خـــرداد ۱۴۰۱

کلاسینو

حسابان ۲
ویژه امتحان نهایی

مهندس آریان حیدری

امتحان نهایی

فهرست

۱	تابع	۱	۲,۵
۲	مثلثات	۱۱	۲
۳	حد	۱۷	۲,۵
۴	مشتق	۲۷	۷ نصف
۵	کاربرد مشتق	۴۳	۶ ✓

ویژه امتحان نهایی ۱۴۰۱

فصل اول
تـابـع

مهندس آریان حیدری

I) انتقال:

$y=\text{۴}f(x-\text{۱})+\text{۵}$

تأثیر برعکس در دامنه

$a\,f(b\,x+d)+c$

تأثیر مستقیم در بُرد

❋ تأثیر ضرب شدن منفی!

❋ استفاده از نقاط مرزی

---

۱. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۹ – خارج)

نمودار تابع $y=(x+\text{۲})^{\text{۳}}$ را می توان با ۲ واحد انتقال نمودار تابع $y=x^{\text{۳}}$ به سمت چپ، رسم کرد. درست

---

۲. درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (خرداد ۹۸)

اگر $k>\text{۱}$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می آید. نادرست

---

۳. جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

اگر $k>\text{۱}$ باشد. نمودار $y=f(kx)$ از ...... نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می آید.

---

۴. در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. (شهریور۹۹)

اگر بازه‌ی $[-\text{۲},\text{۱}]$ دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(\text{۳}x+\text{۱})$ برابر ...... است. $[-\text{۱},\text{۰}]$

$[-\text{۳},\text{۰}]$

---

۵. در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. (خرداد ۹۹ – خارج)

نقطه‌ی $(\text{۲},-\text{۱})$ در تابع $y=f(\text{۲}x+\text{۱})-\text{۱}$ متناظر با نقطه‌ی ...... $(\text{۵},\text{۰})$ در تابع $y=f(x)$ است.

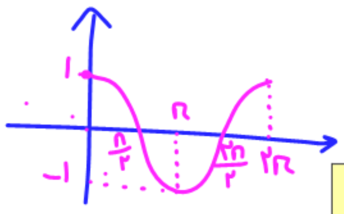
(α,β) ۵ ۰

$\left(\dfrac{\alpha-\text{۱}}{\text{۲}},\beta-\text{۱}\right)$

$\alpha=\text{۵}$ ۲ $-\text{۱}$ $\beta=\text{۰}$

۸. نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y=\cos x$ رسم کنید. (دی ۹۷)

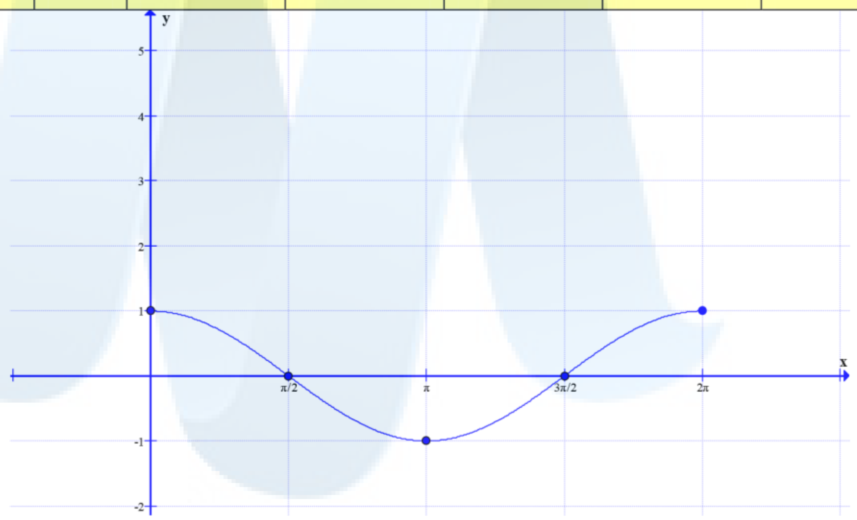
$$y=\cos ۲x-۱$$



پاسخ:

برای رسم نمودار تابع $f(x)=\cos x$ ابتدا نقاط مهم فاصله‌ی داده شده را در نظر می گیریم.

f	x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
	y	۱	۰	-۱	۰	۱



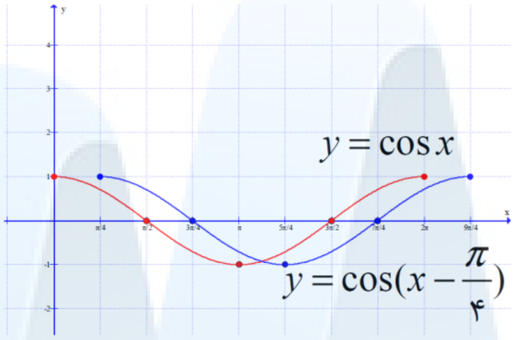
حال برای رسم نمودار تابع $g(x)=\cos ۲x-۱$ کافی است که طول نقاط تـابع $f(x)=\cos x$ را نـصف و عرض نقاط را یک واحد کم کنیم.

g	x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
	y	۰	-۱	-۲	-۱	۱

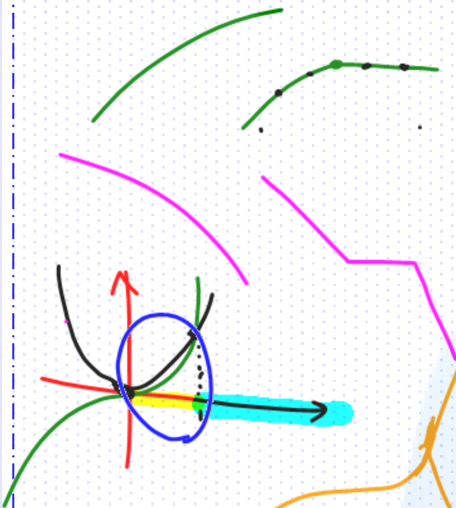
۹. نمودار تابع $y=\cos(x-\dfrac{\pi}{۴})$ را به کمک نمودار $y=\cos x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

نقاط نمودار تابع $y=\cos x$ در بازه‌ی داده شده را به اندازه‌ی $\dfrac{\pi}{۴}$ به سمت راست منتقل می کنیم.



II) صعودی، نزولی:



$x_1 > x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2)$

$x_1 > x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$

* تعریف:

* اکیدا!

$۲^۵ > ۲^{\square} \to ۵ > \square$

صعودی $\Leftarrow$ اکیداً صعودی

$\log_۲ ۵ > \log_۲ \square$

* تذکر:

* نه! هم!

غیریکنوا

* یکنوا: صعودی یا نزولی یا هم صعودی هم نزولی

* رسم نمودار: $x^۲$ و $x^۳$ و خط و $\sqrt{}$ خط و $|$خط$|$ و $|x|$ و $\{a^x$ و $\log_a^x\}$

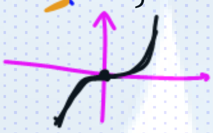
مقایسه

a^x: $۰<a<۱$ نزولی، $a>۱$ صعودی

$\log_a^x$: $۰<a<۱$ نزولی، $a>۱$ صعودی

$x>۰ \to x^۲$

$x<۰ \to -x^۲$



* تذکر: برخی توابع یکنوا نیستند، ولی با ...

* چند جمله‌ای:

$۲x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ - \sqrt{۳}x^۱ + ۲$

$۳x^۵ - ۲\sqrt{x} + \frac{۱}{x}$

$x^{\frac{۱}{۲}}$ $\quad x^{-۱}$

---

۱. درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (دی ۹۹)

تابع $f(x)$ در بازه‌ی شامل b و a صعودی است. اگر $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \leq b$

---

۲. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (دی ۹۸)

اگر تابع f در یک بازه نزولی باشد، آنگاه در این بازه اکیداً نزولی می باشد. ✗

---

۳. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (شهریور ۹۹)

اگر تابع f در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز هست. ✓

---

۴. جاهای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. (خرداد ۹۹ – خارج)

برای آنکه تابع $y = ax + b$ در دامنه اش هم صعودی باشد و هم نزولی، مقدار a باید برابر با ..... باشد.

ثابت

---

۵. در فاصله‌ی $(۰,۱)$ از بین دو تابع $g(x) = x^۳$ و $f(x) = x^۲$، نمودار کدام تابع پایین تر از دیگری قرار دارد؟ (شهریور ۹۸)

سه

---

۶. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۹)

نمودار تابع $y = x^۳$ در بازه‌ی $[۰,۱]$ پایین تر از نمودار تابع $y = x^۲$ قرار دارد. ✓

۷. نمودار تابع $f(x)=x^{2}+2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه ای این تابع اکیداً صعودی و در چه بازه ای اکیداً نزولی است. (خرداد۹۹)

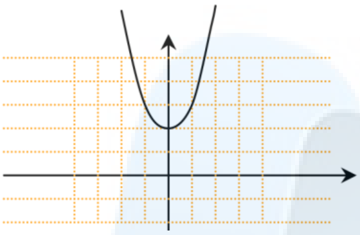
پاسخ:

نمودار این تابع با دو واحد انتقال نمودار تابع $f(x)=x^{2}$ به سمت بالا بدست می آید که یک سهمی می باشد.

رأس سهمی نقطه‌ی $(0,2)$ است.

لذا بزرگترین بازه ای که تابع در آن صعودی اکید است بازه‌ی $(-\infty,0]$

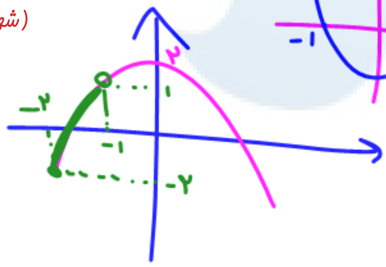
و بزرگترین بازه ای که تابع درآن نزولی اکید است بازه‌ی $(0,+\infty)$ است.

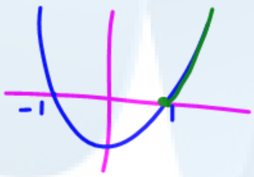


توجه این بازه ها را از طرف صفر هم می توان بسته نوشت.

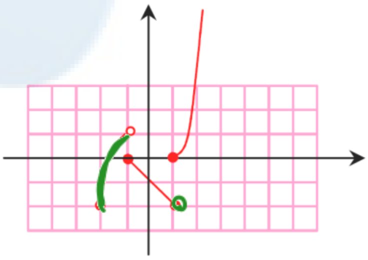
---

۸. با رسم نمودار تابع
$$f(x)=\begin{cases} -x^{2}+2 & -2\le x<-1 \\ -x-1 & -1\le x<1 \\ x^{2}-1 & 1\le x \end{cases}$$
تعیین کنید. تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می باشد. (شهریور ۱۴۰۰)





پاسخ:



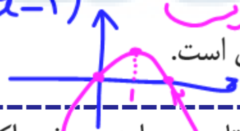
نمودار تابع در فاصله‌ی $[-2,-1)$ صعودی ، در فاصله‌ی $[1,+\infty)$ صعودی و در فاصله‌ی $[-1,1)$ نزولی است.

