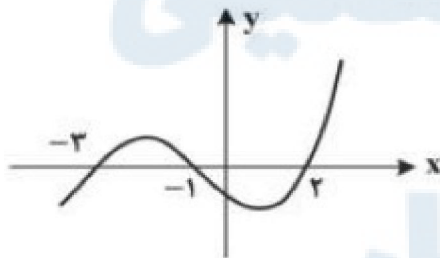


۷۴- اگر $f(x) + xf(-x) = x^2 + 1$ آنگاه $f(2)$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۵- اگر f تابع همانی، g تابع ثابت، $h = f - g$ و نمودار h نمودار تابع $y = |x + 5|$ را در $x = 1$ قطع کند، $h(-1)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۶- در تابع خطی $f(x) = mx + h$ ، اگر $f(2 - x) + 2f(x - 1) = 2x$ باشد، مقدار $m + h$ ، کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۷- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)$ است. دامنه‌ی تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x + 1)f(x)}$ ، کدام است؟



(۱) $[-3, 2]$ (۲) $[-1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -1]$ (۴) $(-3, 2) \cup (-\infty, -1]$

۷۸- کدام دسته از توابع زیر با هم برابرند؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

$g(x) = \cos x, f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ (۱)

$g(x) = 0, f(x) = \left[\frac{x^2 + 2}{-x^2 + 3} \right]$ (۲)

$g(x) = 1, f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{Cot} g x$ (۳)

$g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}, f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-3}$ (۴)

۷۹- در کدام گزینه، زوج تابع داده شده با هم مساوی هستند؟

$g(x) = 2 \operatorname{Log}(x), f(x) = \operatorname{Log}(x^2)$ (۱)

$g(x) = \frac{|x|}{x}, f(x) = 1$ (۲)

$g(x) = \frac{x-1}{x-1}, f(x) = 1$ (۳)

$g(x) = \sqrt{x(1-x)}, f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{1-x}$ (۴)

۸۰- برد تابع $f(x) = \frac{4-x^2}{1+4x}$ ، کدام است؟

$(-\frac{1}{4}, 2]$ (۴)

$(-\frac{1}{4}, 4]$ (۳)

$[-\frac{1}{4}, 4]$ (۲)

$(\frac{1}{4}, 2]$ (۱)

علیرضا افشار

۸۱- برد تابع $y = \sqrt{5-x^2+4x}$ کدام است؟

$[1, 5]$ (۴)

$[1, 4]$ (۳)

$[0, 3]$ (۲)

$[-1, 5]$ (۱)

۸۲- نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف X های منفی سپس ۹ واحد به طرف Y های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور X ها است؟

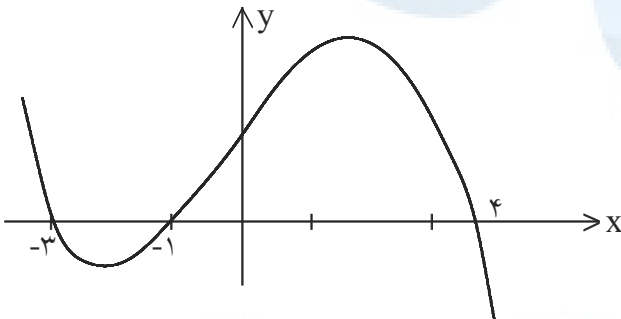
- (۱) $(-5, 2)$ (۲) $(-5, 3)$ (۳) $(-2, 3)$ (۴) $(-2, 5)$

۸۳- نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف X های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف Y های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

- (۱) $(3, 4)$ (۲) $(2, 5)$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $(2, 6)$

۸۴- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟

- (۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$ (۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$ (۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$ (۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$



۸۵- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف X های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور X ها غیر منفی باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۱/۵ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۶- به ترتیب با کدام انتقال‌ها نمودار $y = x^2 + 6x - 1$ به روی نمودار $y = x^2 - 4x + 3$ منطبق می‌شود؟

(۱) ۲ واحد به راست و ۹ واحد به بالا

(۲) ۵ واحد به راست و ۹ واحد به بالا

(۳) ۵ واحد به راست و ۴ واحد به بالا

(۴) ۲ واحد به راست و ۴ واحد به بالا

۸۷- نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را، ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

(۱) $-3/5$

(۲) -3

(۳) $-2/5$

(۴) -2

۸۸- قرینه‌ی نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

(۱) $x = 1$

(۲) $x = 1/5$

(۳) $x = 2$

(۴) $x = 2/5$

۸۹- ابتدا قرینه‌ی نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

(۱) $0, 2$

(۲) $1, -1$

(۳) $2, -1$

(۴) $1, -2$

علیرضا افشار

۹۰- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x$; $(x > 1)$ مفروض است. قرینه‌ی نمودار آن نسبت به محور x ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

$$2\sqrt{5} \quad (3)$$

$$5\sqrt{2} \quad (3)$$

$$6\sqrt{2} \quad (2)$$

$$4\sqrt{5} \quad (1)$$

۹۱- نمودار کدام یک از توابع زیر فقط از ناحیه چهارم نمی‌گذرد؟

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (2)$$

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$y = -x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \quad (4)$$

$$y = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 1 \quad (3)$$

۹۲- حدود k باشد تا تابع $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + k$ از ناحیه‌ی دوم عبور نکند؟

$$k \leq 10 \quad (4)$$

$$k \leq 8 \quad (3)$$

$$k \geq 8 \quad (2)$$

$$k \geq -8 \quad (1)$$

۹۳- اگر نمودار تابع f را داشته باشیم و $g(x) = 3f(2x - 1) + 4$ را رسم کنیم، متناظر نقطه $(1, -4) \in f$ چه نقطه‌ای از نمودار $g(x)$ می‌باشد؟

$$(1, -4) \quad (4)$$

$$\left(1, \frac{8}{3}\right) \quad (3)$$

$$\left(1, -\frac{8}{3}\right) \quad (2)$$

$$(1, -8) \quad (1)$$

۹۴- طول تمام نقاط تابع $f(x) = |x|$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. تابع حاصل را چند واحد در راستای محور y ها به سمت پایین انتقال دهیم تا مساحت سطح محصور بین نمودار و محور طول‌ها در پایین آن ۷۲ واحد مربع شود؟

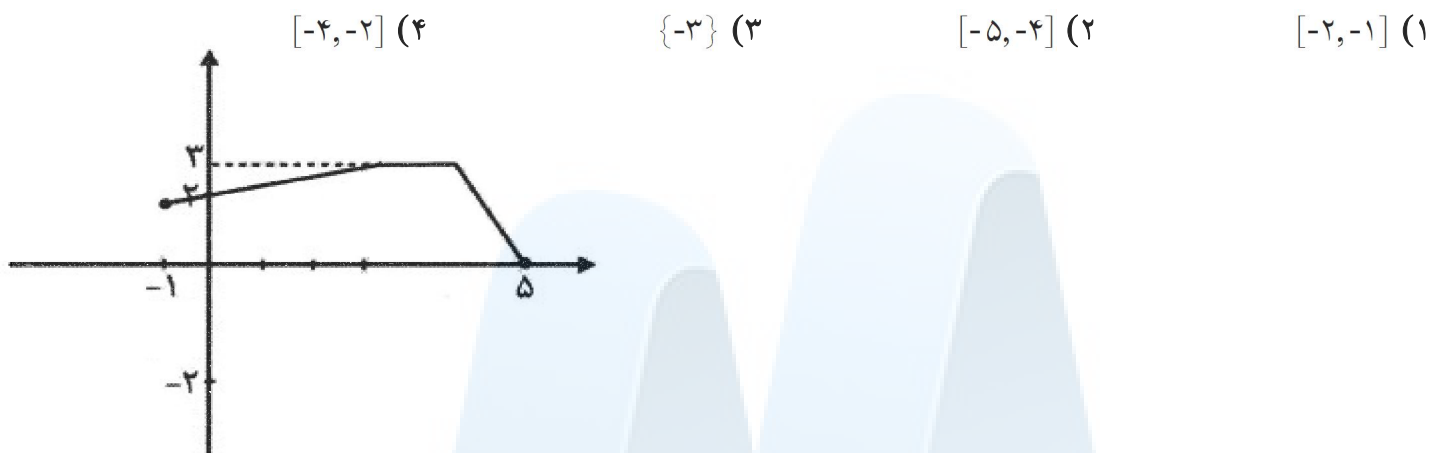
$$12 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۹۵- اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر باشد، اشتراک دامنه و برد تابع $1 + (-3x - 4) - 2f(x)$ کدام است؟



۹۶- اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل $[x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$ کدام است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) صفر (۴) 1

۹۷- اگر $198 = (1 + \sqrt{2})^6 + (1 - \sqrt{2})^6$ باشد، جزء صحیح عدد $(1 + \sqrt{2})^6$ کدام است؟

(۱) 195 (۲) 196 (۳) 197 (۴) 198

۹۸- اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

۹۹- برد تابع $f(x) = 2x - 2[x] + 1$ کدام است؟

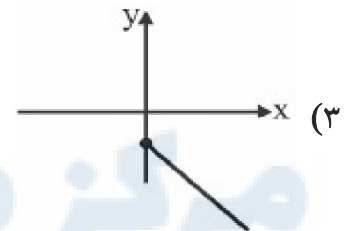
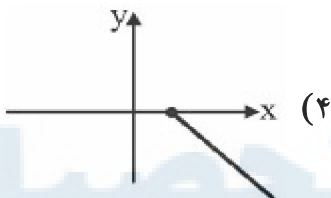
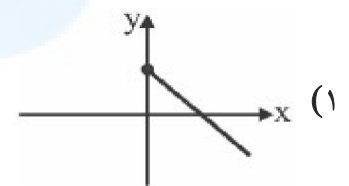
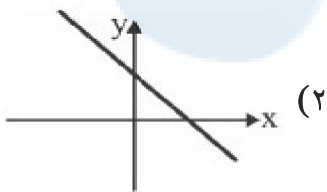
- (۱) $[0, 2]$
- (۲) $[1, 3]$
- (۳) $[0, 2)$
- (۴) $[0, 3]$

