

آزمون نیم سال اول ریاضیات تجربی



۱- نمودار یک تابع درجه دوم، محور y ها را با عرض (-5) و خط به معادله $y = 3(x-3)$ را با عرض های (-3) و (-6) قطع می کند. نمودار این تابع درجه دوم، محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

- ۱ (۱) $1/5$ (۲) 2 (۳) $2/5$ (۴) 4

۲- دامنه تابع $f(x) = \log_{(1-x)}(x - \sqrt{x})$ شامل چند عدد صحیح است؟

- صفر (۱) 1 (۲) 2 (۳) 4 بی شمار (۴)

۳- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ را در امتداد محور x ها یک واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، 2 واحد در جهت مثبت انتقال می دهیم، منحنی حاصل، نمودار تابع f را در دو نقطه با طول های α و β قطع می کند. کدام گزینه در مورد α و β درست است؟ (مشابه سراسری تجربی ۹۹)

- ۱ (۱) $\alpha + \beta = -1$ (۲) $\alpha\beta = 1$ (۳) $\alpha + \beta = 1$ (۴) $\alpha\beta = -1$

۴- اگر $f(x) = x^3$ و $g(x) = 3x(x+1)$ ، آن گاه نمودار تابع $f+g$ از کدام ناحیه نمی گذرد؟

- ۱ (۱) اول و دوم (۲) دوم و سوم (۳) اول و سوم (۴) دوم و چهارم

۵- تابع $f(x) = |x-1| + |x+1|$ در بازه (a, b) صعودی و مقادیر آن منفی است. اگر مساحت ناحیه محدود به خط های $x=a$ ، $x=b$ ، محور x ها و نمودار f برابر با S باشد، بیشترین مقدار S کدام است؟

- ۱ (۱) $0/25$ (۲) $0/75$ (۳) $1/25$ (۴) $1/75$

۶- اگر $f = \{(-1, 2), (1, 2), (2, 1)\}$ و $g = \{(0, \sqrt{2}), (-1, 2), (2, 3), (\sqrt{5}, 4)\}$ ، آن گاه برد تابع $g \circ f$ از چند عضو تشکیل شده است؟

- ۱ (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) بی شمار

۷- اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ ، آن گاه نامعادله $(g \circ f)(x) > f(x)$ در بازه (a, b) برقرار است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

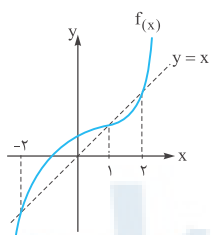
- ۱ (۱) 1 (۲) 2 (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $1 + \sqrt{5}$

(مشابه سراسری تجربی ۹۹)

۸- اگر $f(x) = \frac{1}{4}(x - [x] - 1)$ و $g(x) = 2(x^2 + x + 1)$ ، آن گاه برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

- ۱ (۱) $[0, 5, 1/5]$ (۲) $[1/5, 2]$ (۳) $[0, 2]$ (۴) $[1, 1/5]$

۹- در شکل روبه رو نمودار تابع f و نیمساز ربع اول و سوم در یک دستگاه مختصات رسم شده اند. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x^2 - x} \cdot f^{-1}(x)$ کدام است؟



کدام است؟

- ۱ (۱) $[-2, 0] \cup [1, 2]$ (۲) $(-\infty, -2] \cup [0, 1] \cup [2, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$ (۴) $[-2, 1]$

۱۰- اگر $f(x)$ وارون تابع $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ باشد، آن گاه حاصل $f(12) - f(2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) 63 (۲) 31 (۳) 15 (۴) 10

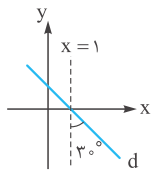
۱۱- اگر $f(x) = 2 - \sqrt{x+2}$ و $g(x) = 2 + \sqrt{x-2}$ باشد، کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

الف) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ ب) $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g$