---

۹. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۹)

تابع $f(x)=-x^{2}+2x$ روی بازه‌ی $(-\infty\ ,\ 3]$ اکیداً صعودی است.

$-x(x-2)$ نادرست

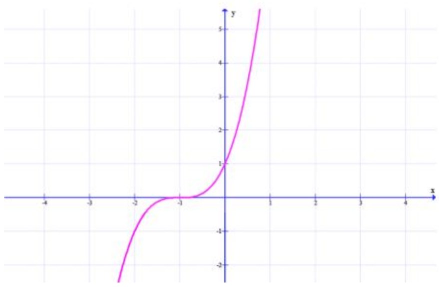


---

۱۰. نمودار تابع $f(x)=(x+1)^{3}$ را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این تابع در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟ (دی ۹۷)

پاسخ:

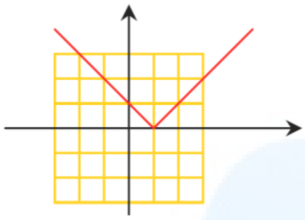
اکیداً صعودی



۱۱. ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x-۱|$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

در فاصله‌ی $[۱,+\infty)$ اکیداً صعودی ، در فاصله‌ی $(-\infty,۱]$ اکیداً نزولی



---

۱۲. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۹ - خارج)

a^x

تابع $g(x)=۲^{-x}$، تابعی است که در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا است. ✓ $(\frac{۱}{۲})^x$

---

۱۳. در $(\frac{۱}{۸۱}) \le (\frac{۱}{۳})^{۱۰-۲x}$ حدود x را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ: $(\frac{۱}{۳})^۴$

~~$(۳^{-۱})^{۱۰-۲x} \le (۳^{-۴}) \to ۲x-۱۰ \le -۴ \to ۲x \le ۶ \to x \le ۳$~~

$۱۰-۲x \ge ۴$

$۶ \ge ۲x \to ۳ \ge x$

---

۱۴. درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

تابع $y=-\log_۵^x+۱$ در دامنه‌ی خود، یک تابع اکیداً یکنوا است. ✓

---

۱۵. اگر $\log(x+۱) \le \log(۲x-۳)$ ، حدود x را به دست آورید؟ (شهریور ۹۸)

۱۰ ۱۰

پاسخ:

$x+۱ \le ۲x-۳$

$۴ \le x$

$x+۱ \le ۲x-۳ \to x \ge ۴$

---

۱۶. کوتاه پاسخ دهید. (شهریور ۹۸)

درجه‌ی تابع $f(x)=x^۲(۱-x)^۵$ را مشخص کنید. ۷

---

۱۷. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (شهریور ۹۹)

چند جمله ای $P(x)=(۲-x)^۲(x+۱)^۳$ یک چند جمله ای از درجه‌ی ۵ است. ✓

III) باقیمانده تقسیم بر عامل درجه۱:

کافی است ..ریشه مقسوم علیه.......... بذاری تو ....مقسوم.........

---

۱. جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. (تیر ۹۸)

باقی ماندهی تقسیم $f(x)=x^{3}-2x$ بر $x-1$ برابر با ...-1... است.

---

۲. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۹ خارج)

در تقسیم $f(x)=x^{3}+2$ بر $p(x)=2x-1$ باقی مانده برابر صفر است. ✗

---

۳. جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. (دی ۹۷)

اگر باقی ماندهی تقسیم $f(x)=x^{2}+kx-1$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد. مقدار k برابر ...-2... است.

$\cancel{1}-k-\cancel{1}=2$

---

۴. اگر چند جمله ی $f(x)=x^{2}+ax-3$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد. باقی ماندهی تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ را به دست آورید. (خرداد ۹۸)

$R=0$

پاسخ:

$$f(-1)=0\to 1-a-3=0\to a=-2$$

$$f(2)=4-4-3=-3$$

---

۵. مقدار b و a را طوری تعیین کنید که چندجمله ای $P(x)=x^{3}+ax^{2}+bx-2$ بر $x-2$ بخش پذیر بوده و باقی ماندهی تقسیم آن بر $x+1$ برابر ۳ باشد. (تیر ۹۸)

$R=0$

پاسخ:

$$P(2)=0\to 4a+2b=-6 \quad , \quad P(-1)=3\to a-b=6$$

$$\begin{cases}2a+b=-3\\ a-b=6\end{cases}\to a=1\ ,\ b=-5$$

۶. مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله ای $P(x)=x^{۳}-ax^{۲}+bx+۲$ بر $x+۲$ و $x-۱$ بخش پذیر باشد.

(دی ۱۴۰۰)

-۲ ۱

پاسخ:

$$x+۲=۰\rightarrow x=-۲$$

$$\rightarrow P(-۲)=-۸+۴a-۲b+۲=۰\rightarrow ۴a-۲b=۶\xrightarrow{\div ۲}۲a-b=۳$$

$$x-۱\rightarrow x=۱$$

$$\rightarrow P(۱)=۱-a+b+۲=۰\rightarrow -a+b=-۳$$

$$\begin{cases}۲a-b=۳\\ -a+b=-۳\end{cases}\rightarrow a=۰\ ,\ b=-۳$$

---

۷. باقی مانده‌ی تقسیم عبارت های $p(x)=x^{۳}+ax+۱$ و $q(x)=۲x^{۲}-x+۱$ بر $x+۲$ یکسان می باشد. مقدار a را بیابید.

(خرداد ۱۴۰۰)

-۲ -۲

پاسخ:

$$x+۲=۰\rightarrow x=-۲$$

$$\begin{cases}p(-۲)=(-۲)^{۳}+a(-۲)+۱=-۲a-۷\\ q(-۲)=۲(-۲)^{۲}-(-۲)+۱=۱۱\end{cases}\rightarrow -۲a-۷=۱۱\rightarrow a=-۹$$

IV) تجزیه

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

مثال: هریک از چند جمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل خواسته شده، تجزیه کنید.

الف) x^5+1 با عامل $x+1$ (دی ۹۷ و خرداد ۹۹ ـ خارج)

پاسخ:

$$x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

ب) x^6-1 با عامل $x-1$ (دی ۹۹)

پاسخ:

$$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

---

۱. چندجمله ای x^6-1 را بر حسب عامل $x+1$ تجزیه کنید. (خرداد ۹۸)

پاسخ:

$(x^6-1)=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$

$$x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$$

---

۲. چند جمله ای x^5+32 را بر حسب عامل $x+2$ تجزیه کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$x^5+2^5=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$

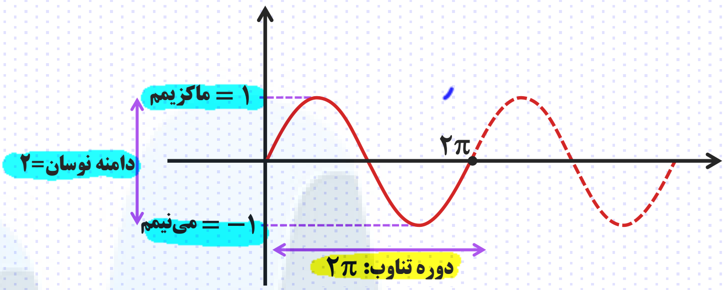
3^3

ویژه امتحان نهایی ۱۴۰۱

فصل دوم
مثلثات

مهندس آریان حیدری

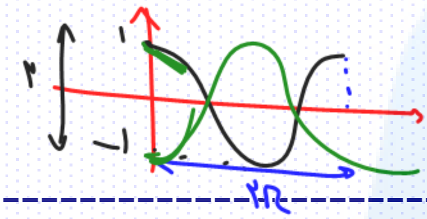
I) دوره تناوب و ماکزیمم و می‌نیمم:



تأثیر برعکس در دامنه (دوره تناوب)

۱) $a \ \sin (b\,x + d) + c$
$(\cos)$

تأثیر مستقیم در بُرد (ماکزیمم و می‌نیمم)

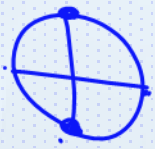


* تأثیر ضرب شدن منفی!

---

۲) $\tan x$:

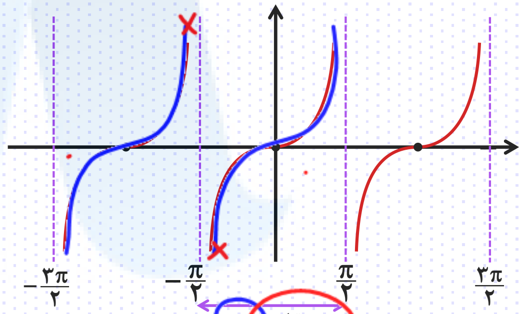
$$\frac{\sin x}{\cos x}$$



$k\pi + \frac{\pi}{2}$

دامنه $= R - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

برد $= R$



---

۱. جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. (خرداد ۹۸)

دوره‌ی تناوب تابع $y = 3\cos(\frac{\pi}{4}x)$ برابر با ..... است.

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

---

۲. دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 9 - 2\pi\cos(\frac{x}{3})$ را محاسبه کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

$\max(f) = |a| + c = |-2\pi| + 9 = 2\pi + 9$

$\min(f) = -|a| + c = -|-2\pi| + 9 = -2\pi + 9$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = 6\pi$

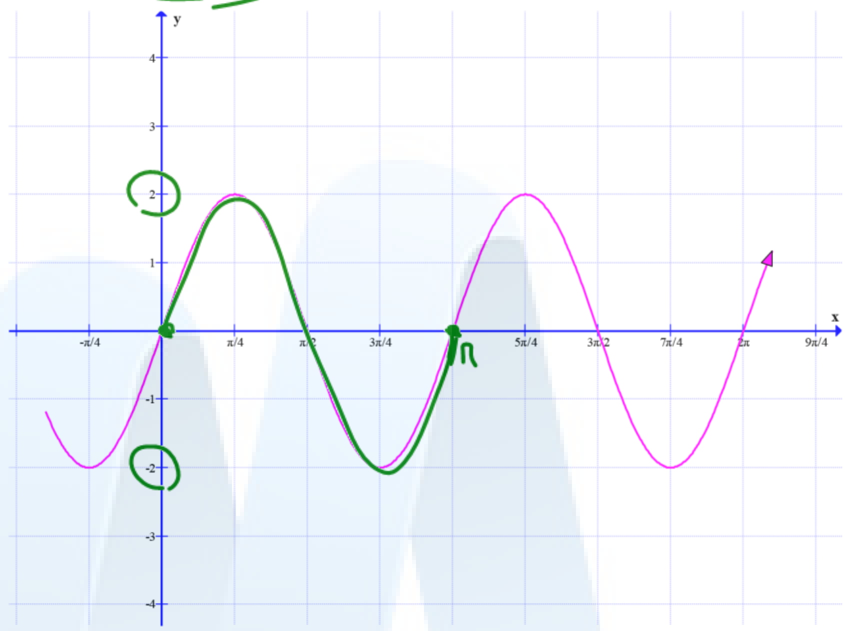
Max 1 $-2\pi+9$ Min

Min -1 $+2\pi+9$ Max

۳. معادله‌ی منحنی رو به رو را به صورت $y = a\cos(bx)$ یا $y = a\sin(bx)$ بیان کنید. (خرداد ۹۹ – خارج)

$\begin{cases} ۲\sin(۲x) \\ -۲\sin(-۲x) \end{cases}$

نقض $\begin{cases} ۲\cos(۲x) \\ ۲\cos(-۲x) \end{cases}$



---

۴. ضابطه‌ی تابعی به فرم $y = a\cos bx + c$ را بنویسید که دوره‌ی تناوب آن ۲ و مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار می‌نیمم آن ۲- باشد. (دی ۱۴۰۰)

دامنه نوسان = ۶

$\frac{۲\pi}{b} = ۲$

پاسخ:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \xrightarrow{T=۲} |b| = \pi$$

$$\begin{cases} |a| + c = ۴ \\ -|a| + c = -۲ \end{cases} \rightarrow |a| = ۳ \quad , \quad c = ۱$$

$۳\cos(\pi x)+۱$ $\quad$ $۳\cos(-\pi x)+۱$

$-۳\cos(\pi x)+۱$ $\quad$ $-۳\cos(-\pi x)+۱$

لذا هر یک از توابع $y = -۳\cos(\pi x) + ۱$ یا $y = ۳\cos(\pi x) + ۱$ می توانند جواب این مساله باشند.