۱۰۰- برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $\left[\sqrt{n^2 - 2n} \right] - 2 \left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right]$ کدام است؟ (ابعاد [] به

مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) ۲
- (۲) ۱
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۰۱- اگر $f(x) = \sqrt{x} + 2$ و $g(x) = 2 - \sqrt{x}$ باشند، نمودار تابع $y = f(x) \times g(x)$ کدام است؟



۱۰۲- اگر $f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}$ و $g = \{(0, 0), (1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ باشد، تابع $\frac{f}{g} + \frac{g}{f}$ کدام است؟

- (۱) $\left\{ \left(1, \frac{5}{2}\right), (2, 2) \right\}$
- (۲) $\{(0, 0), (2, 2)\}$
- (۳) $\left\{ \left(1, \frac{5}{2}\right), (2, 1), (1, 2) \right\}$
- (۴) $\left\{ (0, 0), \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 2) \right\}$

۱۰۳- اگر رابطه‌ی $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

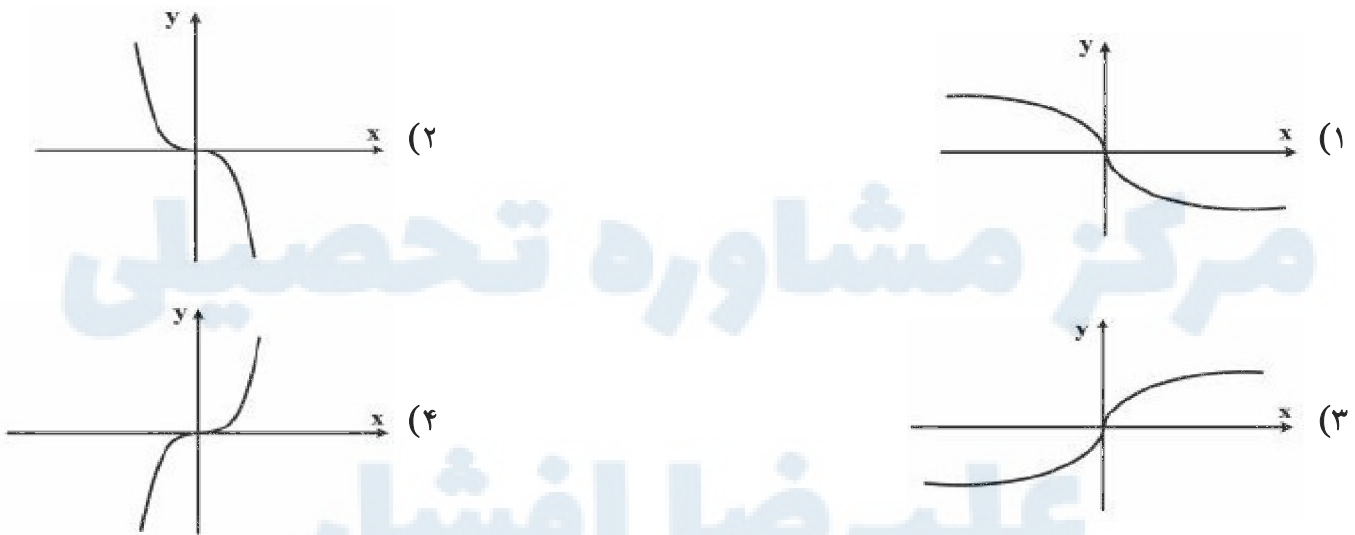
(۱) $(-1, 1)$

(۲) $(-1, 3)$

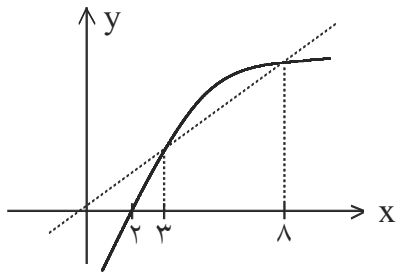
(۳) $(2, 1)$

(۴) $(2, 3)$

۱۰۴- اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟



۱۰۵- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



(۴) $[3, 8]$

(۳) $[2, 8]$

(۲) $[2, 3]$

(۱) $(0, 2]$

۱۰۶- فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3) + g(15)$ کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۱۰

(۲) ۱۱

(۱) ۱۲

۱۰۷- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x + 6}{1 - x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{3}{5}$

(۱) $\frac{2}{5}$

۱۰۸- دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (4, 1), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x + 9}$ مفروض‌اند.

اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۳

(۱) ۲

۱۰۹- با فرض $x \geq 2$ و $f(x) = x^2 - 4x + 9$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$ ، حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ ، کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۱۰- تابع $y = f(x)$ یک تابع خطی و دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{f^{-1}(2x) - x^2}$ بازه‌ی $[-1, 3]$ است. طول نقطه‌ی تلاقی تابع $y = f(x)$ با نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم کدام است؟

(۱) $0/5$ (۲) ۱ (۳) $1/5$ (۴) ۲

۱۱۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ را در نظر بگیرید. $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

(۱) $\text{Log}_2(-1 + \sqrt{5})$ (۲) $\text{Log}_2(1 + \sqrt{5})$

(۳) $\text{Log}_2(2 + \sqrt{5})$ (۴) $\text{Log}_2(3 + \sqrt{5})$

۱۱۲- فرض کنید در دامنه‌ی $[0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ مفروض باشد. $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

(۱) $\text{Log}_2(2 - \sqrt{3})$ (۲) $\text{Log}_2(\sqrt{3} - 1)$ (۳) $\text{Log}_2(1 + \sqrt{3})$ (۴) $\text{Log}_2(2 + \sqrt{3})$

۱۱۳- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه‌ی $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه‌ی چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۱۴- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه‌ی $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه‌ی دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۱۵- اگر دو خط به معادلات $ax + by = 8$ و $2x - 3y = b$ ، نسبت به نیمساز ربع اول، متقارن باشند. $a + b$ کدام است؟

- (۱) ± 3 (۲) ± 2 (۳) $2, -3$ (۴) $-2, 3$

۱۱۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $-1, -4$ (۲) $-1, 4$ (۳) $1, -4$ (۴) $1, 4$

۱۱۷- اگر $x \geq 1$ ؛ $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{4}$ با کدام طول، متقاطع

هستند؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۱۱۸- ضابطه‌ی وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ ، کدام است؟

(۱) $-x^2$ (۲) x^2 (۳) $x|x|$ (۴) $-x|x|$

۱۱۹- ضابطه‌ی معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ ، به کدام صورت است؟

(۱) $y = x \sqrt{|x|} ; x \in \mathbb{R}$ (۲) $y = x \sqrt{|x|} ; x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(۳) $y = x|x| ; x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $y = x|x| ; x \in \mathbb{R}$

۱۲۰- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}x + 1, x \geq 4$ (۲) $\frac{1}{4}x - 1, x \leq 4$ (۳) $\frac{1}{4}x - 1, x \geq 4$ (۴) $\frac{1}{4}x + 1, x \leq 4$

۱۲۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ ، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

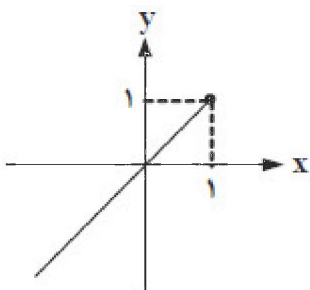
(۱) $-x + 7 ; x > 8$ (۲) $\frac{1}{3}x + 2 ; x > 3$

(۳) $x + 7 ; x > -4$ (۴) $\frac{1}{2}x - 1 ; -4 < x < 8$

۱۲۲- اگر $f(x) = 2 - \sqrt{x-3}$ باشد، دامنه $g(x) = f \circ f^{-1}(x)$ کدام است؟
 (۱) $[3, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $(-\infty, 3]$ (۴) \mathbb{R}

۱۲۳- اگر نمودار تابع $(f^{-1} \circ f)(x)$ به صورت زیر باشد، آنگاه ضابطه $f(x)$ کدام مورد می‌تواند باشد؟

(۱) $x+1$ (۲) $\sqrt{x}-1$ (۳) $1-\sqrt{1-x}$ (۴) $1-\sqrt{x}-1$



۱۲۴- با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$ اگر $f(x) = 2x - 1$ آنگاه $g(0)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

مرکز مشاوره تحصیلی

۱۲۵- اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه $g(f(x))$ کدام است؟
 (۱) x (۲) $-x$ (۳) $-x-1$ (۴) $x+1$

علیرضا افشار

۱۲۶- تابع $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$ مفروض اند، اگر $(4,1) \in \text{gof}$ باشد، $(4,2) \in \text{fog}$ باشند، دو تایی (a,b) کدام است؟

(۱) $(3,4)$ (۲) $(4,3)$ (۳) $(4,5)$ (۴) $(5,4)$

۱۲۷- دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -2$ باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟

(۱) $R - Z$ (۲) Z (۳) R (۴) ϕ

۱۲۸- تابع با ضابطه ی $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول های ۶ و $\frac{1}{4}$ قطع کند، آن گاه نمودار تابع fog ، محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

(۱) $\frac{1}{4}$ و ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ و ۹ (۳) $\frac{1}{4}$ و ۴ (۴) ۴ و ۹

۱۲۹- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند. دامنه ی تابع fog ، کدام است؟

(۱) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

۱۳۰- اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \text{Log}(x^2 - 15x)$ باشند، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

(۱) $(0, 5] \cup [20, 25)$ (۲) $(15, 20]$ (۳) $(15, 20]$ (۴) $[-5, 0)$

(۱) $(0, 5] \cup [20, 25)$ (۲) $(15, 20]$ (۳) $(15, 20]$ (۴) $[-5, 0)$

۱۳۱- اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

(۱) $[0, 2)$ (۲) $[0, 3)$ (۳) $[0, 4)$ (۴) $[1, 4)$

۱۳۲- اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

(۱) $2x^2 + 3x + 1$ (۲) $2x^2 - 2x + 3$ (۳) $2x^2 - x + 4$ (۴) $2x^2 + x + 3$

۱۳۳- فرض کنیم $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x} - 4$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ باشند، در این صورت $f(x)$ کدام است؟