- ۱ (۱) فقط الف (۲) فقط ب (۳) الف و ب (۴) هیچ کدام

۱۲- تابع $f(x) = x - \frac{4}{x+1}$ ، $x \geq 0$ را در نظر بگیرید. طول نقطه تقاطع نمودار تابع f^{-1} با نیمساز ربع دوم و چهارم، کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی ۹۹)

- ۱ (۱) 2 (۲) -2 (۳) 1 (۴) -1



۱۳- در شکل روبه رو، نقطه $(a, a+1)$ روی خط d قرار دارد؛ حاصل $a + \frac{1}{a}$ کدام است؟

۱ (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۴- اگر α زاویه ای در ربع دوم باشد، به طوری که $\sin \alpha = 0/6$ ، آن گاه حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) - \sin(\alpha - \pi) + \sin(\frac{3\pi}{4} + 2\alpha)}{1 + \cot(4\pi + \alpha)}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $5/04$ (۲) $-5/04$ (۳) $1/44$ (۴) $-1/44$ (مشابه خارج تجربی ۱۴۰۰)

۱۵- اگر $f(x) = \frac{\cos 16x}{\cos^2 x}$ ، آن گاه $f(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟ (مشابه خارج تجربی ۱۴۰۰)

- ۱ (۱) $4 + 2\sqrt{3}$ (۲) $-2\sqrt{3} - 4$ (۳) $4 - 2\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3} - 4$

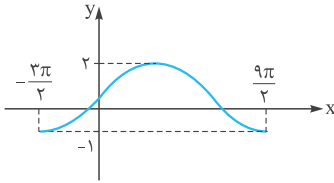
۱۶- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، آن گاه $\cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (۲) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۷- دوره تناوب تابع $f(x) = |\sin 2x|$ برابر با T_1 و دوره تناوب تابع $g(x) = |\tan x|$ برابر با T_2 است. حاصل $T_1 + T_2$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۸- شکل مقابل نمودار تابع $y = c + b \sin ax$ را در یک دوره تناوب نشان می‌دهد. اگر a عددی منفی باشد،



(مشابه سراسری تجربی ۹۹)

[b] کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۹- معادله $\tan x = \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) چهار (۲) پنج (۳) شش (۴) هفت

۲۰- تمام جواب‌های کلی معادله $2 \sin x \cos x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ (۳) $k\pi + \frac{3\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(مشابه سراسری تجربی ۹۹)

۲۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + [-x]}{2 - x}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $+\infty$ (۳) $-\infty$ (۴) صفر

۲۲- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2}}{x}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{2x^4}}{x^2}$ ، آن گاه حد چپ تابع $g - f$ در $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) صفر

(مشابه سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۲۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} [2 \cos x - 1]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

۲۴- اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x + 1$ و $x + 3$ به ترتیب برابر ۳ و -۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم $P(x^2 - 1) - P(-x^2)$ بر $x + 1$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۵

(مشابه سراسری تجربی ۹۹)

۲۵- حد تابع $f(x) = \frac{x - \sqrt{3x^2 - 3x + 1}}{(x-1)^3}$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) -۳

۲۶- اگر n عددی صحیح باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^n - x - 1}{x - x^2 - 2x^4}$ کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) صفر (۲) $-1/5$ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

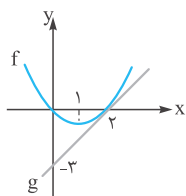
۲۷- اگر حد عبارت $\frac{4(x^n - 3)}{ax - \sqrt{x^2 - 5}}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر با $2/4$ باشد، حد آن وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

- (۱) $-4/8$ (۲) $1/2$ (۳) $-3/6$ (۴) صفر

۲۸- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cot x} & 0 < x < \frac{3\pi}{4} \\ a \cos(x - \frac{3\pi}{4}) & \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$ در $x = \frac{3\pi}{4}$ پیوسته است. a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۲۹- در شکل روبه‌رو نمودار تابع درجه دوم f و تابع خطی g که در یک نقطه روی محور xy بر آن مماس است، رسم شده است.



