جزوه تشریحی کتاب ریاضی ۳

سال دوازدهم تجربی

ویژه خرداد

تهیه شده توسط :

شهریار حسین پور

مدرس مدارس سمپاد گیلان

۰۹۱۱۱۴۳۰۵۵۸

۰۹۳۷۱۱۶۷۱۵۴

«ترکیب توابع»

۱- دو تابع f و g معرفی می شوند به در صورت یا زوج مرتب یا ضابطه

مانند

$$f=\{(۲,۵),(۴,۷),(۵,۱۱),(۶,۱۵)\}$$

$$g=\{(۱,۲),(۳,۵),(۴,۶)\}$$

فرض کنیم fog را می خواهیم پس ابتدا به g که دوم آمده نگاه می کنیم.

$$۱ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} (۲\to۵) \Rightarrow (۱,۵) \qquad \boxed{(۱,۲),(۲,۵)\to(۱,۵)}$$

$$۳\to۴\xrightarrow{\quad f\quad}۴\to۷\Rightarrow(۳,۷)\Rightarrow fog=(۱,۵),(۳,۷),(۴,۱۵)\}$$

$$۴\to۶\xrightarrow{\quad f\quad}۶\to۱۵\Rightarrow(۴,۱۵)$$

همیشه همین طوره پس کافیه دقت کنید.

حالا $fog(۳)=f(g(۳))=f(۵)=۱۱$

یا ضابطه $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}, g(x)=\frac{۲x}{x-۱}$ آنگاه $gof(x)$ چیست؟

gof یعنی f رو بجای x های g قرار بده

$$g(x)=\frac{۲x}{x-۱}\to gof(x)=g(f(x))=\frac{۲\frac{x-۱}{x+۲}}{\frac{x-۱}{x+۲}-۱}=\frac{\frac{۲x-۲}{x+۲}}{\frac{x-۱-x-۲}{x+۲}}=\frac{۲x-۲}{-۳}$$

خیلی ساده هست هر چه قدر سوال هم تغییر کنه باز دقت می خواد این که بدرد چی می خوره !حالا فقط نمره گرفتن پس زورتو بزن یاد بگیری!

$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{\frac{۲x}{x-۱}-۱}{\frac{۲x}{x-۱}+۲} = \frac{\frac{۲x-x+۱}{x-۱}}{\frac{۲x+۲x-۲}{x-۱}} = \frac{x+۱}{۴x-۲}$$

حالا اگه دامنه بخوان

تو حالت زوج مرتبی اگر تونستیم زوج مرتب های اولی و آخری را پیدا کنیم همون اولی ها دامنه اند پس آخری ها برد.

$$f = \{(۱,۳),(۲,۵),(۳,۶),(۴,۷)\}$$

$$g = \{(-۱,۱),(۱,۳),(۲,۴),(۵,۷)\}$$

$$fog \Rightarrow \begin{cases} (-۱,۱),(۱,۳) \to (-۱,۳) & D = \{-۱,۱,۲\} \\ (۱,۳),(۳,۶) \to (۱,۶) & \\ (۲,۴),(۴,۷) \to (۲,۷) & R = \{۳,۶,۷\} \\ (۵,۷),\dots & \end{cases}$$

اما تو حالت ضابطه یکم و فقط یکم کار سخت تره :

اول این تعریف رو باید بفهمید (حفظ کنید)

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

یعنی چی! یعنی اینکه هر دو تا دامنه را بدست بیارید. دامنه اولی رو نگه داریم و خود تابع دوم رو بزاریم تو دامنه تابع اول. نشد هنوز!

ببینید ←

$$f(x) = \frac{۱}{x} \qquad D_f : x \neq ۰ \quad IR - \{۰\}$$

$$g(x) = \sqrt{x+۱} \qquad D_g : x+۱ \geq ۰ \to x \geq -۱$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq -۱ \mid \sqrt{x+۱} \neq ۰\} = \{x \geq -۱, x \neq -۱\}$$
$$= (-۱, +\infty)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g\} = \left\{x \neq ۰ \,\middle|\, \frac{۱}{x} \geq -۱\right\} = \ ...$$

خوب دو جور دیگه می شه سوال مطرح باشد.

۱) gof و g را بدهند و f را بخواهند.

f= اولی یا بزرگتر

g= دومی یا کوچکتر

کافیه g(x)=t و x را بر حسب t بدست بیاریم بگذاریم طرف دوم

$$fog(x) = x^۲ - ۱ \Rightarrow f(t) = \left(\frac{t}{t-۱}\right)^۲ - ۱, f(x) = \left(\frac{x}{x-۱}\right)^۲ - ۱$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-۱} = t \rightarrow x - xt - t$$

$$x - tx = -t$$

اول اینجا بعد بالا $g(x) = \frac{x}{x-۱} = t$

$$x(۱-t) = -t \rightarrow x = \frac{-t}{۱-t} = \frac{t}{t-۱}$$

۲- fog و f را بدهند و g را بخواهند.

اینجا چون تابع بزرگتر را داریم پس می توان fog را بدست آورد و با fog سوال برقرار داد.

$$f(x) = \frac{x}{x+۱}$$

$$fog(x) = ۲x - ۱$$

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)+۱} = ۲x - ۱ \rightarrow g(x) = (۲x-۱)g(x) + ۲x - ۱$$

$$g(x) - (۲x-۱)g(x) = ۲x - ۱$$

$$g(x)(۱ - ۲x + ۱) = ۲x - ۱$$

$$g(x) = \frac{۲x-۱}{۲-۲x}$$

$$f(g(x)) = ۳(x) - ۴ = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴ \rightarrow \begin{matrix} ۳g(x) = ۳n^۲ - ۶x + ۱۸ \\ g(x) = x^۲ - ۲x + ۶ \end{matrix}$$

حالا :

$$f(x)=x^2-4 \qquad fog(5)=f(\sqrt{21})=(\sqrt{21})^2-4=21-4=17$$
$$g(x)=\sqrt{x^2-4} \qquad g(5)=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$$

مثال : دو تابع معرفی کنید که ترکیب آنها $\sqrt[3]{x^2+1}$ باشد.

$$\begin{matrix} f(x)=\sqrt[3]{x^2+1} \\ g(x)=x^2 \end{matrix} \rightarrow fog(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$$

یا

پس منحصر به فرد نیست

$$\begin{matrix} f(x)=\sqrt[3]{x} \\ g(x)=x^2+1 \end{matrix} \rightarrow fog(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$$

اگر $f(x)=2x-5, g(n)=x^2-3x+8$ آنگاه معادله $fog(x)=7$ را حل کنید.

$$fog(x)=f(g(x))=2(x^2-3x+8)-5=2x^2-6x+16 \quad -5=7$$

$$2x^2-6x+4=0 \rightarrow x^2-3x+2=0 \begin{matrix} x=1 \\ x=2 \end{matrix}$$

فکر کنم یک نگاه به کتاب بندازی دیگه ترکیب حله!

$$D_{fog}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g| = \{x\neq 0 | \frac{1}{x}\geq -1\} = (-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$$

$$\frac{1}{x}+1\geq 0 \rightarrow \frac{1+x}{x}\geq 0 \begin{matrix} x=-1 \\ x=0 \end{matrix}$$

	-1		0	
	$+$	$-$	$+$	
	$x\leq -1$		$x\geq 0$	

دو تا از کتاب :

۱)

$$f(x)=\sqrt{x-۱} \qquad D_f: x-۱\geq ۰ \to x\geq ۱$$
$$g(x)=۲x^۲-۱ \qquad D_g=IR$$

به صورت چند جمله ای هست!

$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{۲x^۲-۱-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$$

$$gof(x)=g(f(x))=۲(\sqrt{x-۱})^۲-۱=۲(x-۱)-۱=۲x-۳$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(n)\in D_f\}=\{IR|۲x^۲-۱\geq ۱\}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

$$۲x^۲\geq ۲\to x^۲\geq ۱\to x\geq ۱, x\leq -۱$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g|=\{x\geq ۱|\sqrt{x-۱}\in IR|=[۱,+\infty)$$

$$۲)f(x)=\frac{۲}{x-۱} \qquad D_f: x\neq ۱$$

$$g(x)=\frac{۳}{x} \qquad D_g: x\neq ۰$$

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱}=\frac{۲x}{۳-x}$$

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{۳}{\frac{۲}{x-۱}}=\frac{۳x-۳}{۲}$$

$$D_{gof(x)}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\neq ۰|\frac{۳}{x}\neq ۱\}=R-\{۰,۳\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g|=\{x\neq ۱|\frac{۲}{x-۱}\neq ۰\}=IR-\{۱\}$$

اینام تمرین های کتاب :

$$۱)f(x)=x^۲-۵$$
$$g(x)=\sqrt{x+۶}$$
$$fog(x)=$$
$$D_{fog}=$$
$$۲)f(x)=\sqrt{۳-۲x}$$

$g(x) = \frac{۶}{۳x - ۵}$

$fog(x) =$

$D_{fog} =$

۳) $f(x) = \sqrt{x + ۲}$

$g(x) = \sqrt{x^۲ - ۱۶}$

$D_{gof}(x) =$

$gof(x) =$

۴) $f(x) = \sin x$

$g(x) = \sqrt{x}$

$gof(x) =$

$D_{gof} =$

«وارون تابع»

وارون تابع این نیست که تابع رو بر عکس کنیم می شه فت نوعی بازیافته یعنی دستور که عمل ضابطه ی تابع را برعکس انجام بده یعنی قبلا x می دادیم ، y رو می خواستیم حالا y رو میدیم و x رو می خواهیم.

$(x, y) \in f \leftrightarrow (y, x) \in f$

$$R_f = D_{f^{-۱}}, D_f = R_{f^{-۱}}$$

زوج مرتبی رو که یازدهم هم دیوید کافیه اگر یک به یک باشه ۱ جای x و y رو عوض کنیم.

۱ به یک نیست

$f = \{(۲,۵), (۳,۷), (۴,۹), (۶,۷)\}$

$g = \{(۳,۵), (۴,۷), (۵,۹), (۶,۱۱)\}$

$g^{-1}=\{(۵,۳),(۷,۴),(۹,۵),(۱۱,۶)\}$

به دقت ترکیب هر تابع با وارونش می شه تابع همان پس

$$fof^{-1}(x)=x$$
$$f^{-1}of(x)=x$$

به g نگاه کنید.

$$gog^{-1}(x)=\{(۵,۵),(۷,۷),(۹,۹),(۱۱,۱۱)\}$$

پس برای اینکه تویه سوال تشریحی بخواهیم نشان دهیم f و g وارون همند کافیه نشان بدهیم.

$$fog(x)=x,\ \ gof(x)=x$$

مثال

$$f(x)=۳x-۴ \qquad fog(x)=۳(\frac{x+۴}{۳})-۴=x$$
$$g(x)=\frac{x+۴}{۳} \qquad gof(x)=\frac{۳x-۴+۴}{۳}=x$$

یعنی g,f وارون همند.

$$\begin{cases} f(x)=-\frac{۷}{۲}x-۳ \\ g(x)=-\frac{۲x+۶}{۷} \end{cases} \qquad \begin{matrix} fog(x)= \\ gof(x)= \end{matrix}$$

$$\begin{cases} f(x)=۸+x^{۲} \\ g(x)=-\sqrt{x-۸} \end{cases} x\le ۰ \qquad \begin{matrix} fog(x)= \\ gof(x)= \end{matrix}$$

دستور وارون تابع :

ساده بگم باید یه بلایی سرتابع بیاریم (مانند بردن عدد به طرف دیگر یا توان رساندن یا ریشه گرفتن) خلاصه تقسیم و ضرب و ...) تا x تنها بشه حالا x می شه $f^{-1}(x)$ و y می شه!

$$۱) f(x)=\sqrt{۲x-۱}$$

$$f(x_۱)=f(x_۲)\to\sqrt{۲x_۱-۱}=\sqrt{۲x_۲-۱}\to ۲x_۱-۱=۲x_۲-۱\to x_۱=x_۲$$

یک به یک است.

پس وارون پذیر هست.

$$(y=\sqrt{۲x-۱})^{۲} \to y^{۲}=۲x-۱ \to y^{۲}+۱=۲x$$

$$x=\frac{y^{۲}+۱}{۲} \to f^{-۱}(x)=\frac{x^{۲}+۱}{۲}$$

$$۲) f(x)=x^{۲}-۲x \qquad x \geq ۱$$

به همین صورت نمی شه کاری کرد پس مربع کاملش می کنیم

$$y=x^{۲}-۲x+۱-۱=(x-۱)^{۲}-۱$$

$$\Rightarrow y+۱=(x-۱)^{۲} \to x-۱=\sqrt{y+۱} \to x=\sqrt{y+۱}+۱ \to f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۱}+۱$$

می دانیم تابع درجه دوم (سهمی یک به یک نیست ولی در دامنه کوچکتر از محور تقارن یا بیشتر از آن یک به یک است که می توان وارون آن را بدست آورد مثل مثال قبل

مثال : دامنه تابع را طوری محدود کنید که یک به یک شود سپس وارون آن را بدست آورید.

$$y=x^{۲}-۴x+۴+۱=(x-۲)^{۲}+۱$$

اگر $x \geq ۲$ باشد یک به یک است همچنین برای $x<۲$ نیز یک به یک است.

نمونه

$$y=(x-۲)^{۲} \qquad x<۲$$

$$y-۱=(x-۲)^{۲} \xrightarrow{x<۲} |x-۲|=\sqrt{y-۱} \to x-۲=-\sqrt{y-۱}$$

$$\Rightarrow x=-\sqrt{y-۱}+۲ \to f^{-۱}(x)=-\sqrt{x-۱}+۲$$

مثال :

$$y=\sqrt[۳]{۲x-۱}-۱ \to (y+۱=\sqrt[۳]{۲x-۱})^{۳} \to$$

$$(y+۱)^{۳}=۲x-۱ \to ۲x(y+۱)^{۳}+۱ \to x=\frac{(y+۱)^{۳}+۱}{۲}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{(x+1)^3+1}{2}$$

مثال :

$$y=(x-2)^3-1 \to y+1=(x-2)^3 \to x-2=\sqrt[3]{y+1}$$

$$x=\sqrt[3]{y+1}+2 \to f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}+2$$

مثال :

$$y=\sqrt{x-2}+1 \to (y-1=\sqrt{x-2})^2 \to x-2=(y-1)^2$$

$$x=(y-1)^2+2 \to f^{-1}(x)=(x-1)^2+2$$

اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ مقادیر زیر را بدست آورید.

الف)

$$(fog)^{-1}(5)=41$$

$$(fog)(x)=\frac{1}{8}x^3-3=5 \to \frac{1}{8}x^3=8 \to x^3=64 \to x=4$$

ب)

$$(f^{-1}of^{-1})(6)=f^{-1}(72)=600$$

$$f^{-1}(6)=72$$

$$\frac{1}{8}x-3=6 \to \frac{1}{8}x=9 \to x=72$$

$$\frac{1}{8}x-3=72 \to \frac{1}{8}x=75 \to x=600$$

پ)

$$(f^{-1}of)(6)=6 \qquad ,(fof^{-1})(6)=6$$

ت)

$g^{-۱}of^{-۱}(۵)=g^{-۱}(۶۴)=۸ \qquad x^{۳}=۶۴\rightarrow x=۸$

$f^{-۱}(۵)=۶۴$

$\frac{۱}{۸}x-۳=۵\rightarrow\frac{۱}{۸}x=۸\rightarrow x=۶۴$

انتقال- انبساط- انقباض عمودی و افقی

$$y=\overset{۳}{\overset{\uparrow}{m}}\,\overset{۲}{\overset{\uparrow}{f}}(\overset{۱}{\overset{\uparrow}{a}}x+b)\overset{۴}{\overset{\uparrow}{+n}}$$

۱- $b>۰$ به سمت چپ منتقل می شود و $b<۰$ به سمت راست منتقل می شود

۲- الف) اگر $a>۰$ باشد دامنه $\frac{۱}{a}$ می شود $\Leftarrow \begin{cases} a=k & \text{انقباض} \\ a=\frac{۱}{k} & \text{انبساط} \end{cases}$

ب) اگر $a<۰$ باشد دامنه علاوه بر $\frac{۱}{a}$ شدن نسبت به محور y ها قرینه می شود.

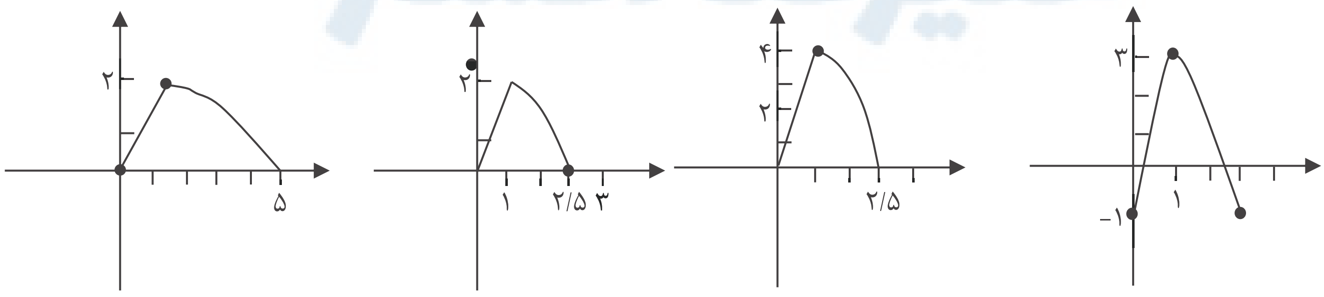
۳- الف) اگر $m>۱$ نمودار در راستای محور y ها انبساط پیدا می کند.

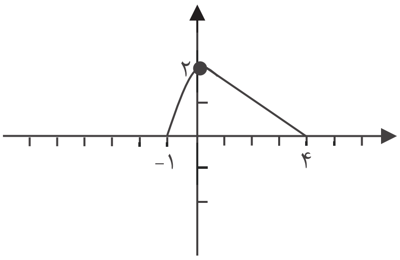
ب) اگر $۰<m<۱$ نمودار در راستای محور yها انقباض پیدا می کند.

پ) $m<۰$ علاوه بر دو حالت بالا نمودار نسبت به محور x ها قرینه می شود.

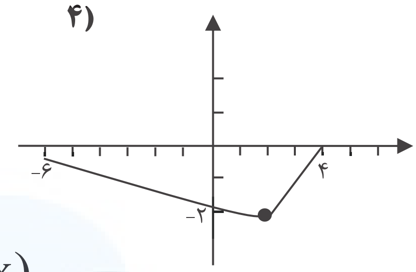
۴- اگر $n>۰$ نمودار n واحد بالا می رود. و اگر $n<۰$ ، نمودار n واحد پایین می آید.

۱) $$y=\overset{۳}{\overset{\uparrow}{۲}}\,\overset{۲}{\overset{\uparrow}{f}}(\overset{۱}{\overset{\uparrow}{۲}}x-۱)\overset{۴}{\overset{\uparrow}{-۱}}$$



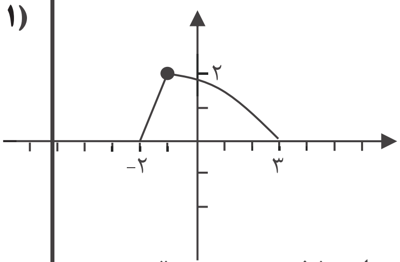


۴)

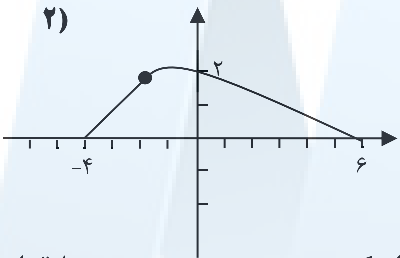


۲) $y = \overset{۳}{\uparrow}{-}f(\overset{۱}{\uparrow}{۱}\overset{۳}{\uparrow}{-}\overset{\overset{۲}{\uparrow}}{\frac{۱}{۲}}x)$

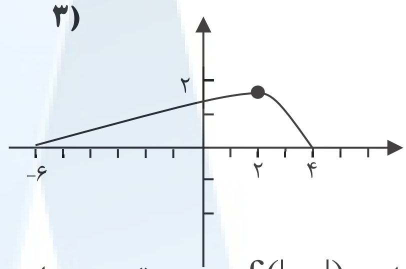
۱)



۲)



۳)



توجه :

۱) برای رسم تابع $y=f(|x|)$ ، قسمتی از نمودار که سمت چپ محور yها قرار دارد را حذف نموده و قسمت راست محور y ها را عینا و قرینه سمت چپ می کشیم

۲) برای رسم تابع $y=f(-|x|)$ این کار را بر عکس انجام می دهیم.

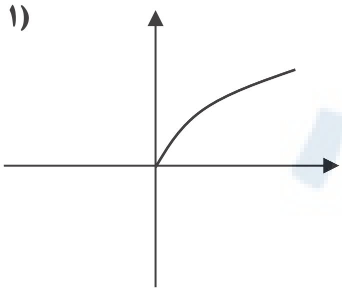
۳) برای رسم تابع $y=|f(x)|$ قسمت زیر محور x را حذف و در بالا قرینه می کشیم.

مثال : نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را رسم کنید.