(۱) $x^2 - 4$ (۲) $x^2 - 2$ (۳) x^2 (۴) $x^2 + 2$

۱۳۴- اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ ، مقدار $g(-2)$ کدام است؟

(۱) 0 (۲) 1 (۳) -1 (۴) 2

۱۳۵- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ ، مقدار $g(1)$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۳۶- تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

(۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$

۱۳۷- تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| - |x-2|$ در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

(۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

۱۳۸- اگر نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ اکیداً یکنوا باشد، a چند مقدار صحیح می‌تواند اختیار کند؟

(۱) ۰ (۲) بی‌شمار (۳) ۱ (۴) ۳

۱۳۹- تابع $f(x) = x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه کرده و آن را $g(x)$ می‌نامیم. اگر دامنه تابع $y = \sqrt{g(3x-2) - g(x^2)}$ به صورت $[a, b]$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴۰- اگر $f(x)$ تابع صعودی گذرا بر مبدأ مختصات باشد آنگاه دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

- (۱) برد f (۲) \mathbb{R} (۳) دامنه f (۴) \mathbb{R}^+

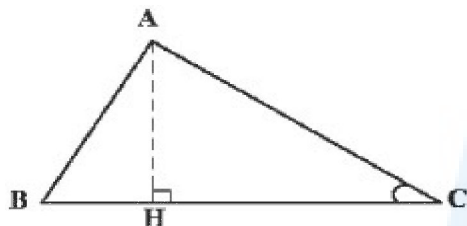


مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

مثلثات

۱۸۲- در شکل زیر، $\text{Cotg} C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$. اندازه‌ی ارتفاع AH ، کدام است؟



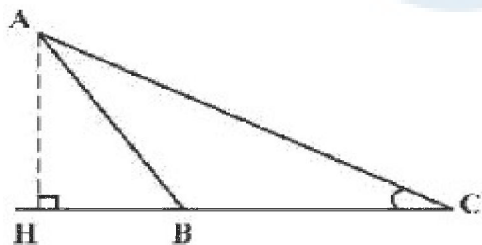
۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۵۶ (۲)

۴۸ (۱)

۱۸۳- در شکل زیر، فرض کنید $\text{Sin} C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$. اندازه‌ی ارتفاع AH ، کدام است؟



۳/۷۵ (۴)

۳/۶ (۳)

۳/۵ (۲)

۳/۲۵ (۱)

۱۸۴- اندازه‌ی دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه‌ی ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۵۴ (۲)

۴۸ (۱)

۱۸۵- در مثلث ABC ، $\hat{B} = 60^\circ$ ، $\hat{A} = 75^\circ$ و $AB = \sqrt{3}$ می‌باشد، فاصله C تا پای عمود بر BC کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) 2 (۳) $1/5\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۱۸۶- اگر $0 < (\sqrt{-2\cos\alpha - 1}) \cdot (2\sin\alpha \cdot \cos\alpha)$ باشد، آنگاه انتهای کمان α در کدام ناحیه قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۸۷- خطی گذرا بر نقطه $(\sqrt{3}, 1)$ با خط $y = \sqrt{3}x$ زاویه 30° می‌سازد، عرض از مبدأ آن با علامت منفی کدام است؟

- (۱) -1 (۲) -2 (۳) -3 (۴) -4

۱۸۸- اگر $\frac{3\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل $(2\sin^2(\frac{\pi}{4}) - \sin^2 x) \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ ، کدام است؟

- (۱) $\sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $-\sin x$ (۴) $-\cos x$

۱۸۹- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\cos^2 x$ (۲) $-\cos x$ (۳) $\cos^2 x$ (۴) $\cos x$

۱۹۰- اگر $\sin x + \operatorname{tg} x > 0$ و $\frac{1}{\cos x} - \sin x \operatorname{tg} x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه است؟
 (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۹۱- حاصل $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$ کدام است؟

(۱) $\sin^2 \theta$ (۲) $\cos^2 \theta$ (۳) $\tan^2 \theta$ (۴) $\cot^2 \theta$

۱۹۲- اگر انتهای کمان α در ناحیه اول دایره مثلثاتی باشد، عبارت $\sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

برابر کدام است؟
 (۱) $-\operatorname{tg} \alpha$ (۲) $-\operatorname{Cotg} \alpha$ (۳) $\operatorname{tg} \alpha$ (۴) $\operatorname{Cotg} \alpha$

۱۹۳- اگر $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1}{4}$ ، حاصل $\frac{1 + \sin x}{\cos x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۹۴- حاصل عبارت $\operatorname{tg}(255) \cos(1095) - \operatorname{tg}(285) \operatorname{tg}(-165)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند.)

(۱) $\sin^2(15)$ (۲) $\cos^2(15)$ (۳) $-\sin^2(15)$ (۴) $-\cos^2(15)$

۱۹۵- حاصل عبارت $\text{tg}(30^\circ)\text{Cos}(21^\circ) + \text{tg}(48^\circ)\text{Sin}(84^\circ)$ کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند.)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۱۹۶- حاصل عبارت $\frac{\text{Sin } 25^\circ + \text{Sin } 70^\circ}{\text{Cos } 56^\circ - \text{Cos } 11^\circ}$ ، با فرض $\tan 20^\circ = 0.4$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۱۹۷- حاصل عبارت $\text{Sin}\left(\frac{17\pi}{3}\right)\text{Cos}\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \text{tg}\left(\frac{19\pi}{4}\right)\text{Sin}\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۹۸- دو قرقره که به وسیله یک تسمه به هم وصل هستند، به گونه‌ای ساخته شده‌اند که شعاع قرقره کوچک‌تر $\frac{6}{5}$ باشد و هرگاه قرقره کوچک‌تر $\frac{7}{8}$ دور می‌چرخد قرقره بزرگ‌تر $\frac{1}{16}$ دور بچرخد، شعاع قرقره بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱) ۹۱ (۲) ۹۲ (۳) ۹۳ (۴) ۹۴

علیرضا افشار

۱۹۹- در چرخ و فلکی به شعاع ۳ که فاصله مرکز آن تا سطح زمین ۴ می باشد، اگر شخصی از پایین ترین نقطه سوار شده و به اندازه $\frac{14\pi}{3}$ چرخیده باشد، فاصله او از سطح زمین کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{5}{5}$ (۳) $4 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ (۴) $4 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$

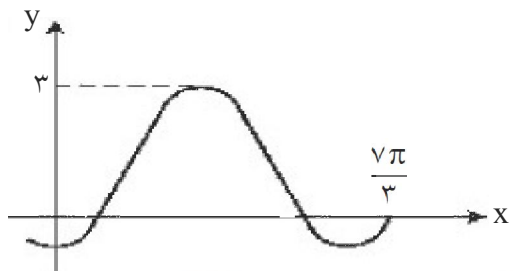
۲۰۰- مخروطی با شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ واحد بر روی صفحه‌ای گسترده شده است. زاویه قطاع حاصل چند درجه است؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۱۴ (۴) ۲۱۶

۲۰۱- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ است. مقدار b ، کدام

است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

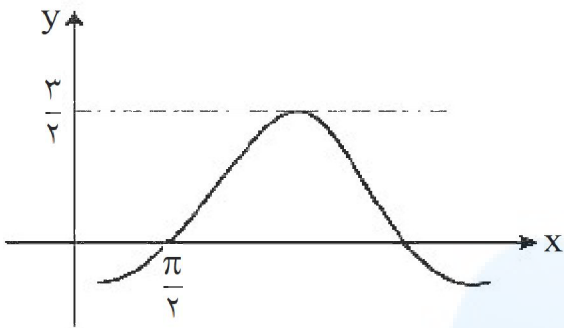


مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

۲۰۲- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی

$y = a + b\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. مقدار a ، کدام است؟



۱ (۴)

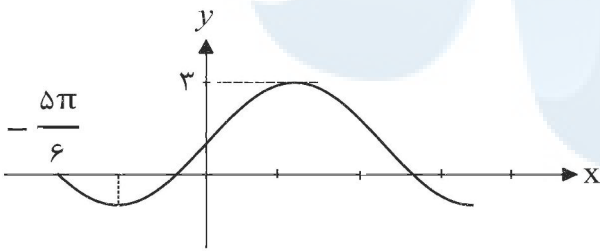
۱/۲ (۳)

-۱/۲ (۲)

-۱ (۱)

۲۰۳- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟



$1 + \sqrt{3}$ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

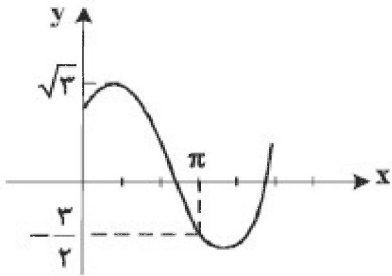
۱/۵ (۱)

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

۲۰۴- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است.

b کدام است؟



(۴) ۲

(۳) $\sqrt{3}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۰۵- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{4} + 2 \cos mx$

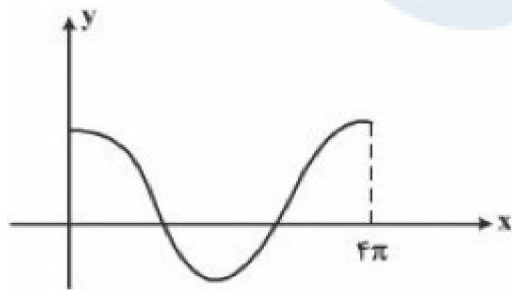
است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{16\pi}{3}$ ، کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $-\frac{1}{2}$

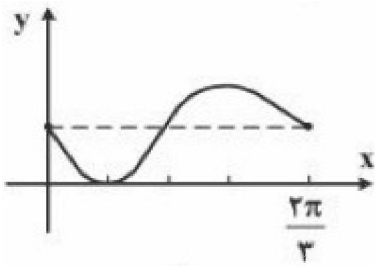


مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

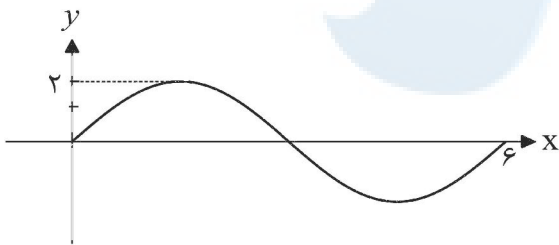
۲۰۶- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲



۲۰۷- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$



مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

۲۰۸- شکل زیر نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ در بازه $(0, 4)$ است.

