه‌ها

۱۵/ مجانب‌ها را محاسبه می‌کنیم

مجانب عمودی (ریشه مخرج): $x=-\frac{d}{c}$ $\begin{cases} x \rightarrow -\frac{d}{c} \\ y \rightarrow \pm\infty \end{cases}$

مجانب افقی: $y=\frac{a}{c}$ $\begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow \frac{a}{c} \end{cases}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$$

۱۶/ در صورت نیاز از نقاط کمکی استفاده می‌کنیم (با مجانب عمودی می‌سنجیم)

۱۷/ از روی جدول تغییرات، نمودار را رسم می‌کنیم

جدول تغییرات و نمودار $y=\frac{x+2}{x-1}$ را رسم کنید

$x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow D=\mathbb{R}-\{1\}$

$\boxed{x=0} \rightarrow y=-2$

$y=0 \rightarrow x+2=0 \rightarrow x=-2$

مجانب عمودی $\boxed{x=1}$

مجانب عمودی $\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{cases}$

$$y' = \frac{-1-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$

مجانب افقی $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1 \end{cases}$

$x=0$ $x=1$ $x=2$ نقطه کمکی

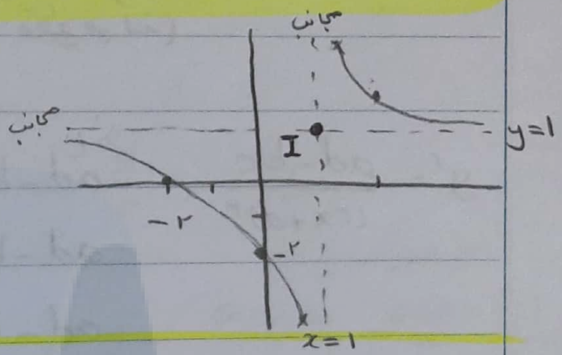
Date : / /

Subject :

۱) چون در دامنه نیست به این شکل است در جدول ||

$y' < 0$

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	||	$-$		$-$	
y	1	↘	0	↘	-2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	4	↘	1



نکته: مرکز تقارن تابع هموگرافیک محل تلاقی مجانب عمودی و افقی

$$I \left| \begin{array}{l} -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} \end{array} \right.$$

$D = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ $\quad -2x+1=0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{3x+4}{-2x+1}$$

$\boxed{x=0} \rightarrow y=4$ و $y=0 \rightarrow x = -\frac{4}{3}$

نقطه کمکی $\rightarrow x=1 \rightarrow y = \frac{7}{-1} = -7$

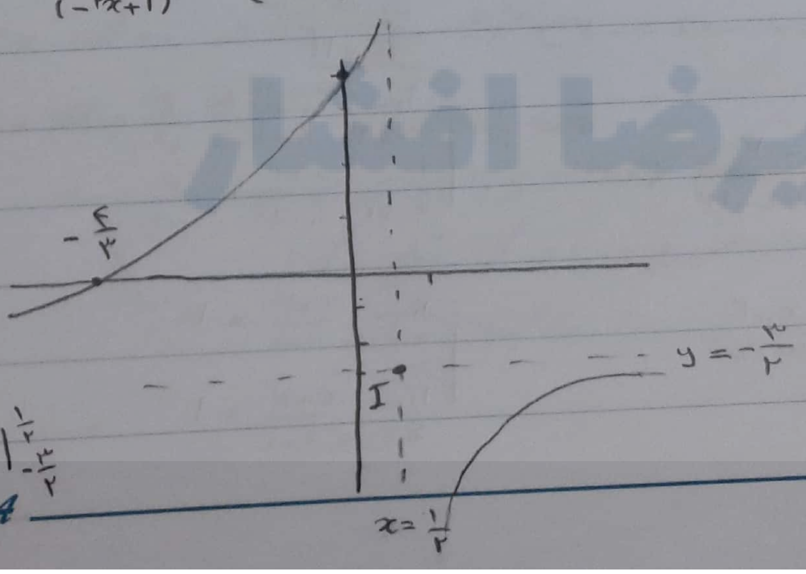
مجانب عمودی $\boxed{x=\frac{1}{2}}$ $\quad \begin{cases} x \rightarrow \frac{1}{2} \\ y \rightarrow \pm\infty \end{cases}$

$y = -\frac{3}{2}$ $\quad \begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow -\frac{3}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	||	$+$		$+$	
y	$(-\frac{3}{2})^+$	↗	0	↗	4	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-7	↗	$(-\frac{3}{2})^-$

$$y' = \frac{3-(-8)}{(-2x+1)^2} = \frac{11}{(-2x+1)^2} > 0$$ صعودی

(|| چون در دامنه نیست $\frac{1}{2}$)



$I \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right.$

PAPA