(مشابه خارج تجربی ۱۴۰۰)

حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f+g)(x)}{x-2}$ کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) $-1/5$ (۳) ۳ (۴) -۳

۳۰- اگر $f(x) = (1-x^2) \sin \frac{\pi x}{4}$ ، آن گاه $f'(1) - f'(-1)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) صفر

پاسخ نامه تشریحی

۱. گزینه ۴ ضابطه تابع درجه دوم را به صورت $y = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم. منحنی تابع محور y ها را در نقطه $(0, -5)$ قطع می‌کند، پس:

$$-5 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = -5$$

حالا مختصات نقاط برخورد منحنی و خط $y = 3(x - 3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$y = -3 \Rightarrow -3 = 3(x - 3) \Rightarrow x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$$

$$y = -6 \Rightarrow -6 = 3(x - 3) \Rightarrow x - 3 = -2 \Rightarrow x = 1$$

پس نقاط برخورد عبارت‌اند از $(2, -3)$ و $(1, -6)$. حالا این نقاط را در ضابطه منحنی صدق می‌دهیم تا a و b را پیدا کنیم:

$$(2, -3) \Rightarrow -3 = a(2)^2 + b(2) - 5 \Rightarrow 4a + 2b = 2 \Rightarrow 2a + b = 1$$

$$(1, -6) \Rightarrow -6 = a(1)^2 + b(1) - 5 \Rightarrow a + b = -1$$

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a = 2, b = -3$$

با حل دستگاه معادله‌های بالا داریم:

پس ضابطه منحنی عبارت است از $y = 2x^2 - 3x - 5$. حالا نقاط برخورد منحنی با محور طول‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x = -1, x = \frac{5}{2} = 2.5$$

۲. گزینه ۱ می‌دانیم $\log_b a$ به شرطی تعریف شده است که $a > 0$, $b > 0$ و $b \neq 1$ باشد. پس در تابع $f(x) = \log_{(1-x)}(x - \sqrt[3]{x})$ داریم:

$$x - \sqrt[3]{x} > 0 \Rightarrow x > \sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{توان } 3} x^3 > x \Rightarrow x(x^2 - 1) > 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c} -\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty \\ | \quad | \quad | \quad | \\ - \quad + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow -1 < x < 0 \text{ یا } x > 1 \quad (I)$$

$$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1 \quad (II)$$

$$1 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \quad (III)$$

حالا اشتراک (I)، (II)، (III) می‌شود $-1 < x < 0$ پس $D_f = (-1, 0)$ است که شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

۳. گزینه ۳ اول ضابطه $f(x)$ را تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 \xrightarrow{\substack{\text{انتقال 1 واحد در راستای مثبت محور } x\text{ها} \\ \text{انتقال 2 واحد در راستای مثبت محور } y\text{ها}}} g(x) = 2 + (x - 1)^3$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - (x - 1)^3 = 2 \Rightarrow 3x^2 - 3x + 1 = 2 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

حالا f و g را با هم تقاطع می‌دهیم:

$$\xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های این معادله هستند.}} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 1 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

پس با توجه به گزینه‌ها، ۳ درست است.

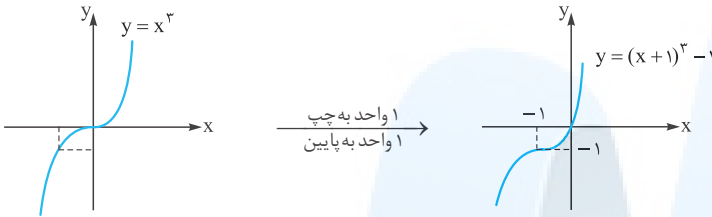
۴. گزینه ۴ | اول ضابطه $(f + g)$ را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \\ g(x) = 3x^2 + 3x \end{cases} \Rightarrow (f + g)(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$(f + g)(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x + 1)^3 - 1$$

ضابطه به دست آمده شبیه اتحاد $(a + b)^3$ است، پس:

حالا نمودار تابع را رسم می کنیم: با انتقال نمودار $y = x^3$ ، (-1) واحد در راستای محور x ها (یعنی ۱ واحد به سمت چپ) و (-1) واحد در راستای محور y ها (یعنی ۱ واحد به پایین)



حواسمان باشد که نمودار از $(0, 0)$ می گذرد.