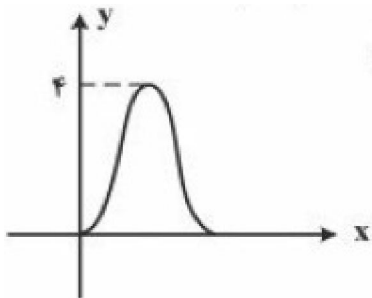
b کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)



۲۰۹- شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ در بازه $(0, \frac{4}{3})$ است.

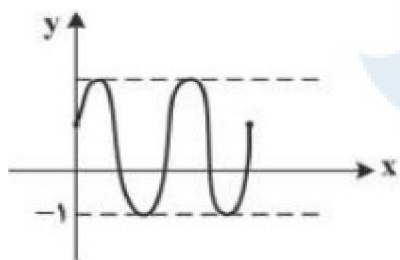
a + b کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

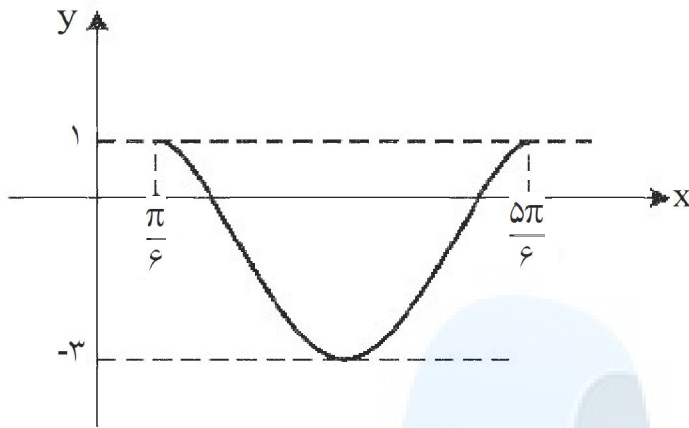
۴ (۲)

۳ (۱)



مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار



۲۱۰- شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ در یک بازه‌ی تناوب است. مقادیر b و c کدام‌اند؟

(۴) $b = \frac{3}{2}, c = -1$

(۳) $b = \frac{3}{2}, c = -2$

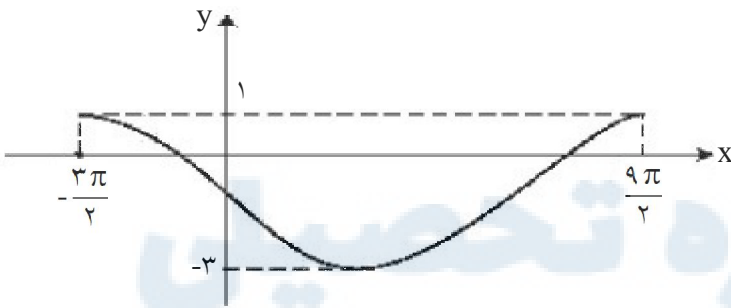
(۲) $b = 3, c = -2$

(۱) $b = 3, c = -1$

۲۱۱- شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه‌ی تناوب، نشان می‌دهد.

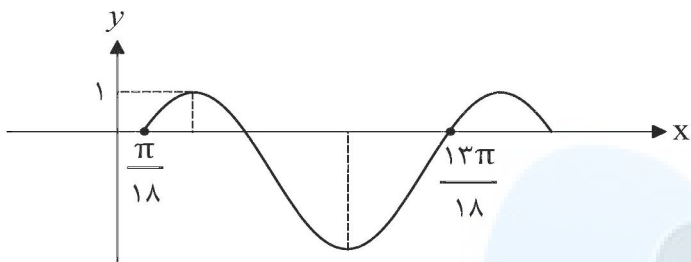
نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟

(۴) -۶ (۳) -۴ (۲) -۳ (۱) -۲



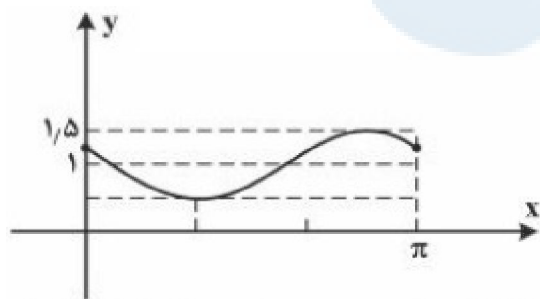
۲۱۲- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟

- ۲ (۴)
- $\frac{3}{2}$ (۳)
- ۱ (۲)
- $\frac{1}{2}$ (۱)



۲۱۳- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + a \sin\left(bx - \frac{\pi}{6}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟

- ۲ (۴)
- $\frac{3}{2}$ (۳)
- ۱ (۲)
- $\frac{1}{2}$ (۱)



مرکز مشاوره تحصیلی

۲۱۴- نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ ، روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

- ۵ (۴)
- ۴ (۳)
- ۳ (۲)
- ۲ (۱)

علیرضا افشار

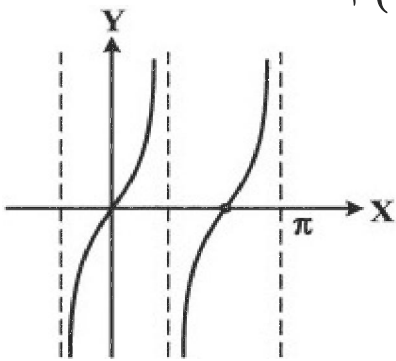
۲۱۵- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \tan bx$ است. b کدام است؟

(۴) ۲

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{1}{2}$



۲۱۶- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = \text{tg}(ax)$ در آن اکیداً نزولی است برابر ۴ می‌باشد. مقدار $f\left(\frac{16}{3}\right)$

کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۲) $-\sqrt{3}$

(۲) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۱) ۱

۲۱۷- اگر $f(x) = \sin x$ ، $g(x) = \tan x$ و $x \in (\pi, 2\pi) - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ باشد، کدام درست است؟

(۱) همواره $g(x) > f(x)$ (۲) همواره $g(x) < f(x)$

(۳) ابتدا $g(x) < f(x)$ و سپس $g(x) > f(x)$ (۴) ابتدا $g(x) > f(x)$ و سپس $g(x) < f(x)$

۲۱۸- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{3}{8}$

(۲) $-\frac{3}{8}$

(۱) $-\frac{3}{4}$

۲۱۹- کمترین مقدار عبارت $2 + \sin x \cos x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) $\frac{3}{2}$

۲۲۰- اگر $\text{tg } x + \text{Cotg } x = 4$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۲۱- اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^4 x$ باشند، ضابطه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4} \sin^2 2x$ (۲) $-\frac{1}{4} \sin^2 2x$ (۳) $\frac{1}{4} \cos^2 2x$ (۴) $\frac{1}{4} \cos^2 2x$

۲۲۲- خلاصه شده عبارت $\text{tg } 20^\circ (1 + \cos 40^\circ)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sin 20^\circ$ (۲) $\sin 40^\circ$ (۳) $\cos 20^\circ$ (۴) $\cos 40^\circ$

۲۲۳- عبارت $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \times \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\text{tg } \frac{\alpha}{2}$ (۲) $\text{tg } \alpha$ (۳) $\text{Cotg } \alpha$ (۴) $\text{Cotg } \frac{\alpha}{2}$

۲۲۴- حاصل $\cos 105^\circ \cos 165^\circ$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$
- (۲) $-\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $\frac{1}{2}$

۲۲۵- حاصل $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{7\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $-\frac{1}{4}$
- (۴) $-\frac{1}{3}$

۲۲۶- حاصل عبارت $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) $\cos 20^\circ$
- (۳) $\sin 20^\circ$
- (۴) ۱

۲۲۷- ساده شده عبارت $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟

- (۱) $\cos \alpha - \sin \alpha$
- (۲) $\cos 2\alpha$
- (۳) $1 + \sin 2\alpha$
- (۴) $1 - \sin 2\alpha$

مرکز مشاوره تحصیلی

۲۲۸- ساده شده ی کسر $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$ کدام است؟

- (۱) $8 \cos^{-2} 2\theta$
- (۲) $8 \sin^{-2} 2\theta$
- (۳) $16 \cos^{-4} 2\theta$
- (۴) $16 \sin^{-4} 2\theta$

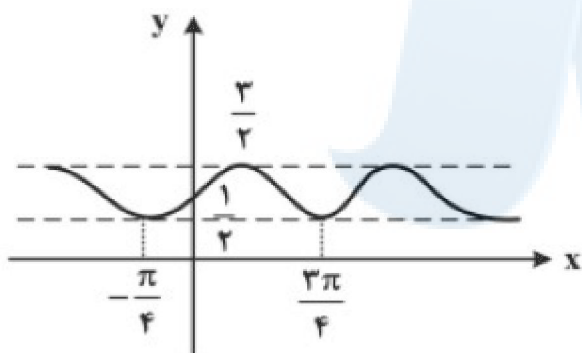
۲۲۹- حاصل عبارت $\frac{2(1 + \sin x)}{1 + \cos x}$ کدام است؟

(۱) $\left(1 + \cotg \frac{x}{2}\right)^2$ (۲) $\left(1 - \tg \frac{x}{2}\right)^2$

(۳) $\left(1 + \tg \frac{x}{2}\right)^2$ (۴) $\left(1 - \cotg \frac{x}{2}\right)^2$

۲۳۰- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳



۲۳۱- اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ چه قدر است؟

(۴) ۲/۵

(۳) ۲/۴

(۲) ۱/۸

(۱) ۱/۵

علیرضا افشار

۲۳۲- اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $-\frac{3}{2}$

۲۳۳- هرگاه در مثلث ABC، $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2} = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{Cotg} \frac{A}{2}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳۴- اگر $5(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{10}$ باشد مقدار $\operatorname{tg} x$ کدام است؟