---

۵. ضابطه‌ی یک تابع سینوسی با دوره‌ی تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

$y = a\sin bx + c$ ($a = ۱$, $b = \frac{۲\pi}{۳}$, $c = ۴$)

دوره‌ی تناوب $|b| = \frac{۲\pi}{۳} \rightarrow \boxed{b = \frac{۲\pi}{۳}}$

$$\begin{cases} \max(f) = |a| + c = ۵ \\ \min(f) = -|a| + c = ۳ \end{cases} \rightarrow c = ۴ \quad , \quad |a| = ۱ \rightarrow a = \pm ۱$$

$$\rightarrow y = \sin\frac{۲\pi}{۳}x + ۴ \quad or \quad y = -\sin\frac{۲\pi}{۳}x + ۴$$

$y = \sin(\frac{۲\pi}{۳}x) + ۴$

$y = -\sin(-\frac{۲\pi}{۳}x) + ۴$

$y = -\sin(\frac{۲\pi}{۳}x) + ۴$

$y = \sin(-\frac{۲\pi}{۳}x) + ۴$

۶. جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. (دی ۹۷، خرداد ۹۹ خارج و شهریور ۱۴۰۰)

دوره‌ی تناوب تابع تانژانت برابر .... می باشد.

---

۷. درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید. (دی ۹۷)

تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

---

۸. کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟ (شهریور ۹۸)

الف : تابع تانژانت در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ اکیداً صعودی است؟

ب : نقاطی به فرم $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ و $k\in Z$ در دامنه‌ی تابع تانژانت قرار دارند.

---

۹. درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. (شهریور ۹۹)

مقدار تابع تانژانت در $x=\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است.

---

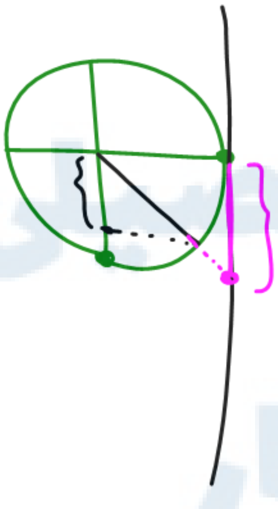
۱۰. جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. (خرداد ۱۴۰۰)

برد تابع تانژانت $(y=\tan x)$ برابر ..... است.

---

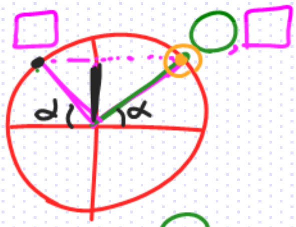
۱۱. درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

در بازه‌ی $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ مقدار $\tan\theta$ از مقدار $\sin\theta$ کوچکتر است. ✓



II) معادله‌ی مثلثاتی:

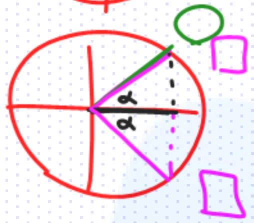
$\sin\bigcirc = \sin\square \rightarrow$



$\bigcirc = ۲k\pi + \square$

$\bigcirc = ۲k\pi + \pi - \square$

$\cos\bigcirc = \cos\square \rightarrow$



$\bigcirc = ۲k\pi \pm \square$

$\tan\bigcirc = \tan\square \rightarrow$

$\bigcirc = k\pi + \square$

فاکتور

✻ استفاده از فرمول‌های ۲α :

$\sin^۲ + \cos^۲ = ۱$

۱) $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$

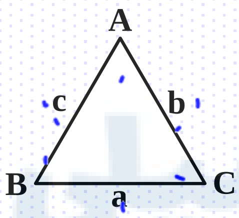
۲) $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$

$= ۲\cos^۲\alpha - ۱$

$= ۱ - ۲\sin^۲\alpha$

✻ t گیری و تبدیل به درجه ۲

✻ یادآوری: مساحت مثلث به کمک مثلثات:



$$S = \frac{۱}{۲} bc \sin\hat{A}$$

---

۱. معادله‌ی $\sin ۳x = \sin ۲x$ را حل کنید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$\sin ۳x = \sin ۲x \rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + ۲x \rightarrow x = ۲k\pi \quad k \in Z \\ \cancel{۳x = (۲k+۱)\pi - ۲x} \rightarrow x = \frac{(۲k+۱)}{۵}\pi \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - ۲x \end{cases}$$

---

۲. معادله‌ی $۲\cos ۳x - \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید. (دی ۹۸)

پاسخ:

$\cos\frac{\pi}{۶}$

$$\cos ۳x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{۶}} ۳x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۱۲}$$

۳. معادله‌ی $۲\sin x\cos x+۳\cos x=۰$ را حل کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$۲\sin x\cos x+۳\cos x=۰\to \cos x(۲\sin x+۳)=۰$$

$$\to\begin{cases}\cos x=۰\to \cancel{x=k\pi+\frac{\pi}{۲}}\ ;\quad k\in Z\\ \sin x=-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$\cos\frac{\pi}{۲}$ ، $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$ ، ×

تساوی $\sin x=-\frac{۳}{۲}$ غیر ممکن است.

---

۴. معادله‌ی $\cos ۲x-\cos x+۱=۰$ را حل کنید. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$\cos ۲x-\cos x+۱=۰\to ۲\cos^۲ x-\cancel{۱}-\cos x+\cancel{۱}=۰$$

$$\to ۲\cos^۲ x-\cos x=۰\to \cos x(۲\cos x-۱)=۰$$

$$\to\begin{cases}\cos x=۰\to x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ \cos x=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۳}} x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

$\cos\frac{\pi}{۲}$ ، ۲ ، $\cos\frac{\pi}{۳}$

---

۵. معادله‌ی مثلثاتی $۲\cos^۲ x=\sin x-۱$ را حل کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

$۱-\sin^۲ x$

$۲\cos ۲x=\sin x-۱$

$۱-۲\sin^۲ x$

پاسخ:

$$۲\cos^۲ x=\sin x-۱\xrightarrow{\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x}-۲\sin^۲ x-\sin x+۳=۰$$

$\sin x=t$

$-۲t^۲-t+۳=۰$

$۲t^۲+t-۳=۰\to t=۱,-\frac{۳}{۲}$

$$\to\begin{cases}\sin x=۱\to x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ;\quad k\in Z\\ \sin x=-\frac{۳}{۲}\to \times\end{cases}$$

$\sin\frac{\pi}{۲}$

$x=۲k\pi+(\pi-\frac{\pi}{۲})$

❋ اگر به جای $\cos^۲ x$، $\cos ۲x$ بود، چی؟

---

۶. مثلثی با مساحت $۸\sqrt{۲}$ سانتی متر مربع است. اگر اندازه‌ی هر ضلع آن ۴ و ۸ سانتی متر باشد، آنگاه چند مثلث با این خاصیت وجود دارد؟ (خرداد ۹۹ - خارج)

$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta$

پاسخ:

فرض کنیم که چنین مثلثی وجود داشته باشد. لذا

$$S=۸\sqrt{۲}\xrightarrow{۰<\theta<\pi}\frac{۱}{۲}(۴)(۸)\sin\theta=۸\sqrt{۲}\to\sin\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$\sin\frac{\pi}{۴}$

$\theta=\cancel{۲k\pi}+\frac{\pi}{۴}$

$\theta=\cancel{۲k\pi}+\pi-\frac{\pi}{۴}$ ، $\frac{۳\pi}{۴}$

ویژه امتحان نهایی ۱۴۰۱

فصل سوم

حـــد

مهندس آریان حیدری

I) حد ∞ :

توکل ← $\infty = \frac{\text{عدد}}{0}$ ← تعیین تکلیف علامت صفر (تفکّر)

0^+ یا 0^-

* تعیین تکلیف ~~قدرمطلق~~ و براکت (تفکّر)

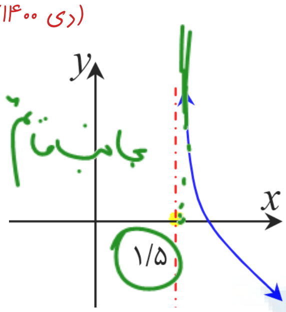
* اگر $\frac{0}{0}$ ← اول، حذف عامل صفر شونده!: فاکتور، اتحاد، ریشه‌های درجه۲، × مزدوج

---

۱. جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. (دی ۱۴۰۰)

با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to(1/5)^+} f(x)$

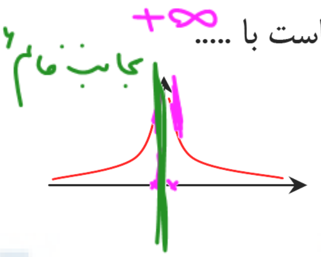
$+\infty$



---

۲. جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. (خرداد ۱۴۰۰)

با توجه به شکل مقابل حد تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ در نقطه‌ی $x=0$ برابر است با ..... $+\infty$



---

۳. حد زیر را به دست آورید. (دی ۹۷)

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x+1}{4-x^2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x+1}{4-x^2}=\frac{5}{0^-}=-\infty$$

---

۴. حد زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{|x-2|} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{|x-2|}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

۵. حد زیر را به دست آورید. (دی ۹۹)

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{[x]+1}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{[x]+1}{x+1}=\frac{-2+1}{(-1)^-+1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

---

۶. حد زیر را محاسبه کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 5x+[-x]}{2x} = \frac{0+(-1)}{0} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 5x+[-x]}{2x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

---

۷. حد زیر را در صورت وجود بیابید. (دی ۱۴۰۰)

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{[x]-2}{|3x-1|} = \frac{0-2}{0} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{[x]-2}{|3x-1|}=\frac{0-2}{|3(\frac{1}{3})-1|}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

---

۸. حد زیر را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{0}{0}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$$

$$\frac{2}{0^+}=+\infty$$

---

۹. حد زیر را به دست آورید. (تیر ۹۸)

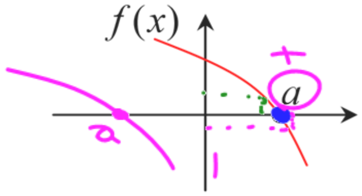
$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x}{x+1}=+\infty$$