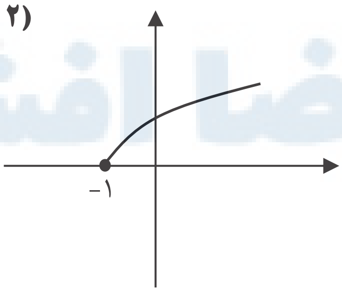
الف) نمودار تابع $y=۲-\sqrt{۱-۲|x|}$ چیست؟

۳) $y=\sqrt{۱-۲x}$ ۲) $y=\sqrt{۱+۲x}$ ۱) $y=\sqrt{x}$

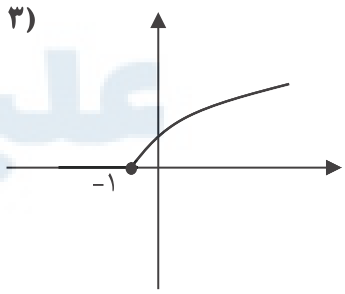
۱)



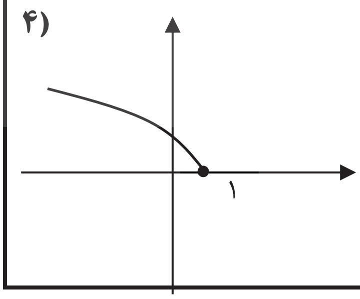
۲)



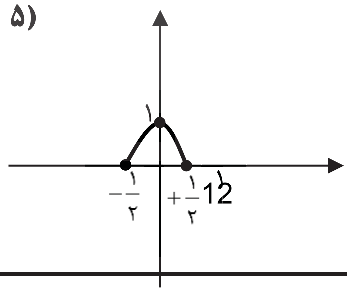
۳)



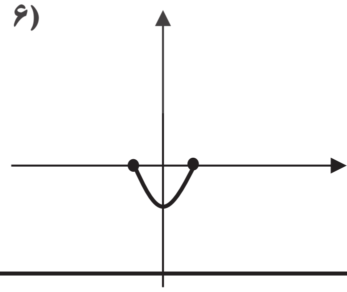
۴)



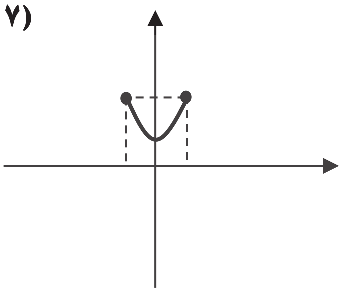
۵)



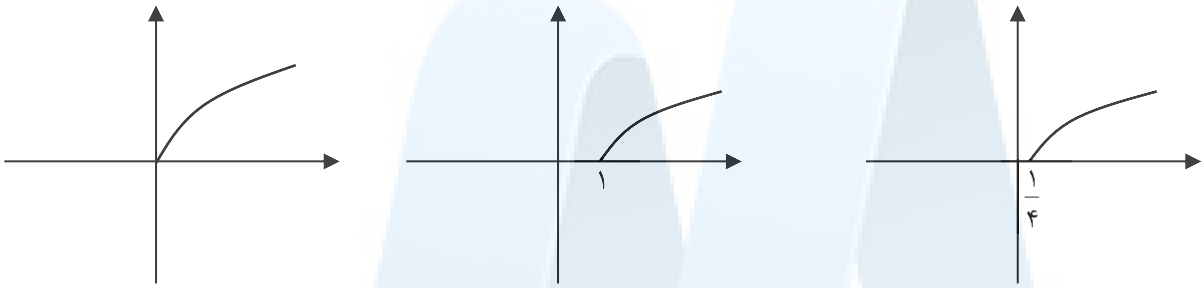
۶)

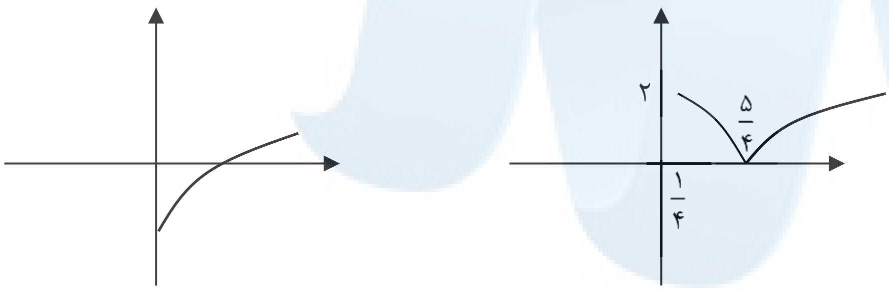


۷)



ب) $y=\left|\sqrt{۴x-۱}-۲\right|$





$$\sqrt{۴x-۱}-۲=۰$$
$$\sqrt{۴x-۱}=۲$$
$$۴x-۱=۴$$
$$x=\frac{۵}{۴}$$

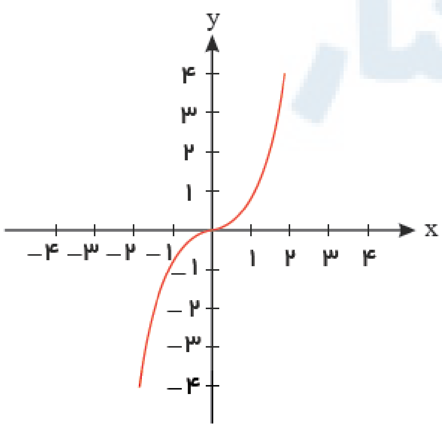
<u>آزمون تابع</u>

۱- با استفاده از نمودار $f(x)=x^۳$ تابع ، نموار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن ها را مشخص کنید.

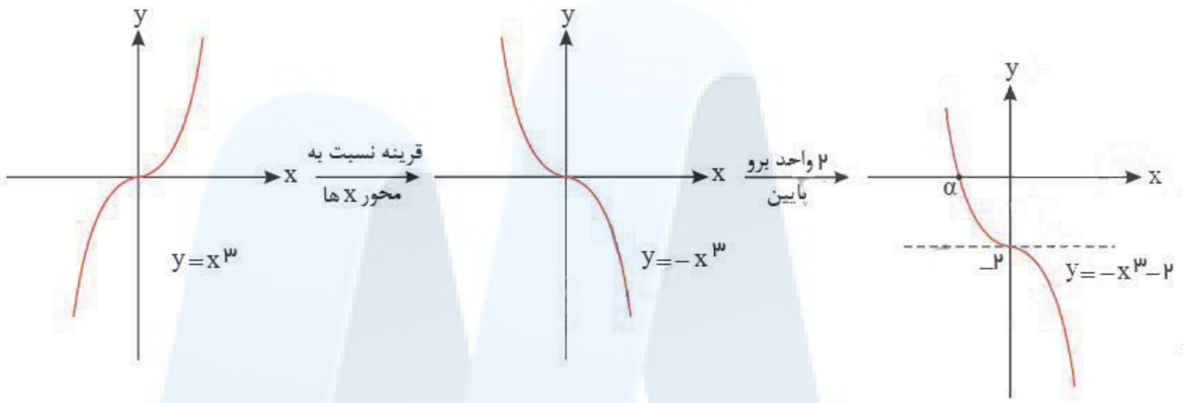
پاسخ :

الف)

$y=-x^۳-۲$



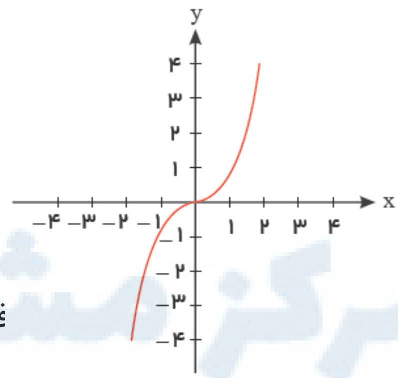
پاسخ : برای رسم نمودار $y=-x^{۳}-۲$ از روی نمودار $y=x^{۳}$ می بایستی ابتدا نمودار $y=x^{۳}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم تا y قرینه شده و به نمودار $y=-x^{۳}$ برسیم و در ادامه نمودار حاصل را ۲ واحد در راستای قائم به پایین انتقال دهیم تا بالاخره به نمودار $y=-x^{۳}-۲$ برسیم. داریم :



به نظر شما محل تلاقی این نمودار با محورxها (یعنی α) چه طولی دارد؟! آری در این نقطه $y=۰$ بوده و داریم:

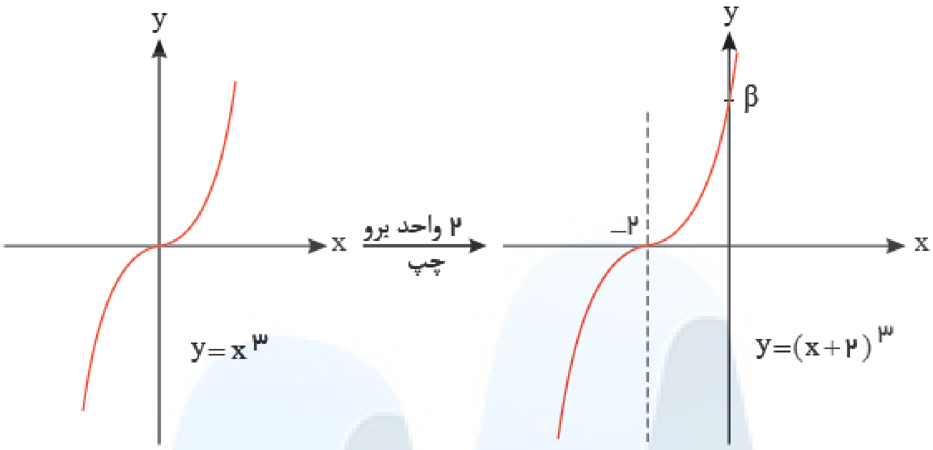
$$y=-x^{۳}-۲=۰\rightarrow x^{۳}=-۲\xrightarrow[\text{بگیر}]{\text{ریشه سوم}}\sqrt[۳]{x^{۳}}=\sqrt[۳]{-۲}\rightarrow x=\sqrt[۳]{-۲}=-\sqrt[۳]{۲}=\alpha$$

$y=(x+۲)^{۳}$



پاسخ : بر فی است $y=x^{۳}$ را ۲ واحد در راستای محور طول ها به سمت چپ انتقال دهیم (این موضوع را می توانید از محل تلاقی نمودار با محول طول ها نیز درک کنید :

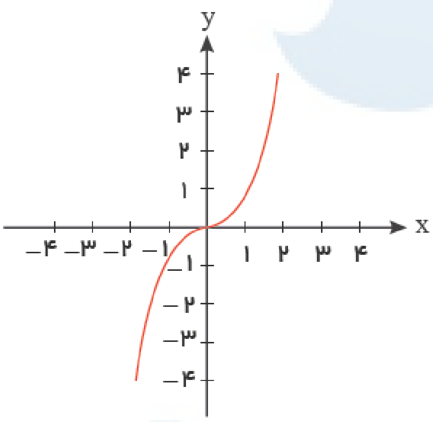
$(y=(x+۲)^{۳}=۰\rightarrow x=-۲$



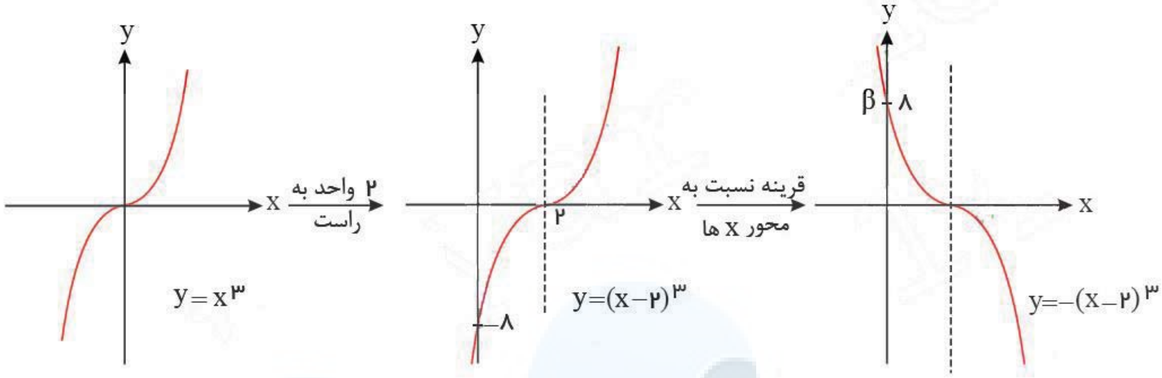
آیا شما هم موافقید که محل تلاقی این نمودار با محور yها (یعنی β) به صورت $\beta = y(\cdot) = (\cdot+۲)^۳ = ۸$ است؟!

پ)

$y = -(x-۲)^۳$



پاسخ : خب دیگر، با توجه به دو مورد ، قبلی حتما دریافته اید که برای رسم نمودار $y = -(x-۲)^۳$ ابتدا نمودار $y = (x-۲)^۳$ را با ۲ واحد انتقال به سمت راست دادن نمودار $y = x^۳$ به دست آورده و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می کنیم تا نمودار $y = -(x-۲)^۳$ حاصل شود :

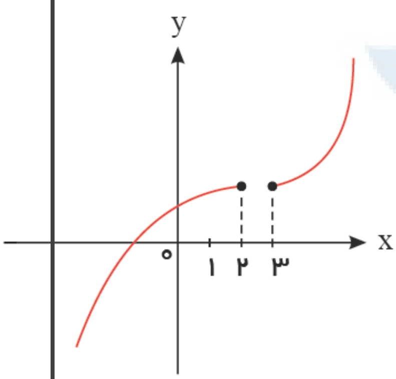


$$\beta = y(۰) = -(۰-۲)^{۳} = -(-۸) = ۸$$

۲- هر کدام از توابع زیر در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در چه بازه هایی اکیداً نزولی هستند؟

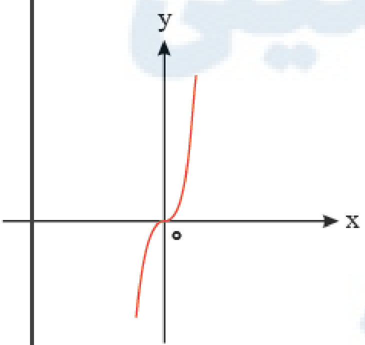
پاسخ:

الف)



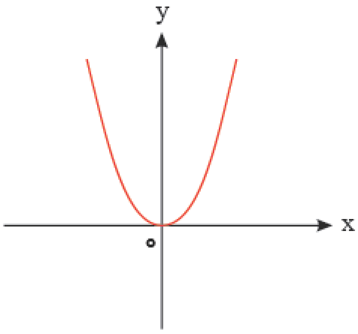
پاسخ : در بازه های $(-\infty,۲],[۳,+\infty)$ که به معنای $\mathbb{R}-(۲,۳)$ است اکیداً صعودی است.

ب)



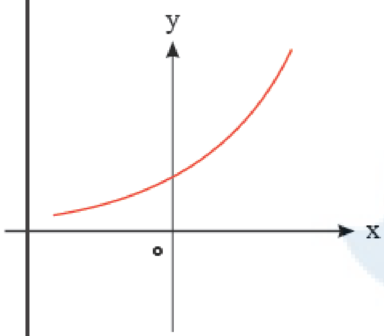
پاسخ : این تابع همواره (روی $\mathbb{R}$ به عنوان دامنه تابع) صعودی اکیدا است زیر نمودار تابع با حرکت از چپ به راست همواره بالا می رود. (این تابع می تواند $y=x^3$ باشد)

پ)



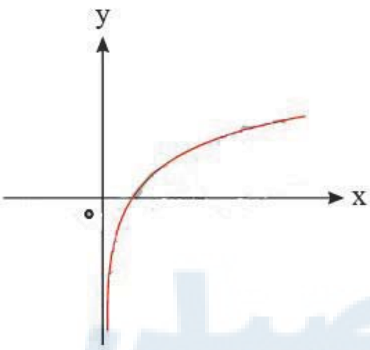
پاسخ : این تابع ، می تواند متعلق به تابع $y=x^2$ باشد، در بازه $(-\infty,0]$ نزولی اکید و در بازه $[0,+\infty)$ صعودی اکسید است.

ت)



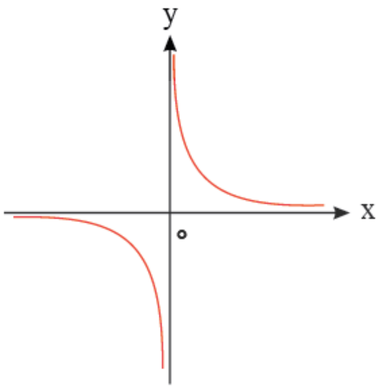
پاسخ : نمودار این تابع نیز (که می تواند مربوط به تابع نمایی $y=x^2$ باشد) همواره صعودی است.

ث)



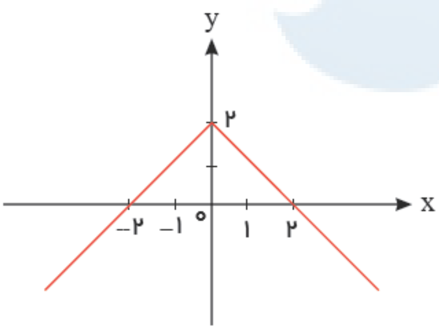
پاسخ : نمودار این تابع هم (که می تواند متعلق به تابع لگاریتمی $y=\log_a^x$ با شرط $a>1$ باشد) روی دامنه خود که بازه است با حرکت از چپ به راست همواره بالا رفته و این یعنی اکیداً صعودی است.

ج)



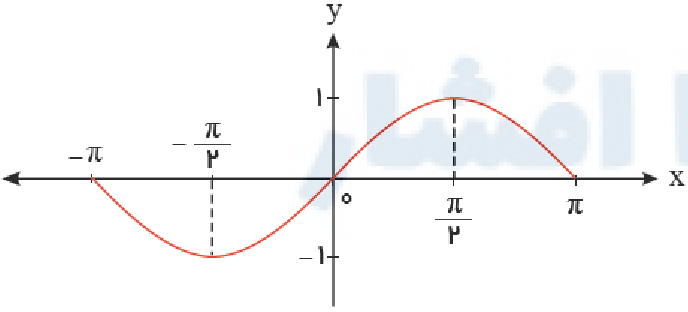
پاسخ : این تابع که می تواند متعلق به تابع گویای $y=\frac{۱}{x}$ باشد نکته بسیار جالبی را در خود نهفته دارد و آن اینکه تابع در هر کدام از فاصله های $(۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰)$ نزولی اکید بوده و حالی که روی هر بازه ای که شامل $x=۰$ (ریشه مخرج) باشد غیر یکنواست (نه صعودی و نه نزولی).

چ)



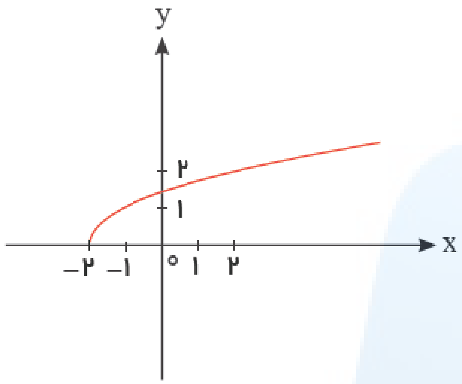
پاسخ : این تاع نیز با دامنه روی فاصله $(-\infty,۰]$ صعودی اکید و روی فاصله $[۰,+\infty)$ نزولی اکید است. این بدان معناست که تابع روی دامنه خود غیر یکنواست.

ح)



پاسخ : این نمودار که متعلق به تابع مثلثاتی $y=\sin x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ می باشد، در فاصله های $[\frac{\pi}{۲},\pi],[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$ نزولی اکید و در فاصله $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ صعودی اکید است. یعنی تابع $[-\pi,\pi]$ روی غیر یکنواست.

خ)

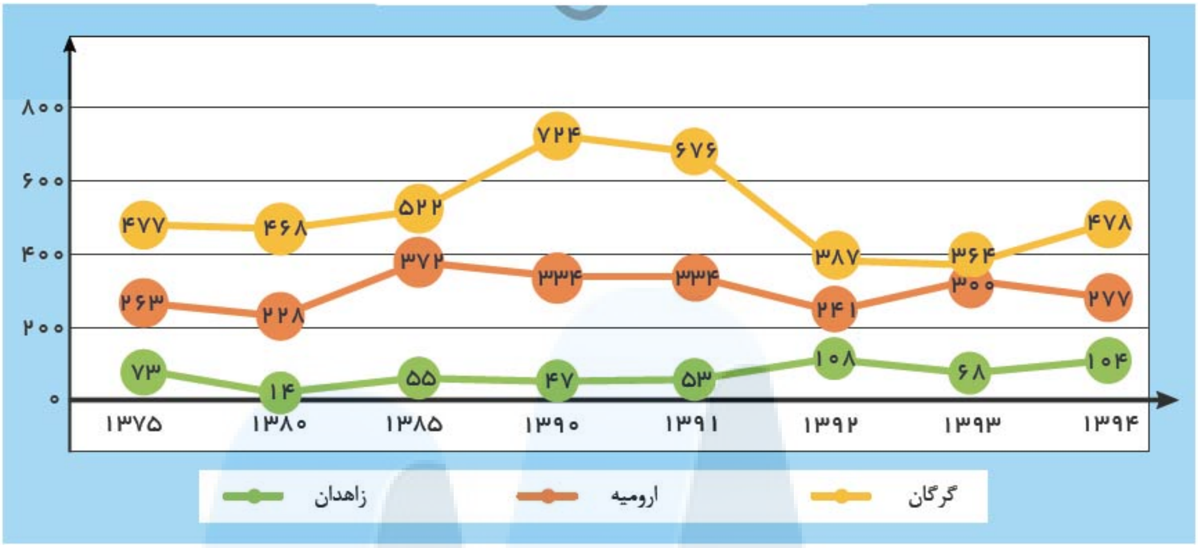


پاسخ : این نمودار که متعلق به تابعی با ضابطه $y=\sqrt{x+۲}$ است روی دامنه خود یعنی فاصله $[-۲,+\infty)$ همواره رو به بالا رفته و اکیداً صعودی است.

۳- یکی از دغدغه های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی متر) آورده شده است. به طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی متر بوده است که روند نزولی بارنگی را در این شهر نشان می دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می دهد. با توجه به این نمودار به سوال های زیر پاسخ دهید.

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

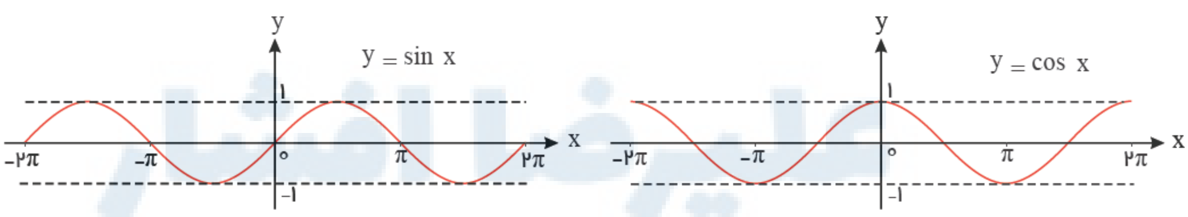
ب) از سال ۹۱ تا ۹۴ ، در چه فاصله های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه رون نزولی داشته است؟



پاسخ الف) ابتدا با توجه به اطلاعات داده شده مشخص می کنیم که نمودارها از بالا به پایین به ترتیب مربوط به شهرهای گرگان، ارومیه و زهدان است. حال با توجه به نمودار شهر گرگان می بینیم که میزان بارندگی تنها از سال ۸۰ تا ۹ (یعنی در دهه ۸۰) روندی صعودی (افزایشی یا روبه رشد) را تجربه کرده است. پس جواب این مرحله فاصله [۸۰ ,۹۰] می باشد.

ب) نمودار شهر ارومیه از سال ۹۱ تا ۹۴ برای فاصله های [۹۱ ,۹۲] و [۹۳ ,۹۴] روندی نزولی (کاهشی یا رو به زوال) را تجربه کرده است. در حقیقت طی سه سال از سال ۹۱ تا ۹۴ میزان بارندگی شهر ارومیه در سال های اول و سوم روندی نزولی و در سال دوم، بازه [۹۲ ,۹۳] روندی صعودی دارد.