حالا با توجه به شکل، جواب می شود ناحیه دوم و چهارم.

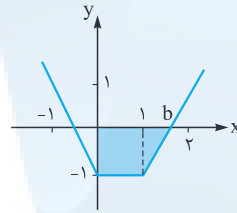
بد نیست این را هم بدانید که در توابع اکیدا یکنوا، اگر $f(0) = 0$ باشد، در صورتی که تابع صعودی باشد نمودار از ناحیه ۲ و ۴ و در صورتی که تابع نزولی باشد، نمودار از ناحیه ۱ و ۳ نمی گذرد.

۵. گزینه ۳ | ابتدا نمودار تابع را رسم می کنیم:

$$f(x) = |x| + |x - 1| - 2$$

$$\text{ریشه های داخل قدرمطلق: } x = 0, x = 1$$

$$\text{نقاط: } \begin{array}{c|c|c|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$



حالا با توجه به شکل $a = 0$ است (حواسمان باشد که تابع در بازه $(0, 1)$ صعودی و در بازه $(1, 2)$ صعودی اکید است) و باید مقدار b را پیدا کنیم. معادله خط گذرنده از نقاط $(1, -1)$ و $(2, 1)$ را می نویسیم:

$$m = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2 \Rightarrow y = 2x - 3$$

$$\text{تقاطع با محور } x \xrightarrow{y=0} 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2}\right) \times 1 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

پس $b = \frac{3}{2}$ است و اندازه مساحت ناحیه رنگی برابر است با:

۶. گزینه ۱ | اول تابع های f و g را به شکل زوج های مرتب می نویسیم.

$$f = \{(-1, 2), (1, 2), (-2, 1), (2, 1)\} \text{ و } g = \{(0, \sqrt{2}), (-1, 2), (2, 3), (\sqrt{5}, 4)\}$$

$$\Rightarrow \text{gof} = \{(-1, 3), (1, 3)\}$$

حالا gof را به دست می آوریم:

بنابراین برد تابع gof یک مجموعه تک عضوی است.

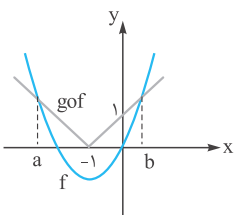
۷. گزینه ۴ | داریم $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ ، ضابطه تابع gof را پیدا می کنیم: $(\text{gof})(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

$$|x+1| > x^2 + 2x$$

حالا نامعادله $(\text{gof})(x) > f(x)$ را حل می کنیم:

نمودار دو تابع f و (gof) را رسم می کنیم:

حالا باید نقاط a و b را پیدا کنیم:



$$\text{پیدا کردن } a \Rightarrow \overbrace{-x-1}^{\text{gof}} = \overbrace{x^2+2x}^f \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \xrightarrow{a < -1} a = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{پیدا کردن } b \Rightarrow x+1 = x^2 + 2x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

پس حداکثر مقدار $b - a$ برابر است با:

$$\max(b - a) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$$

۸. گزینه ۲ | دیدیم که برای پیدا کردن برد تابع $g \circ f$ باید مقادیر تابع g را به ازای محدوده تغییرات تابع f پیدا کنیم. می دانیم $1 < a - [a] \leq 0$ است پس برد تابع f برابر است با:

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -1 \leq x - [x] - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}(x - [x] - 1) < 0$$

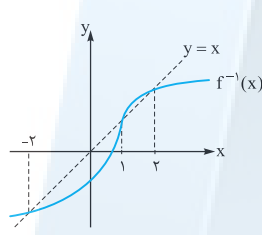
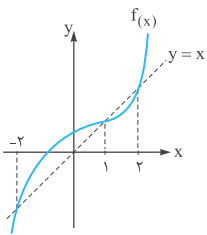
پس $0 \leq f(x) < \frac{1}{4}$. حالا باید تعیین کنیم محدوده تغییرات مقادیر تابع g به ازای $-\frac{1}{4} \leq x < 0$ چیست:

$$g(x) = 2(x^2 + x + 1) = 2(x^2 + x + \frac{1}{4}) + 2 - \frac{1}{4} = 2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{4}$$

داریم:

$$0 \leq x + \frac{1}{4} < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq (x + \frac{1}{4})^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq 2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{4} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \leq 2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{4} < 2 \Rightarrow \frac{3}{4} \leq (g \circ f)(x) < 2$$

پس برد تابع $g \circ f$ برابر است با $[1/4, 2)$.