۱۰. نمودار تابع f به صورت مقابل است. (خرداد ۹۹ – خارج)



الف : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{-۲x}{f(x)}$ $f(a)$

ب) $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{-۲x}{f(x)}$ $\dfrac{-۲a}{f(a)} = -\infty$ $+0$

ب : نمودار تابع $y = \dfrac{-۲x}{f(x)}$ در اطراف نقطه‌ی $x = a$ چگونه است؟

پاسخ:

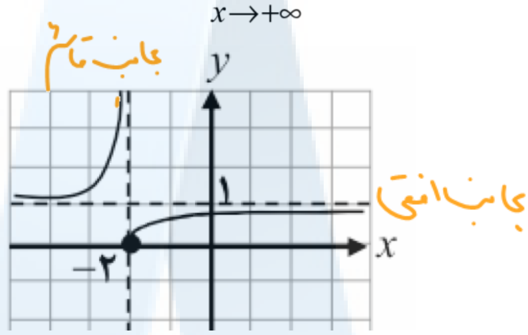
$$\lim_{x \to a^+} \frac{-۲x}{f(x)} = \frac{-۲a}{۰^-} = +\infty$$

II) حد در ∞ :

توکل ← $\frac{\infty}{\infty}$ ← هم‌ارزی پر توان

۱. با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آورده شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید. (شهریور ۹۸)

الف) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = ...+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ...1$



۲. حد زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{4}{x}-2}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{4}{x}-2} = \frac{3+0}{0-2} = -\frac{3}{2}$$

۳. حد زیر را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

$$\lim_{x\to-\infty} (-2x^3 + x - 1) = +\infty$$

۴. حد زیر را به دست آورید. (دی ۹۷)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5+3x^3+1}{-3x^5+3x^2+3} = \frac{\infty}{\infty}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5+3x^3+1}{-3x^5+3x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5}{-3x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

۵. حد زیر را در صورت وجود بیابید. (دی ۱۴۰۰)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۴x+۲}{۵-x}-\frac{۸}{x}\right)=-۴$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۴x+۲}{۵-x}-\frac{۸}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x+۲}{۵-x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{۸}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x}{-x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{۸}{x}=-۴-۰=-۴$$

---

۶. حد زیر را محاسبه کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲+۲}{۵-x}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲+۲}{۵-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲}{-x}=\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$$

---

۷. حد زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۹)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲-x+۱}{۴x^۳+۲x-۱}$$

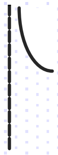
پاسخ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲-x+۱}{۴x^۳+۲x-۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲}{۴x^۳}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{+\infty}=۰$$

III) مجانب‌ها:

قائم: حدِ ∞ !

محل



x = a

ریشه مخرج

$\begin{cases} x \to a \\ y \to \infty \end{cases}$

* ریشه مخرج، به شرطی که ... ریشه صورت نباشه

افقی: حد در ∞ !

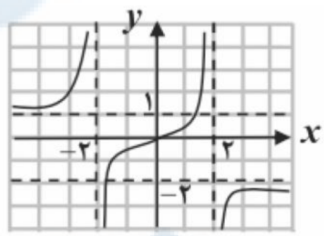
دوبار

y = a

$\begin{cases} x \to \infty \\ y \to a \end{cases}$

* هم‌ارزی پرتوان

۱. با توجه به نمودار تابع f که در زیر آمده است. معادلات مجانب های افقی تابع را بنویسید. (خرداد ۹۸)



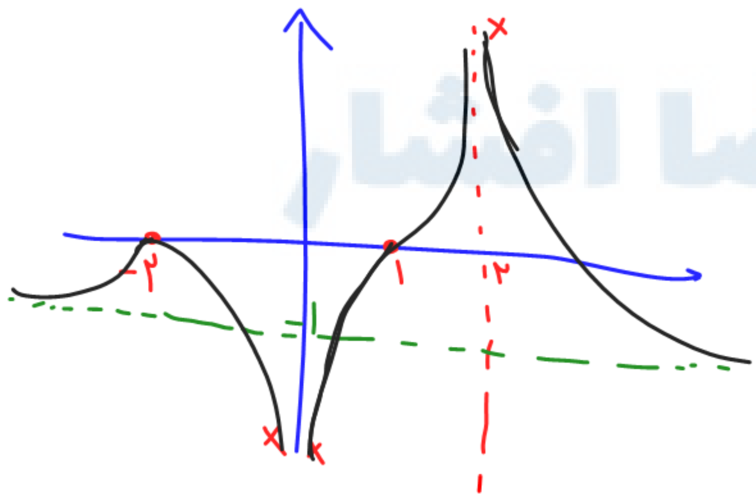
$y=1$
$y=-2$

۲. نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را دارا باشد. (خرداد ۹۹)

الف : $f(1)=f(-2)=0$

ب : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

ج : خط $y=-1$ مجانب افقی آن باشد.



۳. مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$ را در صورت وجود بیابید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

مجانب های قائم $x^2-1=0 \to x=1 \quad , \quad x=-1$

مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-2x^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2}=-2\to y=-2$

---

۴. مجانب قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$ را بنویسید. (دی ۹۸)

پاسخ:

$$x^2-x=0\to x(x-1)=0\to x=1 \quad , \quad x=0$$

خط $x=1$ مجانب قائم است ولی ریشه‌ی $x=0$ ، ریشه‌ی صورت است و لذا نمی تواند مجانب قائم باشد.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

لذا خط $y=1$ مجانب افقی است.

---

۵. مجانب های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ را در صورت وجود بیابید. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0\to y=0$

مجانب های قائم $x^2-9=0\to x^2=9\to x=\pm 3$

---

۶. مجانب های قائم و افقی منحنی تابع $y=\dfrac{x+1}{x^2+3}$ را در صورت وجود بیابید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

$x^2+3=0\to x^2=-3\to$ تابع مجانب قائم ندارد.

مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0\to y=0$

۷. مجانب های افقی و قائم تابع زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۹ - خارج)

$$y=\frac{۲x+۵}{|x|-۱}$$

$x\to+\infty \quad \frac{۲x}{x}=۲$

$x\to-\infty \quad \frac{۲x}{-x}=-۲$

پاسخ:

$$D_f=R-\{+۱,-۱\}$$

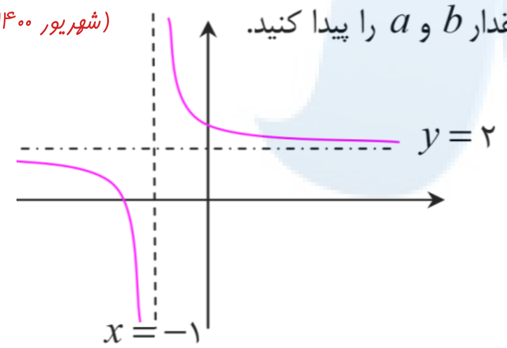
$|x|-۱=۰\to|x|=۱\to x=\pm۱$ مجانب های قائم (ریشه های صورت نیستند.)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+۵}{|x|-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+۵}{x-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x}{x}=۲\to y=۲$$ مجانب افقی

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+۵}{|x|-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+۵}{-x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{-x}=-۲\to y=-۲$$ مجانب افقی

---

۸. اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{(a+۱)x+۷}{۲x+b}$ به صورت مقابل باشد، آنگاه مقدار b و a را پیدا کنید. (شهریور ۱۴۰۰)



پاسخ:

$$۲x+b=۰\to x=\frac{-b}{۲}\to-\frac{b}{۲}=-۱\to b=۲$$

$$\frac{a+۱}{۲}=۲\to a=۳$$

---

۹. نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x^۳+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟ (شهریور ۹۹)

$x^۳+x=۰$

پاسخ:

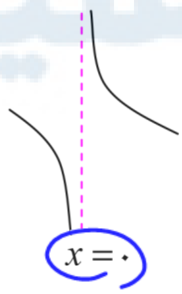
$x(x^۲+۱)=۰$

$x=۰$

$\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

$$x^۳+x=۰\to x=۰\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to۰^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۰^+}\frac{x+۱}{x^۳+x}=+\infty\\[2mm]\lim\limits_{x\to۰^-}f(x)=\lim\limits_{x\to۰^-}\frac{x+۱}{x^۳+x}=-\infty\end{cases}$$

$\frac{۱}{۰^-}=-\infty$



۱۰. اگر رفتار تابع $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+bx+c}$ در اطراف نقطه‌ی $x=-1$ به صورت شکل زیر باشد، مقادیر b و c را به دست آورید.

(شهریور ۹۹)

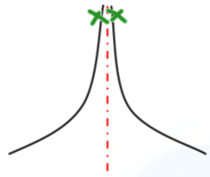
$(x+1)^2$

x^2+2x+1

مجانب قائم

ریشه مخرج مضاعف

$(x+1)^2$



$x=-1$

ویژه امتحان نهایی ۱۴۰۱

فصل چهارم
مشتق

مهندس آریان حیدری

I) مشتق گرفتن:

قــوانین مــشتق

① $x^n \xrightarrow{\prime} nx^{n-1}$

$$\begin{cases} k \xrightarrow{\prime} 0 \\ \dfrac{1}{x} \xrightarrow{\prime} \dfrac{-1}{x^2} \\ \sqrt{x} \xrightarrow{\prime} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

x^0 ، x^{-1} ، $x^{\frac{1}{2}}$ ، $x^{-\frac{1}{2}}$

② $\sin x \xrightarrow{\prime} \cos x$

$\cos x \xrightarrow{\prime} -\sin x$

$\tan x \xrightarrow{\prime} 1+\tan^2 x$

$\cot x \xrightarrow{\prime} -(1+\cot^2 x)$

مثال: $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} \xrightarrow{\prime} \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

$f \pm g \xrightarrow{\prime} f' \pm g'$

$\sin x + \sqrt{x}$

$f \times g \xrightarrow{\prime} f'g + g'f$

$\sin x \times \sqrt{x}$

$\dfrac{f}{g} \xrightarrow{\prime} \dfrac{\boxed{f'g - g'f}}{g^2}$

حالت خاص

$\dfrac{ax+b}{cx+d} \xrightarrow{\prime} \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

اصول مشتق

① عدد ثابت در مشتق گیری به صورت + و - ← می‌میرد

× و ÷ ← می‌ماند

مثال :

$$x^2 + \cancel{2} \xrightarrow{\,'\,} 2x$$

$$2x^2 \xrightarrow{\,'\,} 2\times 2x$$

$$3x^5 + \cancel{4} \xrightarrow{\,'\,} 3\times 5x^4 = 15x^4$$

② اگر جلوی توابع، به جای x ، یه چیزی بر حسب x بود، عادی مشتق گرفته و در پایان: ... مشتق چیز رو ضرب می‌کنی

مثال :

$$\sin x^2 \xrightarrow{\,'\,} \cos x^2 \times 2x$$

$$\sqrt{x^2+x} \xrightarrow{\,'\,} \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \times (2x+1)$$

$\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x^3-x} \xrightarrow{\,'\,} \frac{-1}{(x^3-x)^2} \times (3x^2-1)$$

③ در مشتق‌گیری از توابع تو در تو، از بیرونی‌ترین تابع شروع کرده و در هر مرحله ...