۴- نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازه $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم شده است صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه های مشخص شده تعیین نماید.



x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},۰]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$

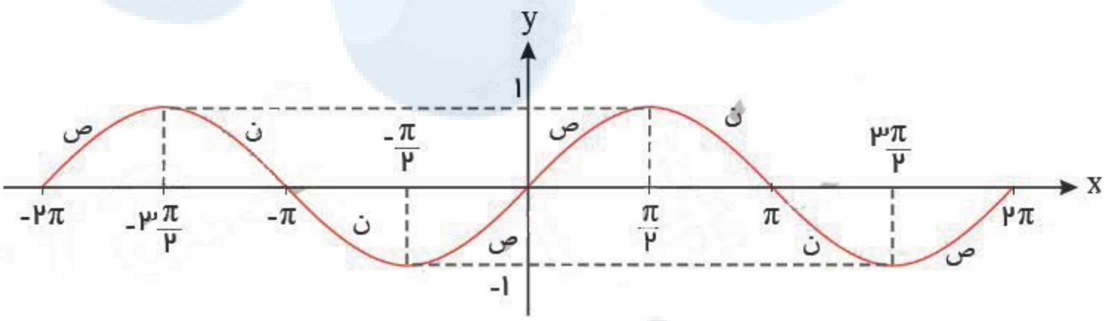
$y = \sin x$					صعودی			

x	$[-۲\pi, -\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲}, ۰]$	$[۰, \frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲}, \pi]$	$[\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi]$
$y = \cos x$							صعودی	

پاسخ :

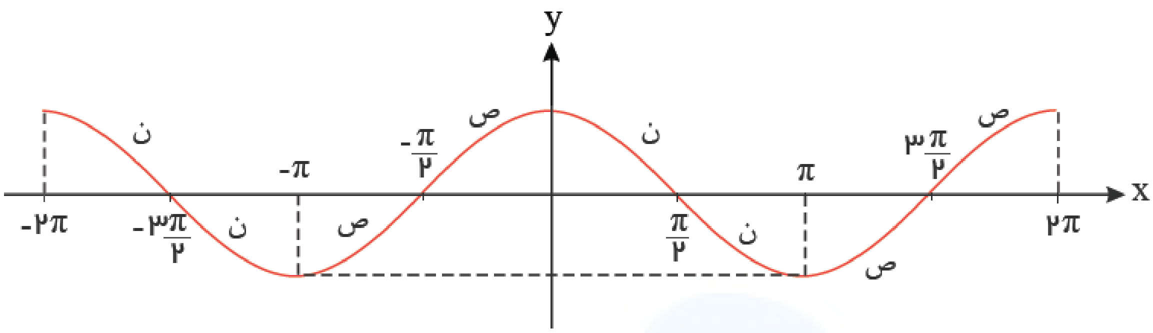
الف) برای تابع $y = \sin x$ در فاصله $[-۲\pi, ۲\pi]$ داریم :

(در شکل های رسم شده «ن» به معنای نزولی و «ص» به معنای صعودی است.)



x	$[-۲\pi, -\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲}, ۰]$	$[۰, \frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲}, \pi]$	$[\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi]$
$y = \sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

ب) برای تابع $y = \cos x$ در فاصله $[-۲\pi, ۲\pi]$ داریم :



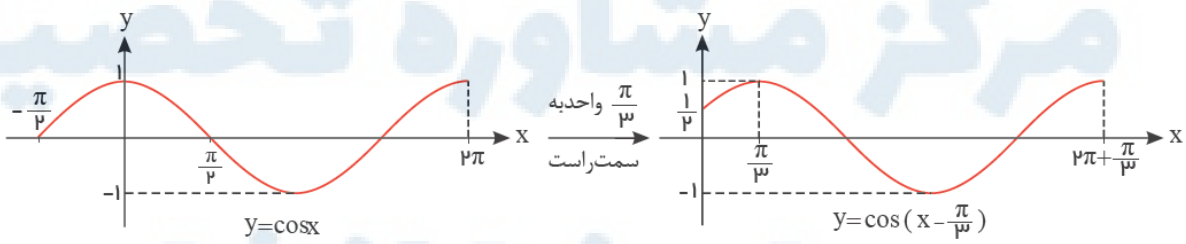
x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},۰]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y=\cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

۵- نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازهایی سعودی و در چه بازهایی نزولی هستند.

الف)

$f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳}) \qquad D_f=[۰,۲\pi]$

پاسخ : برای رسم نموار $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ در فاصله $D_f=[۰,۲\pi]$ کافی است نموار $y=\cos x$ در راستای محور طول به اندازه $\frac{\pi}{۳}$ به سمت راست انتقال دهیم:



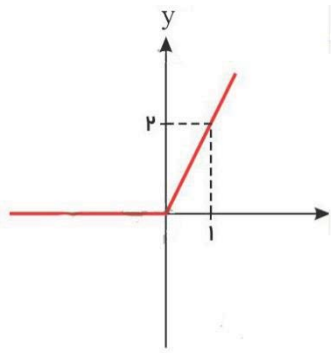
به جای اینکه نمودار را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به راست ببرید می توان محور y را همین اندازه به سمت چپ کشید!

ب)

$g(x)=x+|x|$

پاسخ : برای رسم تابع g ابتدا با توجه به مفهوم قدر مطلق، تابع را به صورت دو ضابطه ای تبدیل کرده و رسم می کنیم :

$$g(x) = x + |x| = \begin{cases} x + x = ۲x ; x \geq ۰ \\ x - x = ۰ ; x < ۰ \end{cases}$$

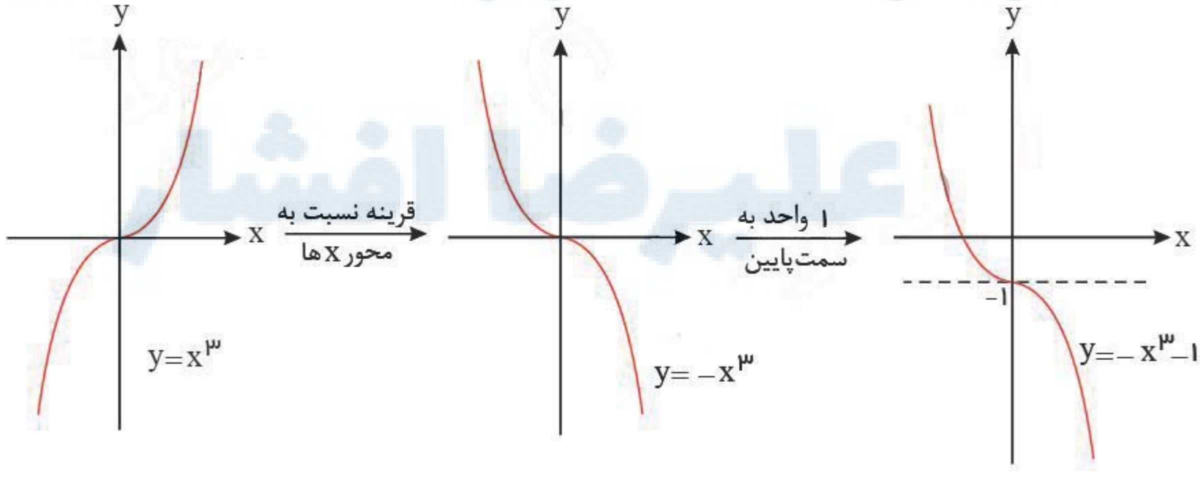


از این نمودار پیداست که تابع g برای $x \leq ۰$ ثابت و برای $x \geq ۰$ صعودی اکسید و در کل صعودی است.

پ)

$t(x) = -x^۳ - ۱$

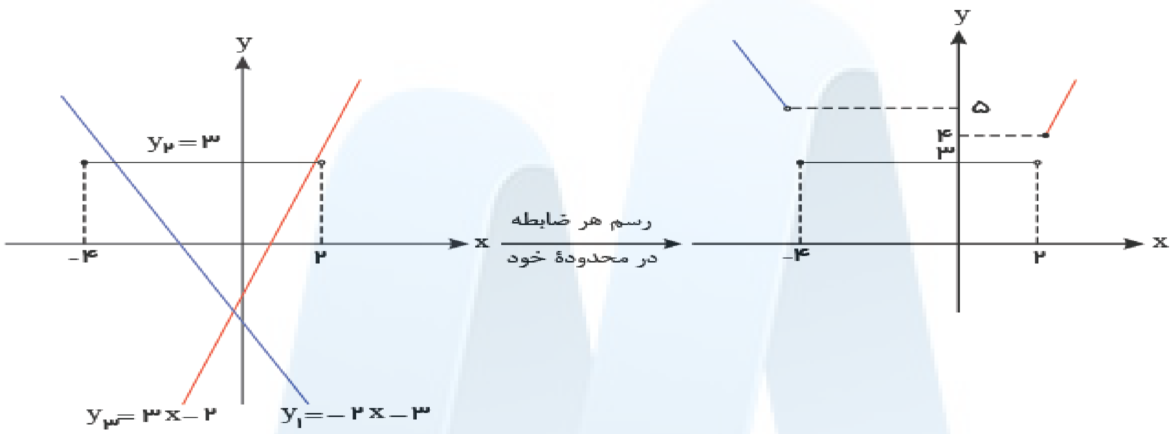
پاسخ : نمودار تابع $t(x) = -x^۳ - ۱$ را به کمک انتقال نمودار پایه $y = x^۳$ مطابق مکانیسم زیر رسم کرده و از آن نتیجه می گیریم که تابع روی اکیداً $D_t = \mathbb{R}$ نزولی است.



۶- نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه هایی را که در آنها تابع، صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

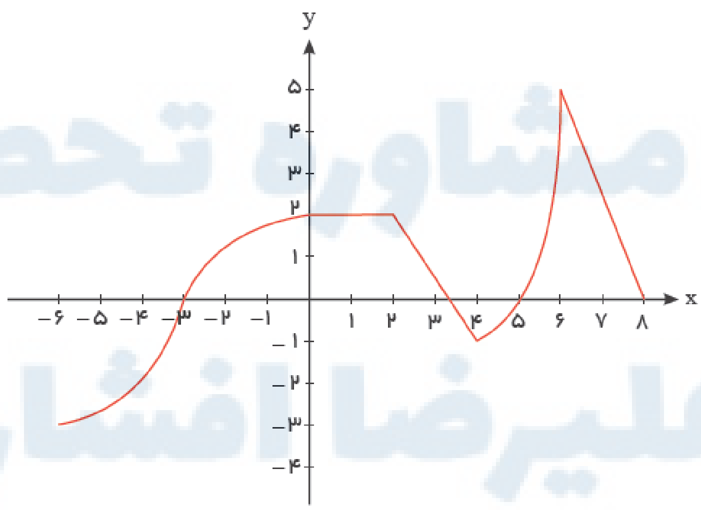
$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\le x<۲\\ ۳x-۲ & x\ge ۲\end{cases}$$

پاسخ : رسم نمودار تابع f به آسانی قابل درک است. چرا که در هر مرحله با یک تابع خطی روبرو هستیم :



می بینیم که این نمودار در بازه $(-\infty,-۴)$ اکیداً نزولی در بازه $[-۴,۲)$ ثابت (که می توان آن را صعودی یا نزولی هم در نظر گرفت) و بالاخره در فاصله $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است. بر این اساس می توانیم ادعا کنیم که این تابع در فاصله $(-\infty,۲)$ نزولی و در فاصله $[-۴,+\infty)$ صعودی است.

۷- با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازهایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟

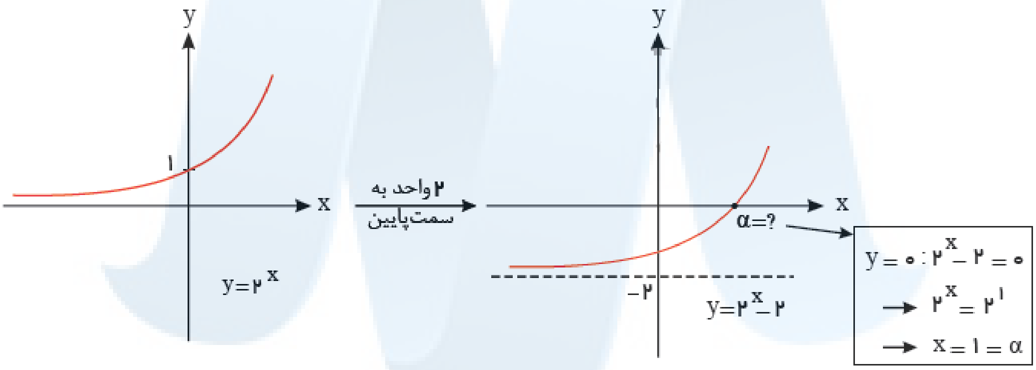


پاسخ : از نمودار پیداست که تابع در بازه $(-\infty,۰]$ اکیداً صعودی و در بازه $[۰,۲]$ ثابت و لذا در اجتماع این دو بازه، یعنی در $(-\infty,۲]$ صعودی است به همین منوال، تابع در بازه های $[۲,۴]$ و $[۶,۸]$ اکیدا نزولی و در بازه

[۴,۶] اکیدا صعودی است. حالا به عقیده شما تابع در بازه [۲,۸] چگونه رفتری دارد؟! آری درست است ، رفتار غیر یکنوا دارد.

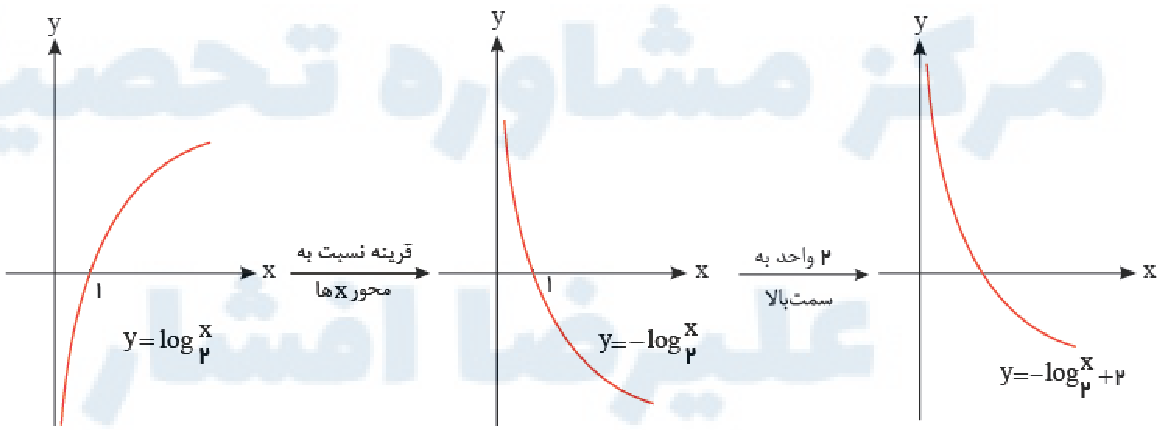
۸- تابع نمایی $y=2^x-2$ تابع لگاریتمی $y=-\log_2^x+2$ را رسم کنید و در مور دیکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

پاسخ : برای رسم تابع نمایی $y=2^x-2$ ، با توجه به نمودار پایه $y=2^x$ (که حالت کلی آن $y=a^x$ برای $a>1$ می باشد) داریم :



می بینیم که تابع $y=2^x-2$ در دامنه ($D=\mathbb{R}$) همواره صعودی (اکیداً صعودی) است.

و اما برای رسم تابع لگاریتمی $y=-\log_2^x+2$ داریم :



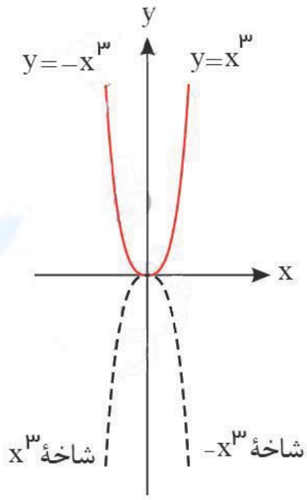
برای یافتن α معادله $y=0$ را حل می کنیم :

$$-\log_2^x+2=0\to\log_2^x=2\to x=2^2=4$$

۹- تابع $y=2^{x}|x|$ در بازه $(-\infty,a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

پاسخ : برای اینکه بیایم تابع در چه فاصله ای نزولی است، پیشنهاد می کنیم نمودار آن را رسم کنید (اساساً این شعار من است که : همه چیز در نمودار نمود پیدا می کند!) با توجه به وجود قدر مطلق و مفهوم آن تابع را دو ضابطه ای می کنیم :

$$y=x^{2}|x|=\begin{cases}x^{3} & x\geq 0\\ -x^{3} & x<0\end{cases}$$



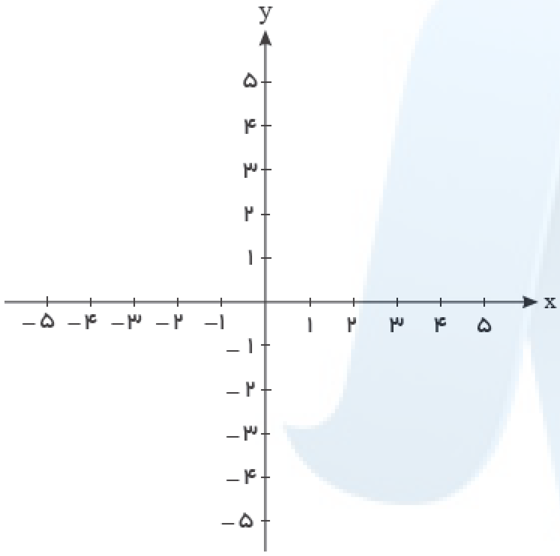
حالا دیگر معلوم شد که تابع در فاصله $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است که با مقایسه نزولی بون تابع در بازه $(-\infty,a]$ مشخص می شود که باید $a=0$ باشد. دقت کنید که تابع $y=2^{x}|x|$ علی رغم شبیه بودن نمودار آن به $y=x^{2}$ با این تابع یکی نیست!

۱۰- تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً سعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نزولی باشد.

پاسخ : هر تابع به فرم کلی $y=x^{2n+1}+b$ روی دامنه (خود) (یعنی $D_f=\mathbb{R}$) اکیداً سعودی و هر تابه به فرم کلی $y=-x^{2n+1}+b$ روی دامنه خود اکیدانزولی است.مثلاتابع های $y=2x^{3}+3, y=x^{3}-1, y=x^{3}$ همگی صعودی اکید و تابع های $y=5-\frac{1}{2}x^{3}$ و $y=-2x^{3}, y=-x^{3}$ همگی نزولی اکید هستند. حتی می توان موضوع را ساده

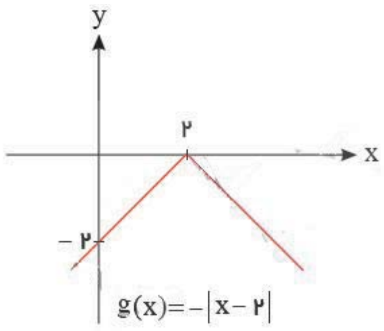
تر هم بیان کرد. هر تابع خطی به صورت $f(x)=ax+b$ با شرط $a>۰$ صعودی اکیدا و با شرط $a<۰$ نزولی اکید می باشد.

۱۱- نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازه $[-۲،۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.

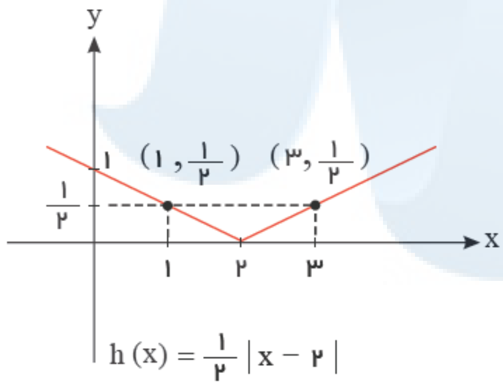


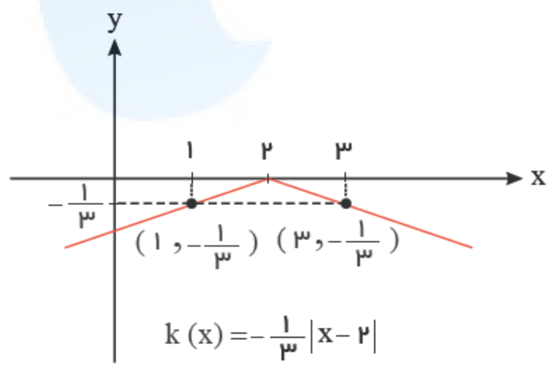
پاسخ : ابتدا نمودار تابع $y=|x-۲|$ را به کمک انتقال نمودار نام آشنای $y=|x|$ رسم می کنیم :

حالا برای رسم $y=-|x-۲|$ نمودار $y=|x-۲|$ را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم :

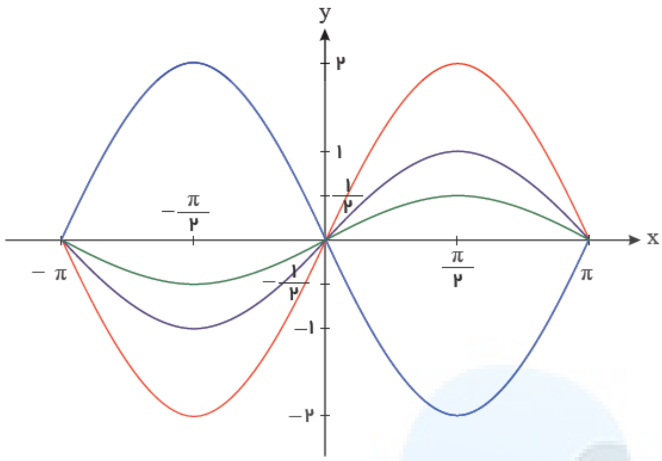


و برای رسم نمودار $y=\frac{۱}{۲}|x-۲|$، می بایستی عرض هر نقطه از نمودار $y=|x-۲|$ را (با ثابت ماندن طول نصف کنیم. به همین منوال اگر عرض نقاط را با ثابت ماندن طول آن ها در $\frac{-۱}{۳}$ ضرب کنیم به نمودار $y=\frac{-۱}{۳}|x-۲|$ می رسیم :

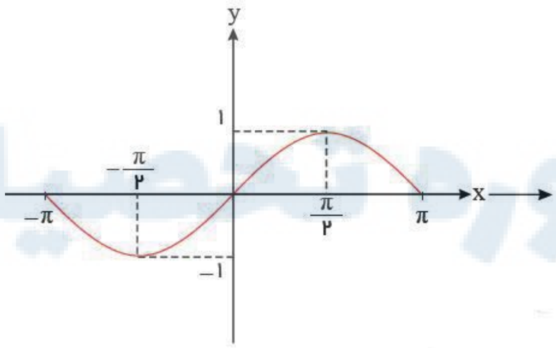




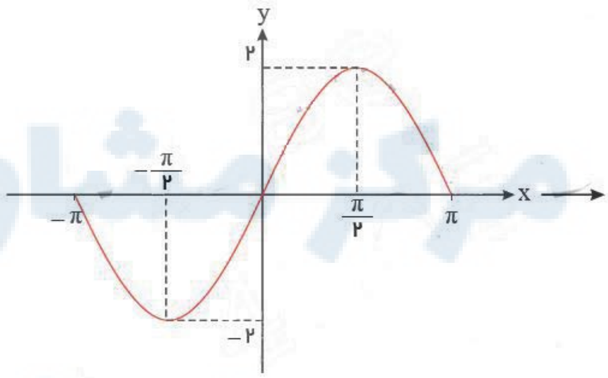
۱۲- در شکل رو به رو نمودار توابع با ضابطه های $y=\sin x, y=۲\sin x, y=-۲\sin x, y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم شده است . نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.