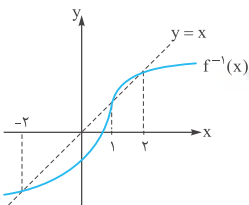
۹. گزینه ۲ | ابتدا نمودار f^{-1} را از روی نمودار f (یعنی قرینه‌اش نسبت به خط $y = x$)

رسم می‌کنیم:

دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x^2 - x f^{-1}(x)}$ یا $g(x) = \sqrt{x(x - f^{-1}(x))}$ برابر بازه‌هایی

است که عبارت $x(x - f^{-1}(x))$ بزرگتر یا مساوی صفر باشد پس x و $(x - f^{-1}(x))$

باید هم علامت باشند (یا حداقل یکی‌شان برابر صفر باشد).



	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
$x - f^{-1}(x)$	-	0	+	+	-	+
x	-	-	-	+	+	+
$x(x - f^{-1}(x))$	+	0	-	+	-	+

علامت این سطر با توجه به نمودار تعیین می‌شود. →

$$(-\infty, -2] \cup [0, 1] \cup [2, +\infty)$$

پس دامنه تابع $g(x)$ با توجه به جدول تعیین علامت برابر است با:

$$g(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

۱۰. گزینه ۱ | می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد، $f^{-1}(b) = a$ است، پس برای تابع g داریم:

$$f = g^{-1} \Rightarrow \begin{cases} g^{-1}(12) = a \Rightarrow f(a) = 12 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} = 12 \xrightarrow{\text{عددگذاری}} a = 2^6 = 64 \\ g^{-1}(2) = b \Rightarrow f(b) = 2 \Rightarrow \sqrt{b} + \sqrt[3]{b} = 2 \xrightarrow{\text{عددگذاری}} b = 1 \end{cases}$$

$$64 - 1 = 63$$

بنابراین مقدار $f(12) - f(2)$ برابر است با:

۱۱. گزینه ۲ | می‌دانیم همواره $(f \circ f^{-1})(x) = x$ و $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ ، یعنی ضابطه‌های این دو تابع با هم برابر و برابر تابع همانی است اما همان طور که در

درس نامه داشتیم، برابری $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$ وقتی برقرار است که $D_f = R_f$ باشد (چون $D_{f \circ f^{-1}} = D_f$ و $D_{f^{-1} \circ f} = R_f$) پس برای هر کدام از تابع‌ها دامنه و برد

را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 2 - \sqrt{x+2} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه: } x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty) \\ \text{برد: } y \leq 2 \Rightarrow R_f = (-\infty, 2] \end{cases} \quad \times$$

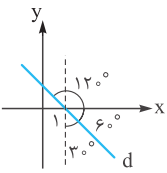
$$g(x) = 2 + \sqrt{x-2} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه: } x \geq 2 \Rightarrow D_g = [2, +\infty) \\ \text{برد: } y \geq 2 \Rightarrow R_g = [2, +\infty) \end{cases} \quad \checkmark$$

۱۲. گزینه ۴ | اول باید ضابطه تابع وارون را پیدا کنیم. چون نقطه تقاطع f^{-1} با خط $y = -x$ را می‌خواهیم لازم نیست x را بر حسب y پیدا کنیم، کافی است

جای x و y را عوض کنیم و سپس ضابطه به دست آمده را با خط $x = -y$ قطع دهیم:

$$f: y = x - \frac{4}{x+1}, x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}: \begin{cases} x = y - \frac{4}{y+1}, y \geq 0 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow y - \frac{4}{y+1} = -y \Rightarrow 2y = \frac{4}{y+1} \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \checkmark \\ y = -2 \times \end{cases} \xrightarrow{x=-y} x = -1$$