مثال : $\sin^3(\sqrt{2x+1}) \xrightarrow{\,'\,} 3\sin^2\sqrt{2x+1} \times \cos\sqrt{2x+1} \times \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \times 2$

تذکر: اگر بیرونی‌ترین تابع، خود دارای توان بود. اولویت با توانه

۱. جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. (دی ۱۴۰۰)

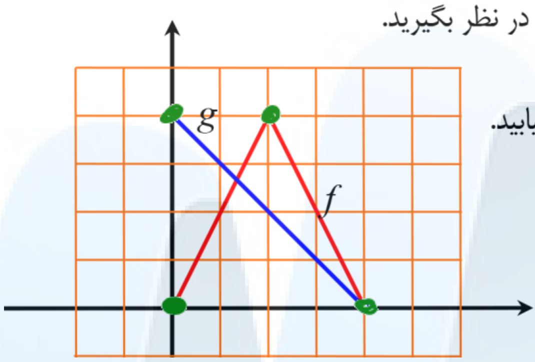
$۲\times۲-(-۱)$

اگر $f'(۵)=۲$ و $g'(۵)=-۱$ در این صورت $(۲f-g)'(۵)$ برابر با ..۵... است.

---

۲. نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید. (دی ۹۸)

اگر $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(۱)$ را بیابید.



پاسخ:

$$A\Big|_{۴}^{۲}\ ,\ B\Big|_{۰}^{۰}\longrightarrow m=f'(۱)=\frac{۴-۰}{۲-۰}=۲\qquad,\qquad f(۱)=۲$$

$$C\Big|_{۴}^{۰}\ ,\ D\Big|_{۰}^{۴}\longrightarrow m=g'(۱)=\frac{۴-۰}{۰-۴}=-۱\qquad,\qquad g(۱)=۳$$

$$h'(۱)=\frac{f'(۱)g(۱)-f(۱)g'(۱)}{g^{۲}(۱)}=\frac{(۲)(۳)-(۲)(-۱)}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن لازم نیست.)

۳. (خرداد ۱۴۰۰)

$$h(x)=\frac{x^{۲}-۳x}{۵x}$$

پاسخ:

$$h'(x)=\frac{(۲x-۳)(۵x)-(۵)(x^{۲}-۳x)}{(۵x)^{۲}}$$

---

۴. (دی ۱۴۰۰)

$$h(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^{۳}-۲x+۱}$$

پاسخ:

$$h'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x^{۳}-۲x+۱)-(۳x^{۲}-۲)\sqrt{x}}{(x^{۳}-۲x+۱)^{۲}}$$

.۵ (دی ۹۹)

$$g(x)=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

پاسخ:

$$g'(x)=\frac{-\cos x\cos x-(-\sin x)(1-\sin x)}{\cos^2 x}$$

.۶ (دی ۹۷)

$$\mathbf{f(x)=\sqrt{2x-1}}$$

پاسخ:

$$\mathbf{f'(x)}=\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\times 2$$

$2\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $2^{-\frac{1}{2}}$

.۷ (شهریور ۹۸)

$$f(x)=(2x^3+\sqrt[3]{x}-1)^4$$

پاسخ:

$$f'(x)=4(6x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(2x^3+\sqrt[3]{x}-1)^3$$

.۸ (دی ۱۴۰۰)

$$g(x)=\sin^3(5x)$$

پاسخ:

$$g'(x)=3(5)\cos(5x)\sin^2(5x)$$

.۹ (شهریور ۹۸)

$$g(x)=\cos(\frac{x}{x^2+1})$$

پاسخ:

$$f'(x)=-\frac{(1)(x^2+1)-2x(x)}{(x+1)^2}\times\sin(\frac{x}{x^2+1})$$

.۱۰ (خرداد ۱۴۰۰)

$$g(x)=3\tan^2 x+\cos x^2$$

پاسخ:

$$g'(x)=\cancel{6}(\tan x)(1+\tan^2 x)+2x(-\sin x^2)$$

3×2

.۱۱ (خرداد ۱۴۰۰)

$$f(x)=(\sqrt{3x}+1)(2x^3-1)$$

پاسخ:

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x}}(2x^3-1)+(\sqrt{3x}+1)(6x^2)$$

?

۱۲. (دی ۱۴۰۰)

$$f(x)=(x^{۲}-۶)^{۳}(\frac{۱}{۴}x+۱)$$

پاسخ:

$$f'(x)=۳(۲x)(x^{۲}-۶)^{۲}(\frac{۱}{۴}x+۱)+\frac{۱}{۴}(x^{۲}-۶)^{۳}$$

---

۱۳. (شهریور ۱۴۰۰)

$$g(x)=۳x(x^{۲}-۶x)^{۳}+\cos ۲x$$

پاسخ:

$$g'(x)=۳(x^{۲}-۶x)^{۳}+۹x(۲x-۶)(x^{۲}-۶x)^{۲}-۲\sin ۲x$$

?

---

۱۴. (شهریور ۱۴۰۰)

$$f(x)=\frac{۴\sin\frac{x}{۲}}{x^{۲}+\sqrt{x}}$$

$4\cos\frac{x}{۲}\times\frac{۱}{۲}$

پاسخ:

$$f'(x)=\frac{(۲\cos\frac{x}{۲})(x^{۲}+\sqrt{x})-(۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(۴\sin\frac{x}{۲})}{(x^{۲}+\sqrt{x})^{۲}}$$

---

۱۵. اگر $f(x)=\sin^{۲}x-\cos ۲x$ مقدار $f''(\frac{\pi}{۶})$ را حساب کنید. (خرداد ۹۹)

پاسخ:

$$f'(x)=۲\sin x\cos x+۲\sin ۲x=\sin ۲x+۲\sin ۲x=۳\sin ۲x$$

$$f''(x)=۶\cos ۲x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۶}}f''(\frac{\pi}{۶})=۶\cos ۲(\frac{\pi}{۶})=۶\cos(\frac{\pi}{۳})=۶\times\frac{۱}{۲}=۳$$

$\sin^{۳}(۲x+۱)\times\sqrt{۲x-۵}\longrightarrow$

$۳\sin^{۲}(۲x+۱)\times\cos(۲x+۱)\times۲\times\sqrt{۲x-۵}+\frac{۱}{۲\sqrt{۲x-۵}}\times۲\times\sin^{۳}(۲x+۱)$

II) تعبیر هندسی مشتق / آهنگ (سرعت) تغییرات:

❋ شیب خط واصل بین دو نقطه: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ← آهنگ (سرعت) متوسط
شیب خط مماس در یک نقطه: f' ← آهنگ (سرعت) لحظه‌ای

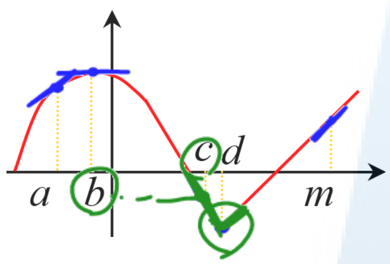
❋ حالت خاص: تابع درجه دو

۱. با توجه به نمودار f به سئوالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۱۴۰۰)

الف) طول نقطه ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید.

ب) طول نقطه‌ی گوشه ای را بنویسید.

پ) طول نقطه ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است را بنویسید.

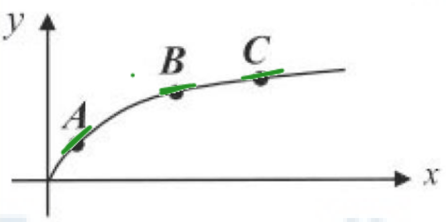


پاسخ:

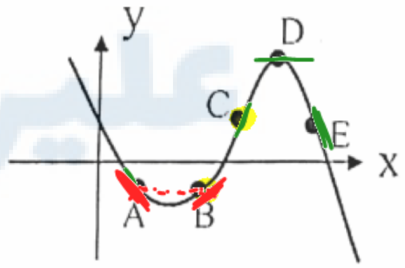
الف: $x=b$ ب: $x=d$ پ: $x=c$

۲. جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. (خرداد ۹۸)

با توجه به شکل روبرو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی ..A.... بزرگتر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی B است.



۳. نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب ارائه شده در جدول نظیر کنید. (تیر ۹۸)



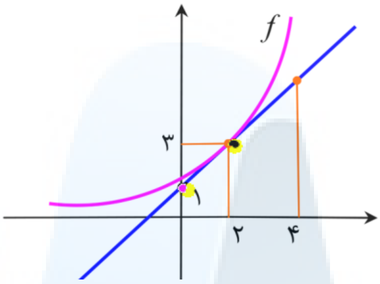
نقطه	شیب
D	۰
C	۲
B	۰/۵
A	۰/۵-

۴. در شکل روبرو نمودار تابع $f(x)$ و خط مماس بر منحنی آن در نقطه‌ی $x=۲$ داده شده است. (دی ۹۸)

الف : مشتق تابع $f(x)$ ، در نقطه‌ی $x=۲$ را بیابید.

ب : معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌ی A را بنویسید.

$y = mx + \cancel{h}$



پاسخ:

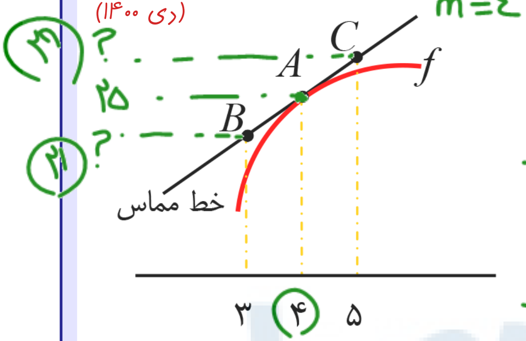
الف) $A\begin{vmatrix}۲\\۳\end{vmatrix}\;,\;\; B\begin{vmatrix}۰\\۱\end{vmatrix} \rightarrow m = f'(۲) = \dfrac{۳-۱}{۲-۰} = ۱$

ب) $\cancel{y-۳ = ۱(x-۲) \rightarrow y = x+۱}$

---

۵. برای تابع f در شکل مقابل داریم. اگر $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید. (دی ۱۴۰۰)

$m=4$



$\dfrac{25-?}{1} = 4 \quad ? = 21$

$\dfrac{?-25}{1} = 4 \quad ? = 29$

پاسخ:

$f(۴) = ۲۵ \rightarrow A(۴,۲۵)$

$f'(۴) = \dfrac{۳}{۲} \rightarrow m = \dfrac{۳}{۲}$ شیب خط مماس

$y = m(x-a)+b \rightarrow y = \dfrac{۳}{۲}(x-۴)+۲۵$ معادله‌ی خط مماس

$x = ۵ \rightarrow y = \dfrac{۳}{۲}(۵-۴)+۲۵ = ۲۶/۵ \Rightarrow B(۵,۲۶/۵)$

$x = ۳ \rightarrow y = \dfrac{۳}{۲}(۳-۴)+۲۵ = ۲۳/۵ \Rightarrow C(۳,۲۳/۵)$

۶. شیب خط مماس بر منحنی $y = ۱ - ۵x^۲ - ۲x$ در نقطه ای به طول ۲- واقع بر آن برابر ۱۸ است. (شهریور ۱۴۰۰)