(۱) -۳ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۳

۲۳۵- اگر $\frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = \frac{1}{8}$ باشد، حاصل $\sin 4\alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۲۳۶- اگر $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4$ باشد، مقدار $\operatorname{tg}(\frac{x}{2})$ کدام است؟

(۱) -۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۳

۲۳۷- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ ، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π

۲۳۸- تعداد جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $4 \sin(3x) \cos(3x) = 1$ ، در بازه‌ی $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ، کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۲۳۹- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ ، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ ، کدام

است؟

(۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) $\frac{7\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) 3π

۲۴۰- معادله‌ی $\cos^3 x + 3 \cos x = 4$ ، چند جواب در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ دارد؟

(۴) ۲

(۳) ۴

(۲) صفر

(۱) ۱

۲۴۱- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ ، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

(۴) 5π (۳) 4π (۲) 3π (۱) $\frac{5\pi}{2}$

۲۴۲- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ ، کدام است؟

(۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۲۴۳- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x = 1 - 2 \tan x$ به کدام صورت است؟

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

۲۴۴- معادله‌ی $\tan x + \cot x = \sqrt{3}$ چند ریشه در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۴۵- تعداد جوابهای معادله $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin x \cos x} = 2\sqrt{3}$ در فاصله $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۴۶- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin^3 x + \sin x}{\sin x} = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۲۴۷- جواب کلی معادله $\sin 2x + 2 \cos^2 2x = 1 + \cos 2x$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi$ (۳) $(2k+1)\pi$ (۴) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$

۲۴۸- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲۴۹- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ ، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 3π (۳) $\frac{7\pi}{2}$ (۴) 4π

۲۵۰- انتهای کمان x از معادله $\cos 2x \sin x = \cos 2x$ بر روی دایره‌ی مثلثاتی رأسهای کدام چند ضلعی است؟

- (۱) شش ضلعی غیر منتظم (۲) پنج ضلعی منتظم
(۳) شش ضلعی منتظم (۴) پنج ضلعی غیر منتظم

۲۵۱- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin 3x + \sin x = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $k\frac{\pi}{2}$ (۲) $k\pi$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۲۵۲- جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ، با شرط $x \neq k\pi$ ، که در آن k یک

عدد صحیح است، کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

۲۵۳- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۲۵۴- جواب‌های کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعه مقادیر i کدام است؟

(۱) $\{7, 9\}$ (۲) $\{1, 3, 5\}$ (۳) $\{1, 4, 7\}$ (۴) $\{1, 5, 9\}$

۲۵۵- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$ به کدام صورت است؟

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

۲۵۶- مجموع تمام جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x = \cos^4 x$ ، در بازه $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟

(۱) $\frac{7\pi}{4}$ (۲) $\frac{9\pi}{4}$ (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$

۲۵۷- جواب‌های معادله $2\cos x(\sin x + \cos x) = 1$ به کدام صورت است؟

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۲۵۸- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

$$\frac{7\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{5\pi}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (۱)$$

۲۵۹- نمودار تابع $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیش‌ترین مقدار را دارد؟

$$۲ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

مرکز مشاوره تحصیلی

علیرضا افشار

۷۴- با قرار دادن $x = 2$ و $x = -2$ در معادله داده شده، داریم:

$$\begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 5 \\ f(-2) - 2f(2) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 5 \\ -2f(-2) + 4f(2) = -10 \end{cases} \Rightarrow 5f(2) = -5 \Rightarrow f(2) = -1$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۷۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر $g(x) = b$ ثابت باشد، داریم:

$$h(1) = |1 + 5| = 6 = f(1) - g(1) = 1 - b \Rightarrow b = -5$$

$$h(-1) = f(-1) - g(-1) = -1 - (-5) = 4$$

۷۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) + 2f(0) = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow f(0) + 2f(1) = 4$$

$$\begin{cases} f(1) + 2f(0) = 2 \\ -2 \{ f(0) + 2f(1) = 4 \} \Rightarrow -2f(1) = -6 \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow f(0) = 0 \end{cases}$$

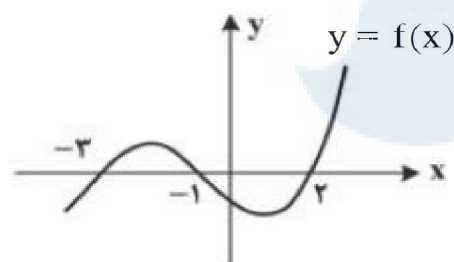
نقاط $(0,0)$ و $(1,2)$ روی خط $y = mx + h$ قرار دارند.

خط از مبدأ مختصات می‌گذرد، در نتیجه $h = 0$

$$2 = m(1) \Rightarrow m = 2$$

$$m + h = 2 + 0 = 2$$

۷۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow \sqrt{\underbrace{(x+1) \cdot f(x)}_{g(x)}} \text{ تابع } = ?$$

x	-3	-1	2
x+1	-	-	+
f(x)	-	+	-
g(x)	+	-	+

$$g(x) \geq 0$$

$$(-\infty, -3] \cup \{-1\} \cup [2, +\infty)$$

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} = \frac{x^3 + 3 - 1}{x^2 + 3} = 1 - \frac{1}{x^2 + 3}$$

$$0 < \frac{1}{x^2 + 3} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{x^2 + 3} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} \right] = 0$$

$$f(x) = 0, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0, \quad D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

۷۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۷۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تساوی دو تابع f و g فقط در گزینه‌ی ۴ درست است، زیرا:

$$f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{1-x}$$

$x \geq 0$ اشتراک $x \leq 1 \Rightarrow D_f = [0, 1] = D_g$

$$g(x) = \sqrt{x(1-x)} \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: $D_g = (0, +\infty) \neq D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ هر چند: $R_f = R_g = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

گزینه ۲: $D_g = \mathbb{R} - \{0\} \neq D_f = \mathbb{R}$ ضمناً: $R_f = \{1\} \neq R_g = \{-1, 1\}$

گزینه ۳: $D_g = \mathbb{R} - \{1\} \neq D_f = \mathbb{R}$; $R_f = R_g = \{1\}$

۸۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{4-x^2}{1+4x^2} \Rightarrow x^2(4y+1) = 4-y \Rightarrow x^2 = \frac{4-y}{1+4y} \Rightarrow -\frac{1}{4} < y \leq 4$$

دامنه تابع $[-\frac{1}{4}, 4]$ است.

۸۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \sqrt{5 - (x^2 - 4x)} \Rightarrow y = \sqrt{9 - (x-2)^2}$$

پیدا است که $0 \leq y \leq \sqrt{9}$ در نتیجه $y \in [0, 3]$

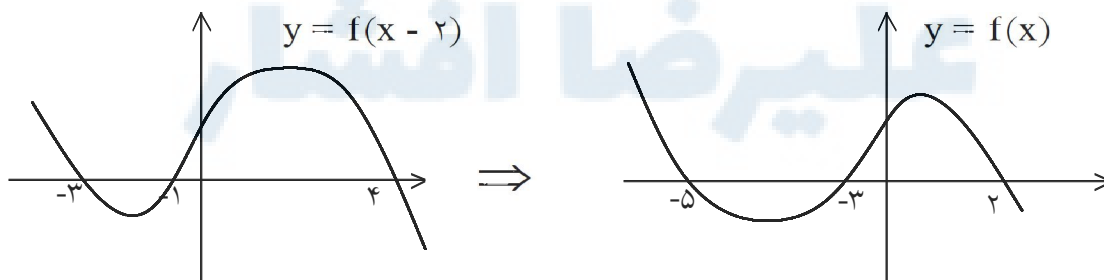
۸۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تابع جدید: $y = ((x+2)^2 - (x+2) - 3) - 9 = x^2 + 3x - 10 < 0$
 $\Rightarrow (x+5)(x-2) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$

۸۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

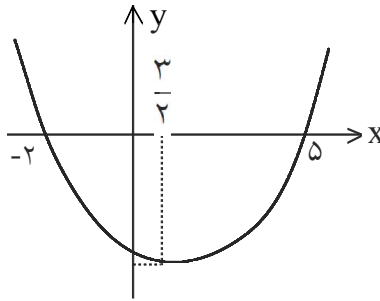
تابع جدید: $y = (-(x-3)^2 + 2(x-3) + 5) - 2 \Rightarrow y = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3$
 $\Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow -x^2 + 7x - 12 > 0 \Rightarrow 3 < x < 4$
 $x = 3, x = 4$

۸۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که نمودار $y = f(x-2)$ داریم برای رسم $y = f(x)$ باید نمودار را دو واحد به طرف چپ منتقل کنیم.



$$\sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geq 0 \xrightarrow{\text{هم علامت باشند}} \begin{cases} x \geq 0 \text{ و } f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2] \\ x \leq 0 \text{ و } f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, -3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = [-5, -3] \cup [0, 2]$$



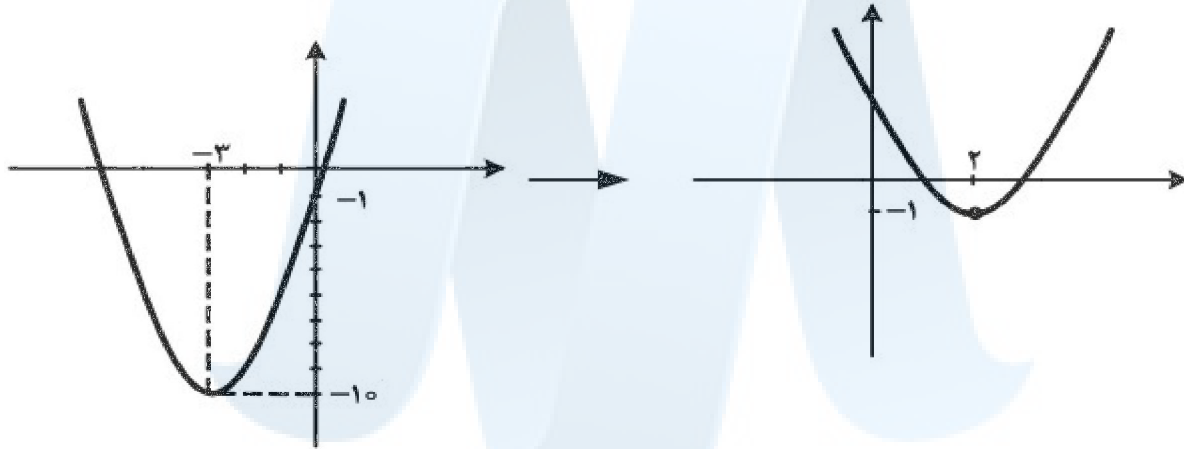
۸۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 10$ یک سهمی قائم است که محور Xها را در دو نقطه قطع می‌کند.