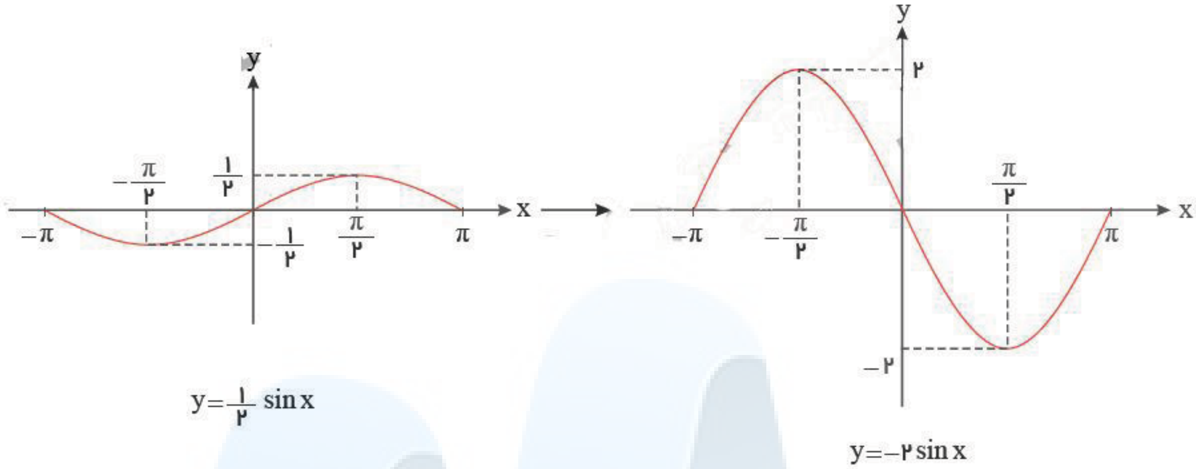
پاسخ : هر چهار نمودار $y=\sin x, y=۲\sin x, y=-۲\sin x, y=\frac{۱}{۲}\sin x$ و دامنه ای به صورت $[-\pi,\pi]$ داشته اما بردشان تفاوت دارد. در حقیقت با توجه به برد تابع پایه $y=\sin x$ که فاصله بسته [۱، ۱-] است برد تابع $y=r\sin x$ برای $r>۰$ به صورت و برای $r<۰$ به صورت $[r,-r]$ بوده و شکل نمودار $|r|>۱$ برای $۰<|r|<۱$ کشیده تر و برای بسته تر خواهد شد. حواستان باشد که برای rهای منفی نمودار دقیقا قرینه نمودار $y=|r|\sin x$ نسبت به محور xها خواهد بود. حالا بهتر است که نمودار این چهار تابع را در کنار هم رسم کنیم تا موضوع بهتر درک شود :



y=sin x

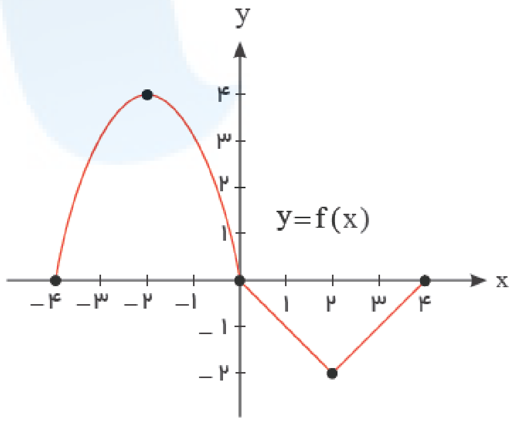


y=۲sin x

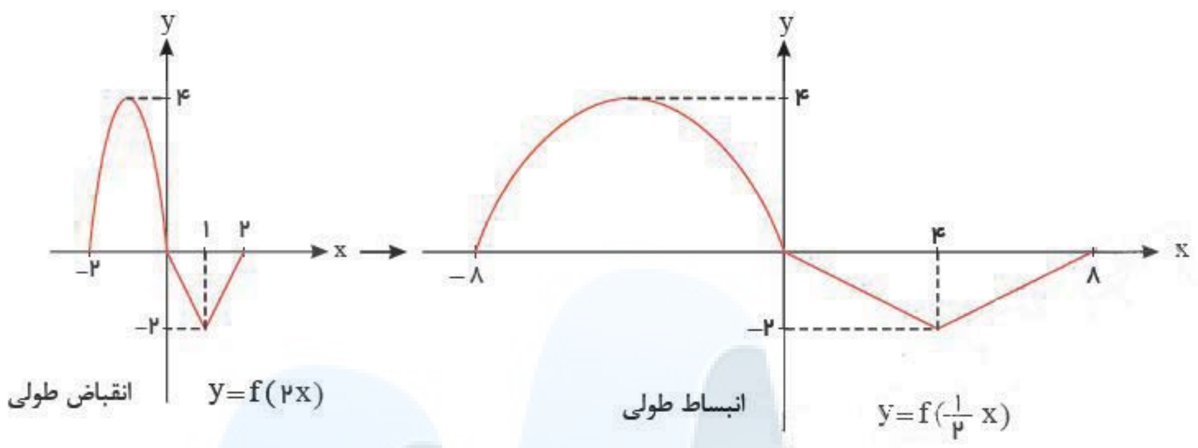


۱۳- نمودار تابع f با دامنه [۴، ۴-] به صورت زیر داده شده است، می خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
−۴	۰
−۲	۴
۰	۰
۲	−۲
۴	۰

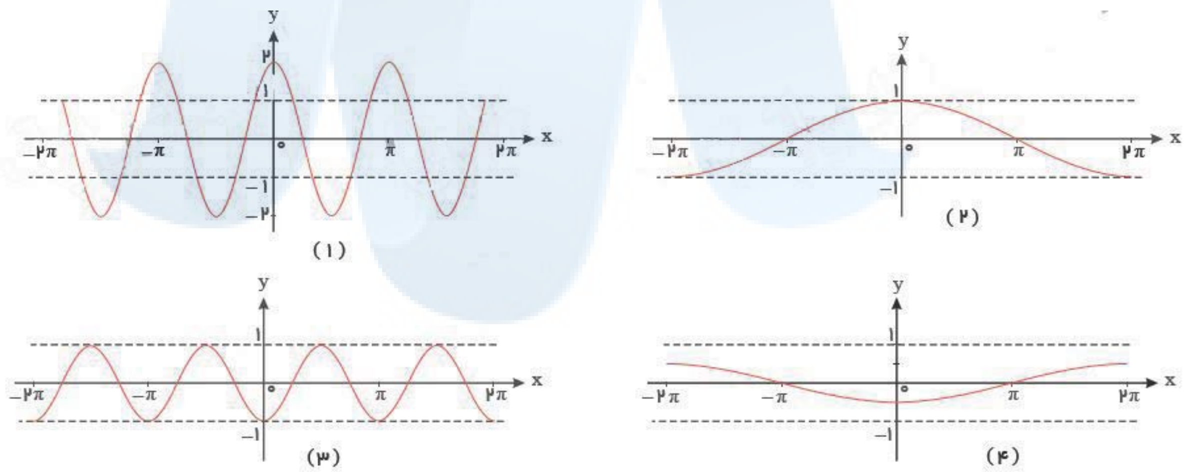


پاسخ باید بدانیم که برای رسم نمودار $y=f(kx)$ و روی نمودار $y=f(x)$ کافی است طول هر نقطه $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کرده و عرض آن ها را ثابت نگه داریم. به همین مناسب می توانیم بگوییم که نمودار $y=f(2x)$ برای k های بزرگتر از یک $(k>1)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (بسته تر) و برای kهای بین ۰ و ۱ $(0<k<1)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (یا بازتر) می شود.



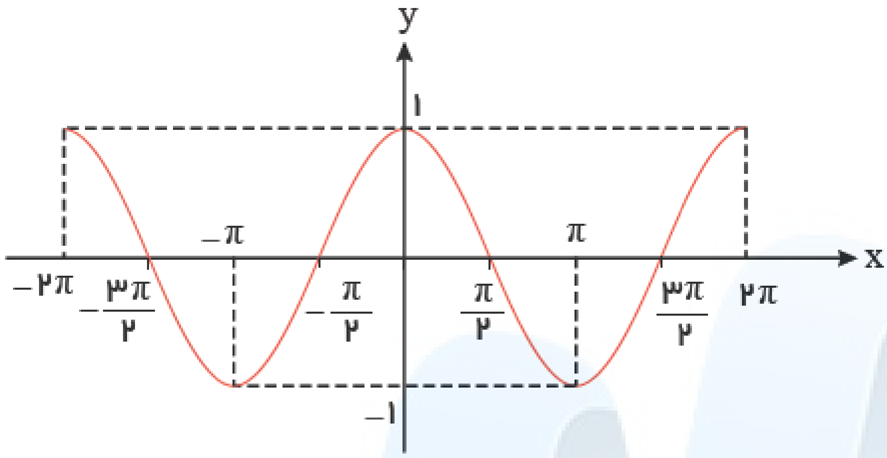
$D=[-۸,۸], R=[-۲,۴]$ $D=[-۲,۲], R=[-۲,۴]$

۱۴- با استفاده از نمودار $y=\cos x$ ، نمودار توابع زیر سم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.



الف) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ ب) $y=۲\cos ۲x$ پ) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$ ت) $y=-\cos ۲x$

پاسخ : ابتدا به نمودار تابع $y=\cos x$ در بازه $[-۲\pi,۲\pi]$ توجه کنید :



با توجه به این نمودار و دوره تناوب هر تابع و نیز برد آنها به راحتی می توانیم تشخیص دهیم که نمودار (۴) مربوط به تابع (الف) ، نمودار (۱) مربوط به تابع (ب) ، نمودار (۲) متعلق به تابع (پ) و بالاخره نمودار (۳) متعلق به تابع (ت) می باشد.

الف) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x) \to$ طول هرنقطه از نمودار $y=\cos x$ را۲-برابر وعرض آن ها را $\frac{-۱}{۲}$ برابرمی کنیم.

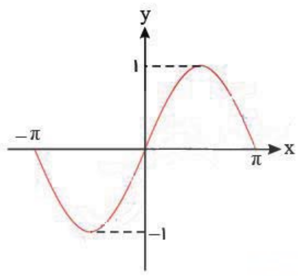
ب) $y=۲\cos ۲x \to$ طول هرنقطه از نمودار $y=\cos x$ را $\frac{۱}{۲}$ برابر وعرض آن ها را ۲ برابرمی کنیم.

پ) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x) \to$ با ثابت ماندن عرض هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ باید طول هر یک را ۲ برابر کرد.

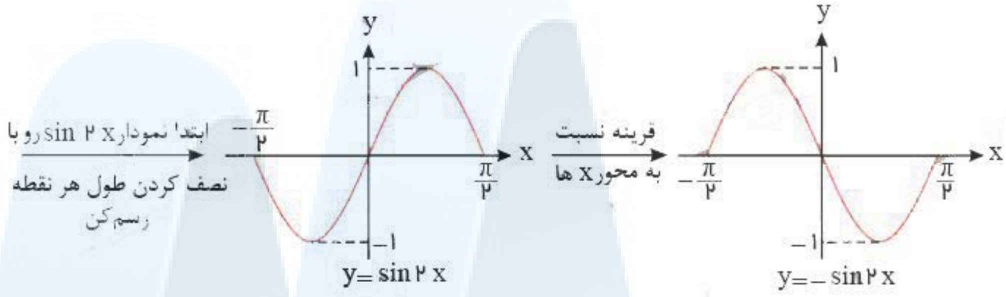
ت) $y=-\cos ۲x \to$ طول هر نقطه را نصف و عرض را قرینه می کنیم.

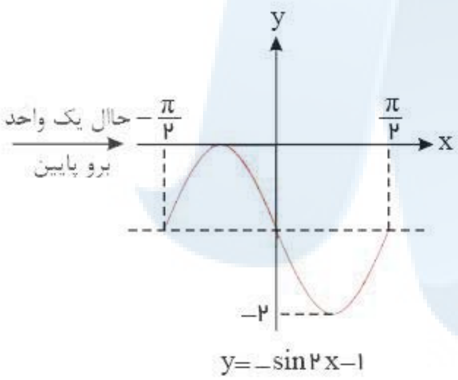
۱۵- نمودار توابع $y=-\sin ۲x-۱$ و $y=۲\sin(\frac{-۱}{۳}x)$ را به کمک نمودار $y=\sin x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم کنید.

پاسخ : نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ به صورت زیر بوده و به کمک انتقال نمودارها داریم :



$y = -\sin 2x - 1$:


ابتدا نمودار sin ۲ x رو با
نصف کردن طول هر نقطه
رسم کن
y= sin ۲ x
قرینه نسبت
به محور x ها
y=− sin ۲ x

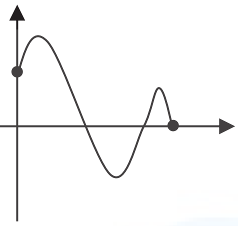

حال یک واحد
برو پایین
y=−sin ۲ x−۱

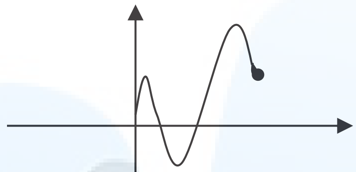
مثلثات دوازدهم

۱- شکل

$$y = a\sin bx + c$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|}, \begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = |a| + c \end{cases}$$

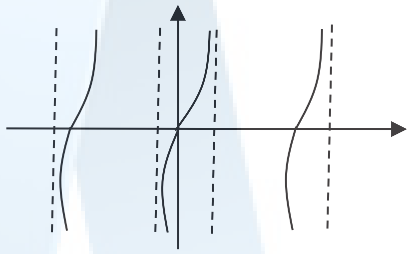




$$y = a\tan bx + c$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

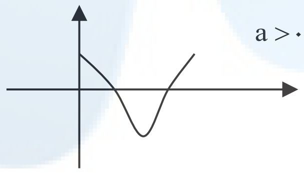
$$y = \tan u \quad , \quad u \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

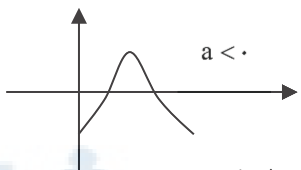


در هر بازه ای که تعریف شده باشد (در یک دوره تناوب) صعودی است.

$$y = a\cos bx + c$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \quad \begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases}$$





۲- فرمول های اصلی و مهم:

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۱ - \sin^۲\alpha = \cos^۲\alpha \\ ۱ - \cos^۲\alpha = \sin^۲\alpha \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \tan\alpha \times \cot\alpha = ۱$$

$$۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \qquad ۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \ \text{یا} \ \sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ + \tan^۲\alpha}$$

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲ \alpha - \sin^۲ \alpha = ۲\cos^۲ \alpha - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲ \alpha = \frac{۱-\tan^۲ \alpha}{۱+\tan^۲ \alpha}$$

۳- معادلات مثلثاتی :

$$\begin{cases} \sin x = \sin\alpha \to x = ۲k\pi + \alpha, x = ۲k\pi + \pi - \alpha \\ \cos x = \cos\alpha \to x = ۲k\pi \pm \alpha \\ \sin x = ۱ \to x = ۲k\pi + \alpha \quad \sin x = -۱ \to x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad \sin x = ۰ \to x = k\pi \\ \cos x = ۱ \to x = k\pi \quad \cos x = -۱ \to x = ۲k\pi \pm \pi \quad \cos x = ۰ \to x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

می دونم مشکله ولی باید انجامش بدی پس صفحه قبل رو حفظ کن اینقدر بنویس که حفظ شی

حوصله نداری- مزخرفه- اصلا ولش کن رو بزار کنار بخون تا همین حفظ کردنی را بفهمی مثلا!؟

سری اول :

دوره تناوب و مقادیر max و min توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y = ۱ + ۲\sin ۷x \quad T = \frac{۲\pi}{۷} \quad max = ۲ + ۱ = ۳ \quad min = -۲ + ۱ = -۱$

۲) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x \quad T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}} = ۴ \quad max = |-۱| + \sqrt{۳} = \sqrt{۳} + ۱ \quad min = -۱ + \sqrt{۳}$

۳) $y = -\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲ \quad T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۴\pi \quad max = \pi - ۲ \quad min = -\pi - ۲$

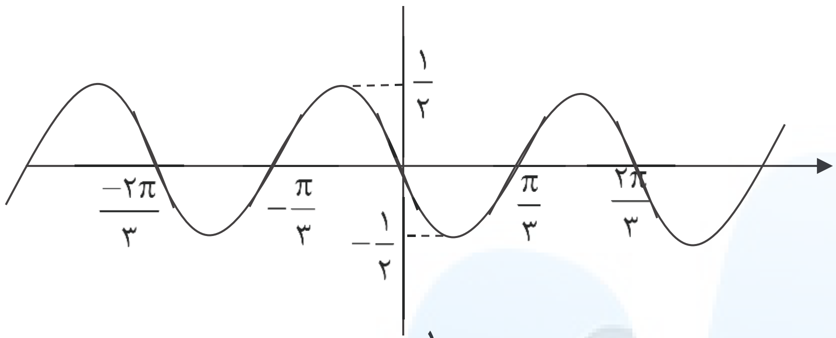
۴) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x \quad T = \frac{۲\pi}{۳} \quad max = |-\frac{۳}{۴}| = \frac{۳}{۴} \quad min = -|-\frac{۳}{۴}| = -\frac{۳}{۴}$

۵) $y = -\frac{۱}{۴}\cos \pi x$

۶) $y = \pi\sin(-x) + ۱$

۷) $y = ۳\sin(۲x) - ۱$

۸) $y = ۸\cos(\frac{x}{۳})$



$c = ۰$

$\max = |a| + c \qquad \frac{۱}{۲} = |a| + c$

$|a| = \frac{۱}{۲}, a < ۰$

$\min = -|a| + c \qquad -\frac{۱}{۲} = -|a| + c$

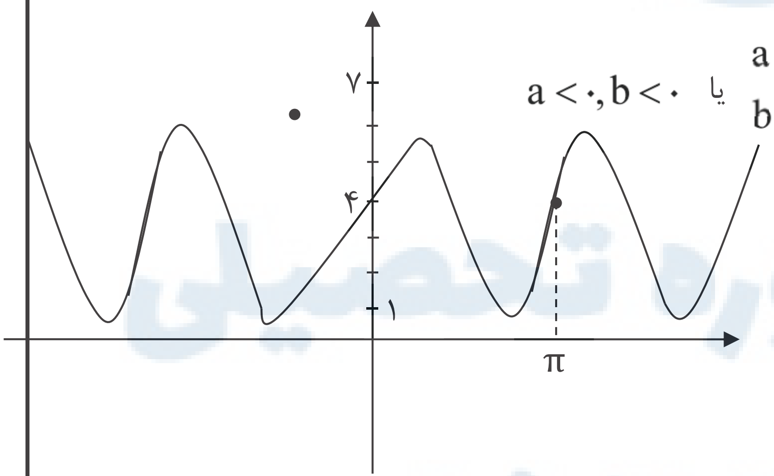
$a = -\frac{۱}{۲}$

$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳}$

$|b| = ۳$

$b = ۳$

$y = -\frac{۱}{۲}\sin ۳x$



$a < ۰, b < ۰$ یا $\begin{matrix} a < ۰ \\ b < ۰ \end{matrix}$

$T = \pi = \frac{۲\pi}{|b|} \to |b| = ۲$

$b = ۲$ یا $b = -۲$

که در شکل مشخص است

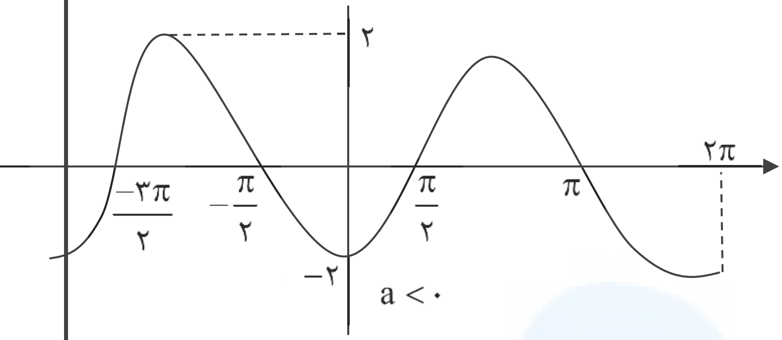
$\max = ۷ = |a| + c$

$۲c = ۸ \qquad c = ۴$

$\min = ۱ = -|a| + c \to |a| = ۳ \to \begin{matrix} a = ۳ \\ a = -۳ \end{matrix}$

$y = ۳\sin ۲x + ۴$ یا $y = -۳\sin(-۲x) + ۳ = ۳\sin ۲x + ۳$

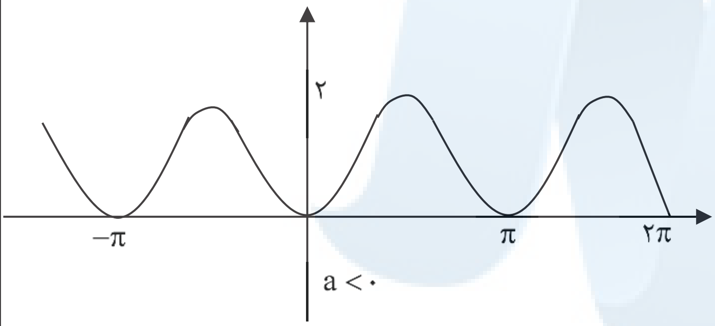
صنفی در sin به پشت می رود و با صنفی مثبت می شود.