۱۳. گزینه ۴ | طبق شکل روبه رو زاویه خط d با محور x ها برابر 120° درجه است؛ پس شیب خط برابر $m = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ است،

معادله خط را می نویسیم: (خط از نقطه $(1, 0)$ می گذرد).

$$y - 0 = -\sqrt{3}(x - 1) \xrightarrow{\text{نقطه } (a, a+1) \text{ روی خط}} a + 1 = -\sqrt{3}(a - 1) \Rightarrow a + \sqrt{3}a = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

حالا مقدار $a + \frac{1}{a}$ را پیدا می کنیم:

$$a + \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1} = \frac{2(3 + 1)}{2} = 4$$

۱۴. گزینه ۳ | داریم $\sin \alpha = 0/6$ و α در ربع دوم دایره مثلثاتی است؛ پس:

$$\frac{\overbrace{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}^{\cos \alpha} - \overbrace{\sin(\alpha - \pi)}^{-\sin \alpha} + \overbrace{\sin(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha)}^{-\cos 2\alpha}}{1 + \underbrace{\cot(4\pi + \alpha)}_{\cot \alpha}} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha - \cos 2\alpha}{1 + \cot \alpha}$$

مقدار سایر نسبت های مثلثاتی α را از روی سینوس پیدا می کنیم:

$$\sin \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع دوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

و چون $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ داریم:

$$\frac{-\frac{4}{5} + \frac{3}{5} - \frac{7}{25}}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{-\frac{20}{25} + \frac{15}{25} - \frac{7}{25}}{-\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{12}{25}}{-\frac{1}{3}} = \frac{36}{25} = 1/44$$

بنابراین حاصل کسر داده شده برابر است با:

۱۵. گزینه ۴ | مقدار صورت و مخرج کسر را پیدا می کنیم:

$$\cos \frac{16\pi}{12} = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-2}{2 + \sqrt{3}} = -2(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 4$$

۱۶. گزینه ۲ | می دانیم $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$ و $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ و چون $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ مقدار $\cos 2x$ منفی است، حالا دو راه داریم:

راه I | می دانیم $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$ پس:

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{4}$$

$$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x \Rightarrow \cos^2 2x = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \xrightarrow{\cos 2x < 0} \cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

راه II | با استفاده از اتحاد $(\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$ داریم:

$$(\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{4} + (\sin x + \cos x)^2 = 2 \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x) = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

حالا داریم:

۱۷. گزینه ۲

در درسنامه داشتیم که دوره تناوب تابع $|\sin ax|$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ و دوره تناوب تابع $|\tan ax|$ (و یا $\tan ax$) برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

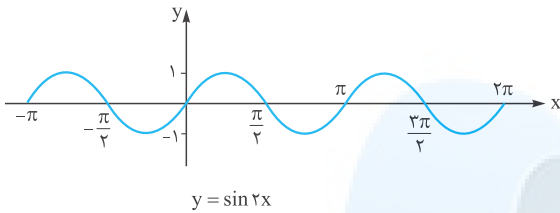
$$|\sin 2x| \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$|\tan x| \Rightarrow T_2 = \pi$$

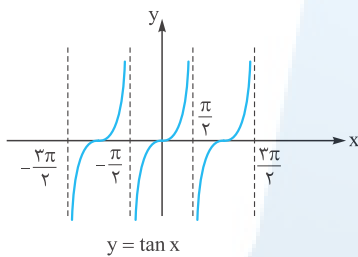
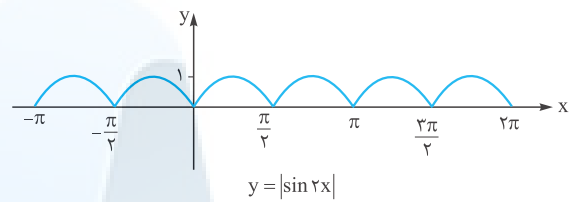
$$T_1 + T_2 = \frac{3\pi}{2}$$