با توجه $y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -2$ به آن که سهمی محور Xها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع کرده است. اگر سهمی را ۲ واحد به طرف Xهای مثبت انتقال دهیم، سهمی از مبدأ خواهد گذشت و دیگر طول تلاقی‌اش با محور Xها منفی نیست. به نمودار روبه‌رو دقت کنید.

۸۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حالت مربع کامل دو تابع به همراه نمودارشان به شکل زیر است:

$$y = x^2 + 6x - 1 = (x + 3)^2 - 10$$

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$$

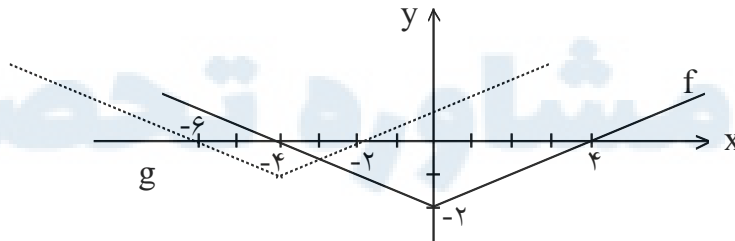


کافی است نمودار $y = x^2 + 6x - 1$ ، ۵ واحد به راست و ۹ واحد به بالا منتقل شود.

۸۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{1}{2}|x| - 2$$

x	-4	0	4
y	0	-2	0

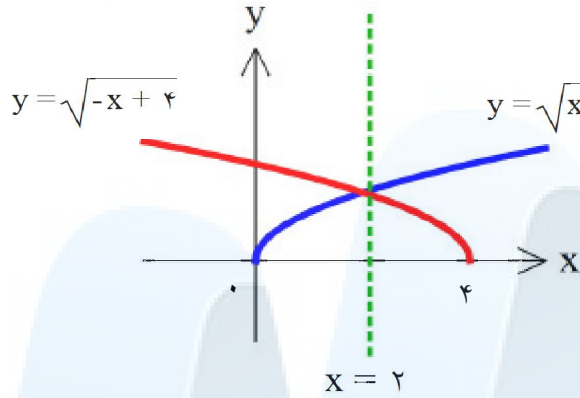


$$g(x) = \left(\frac{1}{2}|x + 4| - 2\right) + 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}|x + 4| - 1$$

x	-6	-4	-2
y	0	-1	0

$$\text{نقطه‌ی برخورد: } \frac{1}{2}(x + 4) - 1 = -\frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow x + 4 - 2 = -x - 4 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$$

۸۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا باید به جای x ، $x - 4$ قرار دهیم (۴ واحد به طرف راست) و سپس حاصل را قرینه کنیم (قرینه نسبت به محور y ها). دو نمودار $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt{-(x - 4)}$ را رسم می‌کنیم.



۸۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با کمک ترسیم قرینه نسبت به مبدأ مختصات و انتقال روی محور عرض‌ها داریم:

$$y = (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y = -(-x - 1)^2 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = -(-x - 1)^2 + 4$$

$$-(-x - 1)^2 + 4 = (x - 1)^2 \Rightarrow -x^2 - 2x - 1 + 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow -2x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm 1$$

۹۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{قرینه محور } x \text{ ها}} f(x) = -x^2 + 2x \xrightarrow{+16 \text{ محور } y \text{ ها}}$$

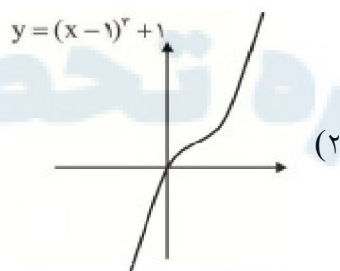
$$f(x) = -x^2 + 2x + 16 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ ق} \\ x = 4 & \text{ق ق } (x > 1) \end{cases} \Rightarrow A \begin{matrix} 4 \\ 8 \end{matrix}$$

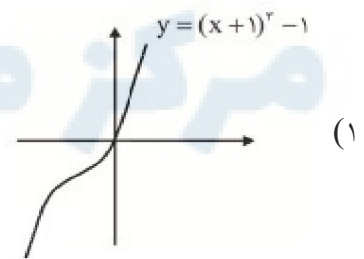
$$OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

۹۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

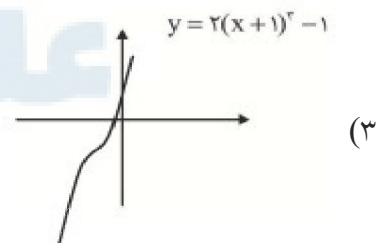
ابتدا عبارت‌ها را به صورت مکعب کامل در می‌آوریم فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.



(۲)



(۱)

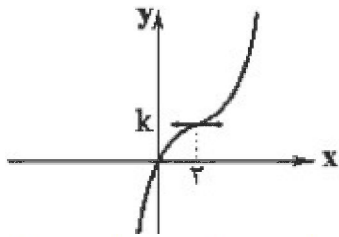


(۳)

گزینه ۴ نزولی بوده و نمی‌تواند جواب باشد.

۹۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تابع موردنظر به صورت $y = (x - 2)^3$ است که از انتقال تابع $f(x) = x^3$ به دست آمده است و مراحل تشکیل تابع به صورت مقابل است:



$$f(0) = k - 8 \leq 0 \Rightarrow k \leq 8$$

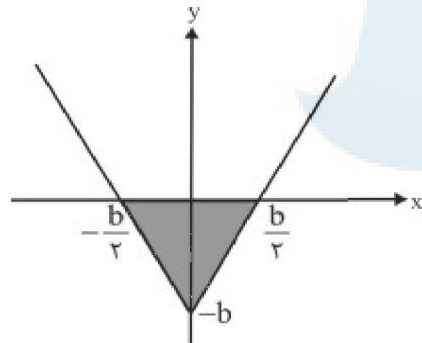
ابتدا x^3 را دو واحد به سمت راست و سپس k واحد به صورت عرضی منتقل کرده‌ایم. حداکثر مقداری که می‌توان تابع را به بالا منتقل کرد تا از ناحیه دوم عبور نکند، به صورت مقابل است: پس باید $f(0) \leq 0$ باشد

۹۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

متناظر نقطه $A(x, y) \in f$ نقطه $A'(\frac{x_0 + 1}{2}, 3y_0 + 4)$ است، پس:

$$A'(1, -8)$$

۹۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع حاصل $y = |2x| - b$ است. پس:



$$\Rightarrow 72 = \frac{1}{2} \times b \times b \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow b = 12$$

۹۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دامنه و برد تابع $f(x)$ به ترتیب $[-1, 5]$ و $[2, 3]$ می‌باشد، پس دامنه و برد تابع $g(x) = -2f(-3x - 4) + 1$ برابر است با:

$$D_g = \left[\frac{5+4}{-3}, \frac{-1+4}{-3} \right] = [-3, -1] \Rightarrow D_f \cap D_g = \{-3\}$$

$$R_g = [-2(3) + 1, (-2)(2) + 1] = [-5, -3]$$

۹۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر $x^2 + x < 0$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $-1 < x < 0$ است. حال برای تعیین حاصل

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \\ \begin{matrix} \text{به توان ۲ می‌رسانیم} \\ -1 < x < 0 \end{matrix} \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \\ \begin{matrix} \text{به توان ۳ می‌رسانیم} \\ -1 < x < 0 \end{matrix} \Rightarrow -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1 \\ \begin{matrix} \text{به توان ۴ می‌رسانیم} \\ -1 < x < 0 \end{matrix} \Rightarrow 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0 \end{cases} \Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = (-1) + 0 + (-1) + 0 = -2$$

۹۷- یادآوری: تعریف جزء صحیح $n \leq x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$ می‌دانیم قدرمطلق $1 - \sqrt{2}$ کوچکتر از یک است پس داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq (1 - \sqrt{2})^6 < 1 \\ (1 - \sqrt{2})^6 + (1 + \sqrt{2})^6 = 198 \end{cases} \Rightarrow 197 < (1 + \sqrt{2})^6 < 198 \Rightarrow [(1 + \sqrt{2})^6] = 197$$

گزینه ۳ صحیح است.

۹۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$[x - 2] = 1 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4 \Rightarrow f(x) = (x - 3) + (x - 4) = 2x - 7$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow 2x^2 + x - 17 = 2x - 7 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{5}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

در فاصله‌ی $(3, 4)$ نمی‌باشند.

۹۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف جزء صحیح داریم:

$$[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow 0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow$$

$$0 \leq 2x - 2[x] < 2 \Rightarrow 1 \leq 2x - 2[x] + 1 < 3 \Rightarrow 1 \leq f(x) < 3$$

و برد تابع فاصله نیم‌باز $[1, 3)$ است.