$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۲\pi \to |b| = ۱, b = ۱$$

$$\begin{cases} max = ۲ = |a| + c \\ \qquad\qquad ۲c = ۰ \\ min = -۲ = |a| + c \quad c = ۰, \; |a|\,۲ \;\; a = -۲ \end{cases}$$

$$y = -۲\cos x + ۰ = -۲\cos x$$



$$T = \pi = \frac{۲\pi}{|b|} = \to |b| = ۲, b = ۲$$

$$\begin{matrix} max = ۲ = |a| + c \\ min = ۰ = -|a| + c \end{matrix} \to \begin{matrix} ۲c = ۲ \\ c = ۱ \end{matrix}$$

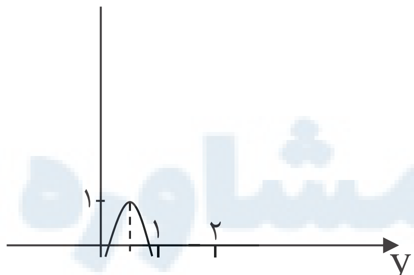
$$|a| = ۱ \to a = -۱$$

$$y = -\cos ۲x + ۱$$

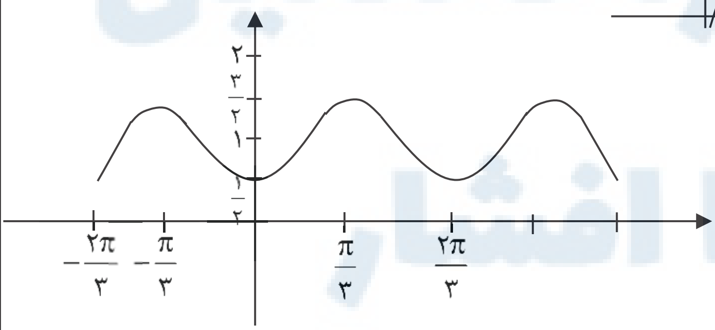
رسم کنید

$$y = ۲\sin(\pi x) - ۱$$

$$۲\pi = -۲$$



$$y = -\frac{۱}{۲}\cos ۳x + ۱$$



$$T = \frac{۲\pi}{۳} \begin{cases} max = \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳}{۲} \\ min = -\frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

حاصل sin۱۵ و cos۱۵ و sin۲۲/۵ و cos ۲۲/۵ را بدست آورید.

$$\cos ۳۰ = ۲\cos ۱۵ - ۱ \rightarrow \cos^۲ ۱۵ = \frac{۱+\cos ۳۰}{۲} \qquad \cos ۱۵ = \sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}} + \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\cos ۳۰ = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۵ \rightarrow \sin^۲ ۱۵ = \frac{۱-\cos ۳۰}{۲}$$

$$\cos = \sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}} = \sqrt{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}} = \sqrt{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\cos ۴۵ = ۲\cos^۲ ۲۲/۵ - ۱ \rightarrow \cos^۲ ۲۲/۵ = \frac{۱+\cos ۴۵}{۲}$$

$$\cos ۲۲/۵ = \sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}} = \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}} = \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$\cos ۴۵ = ۱ - ۲\sin^۲ ۲۲/۵ \rightarrow \sin^۲ ۲۲/۵ = \frac{۱-\cos ۴۵}{۲} = \sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}} = \sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}}$$

اگر $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه حاده مانند حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۲(\frac{۵}{۱۳})^۲ - ۱ = ۲(\frac{۲۵}{۱۶۹}) - ۱ = \frac{-۱۱۹}{۱۶۹}$

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$y = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = ۱۲$$

$$\sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$$

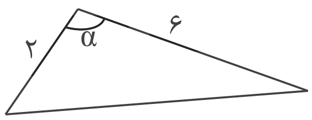
ب) $= ۲ \times \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۱۲۰}{۱۶۹}$

مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند آنگاه

چند مثلث با این خاصیت وجود دارد؟

$$s=\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha \to ۳=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶\sin\alpha \to \sin\alpha=\frac{۱}{۲}$$

$$\alpha=۳۰,۱۵۰$$



معادله های زیر را حل کنید.

$$۱)\ ۴\sin x+\sqrt{۸}=۰ \to ۴\sin x=-\sqrt{۸}=-۲\sqrt{۲} \to \sin x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۴})$$

$$\begin{cases} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴} \\ x=۲k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{۴})=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

$$۲)\ ۲\cos x-\sqrt{۳}=۰ \to ۲\cos x=\sqrt{۳} \to \cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos\frac{\pi}{۶}$$

$$x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

$$۳)\ ۲\sin ۳x-\sqrt{۲}=۰ \to ۲\sin ۳x=\sqrt{۲} \to \sin ۳x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}$$

$$۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \to x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{۲k\pi}{۳}$$

$$۳x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴} \to x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$$

$$۴)\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\rightarrow\frac{۱}{۲}\sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\rightarrow\sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۳}$$

$$۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۶}$$

$$۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳}\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

$$۵)\cos x(۲\cos x-۹)=۵$$

$$۲\cos^{۲}x-۹\cos x-۵=۰$$

$$\Delta=(-۹)^{۲}-۴(۲)(-۵)=۸۱+۴۰=۱۲۱$$

$$\cos\alpha=۵x$$

$$\cos\alpha=۵x$$

$$\frac{۹\pm۱۱}{۲\times۲}\begin{cases}۵\\-\frac{۱}{۲}\end{cases}\qquad\cos\alpha=-\frac{۱}{۲}=\cos^{۲}\frac{\pi}{۳}\rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

$$۶)\cos ۲x+\cos x+۱=۰$$

$$۲\cos x^{۲}-۱+\cos+۱=۰\rightarrow\cos x(۲\cos x+۱)=۰$$

$$\cos x=۰\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\cos x=-\frac{۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳}\rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

$$۷)\cos ۲x+\sin x-۱=۰$$

$$۱-۲\sin^{۲}x+\sin x-۱=۰\rightarrow\sin x(-۲\sin x+۱)=۰$$

$$\sin x=۰\rightarrow x=k\pi$$

$$\sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}$$

$۸)\cos ۲x-\cos x=۰\to \cos ۲x=\cos x$

$$۲x=۲k\pi+x$$

$$۲x=۲k\pi-x\to ۳x=۲k\pi\to x=\frac{۲k\pi}{۳}$$

$۹)\sin ۲x+\sin x=۰\to \sin ۲x=-\sin x=\sin(\pi+x)$

$$۲x=۲k\pi+\pi+x\to x=۲k\pi+\pi$$

$$۲x=۲k\pi-\pi-\pi-x\to ۳x=۲k\pi \quad x=\frac{۲k\pi}{۳}$$

$۱۰)\sin ۳x=\sin\frac{\pi}{۲}$

$۱۱)\cos ۲x-\cos x+۱=۰$

$۱۲)\cos ۲x-\sin x+۱=۱$

$۱۳)\cos^{۲} x-\sin x=\frac{۱}{۴}$

$۱۴)\sin x-\cos ۲x=۰$

$۱۵)\cos x=\cos ۲x$

تقسیم :

$$\begin{array}{l|l} ۳x^۳ - ۴x + ۱ & x - ۱ \\ \cline{2-2} \underline{۳x^۳ \mp ۳x^۲} & ۳x^۲ + ۳x - ۱ \\ ۳x^۲ - ۴x + ۱ & \\ \underline{۳x^۲ \mp ۳x} & \\ -x + ۱ & \\ \underline{-x + ۱} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\frac{۳x^۳}{x} = ۳x^۲$$

$$\frac{۳x^۲}{x} = ۳x$$

$$\frac{-x}{x} = -۱$$

روش هورنر

	$x^۳$	$x^۲$	x	عدد ثابت
	۳	۰	-۴	۱
۱	۳	۳	-۱	۰ باقی مانده

$x - ۱ = ۰$ x

$x = ۱$ $۳x^۲ + ۳x - ۱$

باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x\text{-}a$:

کافی است $f(a)$ را بدست آوریم که همان باقی مانده است که اگر $f(a)=0$ یعنی بر $x\text{-}a$ بخش پذیر است.

باقی مانده تقسیم $۳x^۳ - ۴x^۲ + ۲x - ۱$ را بر $x - ۲$ بدست آورید.

$$x - ۲ = ۰ \to x = ۲ \to f(۲) = ۳(۲)^۳ - ۴(۲)^۲ + ۲ \times ۲ - ۱ = ۲۴ - ۱۶ + ۴ - ۱ = ۱۱$$

مقدار m چقدر باشد تا $۳x^۴ - (m+۲)x^۳ + ۲m - ۱$ بر $x + ۱$ بخش پذیر باشد.

$$x + ۱ = ۰ \to x = -۱ \qquad f(-۱) = ۰ \to ۳(-۱)^۴ - (m+۲)(-۱)^۳$$

$$۳ + m + ۲ + ۲m - ۱ = ۰ \to ۳m = -۴ \to m = -\frac{۴}{۳}$$

نشان دهید $f(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۱$ بر دو جمله ای $x + ۱$ بخش پذیر است.

$$x + ۱ = ۰ \to x = -۱ \qquad f(-۱) = ۲(-۱)^۳ + (-۱)^۲ + ۱ = -۲ + ۱ + ۱ = ۰$$

$$۲x^۳ + x^۲ + ۱ = (x + ۱)(۲x^۲ - x + ۱)$$

حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$۱)\lim_{x\to -۳}\frac{x^{۲}-۹}{x^{۲}+۳x}=\lim_{x\to -۳}\frac{(x+۳)(x-۳)}{(x+۳)x}=\frac{-۶}{-۳}=۲$$

$$۲)\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{۴x^{۲}-۴^{۲}+۱}{۲x^{۲}+x-۱}=\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{(۲x-۱)^{۲}}{(۲x-۱)(x+۱)}=\frac{۰}{\frac{۳}{۲}}=۰$$

$$۳)\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۵x+۶}{۲x^{۳}-۱۳x^{۲}+۲۴x-۹}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x-۲)}{(x-۳)(۲x^{۲}-۷x+۳)}=\frac{۱}{۱۲-۲۱+۳}=\frac{-۱}{۶}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & ۲ & -۱۳ & ۲۴ & -۹\\ \hline ۳ & ۲ & -۷ & ۳ & ۰ \end{array}$$

$x \to ۲x^{۲}-۷x+۳$

$$۴)\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۲}-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}\times\frac{x-\sqrt{۲x+۳}}{x-\sqrt{۲x+۳}}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x-۱)(x+۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{x^{۲}-۲x-۳}$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{(x-۱)(x+۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{(x+۱)(x-۳)}\times\frac{(-۲)(-۱-۱)}{-۱-۳}=\frac{+۴}{-۴}=-۱$$

$$۵)\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}+x-۲}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-x}{(x^{۲}+x-۲)(x+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x(x-۱)}{(x-۱kx+۲)(x+\sqrt{x})}=\frac{۱}{۳\times ۲}=\frac{۱}{۶}$$

$$۶)\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{x+۱}}{x^{۲}+۳x+۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x+۱}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x+۱}}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۳}+۱(x+۱)(x^{۲}-x+۱)}{(x+۱)(x+۲)(\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}+۱)}$$

$$=\frac{۱+۱+۱}{(-۱+۲)(۱+۱+۱)}=۱$$

$$۷)\lim_{x\to ۵}\frac{x^{۳}-۴x^{۲}-۴x-۵}{x^{۲}-۲۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{(x-۵)(x^{۲}+x+۱)}{(x-۵)(x+۵)}=\frac{۲۵+۵+۱}{۵+۵}=\frac{۳}{۱۰}$$

	۱	-۴	-۴	-۵
۵	۱	۱	۱	۰

$x^{۲} + x + ۱$

$$۸)\ \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۲x^{۲}-x}{۴x^{۲}-۱}$$

$$۹)\ \lim \frac{x^{۲}+۳x-۴}{x^{۳}+۴x^{۲}+x+۴}$$

$$۱۰)\ \lim_{x\to ۱۰} \frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x}+۴} = \lim_{x\to -۸} \frac{۲(x+۸)(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x^{۲}}+۴)}{(x+۸)} =$$

$$۲(۴+۴+۴)=۲۴$$

$$۱۱)\ \lim_{x\to ۱۰} \frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^{۲}-x}$$

$$۱۲)\ \lim_{x\to ۳} \frac{x^{۲}-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}$$

حد بی نهایت :

هر گاه بعد از جایگذاری a صورت عدد و مخرج صفر شود. صفر مخرج حدی است که باید علامت آ» مشخص شود. مثلا

چون $۱^{+} \cong ۱/۱$ $\qquad ۱^{+}-۱=۰^{+}$

چون $۲^{-} \cong ۱/۹$ $\qquad ۲^{-}-۲=۰^{-}$

البته اگر $(x-a)^{۲}$ یا $|x-a|$ داشته باشیم همواره ۰^{+} محسوب می شود.

همچنین $\sin 0^{+} = 0^{+}, \sin 0^{-} = 0^{-}, \cos \frac{\pi^{-}}{2} = 0^{+}, \cos \frac{\pi^{+}}{2} = 0^{-}$

$$1 - \cos_{x \to 0} n = 0^{+} \qquad 1 - \sin_{x \to \frac{\pi}{2}} x = 0^{+}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi^{+}}{2}} \tan x = -\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi^{-}}{2}} \tan x = +\infty$$

حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$1) \lim_{x \to 5^{-}} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{5^{-}-5} = \frac{10}{0^{-}} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^{2}} = \frac{-1}{0^{+}} = -\infty \qquad 3) \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = \frac{0-3}{0^{+}} = -\infty$$

$$4) \lim_{x \to 3^{-}} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{2-3}{3^{-}-3} = \frac{-1}{0^{-}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi^{+}}{2}} \frac{1}{\cos} = \frac{1}{0^{-}} = -\infty \qquad \lim_{x \to 3^{+}} \frac{1-5x}{x^{2}-9} = \frac{1-15}{9^{+}-9} = \frac{14}{0^{+}} = -\infty$$

حد در بی نهایت :

در این حالت از حد x به سمت بی نهایت میل می کند و با بزرگترین توان x کار داریم چه در حالت خطی و چه در حالت کسری (بزرگترین درجه صورت و بزرگترین درجه مخرج)

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{-12x^{5}+7x^{3}-2x-9}{2x^{2}-8x+1} = \lim_{n \to -\infty} \frac{-12x^{5}}{3x^{2}} = \lim_{n \to -\infty}(-4x^{3}) = -4x \times -\infty = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2x^{3}-5x+4}{7x^{3}-11x^{2}-6x} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2x^{3}}{7x^{3}} = \frac{2}{7}$$

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{۵x+۴}{x^{۳}+x-۸}=\lim_{n\to-\infty}\frac{۵x}{x^{۳}}=\lim_{n\to-\infty}\frac{۵}{x^{۲}}=\frac{۵}{+\infty}=۰$$

همان طور که در سه سوال بالا دیده می شود اگر بزرگترین درجه صورت بیشتر باشد حد بی نهایت می شود اگر درجه های بزرگتر برابر باشند حد عدد غیر صفر می شود و اگر درجه مخرج بیشتر باشد. حد صفر خواهد شد.

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{۱}{۲x-۳}=\lim_{n\to-\infty}\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{-\infty}=۰$$

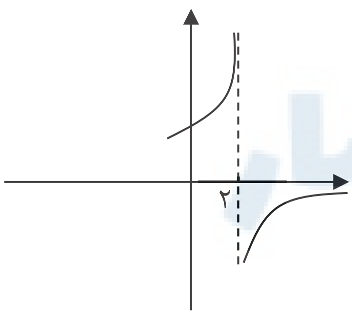
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۲x-۱}{۳x+۱}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲x}{۳x}=\frac{۲}{۳}\qquad \lim_{n\to-\infty}\frac{۲x^{۲}-۳x+۱}{x^{۲}+۵x+۳}=\lim_{n\to-\infty}\frac{۲x^{۲}}{x^{۲}}=۲$$

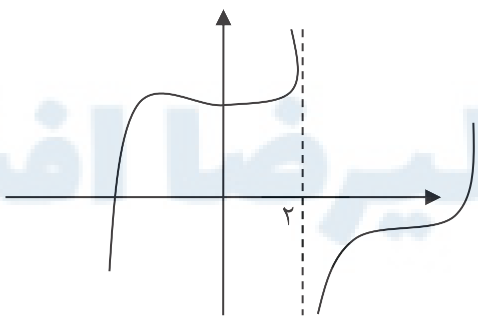
$$\lim_{n\to-\infty}\frac{-۶x^{۳}+۷x-۹}{۲x^{۳}-۴x^{۲}+x}=\lim_{n\to-\infty}\frac{-۶x^{۳}}{۲x^{۳}}=-۳$$

مثال : عبارت $\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=-\infty, \lim_{x\to ۲^{-}} f(x)=+\infty$ را توضیح دهید. و نمودار تابعی را رسم کنید. که هر دو شرط بالا را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

در حالت اول یعنی صورت عدد + و مخرج صفر حدی مثبت و یا صورت عدد منفی و مخرج صفر حدی صفنی است که $+\infty$ می شود. به عبارت دیگر وقتی x از چپ به ۲ میل می کند مقدار آ نبی نهایت مثبت می شود در حالت دوم یا صورت عدد + و مخرج صفر حدی منفی و یا صورت منفی و مخرج صفر حدی مثبت به عبارت دیگر وقتی x از راست به ۲ میل می کند حد آن بی نهایت منفی می شود.

بی شمار جواب





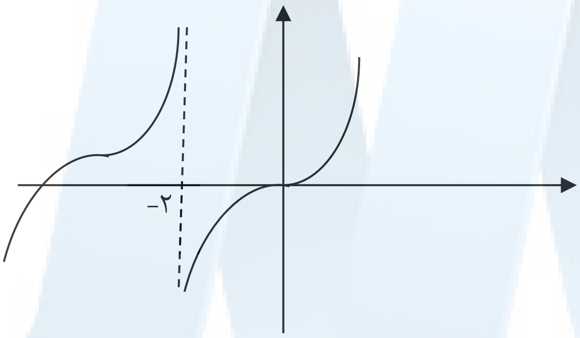
تمرین کتاب :

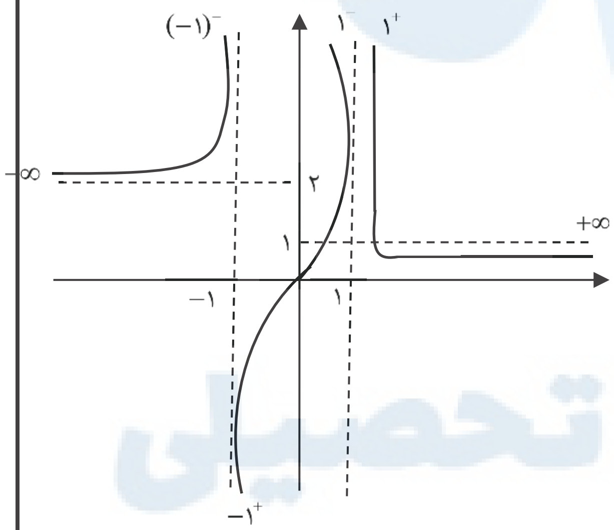
$$\lim_{n\to -۶} \frac{۹}{(x+۶)^{۲}} = \frac{۹}{۰^{+}} = +\infty$$

$$\lim_{n\to ۳^{+}} \frac{۱-۵x}{|x^{۲}-۹|} = \frac{-۱۴}{۰^{+}} = -\infty$$

نمودار تابعی را ارسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد به طوریکه

$$\lim_{n\to(-۲)^{-}} f(x) = +\infty,\ \lim_{n\to(-۲)^{+}} f(x) = -\infty$$





با توجه به نمودار بدست آورید.

$$\lim_{n\to(-۱)^{-}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{n\to -\infty} f(x) = ۲$$

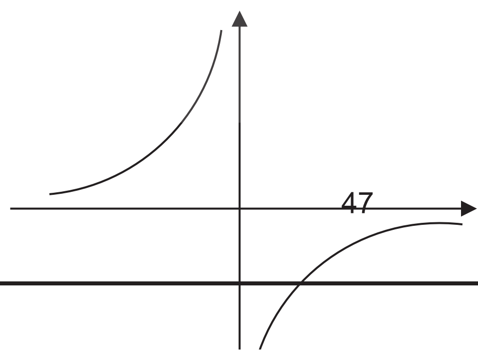
$$\lim_{n\to ۱^{-}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{n\to(-۱)^{+}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{n\to +\infty} f(x) = ۱ \qquad \lim_{n\to ۱^{+}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{۳+\frac{۱}{x^{۲}}}{\frac{۴}{x}-۵} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{۳x^{۲}+۱}{x^{۲}}}{\frac{۴-۵x}{x}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۳x^{۲}+۱}{۴x-۵x^{۲}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۳x^{۲}}{-۵x^{۲}} = \frac{-۳}{۵}$$

نمودار توابع زیر را رسم کنید سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{۱}{x}$



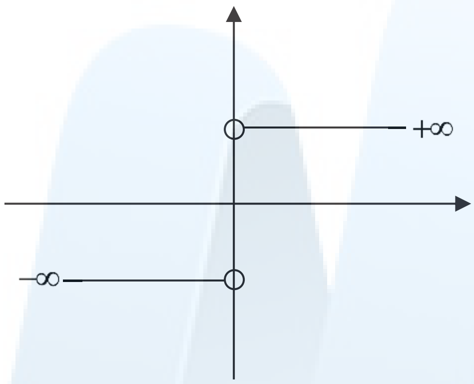
$\lim\limits_{n\to-\infty} f(x)=۰$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=۰$

$\lim\limits_{n\to۰^{+}} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{n\to۰^{-}} f(x)=+\infty$

ب) $g(n)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$



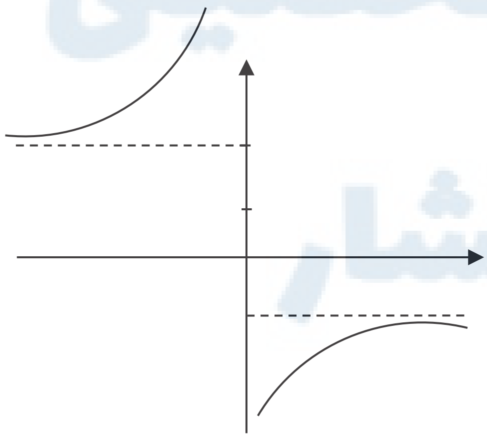
$\lim\limits_{n\to-\infty} g(x)=۱$

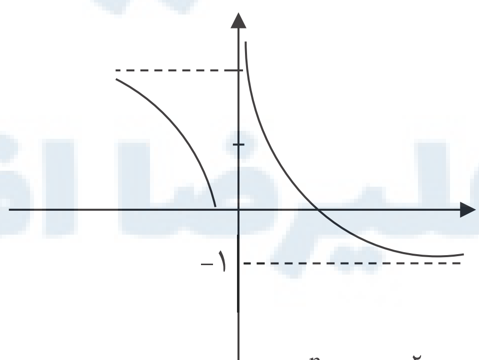
$\lim\limits_{n\to+\infty} g(x)=-۱$

هر یک از رابطه های $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=-۱$ و $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x)=۲$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید سپس نمودار تابعی را رسم کنید که هر دو ویژگی بالا را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد ؟

ج) در حالت اول یعنی x به سمت مقادیر بسیار زیاد مثبت میل می کند مقدار حدی را تابع به سمت عدد ۲- میل خواهد کرد.

در حالت دوم یعنی وقتی x به سمت مقادیر بسیار کوچک صنفی بی نهایت میل می کند مقدار حدی تابع به سمت ۲ میل می کند.





بی شمار جواب دارد.

مثال : با توجه به رابطه ی ($\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{ax^{n}+۳x^{۲}-۱}{۲x^{۴}-۳x^{۲}+۲}$) $a+n$ چقدر است؟

چون حد برابر عدد غیرصفر شده است پس درجه صورت و مخرج برابر ند یعنی $n=۴$ و نوا $\frac{a}{۲}=۲$ آنگاه

$a=۴$

مشتق :

فرمول تعریف مشتق :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_{+}(a)=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_{-}(a)=\lim_{n\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

اگر تابع پیوسته باشد و سپس $f'_{+}(a)=f'_{-}(a)$ گوییم مشتق پذیر است.

مثال : به کمک تعریف مشتق توابع زیر را بدست آورید.

$$۱)f(x)=x^{۲}+۲x \qquad x=۲$$

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+۲x-(۴+۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+۲x-۸}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۴)(x-۲)}{x-۲}=۶$$

$$۲)f(x)=\sqrt{x+۱} \qquad x=۳$$

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{۴}}{x-۳}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲}$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x+۱-۴}{(x-۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}=\frac{۱}{۲+۲}=\frac{۱}{۴}$$

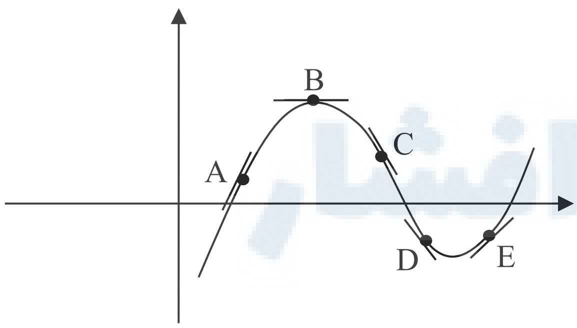
$$۳)f(x)=x^{۲}+x$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^{۲}+(x+h)-x^{۲}-x}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{x^{۲}+۲x+h^{۲}+x+h-x^{۲}-x}{h}=۲x$$

توجه : مشتق به زبان ریاضی شیب خط مماس بر منحنی است. و می دانیم خط هایی به صورت «/» شیب مثبت و خط هایی به صورت «\» شیب منفی دارند و خط «ــــ» شیب صفر دارد.