$y' = -10x - 2$

---

۷. معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^۳ - ۲x$ را در نقطه‌ی $A(۱, f(۱))$ به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰)

$f' = 3x^2 - 2 \xrightarrow{1} 1$

پاسخ:

$f'(x) = ۳x^۲ - ۲ \rightarrow f'(۱) = ۳(۱)^۲ - ۲ = ۱ \rightarrow m = ۱$ شیب خط مماس

$f(x) = x^۳ - ۲x \rightarrow f(۱) = (۱)^۳ - ۲(۱) = -۱ \rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = -۱ \end{cases}$

$y = mx + h \quad (1, -1)$

$-1 = 1 + h \rightarrow h = -2$

~~$y = m(x - a) + b \rightarrow y = ۱(x - ۱) + (-۱) = x - ۲$ معادله‌ی خط مماس~~

---

۸. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۹ - خارج)

آهنگ متوسط تغییر با شیب قاطع و آهنگ لحظه ای تغییر با شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

---

۹. آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^۳ - ۲x$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ و آهنگ تغییر لحظه ای تابع f را در $x = ۱$ محاسبه کنید. (خرداد ۹۸)

$3x^2 - 2 \xrightarrow{1} 1$

$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$

پاسخ:

$f(x) = x^۳ - ۲x \rightarrow \begin{cases} f(۲) = (۲)^۳ - ۲(۲) = ۸ - ۴ = ۴ \\ f(۰) = (۰)^۳ - ۲(۰) = ۰ \end{cases}$

آهنگ تغییر متوسط $\frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{۴ - ۰}{۲} = ۲$

آهنگ تغییر لحظه ای $f'(x) = ۳x^۲ - ۲ \xrightarrow{x=۱} f'(۱) = ۳(۱)^۲ - ۲ = ۱$

---

۱۰. تابعی با ضابطه‌ی $f(t) = \frac{۲۴۰}{t}$ مفروض است. آهنگ لحظه ای تغییر تابع f در لحظه‌ی $t = ۴$ از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه‌ی $t = ۳$ تا $t = ۵$ چه مقدار بیشتر است؟ (شهریور ۱۴۰۰)

$240 \times \frac{-1}{t^2} \xrightarrow{4}$

پاسخ:

آهنگ لحظه ای $f'(t) = -\frac{۲۴۰}{t^۲} \rightarrow f'(۴) = -\frac{۲۴۰}{(۴)^۲} = -۱۵$

آهنگ متوسط $\frac{f(۵) - f(۳)}{۵ - ۳} = \frac{۴۸ - ۸۰}{۲} = -۱۶$

اختلاف آهنگ لحظه ای و آهنگ متوسط $-۱۵ - (-۱۶) = ۱$

۱۱. یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+t^{۲}$ گرم است. (خرداد ۹۹ – خارج)

الف : جرم این توده باکتری در بازه‌ی زمانی $۳\leq t\leq ۴$ به چه سرعتی افزایش می یابد؟

ب : آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t=۹$ چقدر است؟

پاسخ:

الف)

$$m(t)=\sqrt{t}+t^{۲}\rightarrow\begin{cases}m(۳)=\sqrt{۳}+(۳)^{۲}=۹+\sqrt{۳}\\ m(۴)=\sqrt{۴}+(۴)^{۲}=۲+۱۶=۱۸\end{cases}$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{m(۴)-m(۳)}{۴-۳}=۱۸-(۹+\sqrt{۳})=۹-\sqrt{۳}$$

ب)

$$m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۲t\rightarrow m'(۹)=\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}+۲(۹)=\frac{۱}{۶}+۱۸=\frac{۱۰۹}{۶}$$

---

۱۲. دوچرخه سواری طبق معادله‌ی $d(t)=\frac{۱}{۳}t^{۳}+۱۰t$ حرکت می کند. سرعت لحظه ای این متحرک را در $t=۲$ به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$d'(t)=t^{۲}+۱۰\xrightarrow{t=۲}d'(۲)=(۲)^{۲}+۱۰=۱۴$$

---

۱۳. جسمی را از ارتفاع سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله‌ی $h(t)=-۵t^{۲}+۴۰t$ به دست می آید. مطلوب است : (خرداد ۱۴۰۰)

الف : سرعت متوسط در بازه‌ی $[۱,۲]$

ب : سرعت لحظه ای در زمان $t=۳$

پاسخ:

الف) $h(۲)=-۵(۲)^{۲}+۴۰(۲)=-۲۰+۸۰=۶۰$ و $h(۱)=-۵(۱)^{۲}+۴۰(۱)=-۵+۴۰=۳۵$

$$\Rightarrow\frac{h(۲)-h(۱)}{۲-۱}=\frac{۶۰-۳۵}{۱}=۲۵$$

ب) $h'(t)=-۱۰t+۴۰\rightarrow h'(۳)=-۱۰(۳)+۴۰=۱۰$

۱۴. معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^{۲}-t+۱۰$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[۰,۵]$ بر حسب ثانیه داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[۰,۵]$ برابر است؟ (خرداد ۹۹)

پاسخ:

$f(۵)=(۵)^{۲}-(۵)+۱۰=۲۵-۵+۱۰=۳۰$

$f(۰)=(۰)^{۲}-(۰)+۱۰=۱۰$

سرعت متوسط $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\dfrac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}=\dfrac{۳۰-۱۰}{۵}=۴$

سرعت لحظه ای $f'(t)=۲t-۱$

$f'(t)=۴\rightarrow ۲t-۱=۴\rightarrow t=\dfrac{۵}{۲}$

$f(t)=-۲t^{۲}+۱۰t \rightarrow -۴t+۱۰$

۲ $t=۲$ لحظه ای در

$[۴,۵]$ متوسط در $\dfrac{۵-۸}{۵-۴}=$ ۱

اختلاف؟ $۲-(-۱)=۱۰$

III) تعریف مشتق: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

۱. اگر $f(x)=x^{۲}-۳x+۲$ باشد، با استفاده از تعریف $f'(۱)$ را حساب کنید (تیر ۹۸)

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ $x-۱$

پاسخ:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^{۲}-۳x+۲)-(۰)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}(x-۲)=۱-۲=-۱$$

---

۲. با استفاده از تعریف مشتق، معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را در نقطه‌ی $x=۳$ به دست آورید. (خرداد ۹۹ - خارج)

$(۳,۱)$

$m=f'(x)=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\dfrac{۱}{۲}$

پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{x-۲}\to f(۳)=\sqrt{۳-۲}=۱$$

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x-۲}-۱}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x-۲}-۱}{x-۳}\times\frac{\sqrt{x-۲}+۱}{\sqrt{x-۲}+۱}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x-۲}-۱}{x-۳}\times\frac{\sqrt{x-۲}+۱}{\sqrt{x-۳}+۱}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۲)-۱}{x-۳}\times\frac{۱}{\sqrt{x-۲}+۱}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{x-۳}{x-۳}\times\frac{۱}{\sqrt{x-۲}+۱}=\lim_{x\to ۳}\frac{۱}{\sqrt{x-۲}+۱}=\frac{۱}{\sqrt{۳-۲}+۱}=\frac{۱}{۲}$$

$x-۳$ $\quad \dfrac{۱}{۲}$

$y=mx+h$
$(۳,۱)$
$۱=\dfrac{۱}{۲}(۳)+h$
$h=-\dfrac{۱}{۲}$

$m=\dfrac{۱}{۲}$ شیب خط مماس

$y=m(x+x_{۰})+y_{۰}$

$y=\dfrac{۱}{۱}(x-۳)+۱\to y=\dfrac{۱}{۲}x-\dfrac{۱}{۲}$ معادله خط مماس

IV) مشتق ناپذیری:

* ناپیوسته ← براکت، چند ضابطه در لب مرز
* گوشه ← چند ضابطه در لب مرز، ریشه ساده داخل قدرمطلق!
* مماس قائم ← ریشه زیر رادیکال که توانش از فرجه کمتر است.

*** تذکر:**

۱. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۹)

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، در آنگاه f در a مشتق پذیر هم نیست.

۲. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۹ — خارج)

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه در این نقطه مشتق پذیر است.

۳. جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. (خرداد ۱۴۰۰)

اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a .... است.

۴. درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

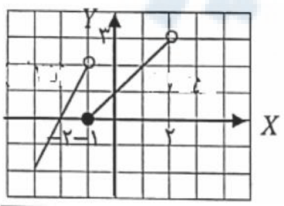
تابع $f(x)=[x]$ در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق پذیر است.

۵. نمودار تابع زیر را رسم کرده و مشتق پذیری f را روی بازه‌ی $[-۲,۰]$ بررسی کنید. (خرداد ۹۹ - خارج)

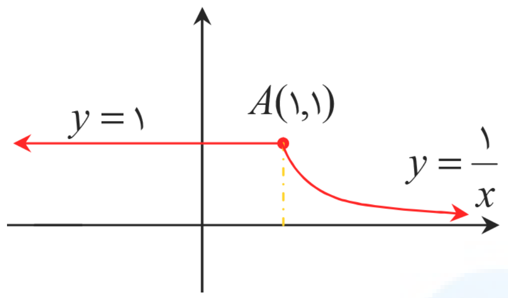
$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x+۱ & -۱\le x<۲ \end{cases}$$

پاسخ:

تابع f در $x=-۱$ پیوسته نیست، لذا در این نقطه مشتق پذیر هم نیست. در نتیجه در بازه‌ی $[-۲,۰]$ مشتق نیز پذیر نیست.



۶. با محاسبه‌ی مشتق راست و مشتق چپ تابع رسم شده مقابل: (خرداد ۱۴۰۰)
مشتق پذیری تابع را در نقطه‌ی $A(1,1)$ بررسی کنید.



پاسخ:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-1 \qquad \text{و} \qquad f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-1}{x-1}=0$$

و چون $f'_+(1)\neq f'_-(1)$ لذا $f'(1)$ موجود نیست.

---

۷. مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید. (دی ۹۹)

پاسخ:

حد راست $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$

حد چپ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x)=2$

مقدار $f(1)=(1)^2+1=2$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است.

مشتق راست $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2+1)-(2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

مشتق چپ $f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(2x)-(2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$

۸. در تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<-۱ \\ x+۲ & x\geq -۱ \end{cases}$ ، نشان دهید $f'_+(-۱)$ و $f'_-(-۱)$ موجودند، ولی $f'(-۱)$ موجود نیست،

(دی ۱۴۰۰)

ولی $f'(-۱)$ موجود نیست.

پاسخ:

$$f'_+(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x+۲-۱}{x+۱}=۱$$

$$f'_-(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{x^{۲}-۱}{x+۱}=-۲$$

و چون $f'_+(-۱)\neq f'_-(-۱)$ ، لذا $f'(-۱)$ موجود نیست.