۱۰۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{n^2 - 2n} = \sqrt{(n-1)^2 - 1} \Rightarrow n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2$$

$$\sqrt{4n^2 - 3n + 1} = \sqrt{(2n-1)^2 + n} \Rightarrow 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1$$

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = (2n-1) - 2(n-2) = 3$$

راه حل دوم: چون این رابطه برای همه اعداد طبیعی $n \geq 3$ برقرار است پس:

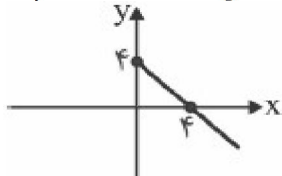
$$n=3 \Rightarrow \text{عبارت} = [\sqrt{36-9+1}] - 2[\sqrt{3}] = 3$$

۱۰۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = f(x) \times g(x) = (2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x}) = 4 - x$$

اشتراک دامنه‌ها

$$D_f : x \geq 0, D_g : x \geq 0 \xrightarrow{\text{اشتراک دامنه‌ها}} D_{f \times g} : x \geq 0$$



بنابراین خط $y = 4 - x$ فقط برای $x \geq 0$ باید رسم شود:

۱۰۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(1, \frac{2}{1}\right), \left(2, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{4}{3}\right) \right\}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right) \right\}$$

$$\frac{f}{g} + \frac{g}{f} = \left\{ \left(1, 2 + \frac{1}{2}\right), \left(2, 1 + \frac{1}{3}\right) \right\} = \left\{ \left(1, \frac{5}{2}\right), \left(2, 2\right) \right\}$$

۱۰۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

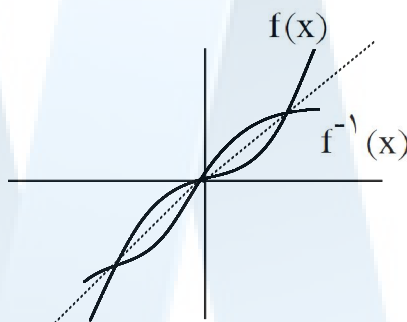
الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$$(3, 2) = (3, a^2 - a) \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

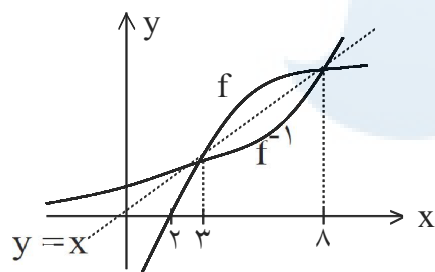
ب) شرط یک‌به‌یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند. اما از میان دو مقدار به دست آمده برای a ، باید یکی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط الف و ب کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط $a = 2$ قابل قبول می‌باشد. زیرا اگر $a = -1$ باشد، دو زوج مرتب $(-1, 4)$ و $(-1, 5)$ در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه $(a, b) = (2, 3)$ می‌باشد.

۱۰۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



۱۰۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} x - f^{-1}(x) &\geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x) \\ &\xrightarrow{\text{f اکیدا صعودی}} f(x) \geq f(f^{-1}(x)) \\ &\Rightarrow f(x) \geq x \Rightarrow x \in [3, 8] \end{aligned}$$

$$x + 2\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$x + 2\sqrt{x} = 15 \Rightarrow x = 9$$

$$g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

$$f^{-1}(20) = ?$$

$$x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} = 20 - x \Rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$$

$$(x - 25)(x - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 16 & \text{ق ق} \\ x = 25 & \text{غ ق} \end{cases}$$

$$g^{-1}(16) = ?$$

$$\frac{9x + 6}{1 - x} = 16 \Rightarrow 16 - 16x = 9x + 6 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

۱۰۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۰۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1} = \{(2, 5), (3, 7), (1, 4), (6, 3), (1, 9)\} \Rightarrow f^{-1}(3) = 7$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2 - 9}{5}$$

$$\begin{array}{c} f^{-1} \\ \rightarrow \\ 3 \end{array} \rightarrow 7 \xrightarrow{g^{-1}} 8 \Rightarrow f(g(8)) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$\begin{array}{c} f \\ \leftarrow \\ 3 \end{array} \leftarrow 7 \xleftarrow{g} 8$$

۱۰۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به ترکیب توابع و مفهوم وارون یک تابع داریم:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9))$$

$$g^{-1}(-9) = b \Rightarrow g(b) = -9 \Rightarrow \frac{3-b}{2} = -9 \Rightarrow b = 21$$

$$f^{-1}(21) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 21 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 9 = 21 \xrightarrow{x \geq 2} \alpha = 6$$

۱۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع $f^{-1}(2x) - x^2$ یک سهمی است. پس $\{3, -1\}$ صفرهای آن هستند:

$$\begin{cases} f^{-1}(-2) - 1 = 0 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 1 \Rightarrow f(1) = -2 \\ f^{-1}(6) - 9 = 0 \Rightarrow f^{-1}(6) = 9 \Rightarrow f(9) = 6 \end{cases}$$

حال تابع $y = f(x)$ را به دست می‌آوریم و تلاقی آن را با $y = -x$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ 9a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = 1, b = -3$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x - 3 = -x \Rightarrow x = 1/5$$

۱۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(2) = x \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \xrightarrow{2^x = A} \frac{A - \frac{1}{A}}{2} = 2 \Rightarrow \frac{A^2 - 1}{A} = 4$$

$$\Rightarrow A^2 - 4A - 1 = 0$$

$$A = 2 + \sqrt{5} \text{ ق ق} \Rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \text{Log}_2(2 + \sqrt{5}) \Rightarrow f^{-1}(2) = \text{Log}_2(2 + \sqrt{5})$$

$$A = 2 - \sqrt{5} \text{ غ ق غ}$$

۱۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = 2 \Rightarrow 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 + 1 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \text{Log}_2(2 + \sqrt{3}) \\ 2^x = 2 - \sqrt{3} < 0 \text{ غ ق غ} \end{cases} \xrightarrow{t = 2^x} \begin{cases} 2^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \text{Log}_2(2 + \sqrt{3}) \\ 2^x = 2 - \sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

۱۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نیمساز ناحیه چهارم $y = -x$ است.

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$

$$-x + \frac{2}{x} = x \Rightarrow \frac{2}{x} = 2x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

دامنه $x < 0$ است پس $x = -1$ قابل قبول است.

$$(-1, 1) \in f \Rightarrow (1, -1) \in f^{-1}$$

پس طول تقاطع $x = 1$ است.

۱۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

روش اول: نیمساز ناحیه دوم $y = -x$ است بنابراین نقطه موردنظر در تابع وارون برابر است با: (چون در ربع دوم است باید a منفی باشد)

$$(a, -a) \in f^{-1} \Rightarrow (-a, a) \in f \Rightarrow f(-a) = a$$

$$\Rightarrow -a + \frac{1}{2a} = a \Rightarrow \frac{1}{2a} = 2a \Rightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{غ ق ق} \\ a = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

روش دوم: $f^{-1}(x) = -x$ $f(x) = x - \frac{1}{2x}$

بد $x = -2$

$$f^{-1}(x) = -x$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2x}$$

$$f^{-1}(-1) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1$$

$x = -\frac{1}{2}$

$$f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \text{خوب}$$

۱۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن قرینه‌ی هر نقطه یا منحنی نسبت به نیمساز ربع اول، کافی است

قرینه نسبت به $y=x$

$$ax + by = 8 \xrightarrow{y=x} bx + ay = 8$$

جای x و y را باهم عوض کنیم.

این خط باید بر خط $2x - 3y = b$ منطبق باشد، پس:

$$\frac{b}{2} = \frac{a}{-3} = \frac{8}{b} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a + b = -2 \\ b = -4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 2 \end{cases}$$

علیرضا افشار

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = x + 4 \Rightarrow xy - x = 2y + 4 \Rightarrow x(y-1) = 2y + 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{2x+4}{x-1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-1}, \quad x \neq 1$$

برای یافتن محل برخورد دو نمودار باید برابر یکدیگر قرار دهیم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow 2x^2 - 4x + 4x - 8 = x^2 + 3x - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

این دو تابع در دو نقطه متقاطع هستند.

۱۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کافی است عرض محل برخورد f با وارون g⁻¹ را به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} g(x) = \frac{x-9}{2} = y \Rightarrow x-9 = 2y \Rightarrow x = 2y+9 \Rightarrow g^{-1}(x) = 2x+9 \\ f(x) = x^2 - 2x - 3, \quad x \geq 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 2x + 9 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 & \text{قق} \Rightarrow y = 2(6) + 9 = 21 \\ x = -2 & \text{قق غ}$$

۱۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow y_1 \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2 = x \Rightarrow y = x^2$$

$$x < 0 \Rightarrow \sqrt{-x} > 0 \Rightarrow -\sqrt{-x} < 0 \Rightarrow y_2 < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2 = -x \Rightarrow y = -x^2$$

$$\Rightarrow y = x|x|$$

$$y_1 \cup y_2 = \mathbb{R} \xrightarrow[\text{تابع معکوس است}]{\text{برد تابع دامنه ی}} D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad (\text{البته در این سؤال بررسی دامنه لزومی نداشت})$$

۱۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$R_f = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2, \quad y < 0 \\ y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2 = x \Rightarrow x = y^2, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} = x|x|$$

$$f(x) = 2x - |4 - 2x| = \begin{cases} 2x + 4 - 2x & x > 2 \\ 2x - 4 + 2x & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & x > 2 \\ 4x - 4 & x \leq 2 \end{cases}$$

۱۲۰- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

به ازای $x \leq 2$ تابع یک به یک و وارون پذیر است.

$$x \leq 2 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4$$

$$y = 4x - 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad (x \leq 4)$$

۱۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = |2x - 6| - |x + 1| = \begin{cases} (2x - 6) - (x + 1) & x \geq 3 \\ -2x + 6 - (x + 1) & -1 \leq x < 3 \\ -2x + 6 - (-x - 1) & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 7 & x \geq 3 \\ -3x + 5 & -1 \leq x < 3 \\ -x + 7 & x < -1 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ها مشخص است که ضابطه ی $y = x - 7$ برای $x \geq 3$ صعودی است.

$$x \geq 3 \xrightarrow{-7} x - 7 \geq -4 \Rightarrow y \geq -4$$

$$y = x - 7 \Rightarrow y + 7 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x + 7$$

نکته: در تابع معکوس جای دامنه و برد عوض می‌شود. بنابراین $y \geq -4$ برای تابع معکوس محدوده ی دامنه می‌شود.