همچنین اگر شیب خط بیشتر باشد مثبت تر در حالت اول و در حالت منفی ، منفی تر است.



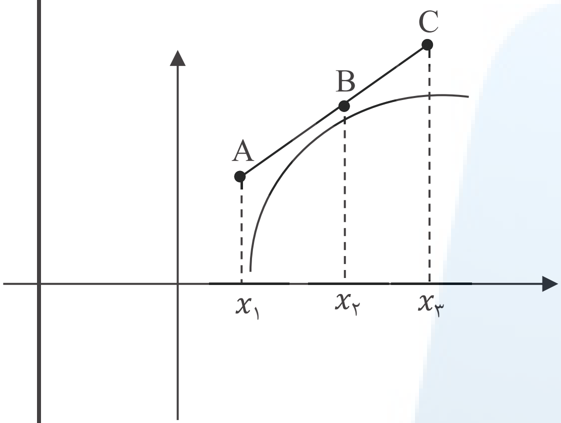
A	۲	
B	$\frac{۱}{۲}$	
C	۰	
D	$-\frac{۱}{۲}$	
E	-۳	

شیب A و E مثبت ولی A مثبت تر است.

شیب C و D منفی ولی شیب C منفی تر است پس کوچکتر است.

شیب B صفرا ست.

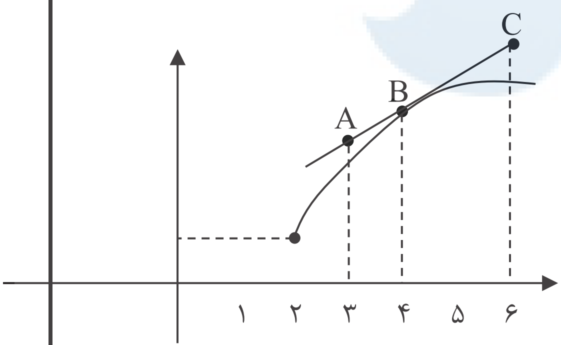
توجه :



$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

$$\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱} = \frac{f(x_۳)-f(x_۲)}{x_۳-x_۲} = f'(x_۲)$$

مثال : با توجه به شکل مقدار تابع در $x_۱$ و $x_۲$ چیست؟



$$f(۴)=۴$$
$$f'(۴)=۲$$

$$\frac{f(۴)-f(۳)}{۴-۳} = f'(۴) \rightarrow \frac{۴-f(۳)}{۱} = ۲ \qquad f(۳)=۲$$

$$\frac{f(۶)-f(۴)}{۶-۴} = f'(۴) \rightarrow \frac{f(۶)-۴}{۲} = ۲ \qquad f(۶)=۸$$

- مشتق پذیر تابع $y=|x-۱|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

$$y=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۱ \\ -x+۱ & x<۱ \end{cases}$$

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۰$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۰$$

پیوسته است

$$f(۱^+)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱-۰}{x-۱}=۱$$

$$f'(۱^-)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-x+۱-۰}{x-۱}=-۱$$

مشتق پذیر نیست.

- مشتق پذیری تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

مشتق پذیر نیست.

- مشتق پذیر تابع $y=\begin{cases}2x^2-x & x>1\\ 3x-2 & x\le 1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

پیوسته است. $\quad f(1)=3-2=1 \qquad \lim_{n\to 1^-}=1 \qquad \lim_{n\to 1^+}f(x)=2-1=1$

مشتق پذیر است.

$$y=\begin{cases}4x-1 & x>1\\ 3 & x<1\end{cases} \qquad \begin{array}{l} f'_+(1)=4-1=3\\ f'_-(1)=3\end{array}$$

- a و b را طوری بدست آورید که تابع $y=\begin{cases}ax^2+2ax+1 & x\ge 1\\ x^3-2 & x<1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$y'=\begin{cases}2ax+2b & x>1\\ 3x^2 & x<1\end{cases}$$

$f(1)=a+2b+1$

$\lim_{x\to 1^-}f(x)=1-2=-1$

$$a+2b+1=-1 \qquad \begin{cases}2a+2b=3\\ a+2b=-2\end{cases}\xrightarrow{-}a=5 \qquad \begin{array}{l}a+2b=-2\\ 2b=-7\end{array}\; b=-\frac{7}{2}$$

قوانین مشتق :

$1)\, y= \quad \to y'=0$

$2)\, y=ax\to y'=a$

$3)\, y=x^n\to y'=nx^{n-1}$

$4)\, y=u^n\to y'=nu^{n-1}u'$

$y=3x^5-4x^2+2x+\sqrt{3}$

$y'=15x^4-8x+2$

$y=(x^3-3x+4)^5$

$y'=5(x^3-3x+4)^4\times(3x^2-3)$

اولی × مشتق دومی + دومی × مشتق اولی

$$۵)\ y=u\,v \rightarrow y'=u'v+v'u$$

$$y=(x^{۲}-۳x+۱)^{۳}(x^{۴}-۵x^{۲})$$

$$y'=۳(x^{۲}-۳x+۱)^{۲}(۲x-۳)(x^{۴}-۵x^{۲})+(۴x^{۳}-۱۰x)(x^{۲}-۳x+۱)^{۳}$$

$$\frac{\text{صورت} \times \text{مشتق مخرج} - \text{مخرج} \times \text{مشتق صورت}}{(\text{مخرج})^{۲}}$$

$$y=\frac{(x^{۲}-۳x)^{۲}}{x^{۳}+۴x} \qquad y'=\frac{۲(x^{۲}-۳x)(۲x-۳)\times(x^{۳}+۴x)-(۳x^{۲}+۴x)(x^{۲}-۳x)^{۲}}{(x^{۳}+۴x)^{۲}}$$

$$y=\frac{x^{۲}(x-۱)^{۳}}{۲x-۱} \qquad y'=\frac{(۲x(x-۱)^{۳}+۳(x-۱)^{۲}\times x^{۲})(۲x-۱)-۲x^{۲}(x-۱)^{۳}}{(۲x-۱)^{۲}}$$

$$۷)\ y=\sqrt{u} \qquad y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$

$$u=\sqrt{x^{۳}-۴x} \qquad y'=\frac{۳x^{۲}-۴}{۲\sqrt{x^{۳}-۴x}}$$

$$y=\sqrt{\frac{۲x-۱}{x+۲}} \qquad y'=\frac{\dfrac{۲(x+۲)-۱(۲x-۱)}{(x+۲)^{۲}}}{۲\sqrt{\dfrac{۲x-۱}{x+۲}}}$$

مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن الزامی نیست)

$$۱)\ y=\left(\frac{-۳x-۱}{x^{۲}+۵}\right)^{۸} \qquad y'=۸\left(\frac{-۳x-۱}{x^{۲}+۵}\right)^{۷}\times\frac{-۳(x^{۲}+۵)-۲x(-۳x-۱)}{(x^{۲}+۵)^{۲}}$$

$$۲)\ y=\frac{x}{۲x^{۲}+x-۱}$$

$$۳)\ y=(x^{۲}+۳x+۱)^{۷}$$

$$۴)\ y=\left(\frac{x^{۲}}{۳x-۱}\right)^{۵}$$

$۵)\ y=(x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)$

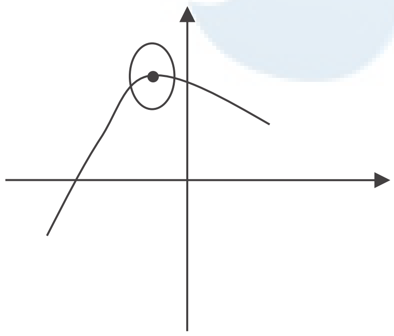
$۶)y=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۲}$

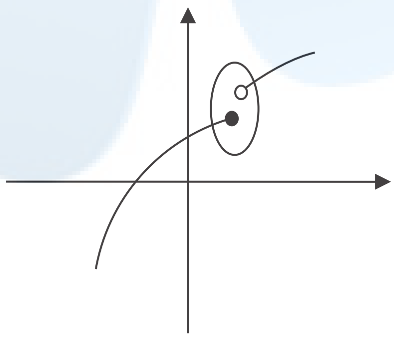
$۷)y=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱) \qquad y'=\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^{۳}+۱)+۳x^{۲}\sqrt{۳x+۲}$

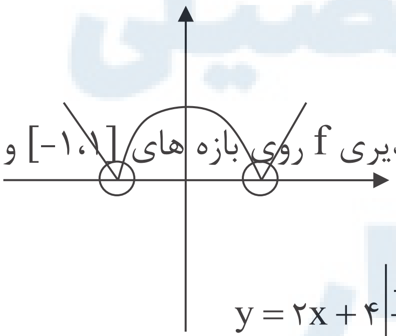
$۸)y=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}} \qquad y'=\dfrac{۹\sqrt{x}-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{x}$

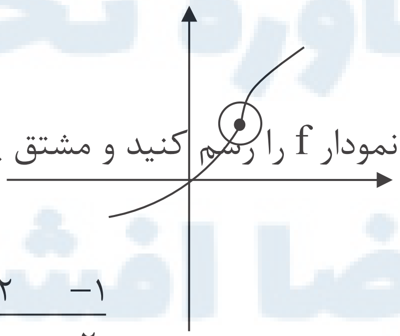
$۱۰)y=\dfrac{+x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$

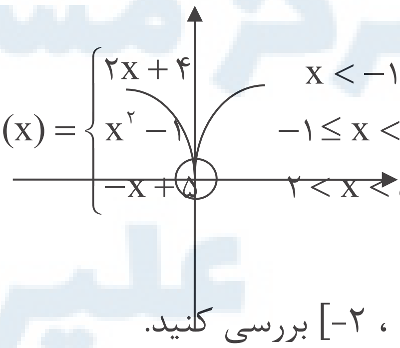
نقاط مشتق ناپذیر نمودارهای زیر را بدست آورید.











مثال اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f روی بازه های $[-۱،۱]$ و $(۲،۵)$ و $[-۲،۰]$ بررسی کنید.

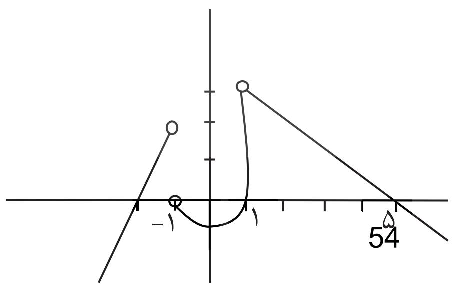
$y=۲x+۴$

-۲	-۱
۰	۲

$y=-x+۵$

۲	۵
۳	۰

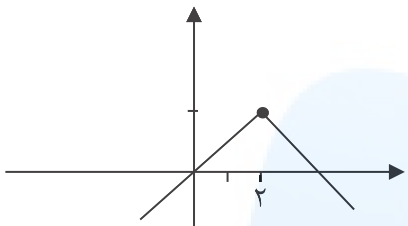
$[-۱،۱]$ مشتق پذیر است.

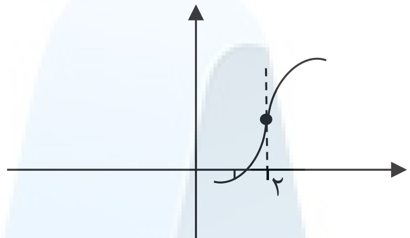


$(2,5)$ مشتق پذیر است.

$[-2,0]$ مشتق پذیر نیست زیرا در $x=-1$ ناپیوسته است.

مثال : دو تابع مثال بزنید که در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشد.





مثال : به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در $x=2$ و $x=-2$ بررسی کنید.

$$f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$$

مشتق پذیر نیست.

$$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-4)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+2)}{x-2}=-4$$

$f'(-2^+)=$

$f'(-2^-)=$

اگر $f'(1)=2$ و $g'(1)=-3$ مطلوبست حاصل

$(2f+3g)'(1)$

$2f'(1)=+3g'(1)=2\times 2+3(-3)=4-9=-5$

اگر $f(x)=x^4-4x^3+3x-1$ مطلوبست $f'(2)$ چیست؟

$f'(x)=4x^3-12x^2+3$

$f''(x)=12x^2-24x\to f''(2)=12(2)^2-24(2)=48-48=0$

آهنگ تغییر متوسط یا سرعت متوسط :

$$\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{v(t_۲)-v(t_۱)}{t_۲-t_۱}$$

آهنگ تغییر لحظه ای یا سرعت لحظه ای :

$$f'(x)=v'(t)$$

مثال : معادله حرکت یک متحرک به صورت $۷(t)=t^۲+۳t$ است.

الف) سرعت متوسط آن در بازه $[۱,۳]$ چیست؟

ب) سرعت متوسط آن به ازای $h=۰/۲, t=۲$ چیست؟

پ) سرعت لحظه ای آن در $t=۴$ چیست؟

الف) $\frac{V(۳)-V(۱)}{۳-۱}=\frac{(۹+۹)-۹(۱+۳)}{۲}=\frac{۱۸-۴}{۲}=۷$

ب) $\frac{V(۲+۰/۲)-V(۲)}{۰/۲}=\frac{(۲/۲)^۲+۳(۲/۲)-۲^۲-۳\times۲}{۰*۲}=\frac{۴/۸۴+۶/۶-۴-۶}{۰/۲}=$

$\frac{۱/۴۴}{۰/۲}=۷/۲$

پ) $V'(t)=۲t+۳$

$V'(۴)=۲(۴)+۳=۱۱$

یک مخزن آب در حال تخلیه شدن است که در زمان t ازرابطه ی $V(t)=۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^۲$ بدست می آید.

الف) آهنگ تخلیه در بازه $[۰,۱۰۰]$ چیست؟

ب) در چه زمانی آهنگ لحظه ای برابر آهنگ متوسط در بازه $[۰,۱۰۰]$ است ؟

الف) $\frac{V(۱۰۰)-V(۰)}{۱۰۰-۰}=\frac{۴۰(۱-۱)^۲-۴۰(۱-۰)^۲}{۱۰۰}=\frac{-۲}{۵}$

ب) $V'(t)=۸۰\times-\frac{۱}{۱۰۰}(۱-\frac{t}{۱۰۰})=-\frac{۴}{۵}(۱-\frac{t}{۱۰۰})=\frac{۲}{۵}$

$۱-\frac{t}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}$ $\quad \frac{t}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}$ $\quad t۵۰$

معادله حرکت یک متحرک به صورت $m(t)=t^3+\sqrt{t}$ است.

الف) آهنگ متوسط آن در بازه $[1,4]$ چیست؟

ب) آهنگ لحظه در $t=9$ چیست؟

الف) $\frac{m(4)-m(1)}{4-1}=\frac{(64+2)-(1+1)}{3}=\frac{64}{3}$

ب) $m'(t)=3t^2+\frac{1}{2\sqrt{t}} \qquad m'(9)=3\times9^2+\frac{1}{2\sqrt{9}}=243+\frac{1}{6}$

مثال: معادله حرکت جسمی که به صورت عمودی پرتاب می شود از رابطه $h(t)=-5t^2+40t$ بدست می آید.

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و برخورد با زمین چیست؟

ب) درچه لحظه ای سرعت جسم ۳۵ یا ۳۵- است؟

الف)
$$-5t^2+40t=0\rightarrow -5t(t-8)=0 \qquad t=0 \qquad t=8$$
$$h'(t)=-10t+40 \qquad h'(0)=40 \qquad h'(8)=-80+40=-40$$

ب) $-10t+40=35\rightarrow t=\frac{1}{2} \qquad -10t+40=-35\rightarrow t=7/5$

«کاربرد مشتق»

از تابع مشتق می گیریم :

۱) تعیین علامت می کنیم که صعودی + و نزولی −

۲) نقاطی از دامنه تابع بجز ابتدا و انتها که یا تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست یا ریشه ی مشتق باشند نقاط بحرانی هستند.

۳) نقاط اکترمم مطلق: نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه را در تابع اصلی قرار می دهیم بیشترین مقدار بدست آمده max مطبق و کمترین مقدار بدست آمده را min مطبق گویند.

۴) نقاط اکسترمم نسبی یا موضعی :

بعد از تعیین علامت نقاط بحرانی اگر $\dfrac{\quad}{+\ |\ -}$ یا $\dfrac{\quad}{-\ |\ +}$ می باشند.

توجه : نقطه اکسترمم نسبی هم در تابع صدق می کند هم در مشتق اول

توجه : ریشه ی مضاعف مشتق اول چون تغییر علامت نمی دهد اکسترمم نسبی نیست.

مثال : در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x-1$ بحث کنید.

$$y'=x^2-6x+5=0 \to (x-5)(x-1)=0 \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

$-\infty$	۱	۵	$+\infty$
	+ |	− |	+

صعودی $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$

نزولی $(1,5)$

مثال : بزرگترین بازه ای که تابع $f(x)=x^3-12x+4$ در آن نزولی است چیست؟

$$f'(x)=3x^2-12=0 \to x^2=4 \to x=\pm 2$$

$-\infty$	-2	۲	$+\infty$
	+ |	− |	+

$(-2,2)$

مثال : صعودی یا نزولی بودن تابع $y(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ را بررسی کنید.

$$g'(x)=\frac{0-2x}{(x^2+1)^2}=0 \qquad x=0$$

	۰	
+	|	−

صعودی $(-\infty,0)$ نزولی $(0,+\infty)$

مثال : نقال بحرانی توابع زیر را مشخص کنید.

بحرانی

$۱)y=\sqrt{۴-x^۲} \qquad ۴-x^۲\ge ۰\rightarrow x^۲\le ۴\rightarrow -۲\le x\le ۲$

$$y'=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^۲}}=\frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}}=۰\rightarrow x=۰\in[-۲,۲]$$

نقاط بحرانی

$۲)y=x^۳+۳x^۲-۴$

$$y'=۳x^۲+۶x=۰\begin{cases}x=۰\\x=-۲\end{cases}$$

مشتق ناپذیر و بحرانی است.

$۳)y=\sqrt[۳]{x} \qquad y'=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} \qquad x^۲=۰\rightarrow x=۰$

$D:\mathbb{R}$

مثال : در هر یک از توابع زیر نقاط بحرانی را بدست آورید سپس نقاط اکسترمم نسبی آن را مشخص کنید.

$(x^۲+۲x-۳)=۰$

$(x+۳)(x-۱)=۰\begin{cases}x=-۳\\x=۱\end{cases}$

$f(-۳)=-۲۷+۲۷+۲۷-۱۰=۱۷ \qquad (-۳,۱۷)$

$f(۱)=۱+۳-۹-۱۰=-۱۵ \qquad (۱,۱۵۳۵)$

$۲)g(x)=-۲x^۳+۳x^۲+۱۲x-۹$

$g'(x)=-۶x^۲+۶x+۱۲=۰$

$-\infty$	-۱	۲	$+\infty$
$-$		$+$	$-$

$-۶(x^۲-x-۲)>۰$

$x=۲ \qquad x=-۱$

$f(-۱)=۲+۳-۱۲-۹=-۱۶ \qquad (-۱,-۱۶)$

$f(۲)=-۱۶+۱۲+۲۴-۹ \qquad (۲,۱۱)$

$۳)h(x)=-x^۳-۳x+۲$

$h'(x)=-۳x^۲-۳\ne ۰$

همواره منفی نقطه بحرانی در نتیجه اکسترمم نسبی ندارد.

مثال : مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه های مشخص شده در صورت وجود بدست آورید.

الف) $f(x) = -۲x^{۳} + ۹x^{۲} - ۱۳$

$[-۱, ۲]$

$f'(x) = -۶x^{۲} + ۱۸x = ۰$ $\qquad x = ۰ \qquad x = ۳$

$f(-۱) = ۲ + ۹ - ۱۳ = -۱$

$f(۰) = ۰ + ۰ - ۱۳ = -۱۳ \min$

$f(۲) - ۱۶ + ۳۶ - ۱۳ = ۷ \max$

ب) $g(x) = x^{۳} + ۲x - ۵ \qquad [-۲, ۱] \qquad g(-۲) =$

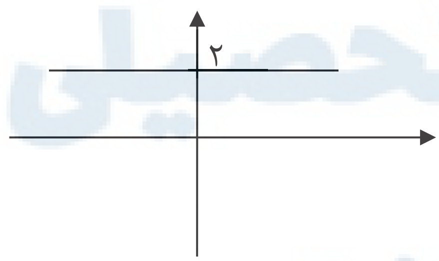
همواره صعودی $\qquad g'(x) = ۳x^{۲} + ۲ \neq ۰$

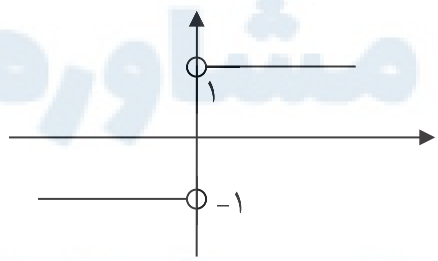
مثال : اگر نقطه (۱و۲) نقطه یا اکسترمم تابع $y = x^{۳} + bx^{۲} + d$ باشد b و d را بیبید.

$(۲, ۱) \to ۱ = +۴b + d \to ۱ = ۸ + ۴(-۳) + ۴ \to d = ۵$

$y' = ۳x^{۲} + ۲bx = ۰ \xrightarrow{x=۲} ۱۲ + ۴b = ۰ \to b = -۳$

مثال : نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن IR باشد و در هر نقطه آن یک نقطه بحرانی باشد نمودار تابع ثابت روی R جواب مورد نظر است و بی شمار جواب دارد.



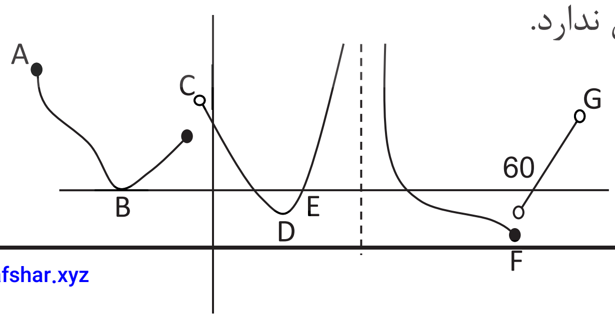


مثال : از روی نمودار نقاط بحرانی- اکسترمم نسبی و اکسترمم مطلق را مشخص کنید.

بحرانی : F , D , C , B

اکسترمم نسبی : F , D , B

اکسترمم مطلق : min F مطلق و max مطلق ندارد.



«بهینه سازی»

مسئله هایی که برای بهینه کردن مقدار- مساحت- محیط- حجم و ... هستند اصولا از دو رابطه ی تشکیل میش ود که یکی رابطه ی عددی است و دیگری رابطه ای که باید بهینه شود ابتدا به کمک رابطه ی اول یکی از مجهول ها را برحسب دیگری بدست می آوریم. در رابطه ای که قرار است بهینه شود قرار می دهیم سپس به کمک مشتق مقدار بهینه را بدست می آوریم.