---

۹. تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x>۱ \\ x^{۳}-۲x & x\leq ۱ \end{cases}$ در $x=۱$ مشتق پذیر است. حاصل b و a را به دست آورید. (خرداد ۹۹ – خارج)

پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x>۱ \\ x^{۳}-۲x & x\leq ۱ \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} a & x>۱ \\ ۳x^{۲}-۲ & x\leq ۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}f'(x)=a \quad \text{و} \quad f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}f'(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۳x^{۲}-۲)=۱$$

$$f'_+(۱)=f'_-(۱)\rightarrow a=۱$$

$$a+b=-۱\xrightarrow{a=۱}b=-۲$$

---

۱۰. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۹ – خارج)

تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق پذیر نیست.

۱۱. مشتق پذیری تابع $f(x)=۴x(۱-|x|)$ را در نقطه‌ی $x=۰$ بررسی کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

ابتدا معادله‌ی تابع را به صورت چند ضابطه ای می نویسیم.

$$f(x)=\begin{cases}۴x(۱-x) & x\geq ۰\\ ۴x(۱+x) & x<۰\end{cases} \to f(x)=\begin{cases}۴x-۴x^۲ & x\geq ۰\\ ۴x+۴x^۲ & x<۰\end{cases}$$

اکنون پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۰$ بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(۴x-۴x^۲)=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(۴x+۴x^۲)=۰$$

در نهایت مشتقات یک طرفه را در نقطه‌ی $x=۰$ بررسی می کنیم.

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۴x-۴x^۲}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x(۴-۴x)}{x}=\lim_{x\to ۰^+}(۴-۴x)=۴$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۴x+۴x^۲}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x(۴+۴x)}{x}=\lim_{x\to ۰^-}(۴+۴x)=۴$$

و چون تابع داده شده در نقطه‌ی داده شده پیوسته بوده و در این نقطه مشتقات یک طرفه مساویند، لذا تابع در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق پذیر است.

---

۱۲. نشان دهید، نقطه‌ی به طول $x=-۱$ ، نقطه‌ی گوشه ای برای تابع $f(x)=|x^۲+x|$ می باشد. (خرداد ۹۸)

پاسخ:

تابع f در $x=-۱$ پیوسته است.

$$f(-۱)=(-۱)^۲+(-۱)=۱-۱=۰$$

$$f'_+(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{|x^۲+x|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{-x(x+۱)}{x+۱}=۱$$

$$f'_-(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{|x^۲+x|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{x(x+۱)}{x+۱}=-۱$$

مشتق های راست و چپ تابع هر دو متناهی و نابرابرند. پس $x=-۱$ نقطه‌ی گوشه ای تابع است.

۱۳. درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (دی ۹۹)

اگر خط $x=a$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $(a,f(a))$ باشد،

آنگاه $f'(a)$ موجود است.

---

۱۴. جای خالی را کامل کنید. (خرداد ۹۹ - خارج)

خط $x=1$ بر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$، ...... است.

---

۱۵. نشان دهید $x=0$ مماس قائم برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است. (تیر ۹۸)

پاسخ:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

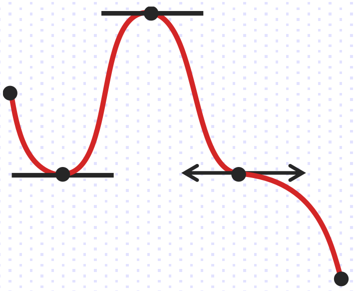
✻ صفحه ۵۲ سؤال ۴ و صفحه ۶۵ سؤال ۱۵ از جزوه پارسال مطالعه شود.

ویژه امتحان نهایی ۱۴۰۱

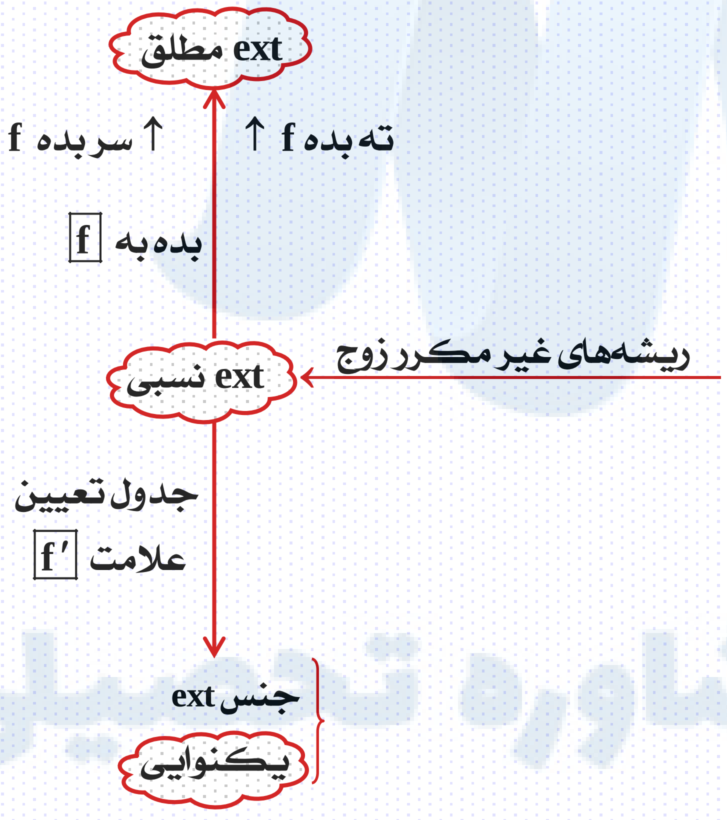
فصل پنجم
کاربرد مشتق

مهندس آریان حیدری

I) نقاط مهم در کاربرد مشتق:



* بحرانی
* اکسترمم نسبی
* اکسترمم مطلق



* بحرانی: موجود نیست یا $f'=0$

* نتیجه:

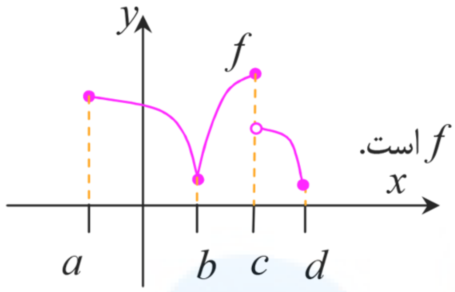
* سؤالات پارامتری: f در (a,b) بحرانی (اکسترمم) دارد:

$$\begin{cases} f(a)=b \\ f'(a)=0 \end{cases}$$

۱. درست یا نادرست بودن جملات زیر را با توجه به نمودار تابع f که در ذیل آورده شده، مشخص کنید. (تیر ۹۸)

الف) نقطه ای به طول b مینیمم نسبی تابع f نیست.

ب) نقطه ای به طول c یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع f است.

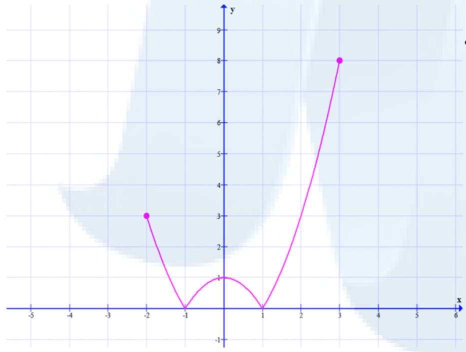


۲. تابع $f(x)=|x^2-1|$ در بازه‌ی $[-2,3]$ در نمودار زیر رسم شده است. (خرداد ۹۹ - خارج)

الف : نقاط اکسترمم های نسبی تابع را در صورت وجود بیابید.

ب : نقاط اکسترمم مطلق تابع را در صورت وجود بیابید.

پ : آیا تابع f در بازه‌ی $[0,3]$ مشتق پذیر است؟ چرا؟



۳. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۹)

تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=0$ و هم $f(a)=0$

۴. درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

الف : اگر تابع f در هر نقطه اکسترمم نسبی مشتق پذیر باشد، آنگاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می شود.

ب : اگر علامت f' بر بازه ای منفی باشد، آنگاه تابع f بر آن بازه اکیداً نزولی است.

۵. جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. (دی ۹۷)

اگر تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه .... است.

۶. نقاط بحرانی تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ را مشخص کنید. (خرداد ۹۹ – خارج)

$x^2+1=0 \to x^2=-1$ معادله ریشه ندارد. $\Rightarrow \quad D_f=R$

$$f'(x)=\frac{1(x^2+1)-2x(x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}\xrightarrow{f'(x)=0}-x^2+1=0\to x^2=1$$

$\to x=1 \quad , \quad x=-1$ نقاط بحرانی

---

۷. جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-3x+4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$f(x)=x^3-3x+4\to f'(x)=3x^2-3\xrightarrow{f'(x)=0}3x^2-3=0$$

$$x^2-1=0\to x^2=1\to x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	۶ max	↘	۲ min	↗	$+\infty$

نقطه‌ی $(1,2)$ مینیمم نسبی و نقطه‌ی $(-1,6)$ ماکزیمم نسبی است.

---

۸. تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟ راه حل خود را بنویسید. (تیر ۹۸)

پاسخ:

$$f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}\xrightarrow{f'(x)=0}x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	0	↗	

تابع در فاصله‌ی $(-\infty,0)$ نزولی و در فاصله‌ی $(0,+\infty)$ صعودی است.

۹. اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+۱$ را در بازه‌ی $[-۱,۱]$ تعیین کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$f'(x)=۳x^۲-۶x \xrightarrow{f'(x)=۰} \begin{cases} x=۰ \\ x=۲\notin[-۱,۱] \end{cases}$$

$$f(۱)=(۱)^۳-۳(۱)^۲+۱=۱-۳+۱=-۱$$

$$f(۰)=(۰)^۳-۳(۰)^۲+۱=۱$$ ماگزیمم مطلق

$$f(-۱)=(-۱)^۳-۳(-۱)^۲+۱=-۱-۳+۱=-۳$$ مینیمم مطلق

---

۱۰. مقادیر اکسترمم مطلق تابع $g(x)=x^۳+۲x-۵$ را در بازه‌ی $[-۲,۱]$ در صورت وجود تعیین کنید. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$g'(x)=۳x^۲+۲\neq ۰$$

$$g(-۲)=-۸-۴-۵=-۱۷ \quad \min$$

$$g(۱)=۱+۲-۵=-۲ \quad \max$$

---

۱۱. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۴}$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ تعیین کنید. (خرداد ۹۸)

پاسخ:

$$f'(x)=\frac{۲x-۲}{۲\sqrt{x^۲-۲x+۴}} \xrightarrow{f'(x)=۰} ۲x-۲=۰ \rightarrow x=۱$$

$f(۰)=f(۲)=۲$ ماکزیمم مطلق $\qquad$ $f(۱)=\sqrt{۳}$ مینیمم مطلق

۱۲. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۲}+|x+۱|$ را در بازه‌ی $[-۲,۲]$ بیابید. (خرداد ۹۹ - خارج)

پاسخ:

x	$-۲\le x<-۱$	$-۱\le x\le ۲$
$f(x)$	$f(x)=x^{۲}-x-۱$	$f(x)=x^{۲}+x+۱$
$f'(x)$	$f'(x)=۲x-۱$	$f'(x)=۲x+۱$
$f'(x)=۰$	$x=\frac{۱}{۲}$ غیر قابل قبول	$x=-\frac{۱}{۲}$

و چون $f'_{+}(-۱)\neq f'_{-}(-۱)$، لذا تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ مشتق پذیر نیست.