پس:

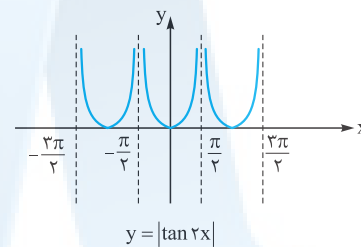
بیاید یک نگاهی به نمودار دو تابع هم بیندازیم:



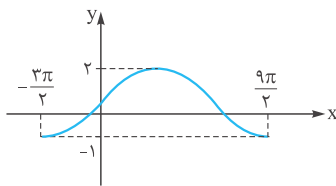
⇒



⇒

۱۸. گزینه ۲ دوره تناوب تابع برابر 6π برای $\frac{9\pi}{2} - (-\frac{3\pi}{2}) = 6\pi$ است، پس:

$$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{9\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{1}{3}$$

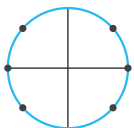
حالا چون شروع تابع مثل تابع سینوسی است پس $ab > 0$ است و:

$$ab > 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow \begin{cases} |b| + c = 2 \\ -|b| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -1.5 \Rightarrow [b] = -2 \end{cases}$$

۱۹. گزینه ۴ می دانیم $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ، پس:

$$\tan x = \sin 2x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & \text{یک جواب} \\ \frac{1}{\cos x} = 2 \cos x & \text{ادامه} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

حالا اگر نقاط مربوط به $\sin x = 0$ و $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ را روی دایره مثلثاتی مشخص کنیم:معادله در بازه $[0, 2\pi)$ هفت جواب دارد (نقطه سمت راست دایره هم صفر است و هم 2π).۲۰. گزینه ۲ می دانیم $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ و $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ ، پس:

$$2 \sin x \cos x = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{4} - x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$$

حالا جواب کلی را می نویسیم:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

حالا نقاط مربوط به هر کدام از جواب های کلی را در یک دور دایره پیدا می کنیم:

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} k & 0 & 1 & 2 \\ \hline x & \frac{\pi}{12} & \frac{5\pi}{4} & \frac{17\pi}{12} \end{array}$$

$$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \begin{array}{c|c} k & 0 \\ \hline x & \frac{3\pi}{4} \end{array}$$

پس جواب های $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ ، $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ جواب های $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ را هم شامل می شوند و در نتیجه جواب کلی معادله برابر است با:

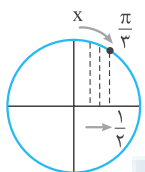
۲۱. گزینه ۲ | وقتی $x \rightarrow 2^+$ داریم:

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + [-x]}{2 - x} = \frac{2 - 3}{2 - 2^+} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

۲۲. گزینه ۱ | می دانیم $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2}}{x} = \frac{\sqrt{2}|x|}{x}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{2x^4}}{x^2} = \frac{\sqrt{2}x^2}{x^2}$ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (g - f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2}x^2}{x^2} - \frac{\sqrt{2}|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{2} - \frac{-\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$



۲۳. گزینه ۲ | با توجه به دایره مثلثاتی، وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+$ داریم $\cos x \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}})^-$ پس:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} [2 \cos x - 1] = [2(\frac{1}{\sqrt{2}})^- - 1] = [1^- - 1] = [0^-] = -1$$

۲۴. گزینه ۳ | باقی مانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $x + 1$ و $x + 1$ به ترتیب برابر ۳ و -۲ است، پس $P(0) = 3$ و $P(-1) = -2$ ، حالا می رویم سراغ باقی مانده

تقسیم عبارت $P(x^2 - 1) - P(x)$ بر $x + 1$: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(x^2 - 1) - P(x) = P(0) - P(-1) = 3 - (-2) = 5$