مثال : نشان دهید در بین تمام مستطیل ها با محیط ثابت ۱۴، بیشترین مساحت را مستطیل با طول و عرض برابر (مربع) دارد ؟

$$۲(x+y)=۱۴ \rightarrow x+y=۷ \rightarrow y=۷-x$$

$$S=xy=x(۷-x)=-x^۲+۷x$$

$$S'=-۲x+۷=۰ \rightarrow x=\frac{۷}{۲} \rightarrow y=۷-\frac{۷}{۲}=\frac{۷}{۲}$$

$$\begin{array}{c|c} & \frac{۷}{۲} \\ \hline + & - \end{array}$$

مثال : کشاورزی می خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوار کشی کند. هزینه هر متر دیوار های شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

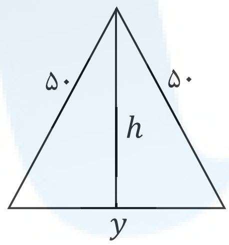
$$S=۱۰۰۰۰ \rightarrow xy=۱۰۰۰۰ \rightarrow y=\frac{۱۰۰۰۰}{x}$$

$$P = ۲(x+y) = ۲(۲x+۸y) = ۴(x+۴y) = ۴(x+\frac{۴۰۰۰۰}{x})$$

$$P' = ۴(۱-\frac{۴۰۰۰۰}{x^۲}) = ۰ \rightarrow x^۲ = ۴۰۰۰۰ \rightarrow x = ۲۰۰$$

$$y = \frac{۱۰۰۰۰}{۲۰۰} = ۵۰$$

مثال : می خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود ؟



$$h = \sqrt{۲۵۰۰-\frac{y^۲}{۴}} \qquad s = \frac{۱}{۲}y\sqrt{۲۵۰۰-\frac{y^۲}{۴}}$$

$$S' = ۰ \rightarrow \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۲۵۰۰-\frac{y^۲}{۴}} + \frac{-\frac{y}{۲}\times y}{۲\sqrt{۲۵۰۰-\frac{y^۲}{۴}}}\right) = ۰$$

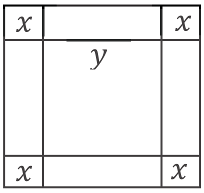
$$\sqrt{۲۵۰۰-\frac{y^۲}{۴}} = \frac{y^۲}{۴\sqrt{۲۵۰۰-\frac{y^۲}{۴}}}$$

$$۴(۲۵۰۰-\frac{y^۲}{۴}) = y^۲ \rightarrow ۱۰۰۰۰ = ۲y^۲ \rightarrow y^۲ = ۵۰۰۰$$

$$y = ۵۰\sqrt{۲} \qquad h = \sqrt{۲۵۰۰-\frac{۵۰۰۰}{۴}} = \sqrt{۲۵۰۰-۱۲۵۰} = ۲۵\sqrt{۲}$$

$$s = \frac{۱}{۲}\times ۵۰\sqrt{۲}\times ۲۵\sqrt{۲} = ۱۲۵۰$$

مثال : یک ورق فلزی مربع شکل به طور ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم با این ورقه جعبه درباز بسازیم مقدار ارتفاع جعبه چقدر باشد تا بیشترین مقدار باشد.



$$y + ۲x = ۳۰ \rightarrow x = \frac{۳۰ - y}{۲}$$

$$V = x(y^۲) = (\frac{۳۰ - y}{۲})y^۲ = \frac{۳۰y^۲ - y^۳}{۲}$$

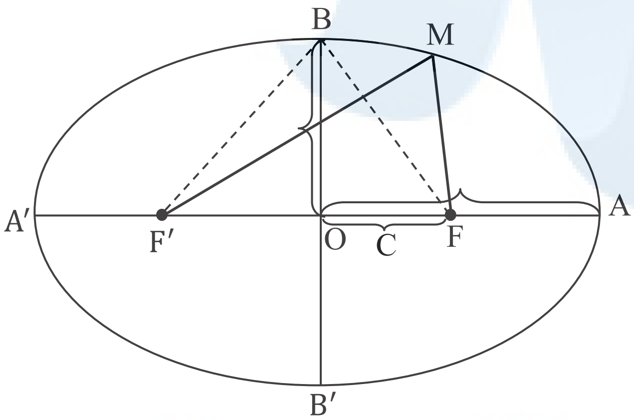
$$V' = \frac{۶۰y - ۳y^۲}{۲} = ۰ \qquad ۳y(۲۰ - y) = ۰$$

$$y = ۰ \rightarrow y = ۲۰$$

$$x = \frac{۳۰ - ۲۰}{۲} = ۵$$

بیضی :

مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله آن نقاط از دو نقطه ثابت (کانون ها) برابر مقدار ثابتی (قطر کانونی) باشد. $|MF| + |MF'| = ۲a$



$$O\Big|_{\beta}^{\alpha} \qquad AA' = ۲a \quad Bb' = ۲b \quad FF' = ۲c$$

$$A\Big|_{\beta}^{\alpha + a} \qquad F\Big|_{\beta}^{\alpha + c} \qquad B\Big|_{\beta + b}^{\alpha}$$

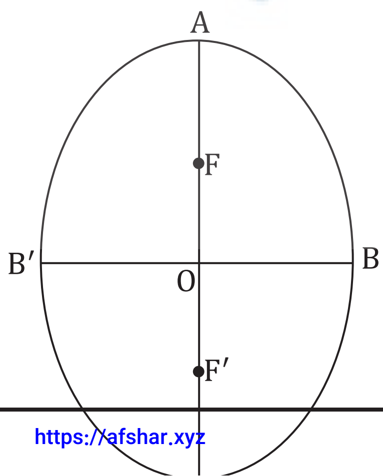
$$A'\Big|_{\beta}^{\alpha - a} \qquad F'\Big|_{\beta}^{\alpha - c} \qquad B'\Big|_{\beta - b}^{\alpha}$$

$$|BF| + |BF'| = ۲a$$

$$BF = BF' \Rightarrow BF = a, \Delta BOF \rightarrow BF^۲ = BO^۲ + OF^۲$$

$$= a^۲ = b^۲ + c^۲$$

بیضی قائم :



$$O\Big|_{\beta}^{\alpha}$$

$$A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+a\end{matrix}\right. \qquad F\left|\begin{matrix}\alpha+b\\ \beta\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+c\end{matrix}\right.$$

$$A'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-a\end{matrix}\right. \qquad F'\left|\begin{matrix}\alpha-b\\ \beta\end{matrix}\right. \qquad B'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-c\end{matrix}\right.$$

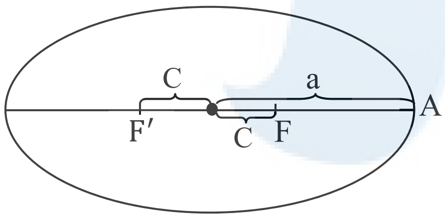
خروج از مرکز :

مزن کشیدگی ی فاصله کانون ها از مرکز $e=\frac{c}{a}=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}$

کشیدگی بیشتر به دو خط منطبق نزدیک می شود. $c\to a, e\to ۱$

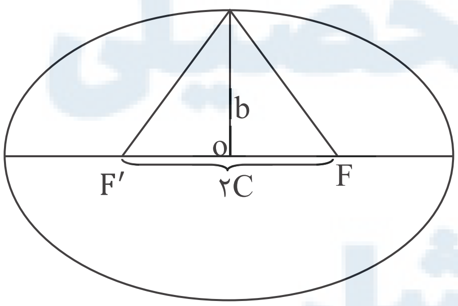
کشیدگی کمتر به دایره نزدیک می شود. $c\to ۰, e\to ۰$

توجه :



$$|AF|\times|AF'|=(a+c)(a-c)$$
$$=a^۲-c^۲=b^۲$$

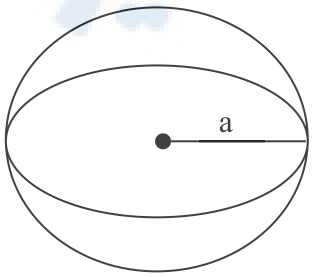
توجه : بیشترین مساحت در بین مثلث هایی که یک رأس آن روی بیضی و دو رأس دیگر کانون ها باشند مثلث متساوی الساقین BFF' است.



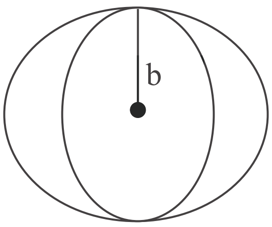
$$s=\frac{۱}{۲}b\times ۲c=bc$$

توجه :

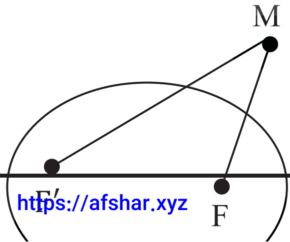
بیضی $S=\pi a^۲$ $S=\pi ab$

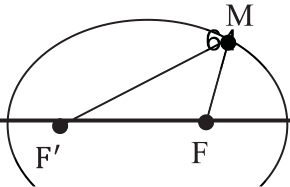


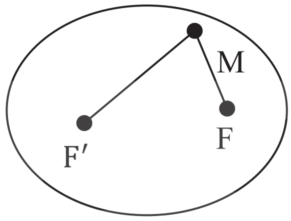
$S=\pi b^۲$



وضعیت نقطه و بیضی :

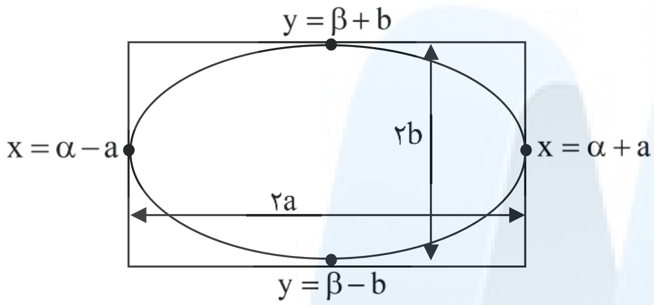






$|MF|+|MF'|<2a$ $\qquad$ $|MF|+|MF'|=2a$ $\qquad$ $|MF|+|MF'|>2a$

خط های مماس بر بیضی : (افقی)



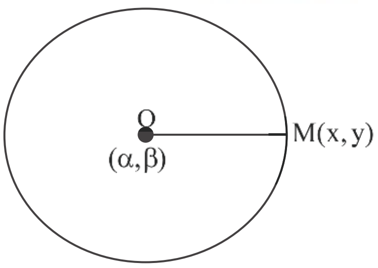
مساحت مستطیل محدود به این خطوط مماس : $S=2a\times 2b=4ab$

دایره : مکان هندسی نقاطی که فاصله آنها از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) برابر مقدار ثابتی (شعاع دایره) باشد.

$$MO=R\rightarrow\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R$$

$$\Rightarrow(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

معادله استاندارد دایره



$$\rightarrow x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2-R^2=0$$

$$\begin{matrix}-2\alpha=a\\-2\beta=b\end{matrix}\rightarrow x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\alpha^2+\beta^2-R^2=C\rightarrow\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-R^2=C\rightarrow R^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2-4c)$$

$$\rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

مرکز $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}),R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

که شرط دایره بودن $a^2+b^2-4c>0$

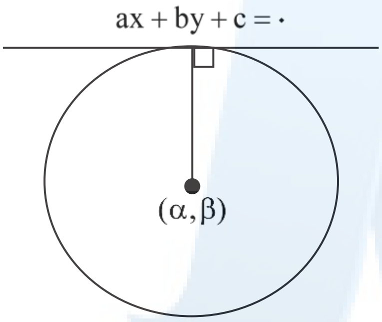
توجه :

برای نوشتن معادله دایره در حالت کلی باید مرکز و شعاع را تعیین نمود.

۱) مرکز و نقطه ای از دایره مشخص باشد. $R=|OA|$

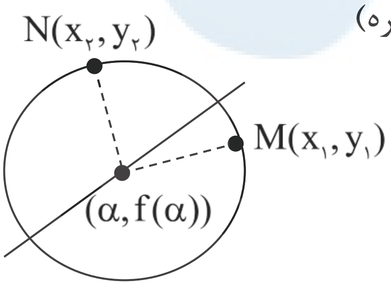
۲) دو سر قطر دایره $O=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $2R=|AB|$

۳) مرکز و معادله ی خط مماس بر منحنی



$$R=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

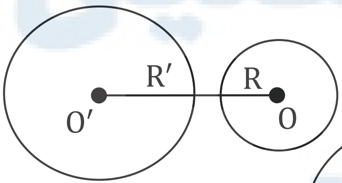
۴) مکان مرکز روی یک خط حتی تابع و دو نقطه از دایره (محیط دایره)

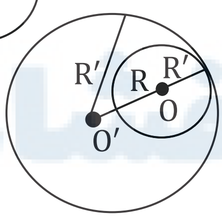


$$|OM|=|ON|\to\sqrt{(\alpha-x_1)^2+(f(\alpha)-y_1)^2}=\sqrt{(\alpha-x_2)^2+(f(\alpha)-y_2)^2}$$

۵) مرکز آن (α,β) بوده و بر دایره $x^2+y^2+ax+by+c=0$ مماس باشد.

الف) مماس خرج باشد. $oo'-R'=R$



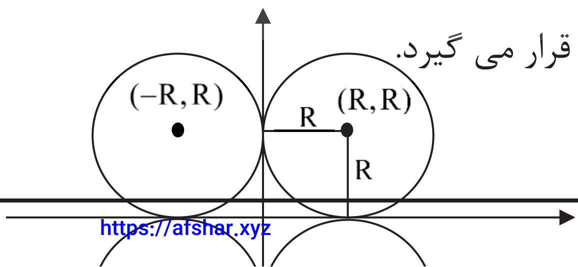


ب) مماس داخل باشند $R'-oo'=R$

در حالت کلی : $R=|oo'-R'|$

۶) بر محورهای مختصات مماس باشد.

با مشخص شدن نقطه ای دایره مشخص می شود. در کدام ناحیه قرار می گیرد.



۱) $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$ ۳) $(x+R)^2+(y+R)^2=R^2$

۲) $(x+R)^2+(y-R)^2=R^2$ ۴) $(x-R)^2+(y+R)^2=R^2$

۷) معادله دایره ای که از سه نقطه $C(x_3,y_3),B(x_2,y_2),A(x_1,y_1)$ می گذرد چیست؟ مختصات سه نقطه در معادله گسترده دایره صدق می کند.

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c=0 \\ x_2^2+y_2^2+ax_2+by_1+c=0 \\ x_3^2+y_3^2+ax_3+by_3+c=0 \end{cases} \longrightarrow a,b,c=?$$

$$(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) \qquad R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

۸) مکان هندسی نقاطی که فاصله آنها از نقطه $A(x_1,y_1)$ ، k برابر فاصله آنها از $B(x_2,y_2)$ باشد.

$$M(x,y)$$

$$|MA|=k|MB| \to (\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=k\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

$$x^2-2x_1x+x_1^2+y^2-2y_1y+y_1^2=k^2(x^2-2x_2x+x_2^2+y^2-2y_2y+y_2^2)$$

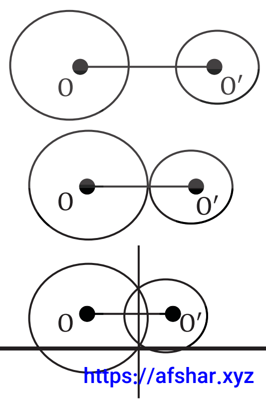
$$(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2+2(x_1-x_2k^2)x+2(y_1-y_2k^2)y+k^2(x_2^2+y_2^2)-$$
$$x_1^2-y_1^2=0$$

دایره

وضعیت دو دایره :

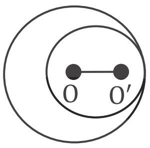
به شکل دقت شود $d<R+R'$

تمام حالت ها به فاصله دو مرکز و شعاع ها $d=R+R'$



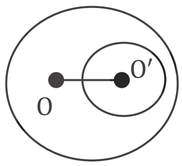
بستگی دارد. $\;\; \begin{matrix} oo' = d \\ R, R' \end{matrix} \;\; |R - R'| < d < R + R'$

در حالت متقاطع وتر مشترک داریم. $\quad d = |R + R'|$



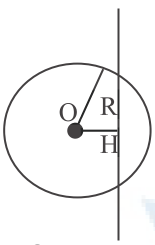
$d < |R - R'|$

$$-\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \\ \hline (a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0 \end{cases}$$

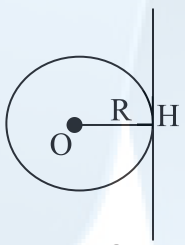


وضعیت خط و دایره :

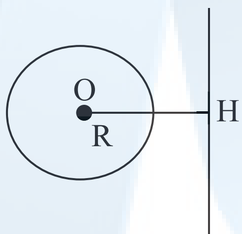
$$OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$OH < R$

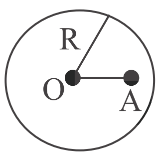


$OH = R$

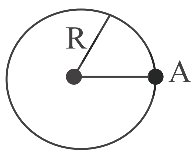


$OH > R$

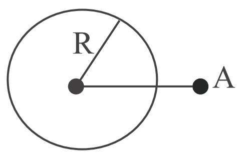
وضعیت نقطه و دایره :



$OA < R$



$OA = R$



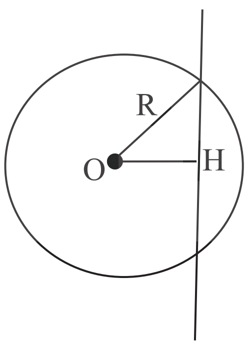
$OA > R$

البته با جایگذاری نقطه در معادله دایره می توان وضعیت نقطه نسبت به دایره را مشخص نمود.

$$P(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2 + a\alpha + b\beta + c \qquad \begin{cases} p > 0 & \text{نقطه خارج از دایره} \\ p = 0 & \text{روی دایره} \\ p < 0 & \text{درون دایره} \end{cases}$$

اگر خط $ax + by + c = 0$ دایره را قطع کند. طول وتری که بوجود می آید به صورت زیر است.

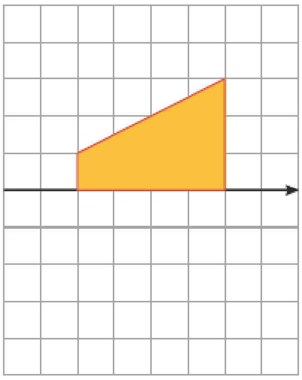
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$



$$OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

$$\frac{۱}{۲} = \sqrt{R^۲ - oH^۲}$$

۱) در شکل رو به رو می خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.



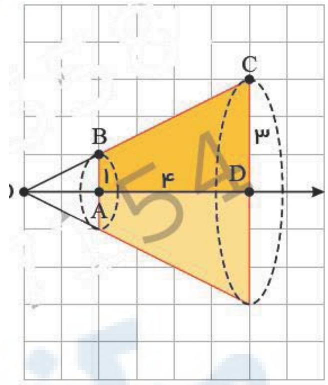
الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟

پاسخ : الف)

باید حجم یک مخروط ناقص (قسمت رنگی) را حساب کنیم. برای این کار ابتدا با قضیه تالس مقدار x را پیدا می کنیم.

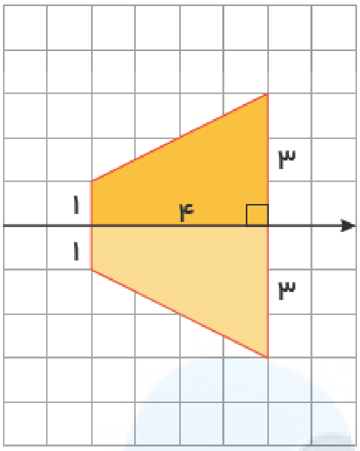
$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{x}{x+۴} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x = ۲$$



بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} \text{حجم مخروط بزرگ} = \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۶) = ۱۸\pi \\ \text{حجم مخروط کوچک} = \frac{۱}{۳}\pi(۱)^۲(۲) = \frac{\pi ۲}{۳}\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \text{حجم مخروط ناقص} = ۱۸\pi - \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۵۲\pi}{۳}$$

ب)



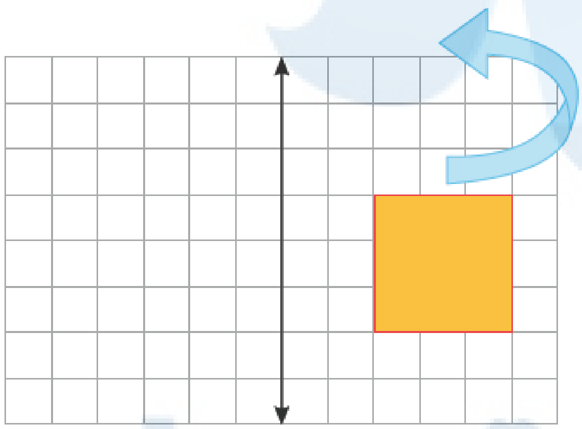
یک ذوزنقه به شکل روبه روست :

مساحت سطح مقطع $\Leftarrow$ $= \frac{(2+6)\times 4}{2} = 16$

۲) مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه رو در فاصله ۲ واحد از یک خطر راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

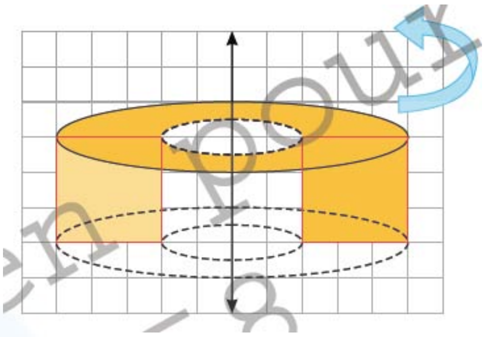
ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه موازی با قاعده آن توصیه کیند.



پاسخ : الف)

باید حجم یک استوانه به شعاع ۵ و ارتفاع ۳ را حساب کنیم که استوانه به شعاع ۲ ارتفاع ۳ از مرکز آن برداشته شده است. (در واقع حجم یک لوله استوانه ای را که شعاع داخلی آن ۲، شعاع خارجی آن ۵ و ارتفاع آن ۳ است باید حساب کنیم.)

حجم شکل حاصل ،برابر با ختلاف حجم استوانه بزرگ تر و استوانه کوچک تر است.



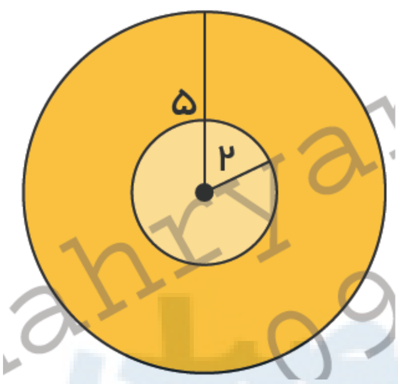
استوانه کوچکتر : $\begin{cases} h_1 = ۳ \\ r_1 = ۲ \end{cases} \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h_1 = \pi(۲^2)(۳) = ۱۲\pi$

استوانه بزرگتر : $\begin{cases} h_2 = ۳ \\ r_2 = ۵ \end{cases} \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi(۵^2)(۳) = ۷۵\pi$

حجم شکل حاصل $= ۷۵\pi - ۱۲\pi = ۶۳\pi$

ب)

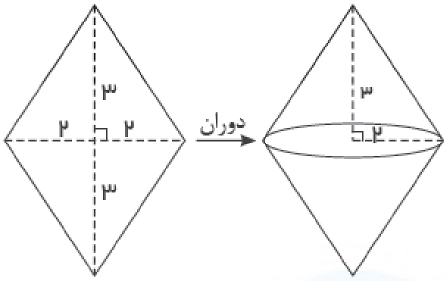
سطح مقطع حاصل، به صورت یک دیسک است که شعاع داخلی آن ۲ و شعاع خارجی آن ۵ است.