اکنون عرض نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ و $x=-\frac{۱}{۲}$ و $x=-۱$ را تعیین و مقایسه می کنیم.

$$x=-۲\rightarrow f(-۲)=(-۲)^{۲}+|-۲+۱|=۴+۱=۵$$

$$x=۲\rightarrow f(۲)=(۲)^{۲}+|۲+۱|=۴+۳=۷$$ ماکزیمم مطلق

$$x=-\frac{۱}{۲}\rightarrow f(-\frac{۱}{۲})=(-\frac{۱}{۲})^{۲}+|-\frac{۱}{۲}+۱|=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$$ مینیمم مطلق

$$x=-۱\rightarrow f(-۱)=(-۱)^{۲}+|-۱+۱|=۱$$

---

۱۳. ورق فلزی مستطیل شکلی، به طول ۱۶ سانتی متر و عرض ۶ سانتی متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبه‌ی جعبه را به اندازه‌ی x بر می گردانیم تا یک جعبه‌ی سرباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن گردد. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

طول جعبه $۱۶-۲x \quad , \quad x\in(۰,۸)$

عرض جعبه $۶-۲x \quad ; \quad x\in(۰,۳)$

حجم جعبه $v(x)=x(۱۶-۲x)(۶-۲x)\rightarrow v(x)=۴x^{۳}-۴۴x^{۲}+۹۶x \quad ; \quad x\in(۰,۳)$

$$v'(x)=۱۲x^{۲}-۸۸x+۹۶\xrightarrow{v'(x)=۰}۱۲x^{۲}-۸۸x+۹۶=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴}۳x^{۲}-۲۲x+۲۴=۰\rightarrow x=۶ \quad , \quad x=\frac{۴}{۳}$$

و چون $۶\notin(۰,۳)$ لذا فقط $x=\frac{۴}{۳}$ قابل قبول است و به ازای این مقدار، جعبه‌ی مذکور بیشترین حجم را دارد.

۱۴. ضرایب a و b را در تابع $f(x)=-x^{۴}+ax+b$ طوری تعیین کنید که در نقطه‌ی $(۱,۲)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد. (دی ۹۷)

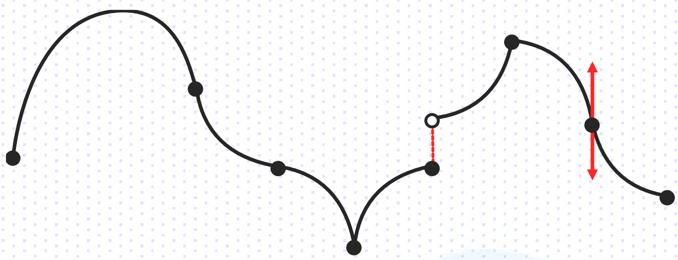
پاسخ:

$$f(x)=-x^{۴}+ax+b \to f'(x)=-۴x^{۳}+a \xrightarrow{f'(۱)=۰} -۴+a=۰ \to a=۴$$

$$f(۱)=۲ \to -۱+۴+b=۲ \to b=-۱$$

II) نقاط مهم در کاربرد مشتق

❋ عطف



❋ موجود نیست یا $f''=0$ ← ریشه‌های غیر مکرر زوج ← عطف

عطف ↓ جدول تعیین علامت $\boxed{f''}$ ↓ تقعر

❋ نتیجه: (۱) (۲)

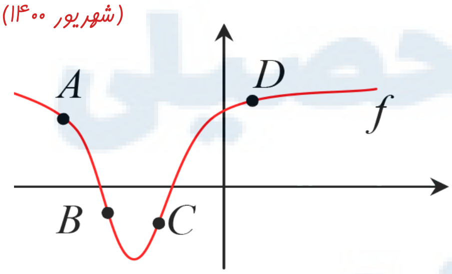
❋ سوالات پارامتری: f در (a,b) عطف دارد:

$$\begin{cases} f(a)=b \\ f''(a)=0 \end{cases}$$

---

۱. جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

در نقطه‌ی .... از نمودار مقابل، مقادیر f' و f'' هر دو مثبت است.



---

۲. درستی یا نادرستی عبارت را تعیین کنید. (دی ۹۹)

در هر نقطه ای که جهت تقعر منحنی تابع عوض شود آن نقطه‌ی عطف تابع است.

---

۳. درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

هر نقطه ای که در آن مقدار $f''(x)$ برابر صفر شود، یک نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$ است.

۴. درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

الف : تابع صعودی اکید، نقطه‌ی عطف ندارد.

ب : در نقطه‌ی عطف علامت $f''(x)$ تغییر می کند.

---

۵. جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x)=-x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را به دست آورید. (دی ۹۷)

پاسخ:

$$f'(x)=-۳x^{۲}+۶x \to f''(x)=-۶x+۶ \xrightarrow{f''(x)=۰} x=۱$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
y''	+	۰	−
y	∪	۳	∩
		عطف	

نقطه‌ی عطف $(۱,۳)$

---

۶. ابتدا جهت تقعر تابع $y=\dfrac{x+۱}{x-۱}$ را مشخص کرده، سپس وجود نقطه‌ی عطف آن را بررسی کنید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$y'=\frac{-۲}{(x-۱)^{۲}} \quad , \quad y''=\frac{۴}{(x-۱)^{۳}}$$

$$x-۱=۰ \to x=۱$$

در بازه‌ی $(۱,+\infty)$ تقعر رو به بالا و در بازه‌ی در بازه‌ی $(-\infty,۱)$ تقعر رو به پایین است.

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	−		+
f	۱ ∩ $-\infty$		$+\infty$ ∪ ۱

تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

---

۷. جهت تقعر تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ را در دامنه اش بررسی کرده و نقطه‌ی عطف آن را در صورت وجود به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$D_f=R$$

$$f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}} \to f''(x)=\frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{(x-۱)^{۵}}}$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	+	تعریف نشده	-
	∪		∩

$f'(۱)=+\infty$ پس تابع در $x=۱$ مماس قائم دارد و $x=۱$ نقطه‌ی عطف است.

۸. اگر نقطه‌ی $A(-۱,۱)$، نقطه‌ی عطف منحنی $f(x)=x^۳+ax^۲+bx-۱$ باشد. مقادیر a و b را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$f(x)=x^۳+ax^۲+bx-۱ \to f'(x)=۳x^۲+۲ax+b \to f''(x)=۶x+۲a$$

$$f(-۱)=(-۱)^۳+a(-۱)^۲+b(-۱)-۱=-۱+a-b-۱=a-b-۲$$

$$\xrightarrow{f(-۱)=۱} a-b-۲=۱ \to a-b=۳$$

$$f''(-۱)=۶(-۱)+۲a=-۶+۲a \xrightarrow{f''(-۱)=۰} -۶+۲a=۰ \to a=۳$$

$$a-b=۳ \xrightarrow{a=۳} ۳-b=۳ \to b=۰$$

---

۹. مقادیر a و b و c را در تابع $f(x)=ax^۳+bx^۲+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.
$f(۰)=۱$ و $f(۱)=۲$ و $x=\frac{۱}{۲}$ طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع f باشد. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$f(۰)=۱ \xrightarrow{f(x)=ax^۳+bx^۲+c} a(۰)^۳+b(۰)^۲+c=۱ \to c=۱$$

$$f(۱)=۲ \xrightarrow{f(x)=ax^۳+bx^۲+۱} a(۱)^۳+b(۱)^۲+۱=۲ \to a+b=۱$$

$$f''(\frac{۱}{۲})=۰ \xrightarrow{f''(x)=۶x+۲b=۰} ۶a(\frac{۱}{۲})+۲b=۰ \to ۳a+۲b=۰$$

$$\begin{cases} a+b=۱ \\ ۳a+۲b=۰ \end{cases} \to a=-۲ \ , \ b=۳$$

III) رسم نمودار تابع:

❋ هموگرافیک:
- مجانب
- $f' \leftarrow$ یکنوایی

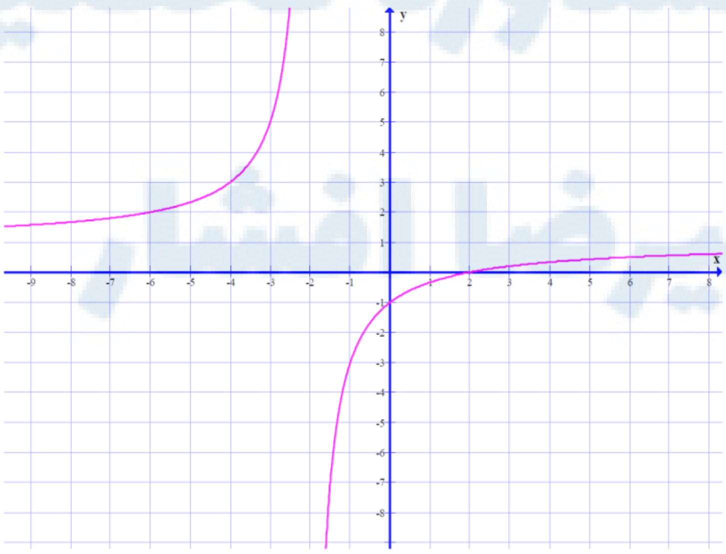
❋ درجه۳:
- $f' \leftarrow$ یکنوایی
- $f'' \leftarrow$ تقعّر

۱. جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$ را رسم کنید. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

$y'=\dfrac{4}{(x+2)^2}>0$ و مجانب افقی $y=1$ و مجانب قائم $x=-2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	$+$		$+$
	$\nearrow$ $+\infty$	$\parallel$	$-\infty$ $\nearrow$



۲. جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ را رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

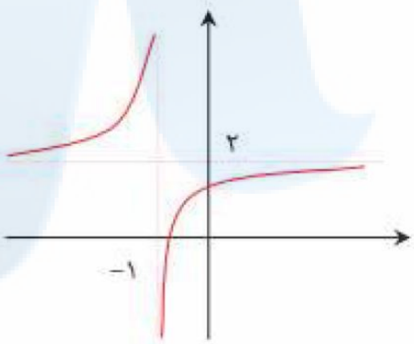
$D_f=R-\{-1\}$ دامنه‌ی تابع

$x+1=0 \rightarrow x=-1$ مجانب قائم

$y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ مجانب افقی

$f'(x)=\dfrac{2(x+1)-1(2x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$ تابع در دو طرف مجانب قائم خود صعودی است.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	۲	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	۲



۳. جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=-x^{۳}+۶x^{۲}-۹$ را رسم کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$D_f=R$$

$$f'(x)=-۳x^{۲}+۱۲x \xrightarrow{f'(x)=۰} -۳x^{۲}+۱۲x=۰ \rightarrow x=۰\ ,\ x=۴$$

$$f''(x)=-۶x+۱۲ \xrightarrow{f''(x)=۰} -۶x+۱۲=۰ \rightarrow x=۲$$

x	$-\infty$		۰		۲		۴		$+\infty$
f'		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
f		$\searrow$	-۹ min	$\nearrow$	۷	$\nearrow$	۲۳ max	$\searrow$