۲۵. گزینه ۱ | صورت کسر را با استفاده از اتحاد $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ گویا می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{3x^2 - 3x + 1}}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{3x^2 - 3x + 1}}{(x-1)^2} \times \frac{(x^2 + x\sqrt{3x^2 - 3x + 1} + \sqrt{(3x^2 - 3x + 1)^2})}{(x^2 + x\sqrt{3x^2 - 3x + 1} + \sqrt{(3x^2 - 3x + 1)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x^2 + 3x - 1}{(x-1)^2 (x^2 + x\sqrt{3x^2 - 3x + 1} + \sqrt{(3x^2 - 3x + 1)^2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 \times 3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۲۶. گزینه ۳ | برای n سه حالت $n \leq 3$ ، $n = 4$ و $n > 4$ را در نظر می گیریم:

$$n \leq 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^n}{-2x^4} \Rightarrow L = 0$$

$$n = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{-2x^4} \Rightarrow L = -1/2$$

$$n > 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^n}{-2x^4} \Rightarrow L = -\infty$$

۲۷. گزینه ۱ | حد کسر وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر $2/4$ است، پس توان صورت باید برابر ۱ باشد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4(x-2)}{ax - \sqrt{x^2 - 5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{ax - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{(a+1)x} = \frac{4}{a+1} \Rightarrow \frac{4}{a+1} = \frac{2}{1} \Rightarrow 10 = 6a + 6 \Rightarrow 6a = 4 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

حالا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{\frac{2}{3}x - \sqrt{x^2 - 5}} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{\frac{2}{3} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 5}}} = \frac{4}{\frac{2}{3} - \frac{2}{2}} = \frac{4}{\frac{4-9}{6}} = \frac{24}{-5} = -4/8$$

۲۸. گزینه ۲ | اول ضابطه تابع را کمی ساده تر می کنیم:

$$\frac{\sin x + \cos x}{1 + \cot x} = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}} = \sin x$$

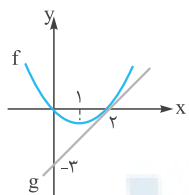
$$\cos(x - \frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x$$

پس ضابطه تابع به صورت مقابل است:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ -a \sin x & \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$$

حالا می توانیم مقدار، حد راست و حد چپ تابع را در $x = \frac{3\pi}{4}$ برابر قرار دهیم اما چون دو ضابطه به شکل $\sin x$ و $-a \sin x$ هستند برای پیوسته بودن تابع کافی است $a = -1$ باشد تا دو ضابطه یکسان شوند.

۲۹. گزینه ۳ | از روی شکل معلوم است که $f(2) = g(2) = 0$ ، پس می توانیم حد خواسته شده را به صورت زیر بنویسیم:



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f+g)(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2) + g(x) - g(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = f'(2) + g'(2)$$

از طرف دیگر تابع g یک تابع خطی است که بر منحنی $f(x)$ در $x = 2$ مماس است بنابراین چون شیب خط برابر است با $\frac{3}{2-0} = \frac{3}{2}$

پس $f'(2) = g'(2) = \frac{3}{2}$ و در نتیجه حاصل حد برابر است با: $f'(2) + g'(2) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

۳۰. گزینه ۴ | مقدار $f'(1)$ و $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق پیدا می کنیم:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x^2) \sin \frac{\pi x}{2} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x) \sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} -(1+x) \sin \frac{\pi x}{2} = -2$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x^2) \sin \frac{\pi x}{2} - 0}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)(1+x) \sin \frac{\pi x}{2}}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1} (1-x) \sin \frac{\pi x}{2} = -2$$

$$(-2) - (-2) = 0$$

پس حاصل $f'(1) - f'(-1)$ برابر است با:



مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

راه‌های ارتباطی مرکز مشاوره

تلگرام

اینستاگرام

وبسایت



AlirezaAfsharOfficial

AlirezaAfsharOriginal

www.AlirezaAfshar.org

رزور مشاوره خصوصی علیرضا افشار

برای رزور مشاوره خصوصی تک جلسه و ماهانه
به شماره ۰۹۳۵۸۹۶۰۵۰۳ در واتساپ پیام دهید

Afshar.xyz

آدرس تمام رسانه ها :