۳) اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

پاسخ : شکل حاصلف دو مخروط یکسان است که از قاعده به هم چسبیده اند و شعاع قاعده هر کدام از آنها ۲ و ارتفاعشان ۳ می باشد. پس حجم شکل حاصل برابر است با :

$$V = ۲(\frac{۱}{۳}\pi r^2 h) \xrightarrow[h=۳]{r=۲} \frac{۲}{۳}\pi(۲)^2 \times ۳ = ۸\pi$$



۴) کانون های یک بیضی نقاط (۳ ، ۱) و (۵- ، ۱) است.

الف) فاصله کانونی ، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر ۶ = a باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

پاسخ : الف)

$$F\begin{vmatrix}۱\\۳\end{vmatrix}, F'\begin{vmatrix}۱\\-۴\end{vmatrix} \to FF' = ۲c \to ۲c = ۸ \to c = ۴$$

$$FF' \text{ وسط } w \begin{vmatrix} \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \frac{۵-۳}{۲} = ۱ \end{vmatrix}$$

چون $x_F = x_{F'}$ است بیضی قائم است و معادله قطر بزرگ $x = a$ و معادله قطر کوچک $y = \beta$ است پس معادله قطر بزرگ $x = ۱$ و معادله قطر کوچک $y = -۱$ است.

ب) $c^۲ = a^۲ - b^۲ \to ۱۶ = ۳۶ - b^۲ \to b^۲ = ۲۰ \to b = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$

$\to$ قطر کوچک $= ۲b = ۴\sqrt{۵}$

$$e = \frac{c}{a} \to e = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

۵) خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$ ، مرکز آن $\begin{vmatrix}-۴\\-۱\end{vmatrix}$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. الف) (الف)

طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون های بیضی را پیدا کنید.

الف) $e=\frac{c}{a}\rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{c}{a}\rightarrow ۴a=۵c\rightarrow a=\frac{۵}{۴}c$

$=۲b=۶\rightarrow b=۳$

$c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}\rightarrow c^{۲}=\frac{۲۵}{۱۶}c^{۲}-۹\rightarrow ۹=\frac{۹}{۱۶}c^{۲}$

$۳=\frac{۳}{۴}c\rightarrow ۳c=۱۲\rightarrow c=۴, a=\frac{۵}{۴}(۴)=۵\rightarrow ۲a=۱۰ \xrightarrow{\text{جذر}}$

فاصله کانونی $=۲c=۸$

$W\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.\quad F\left|\begin{matrix}\alpha+c\\ \beta\end{matrix}\right.\quad F'\left|\begin{matrix}\alpha-c\\ \beta\end{matrix}\right.\quad A\left|\begin{matrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix}\right.\quad A'\left|\begin{matrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix}\right.$

ب)

$B\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+b\end{matrix}\right.\quad B'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-b\end{matrix}\right.$

$\rightarrow W\left|\begin{matrix}-۴\\ -۱\end{matrix}\right.\quad F\left|\begin{matrix}۰\\ ۱\end{matrix}\right.\quad F'\left|\begin{matrix}-۸\\ -۱\end{matrix}\right.\quad A\left|\begin{matrix}۱\\ -۱\end{matrix}\right.\quad A'\left|\begin{matrix}-۹\\ -۱\end{matrix}\right.$

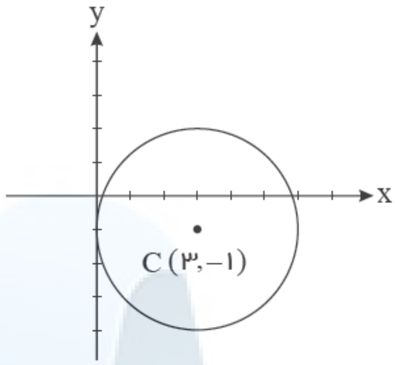
$B\left|\begin{matrix}-۴\\ ۲\end{matrix}\right.\quad B'\left|\begin{matrix}-۴\\ -۴\end{matrix}\right.$

۶) در هر دایره مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنیدف محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات ، در صورت وجود مشخص کنید و درستی پاسخ خود را به کک رسم دایره بررسی کنید.

الف) $x^{۲}+y^{۲}-۶x+۲y+۱=۰$

ب) $x^{۲}+(y+۳)^{۲}-۴=۰$

پاسخ :



الف) $x^{۲}+y^{۲}-۶x۲y+۱=۰$

$$\to \begin{cases} f'_x = ۲x-۶=۰ \to x=۳ \\ f'_y=۲y+۲=۰ \to y=-۱ \end{cases} \to C\begin{vmatrix} ۲ & :\alpha \\ -۳ & :\beta \end{vmatrix}$$

$$R^{۲}=\alpha^{۲}+\beta^{۲}-c=۹+۱-۱=۹ \to R=۳$$

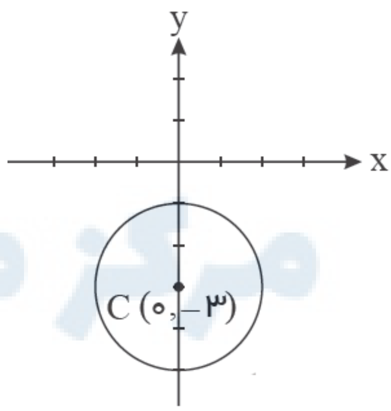
اکنون محل برخورد دایره با محورهای مختصات را مشخص می کنیم.

$$x=۰ \to y^{۲}+۲y+۱=۰ \to (y+۱)^{۲}=۰ \to y=-۱$$

$$y=۰ \to x^{۲}-۶x+۱=۰ \to (x-۳)^{۲}-۹+۱=۰ \to (x-۳)^{۲}=۸$$

$$\to x-۳=\pm\sqrt{۸} \to x=۳\pm\sqrt{۸}$$

ب) $x^{۲}+(y+۳)^{۲}-۴=۰ \to (x-۰)^{۲}+(y+۳)^{۲}=۴ \to \begin{cases} C\begin{vmatrix} ۰ \\ -۳ \end{vmatrix} \\ R=۲ \end{cases}$



اکنون محل برخورد دایره با محورهای مختصات رامشخص می کنیم.

$$x=۰ \to (x+۳)^{۲}=۴ \to \begin{cases} y+۳=۲ \to y=-۱ \\ y+۳=-۲ \to y=-۵ \end{cases}$$

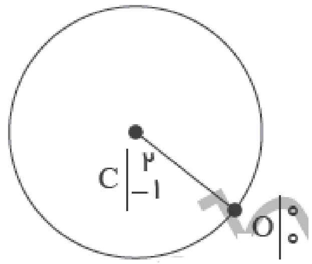
$y=۰ \to x^{۲}+۹-۴=۰ \to x^{۲}=-۵$ ریشه حقیقی ندارد.

۷) در حالت های زیر معادله دایره را بنویسید.

پاسخ :

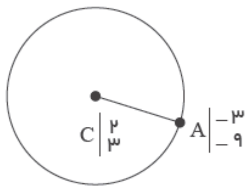
الف) دایره ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(۲,-۱)$ باشد.

$$\rightarrow R = OC = \sqrt{(۲-۰)^{۲}+(-۱-۰)^{۲}} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$



معادله دایره : $(x-\alpha)^{۲}+(y+\beta)^{۲}=R^{۲} \rightarrow (x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۵$

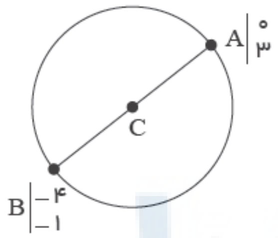
ب) دایره ای که مرکز آن (۳، ۲) و نقطه (۹- ، ۳-) نقطه ای روی آن باشد.



$$\rightarrow R = AC = \sqrt{(۲+۳)^{۲}+(۳+۹)^{۲}} = \sqrt{۲۵+۱۴۴} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$$

معادله دایره : $(x-\alpha)^{۲}+(y+\beta)^{۲}=R^{۲} \rightarrow (x-۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۱۶۹$

پ) دایره ای که نقاط (۳، ۰) و (۱- ، ۴-) دو سر یکی از قطرهای آن باشند.



وسط AB $C\left|\begin{array}{l}\frac{۰-۴}{۲}=-۲:\alpha \\ \frac{۳-۱}{۲}=۱:\beta\end{array}\right.$

$$R = AC = \sqrt{(۰+۲)^{۲}+(۳-۱)^{۲}} = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

معادله دایره : $(x-\alpha)^{۲}+(y+\beta)^{۲}=R^{۲} \rightarrow (x-۲)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۸$

۸) وضعیت نقاط $(۱,۰),(۰,-۱),(-۱,-۲),(۰,۰)$ را نسبت به دایره $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y+۱=۰$ مشخص کنید.

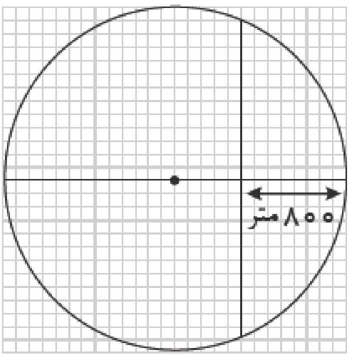
$P(۱,۰)=۱+۰-۲+۰+۱=۰ \rightarrow$ نقطه روی دایره است.

$P(۰,-۱)=۰+۱-۰-۴+۱=-۲ \rightarrow$ نقطه داخل دایره است.

$P(-۱,-۲)=۱+۴+۲-۸+۱=۰ \rightarrow$ نقطه روی دایره است.

$P(۰,۰)=۰+۰-۰+۰+۱=۱ \rightarrow$ نقطه خارج دایره است.

۹) شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایرها ی شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر، دو مسیر پیاده روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره (۱۳ ، ۱۳) و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد :



الف) معادله این دایره چیست؟

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه ای با یکدیگر متقاطع اند؟

ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

پاسخ : الف) $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \to (x-۱۳)^۲+(y-۱۳)^۲=۱۶۹$

ب) در مسیر عمودی x=۱۸ است پس داریم :

$$x=۱۸ \to (۱۸-۱۳)^۲+(y-۱۳)^۲=۱۶۹ \to (y-۱۳)=۱۴۴ \to \begin{cases} y-۱۳=۱۲ \to y=۲۵ \\ y-۱۳=-۱۲ \to y=۱ \end{cases}$$

$$\to \left|\begin{matrix}۱۸\\۱\end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix}۱۸\\۲۵\end{matrix}\right.$$

در مسیر افقی، y = ۱۳ است پس داریم :

$$x=۱۳ \to (۱۸-۱۳)^۲+۰=۱۶۹ \to \begin{cases} y-۱۳=۱۳ \to x=۲۶ \\ y-۱۳=-۱۳ \to x=۱ \end{cases}$$

$$\to \left|\begin{matrix}۲۳\\۱۳\end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix}۰\\۱۳\end{matrix}\right.$$

پ) مختصات نقطه تقاطع دو مسیر $\left|\begin{matrix}۱۸\\۱۳\end{matrix}\right.$ است.

ت) طول مسیر عمودی ۲۴ = ۱-۲۵ واحد یعنی ۲۴۰۰ متر است.

۱۰) معادله گسترده یک دایره به شکل $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۸=۰$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به شکل استاندارد بنویسید .

پاسخ :

$$x^۲+۲x+y^۲+۲y-۸=۰ \to (x+۱)^۲-۱+(y+۱)^۲-۱-۸=۰$$

$$\to (x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۱۰ \to \begin{cases} C\left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right. \\ R=\sqrt{۱۰}\end{cases}$$

۱۱) وضع خط های زیر را نسبت به دایهر مشخص کنید.

الف) $۶x+۴y=۰, x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$

ب) $y=-x-۲, x^۲+y^۲=۲$

پاسخ :

الف) $x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰ \to \begin{cases} f'_x=۲x-۴=۰ \to x=۲ \\ f'_y=۲y-۴=۰ y=۲ \end{cases} \to C\left|\begin{matrix}۲:\alpha\\۲:\beta\end{matrix}\right.$

$$R^۲=\alpha^۲+\beta^۲-c=۴+۴-۷=۱ \to R=۱$$

فاصله مرکز دایره تا خط $۶x+۴y=۰$ $=CH=\frac{|۱۲+۸|}{\sqrt{۳۶+۱۶}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۵۲}}=\frac{۲۰}{۲\sqrt{۱۳}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}}$

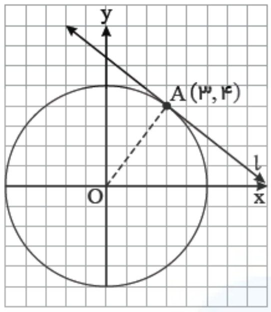
چون $CH>R$ است بنابراین خط و دایره نقطه مشترک ندارند.

ب) $x^۲+y^۲=۲ \to (x-۰)^۲+(y-۰)^۲=۲ \to \begin{cases} C\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \\ R=\sqrt{۲}\end{cases}$

فاصله مرکز دایره تا خط $x+y+۲=۰$ $=CH=\frac{|۰+۰+۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$

چون $CH=R$ است بنابراین خط بر دایره مماس است.

۱۲) اگر بدانیم خط l در نقطه $\left|\begin{matrix}۳\\۴\end{matrix}\right.$ بر دایره ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است. معادله خط مماس چیست؟



پاسخ : خط l بر شعاع OA عمود است پس شیب خط l، عکس و قرینه شیب OA است.

$$m_{OA}=\frac{y_O-y_A}{x_O-x_A}=\frac{۰-۴}{۰-۳}=\frac{۴}{۳}\rightarrow m_{OA}=-\frac{۳}{۴}$$

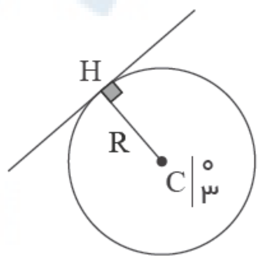
$$=CH=\frac{|۰+۰+۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$\begin{cases} m_{OA}=-\frac{۳}{۴} \\ A\begin{vmatrix}۳\\۴\end{vmatrix}\end{cases}\xrightarrow{y-y_۱=m(x-x_۱)} y-۴=-\frac{۳}{۴}(x-۳)\rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۲۵}{۴}$$

۱۳) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $\begin{vmatrix}۰\\۳\end{vmatrix}$ و بر خط $۳x-۴y=۳$ مماس باشد.

پاسخ : فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است.

$$۳x-۴y-۳=۰ \qquad R=CH=\frac{|-۰۱۲-۳|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$



پس : $\begin{cases} C\begin{vmatrix}۰\\۳\end{vmatrix} \\ R=۳\end{cases}\xrightarrow{(x-\alpha)^۲+(y+\beta)^۲=R^۲} x^۲+(y-۳)^۲=۹$

۱۴) مشخص کنید در حالت های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۴$ و $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۹$

ب) $(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۷$ و $x^۲+(y-۵)^۲=۵$

پاسخ :

الف) $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۴=۰ \to \begin{cases} f'_x=۰ \to ۲x-۲=۰ \to x=۱ \\ f'_y=۰ \to ۲y+۴=۰ \to y=-۲ \end{cases} \to C\left| \begin{matrix} ۱ & :\alpha \\ -۲ & :\beta \end{matrix} \right.$

$R^۲=\alpha^۲+\beta^۲-c=۱+۴+۴=۹ \to R=۳$

$x^۲+y^۲+۲x-۴y-۹=۰ \to \begin{cases} f'_x=۰ \to ۲x+۲=۰ \to x=-۱ \\ f'_y=۰ \to ۲y-۴=۰ \to y=۲ \end{cases} \to C\left| \begin{matrix} -۱ & :\alpha \\ ۲ & :\beta \end{matrix} \right.$

$R'^۲=\alpha^۲+\beta^۲-c=۱+۴+۹=۱۴ \to R'=\sqrt{۱۴}$

از طرفی : $CC'=\sqrt{(۱+۱)^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$

چون $|R-R'|<CC'<R+R'$ است پس دو دایره متقاطع هستند.

ب) $(x-۱)^۲+(y+۳)^۲=۷ \to \begin{cases} C\left| \begin{matrix} ۲ \\ -۳ \end{matrix} \right. \\ R=\sqrt{۷} \end{cases}$

$x^۲+(y-۵)^۲=۵ \to \begin{cases} C'\left| \begin{matrix} ۰ \\ ۵ \end{matrix} \right. \\ R'=\sqrt{۵} \end{cases}$

از طرفی : $CC'=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۳-۵)^۲}=\sqrt{۴+۶۴}=\sqrt{۶۸}=۲\sqrt{۱۷}$

چون $CC'>R+R'$ است پس دو دایره متقاطع هستند.

۱۵) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $\left| \begin{matrix} -۱ \\ -۱ \end{matrix} \right.$ و با دایره $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماس درون باشد.

پاسخ :

$$x^2+y^2-4x-6y-3=0\rightarrow\begin{cases}f'_x=2x-4=0\rightarrow x=2\\ f'_y=2y-6=0\rightarrow y=3\end{cases}\rightarrow C\left|\begin{matrix}2:\alpha\\ 3:\beta\end{matrix}\right.$$

$$R^2=\alpha^2+\beta^2-c=4+9+3=16\rightarrow R=4$$

شرط مماس داخل : $CC'=|R-R'|\rightarrow 5=|4-R'|\rightarrow\begin{cases}4-R'=5\rightarrow R'=-1\\ 4-R'=5\rightarrow R'=9\end{cases}$

پس : $\begin{cases}C'\left|\begin{matrix}-1\\ -1\end{matrix}\right.\\ R'=9\end{cases}\xrightarrow{(x-\alpha)^2+(y+\beta)^2=R^2}(x+1)^2+(y+1)^2=81$

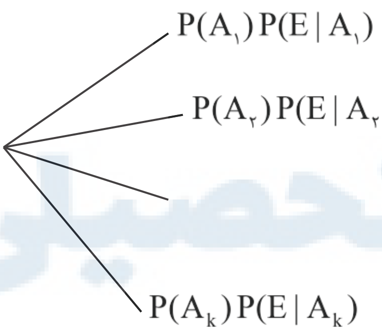
احتمال دوازدهم

اگر فضای نمونه به زیر مجموعه هایی افراز شود که هیچ اشتراکی ندارند و احتمال به تصادف روی یکی از این زیر مجموعه ها باشد از قانون احتمال کل استفاده می کنیم.

$$P(E)=P(A_1)P(E|A_1)+P(A_2)P(E|A_2)+...+P(A_k)P(E|A_k)$$

یا $P(E)=\sum_{i=1}^{k}P(f_i)P(E|A_i)$

یا استفاده از نمودار درختی :



مثلا در سوال های مربوط به چند جعبه یا او یا پشت آمدن سکه انتخاب دستگاه های متفاوت یک کارخانه یا رشته های متفاوت در تحصیل و امثال این سوال ها از احتمال کل استفاده می شود.

مثال : احتمال انتقال نوع بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ است خانواده ای قصد بچه دارند شدن دارند به چه احتمالی نوزاد به بیماری مبتلا خواهد شد.

$$P(E)=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)=\frac{1}{2}\times 0/08+\frac{1}{2}\times 0/3=\frac{1/1}{20}=\frac{11}{200}$$

مثال : ۴ ظرف یکسان داریم در اولین ظرف ۱۴ چهره قراردارد که ۴ تای آن قرمز است در ظرف دوم تمام قهره ها قرمزند در ظرف سوم ۸ مهره وجود دارد که ۶ تای آن قرمز است ودر ظرف چهارم هیچ مهره ای قرمز نیست. به تصادف از یکی از ظرف ها یک مهره خارج می کنیم با چه حتمالی قرمز است ؟

$$\rightarrow \frac{۱}{۴}\times\frac{۶}{۱۴}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۴}\times ۱$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۴}\times\frac{۶}{۸}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۴}\times ۰$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۴}\left(\frac{۴}{۱۴}+۱+\frac{۶}{۸}\right)=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{۷}+۱+\frac{۳}{۴}\right)$$

$$=\frac{۱}{۴}\times\frac{۸+۲۸+۲۱}{۲۸}=\frac{۵۷}{۱۱۲}$$

مثال : در ظرف داریم در ظرف اول ۶ مهره سبز و ۴ مهر قرمز و ظرف دوم ۵ مهره سبز و ۷ مهره قرمز از ظرف اول به تصادف یک مهره خارج کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می کنیم به چه احتمالی این مهره سبز است.

$$\boxed{\begin{array}{cc} ۶ & ۴ \\ g & R \end{array}} \quad g \quad \boxed{\begin{array}{cc} ۶+۱ & ۷ \\ g & R \end{array}} \qquad \frac{۶}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۳}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} ۶ & ۴ \\ g & R \end{array}} \quad g \quad \boxed{\begin{array}{cc} ۵ & ۷+۱ \\ g & R \end{array}} \qquad \frac{۴}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۳}$$

$$P(E)=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۳}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۳۶+۲۰}{۱۳۰}=\frac{۵۶}{۱۳۰}$$

۱- دو جعبه داریم. درون یکی از آن ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آن ها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آن ها معیوب اند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده ، یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ موردنظر معیوب باشد؟

$$P(E)=P(A)\,P(E\,|\,A)+P(B)\,P(E\,|\,B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۹۶}=\frac{۶}{۲۴}+\frac{۱}{۴۸}=\frac{۱۳}{۴۸}$$

۲- فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته ها به ترتیب ۳ درصد ۵ درصد و ۱ درصد باشد اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟

$$P(E)=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)P(E|C)=$$
$$۰/۲\times۰/۰۳+۰/۵\times۰/۰۵+۰/۳\times۰/۰۱$$
$$=۰/۵+۰/۲۵+۰/۰۰۳=۰/۰۴۳$$

۳- یک سکه را پرتاب می کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم در این آزمایش احتمال این که دقیقا یک سکه رو ظاهر شود چقدر است ؟

$$\to\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸} \qquad P(R)=\frac{۳}{۱۶}+\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$$
$$\to\frac{۱}{۲}$$

۴- در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمل این که عمر آن ها از ۱۰ سال بیش تر باشد برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$ ، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

$$P(M)=P(A)P(M|A)+P(B)P(M|B)+P(C)P(M|C)$$
$$=\frac{۵}{۲۲}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۲۲}\times\frac{۹}{۱۰}+\frac{۱۵}{۲۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۱۱}+\frac{۹}{۱۱۰}+\frac{۱۵}{۴۴}=\frac{۸۰+۳۶+۱۵۰}{۴۴۰}=\frac{۲۶۶}{۴۴۰}$$

۵- مبنا در انتخاب رشته خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشته ریاضی را انتخاب کند، به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال این که او رشته ریاضی را انتخاب کند ۰/۱ احتمال این که رشته تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال این که رشته انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشدف با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

$$P(M)=P(A)P(M|A)+P(B)P(M|B)+P(C)P(M|C)$$
$$=۰/۱\times۰/۴۵+۰/۶\times۰/۱+۰/۳\times۰/۳=۰/۰۴۵+۰/۰۶+۰/۰۹$$
$$=۰/۱۹۵$$