۱۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون $2 \leq \sqrt{x-3} \leq 2$ پس $R_f = (-\infty, 2]$ است و داریم:

$$D_g = D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 2]$$

۱۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار و طبق تعریف وارون:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x; x \in D_f \Rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

بنابراین ضابطه‌های $f(x) = x + 1$ با دامنه R و $f(x) = \sqrt{x} - 1$ با دامنه ی $[0, +\infty)$ و نیز $f(x) = 1 - \sqrt{x-1}$ با دامنه ی $(1, +\infty)$ حذف می‌شوند. فقط $f(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ با دامنه $(-\infty, 1]$ می‌تواند جواب سؤال باشد.

۱۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(0) = \frac{1}{2}$$

با توجه به ماشین داده شده $g(x)$ همان $f^{-1}(x)$ است لذا:

۱۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = -x - 1 \quad \text{or} \quad 1 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} -2$$

۱۲۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا $f \circ g$ و $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f \circ g = \{(1, 1), (3, 7), (a, 2), (b, 7)\} \quad (4, 2) \in f \circ g \Rightarrow a = 4$$

با توجه به این که $(4, 1)$ در $g \circ f$ است پس:

$$g(f(4)) = 1 \Rightarrow g(5) = 1 \Rightarrow b = 5$$

۱۲۷- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} g(0) & x \in Z \\ g(-1) & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 & x \in Z \\ -2 & x \notin Z \end{cases} = -2$$

پس $g(f(x))$ همواره برابر -2 است.

$$g(x) = x - \sqrt{x}, \quad f(6) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$f \circ g(x) = 0 \Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 6 \\ g(x) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$g(x) = 6 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \\ \sqrt{x} = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$g(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

بنابراین ریشه‌ها ۹ و $\frac{1}{4}$ می‌باشند.

۱۲۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$-x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-x^2 + x + 2$	-	-	+	-
$-x^2 + x + 2 > 0$			ج	

$$D_f = (-1, 2)$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2\right\}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{1}{4}\right)^x \text{ مثبت است}} \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{-2x} < 2^1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2x < 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\} = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$D_g: x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x > 15 \text{ یا } x < 0$$

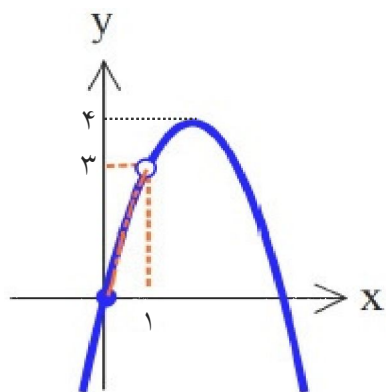
$$D_f: 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid \text{Log}(x^2 - 15x) \leq 2\}$$

$$\Rightarrow x^2 - 15x \leq 100 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 20 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_{f \circ g} = [-5, 0) \cup (15, 20]$$

۱۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



باید صدق کند $R_{f(x)} = D_{g(x)}$

$$R_{f(x)} = 0 \leq 2x - [2x] < 1 \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) = -1 + 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow R_f = [0, 3)$$

g در این بازه صعودی است

۱۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 = 2(2x + 1)^2 - (2x + 1) + 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

۱۳۳- با توجه به ضابطه داده شده :

$$f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \\ g(x) = x - \frac{1}{x} \end{array} \right\}$$

$$f(g(x)) = (g(x))^2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ است. برای تعیین مقدار $g(-2)$

، ابتدا خودمان با داشتن ضابطه f ضابطه $f(g(x))$ را ساخته و برابر $4x^2 + 6x$ قرار می‌دهیم و آن‌گاه با جایگذاری $x = -2$ مقدار $g(-2)$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 4 \Rightarrow f(g(x)) = 2g^2(x) + 4 \\ f(g(x)) = 4x^2 + 6x \end{cases} \Rightarrow 2g^2(x) + 4 = 4x^2 + 6x \Rightarrow g^2(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

$$\xrightarrow{x=-2} g^2(-2) = 2(-2)^2 + 3(-2) - 2 = 0 \Rightarrow g(-2) = 0$$

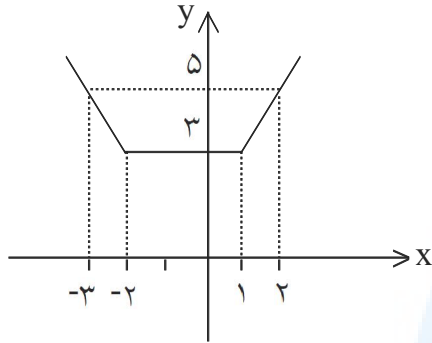
۱۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x)) = \frac{g(x) + 1}{g(x) - 1} = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{g(1) + 1}{g(1) - 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2g(1) + 2 = 3g(1) - 3 \Rightarrow g(1) = 5$$

۱۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را به کمک نقطه یابی رسم می کنیم.

$$y = |x + 2| + |x - 1|$$



نقاط شکست

x	-3	-2	1	2
y	5	3	3	5

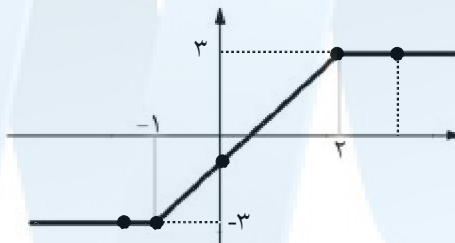
پس تابع در فاصله ی (-2, -∞) اکیداً نزولی است.

۱۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک نقطه یابی نمودار f را رسم می کنیم.

$$f(x) = |x + 1| - |x - 2|$$

نقاط شکست

x	-2	-1	2	3
y	-3	-3	3	3

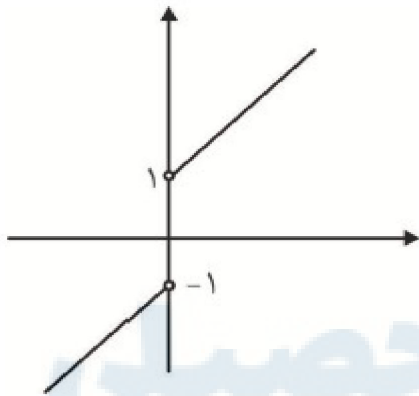


پس f در بازه ی (-1, 2) اکیداً صعودی است.

۱۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تابع با ضابطه
$$\begin{cases} 2x + 1 & x > 0 \\ a & x = 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$
 و نمودار آن به شکل مقابل

است، پس a تنها می تواند ۳ مقدار صحیح ۱ و -۱ و ۰ را اختیار کند.



۱۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تابع $g(x) = -x^3$ تابعی اکیداً نزولی است. بنابراین داریم:

$$g(3x - 2) - g(x^2) \geq 0 \Rightarrow g(x^2) \leq g(3x - 2) \Rightarrow x^2 \geq 3x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 2) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow [a, b] = [1, 2] \Rightarrow b - a = 2 - 1 = 1$$

۱۴۰- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(0) = 0$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$$

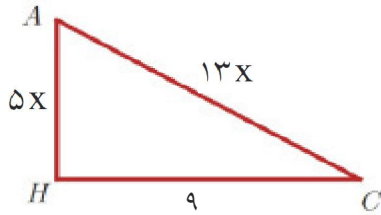
$$x < 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$$

پس علامت $xf(x)$ همواره نامنفی است و دامنه آن برابر دامنه f است.

۱۸۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا مقدار $AC = ۳$ ، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{۲} \Rightarrow \tan C = \frac{۲}{\sqrt{5}}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \times \sin C \Rightarrow AH = ۹۶ \times \frac{۲}{۳} = ۶۴$$

۱۸۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون مقدار \sin را داریم می‌توان به این صورت در نظر گرفت:
با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورت داریم:



$$(13x)^2 = (5x)^2 + 81 \Rightarrow x^2 = \frac{81}{144} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$AH = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3.75$$

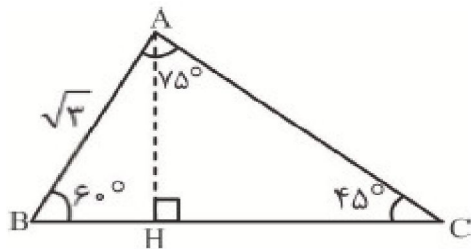
۱۸۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

$$4 \times 18 = 72$$

۱۸۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$AH = \sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \frac{3}{2}, \hat{C} = 180 - 135 = 45^\circ$$

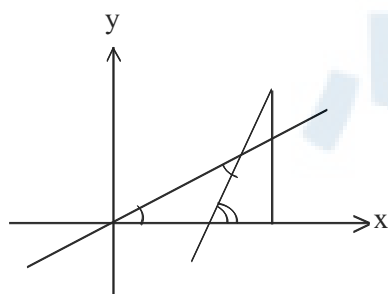
$$\Rightarrow CH = AH = \frac{3}{2} = 1.5$$

۱۸۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{-2\cos\alpha - 1} > 0 \Rightarrow \sin\alpha \cos\alpha < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha < 0, \cos\alpha > 0 \\ \sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0 \end{cases}$$

$$-2\cos\alpha - 1 > 0 \Rightarrow -2\cos\alpha > 1 \Rightarrow \cos\alpha < -\frac{1}{2}$$

در نتیجه $\cos\alpha < 0$ ، بنابراین $\sin\alpha > 0$ یعنی انتهای کمان α در ناحیه دوم قرار دارد.



۱۸۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شیب خط $y = \sqrt{3}x$ برابر با $\frac{\sqrt{3}}{۳}$ است، پس این خط با محور x زاویه 30° می‌سازد با توجه به شکل زاویه خط مطلوب با محور x ها 60° درجه است.

$$A(\sqrt{3}, 1), m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

معادله خط $y - 1 = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})$ یا $y = \sqrt{3}x - ۲$ پس عرض از مبدأ آن

-۲ است.

۱۸۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \left(\operatorname{Sin}^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{Sin}^2 x \right) = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}} (1 - \operatorname{Sin}^2 x) = \frac{1}{|\operatorname{Cos} x|} \operatorname{Cos}^2 x$$

$$= |\operatorname{Cos} x| \xrightarrow{\pi < x < \frac{3\pi}{2}} -\operatorname{Cos} x$$

۱۸۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \left(\frac{1}{\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Sin} x \right) = \frac{\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}}} \left(\frac{1 - \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Sin} x} \right)$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} \times |\operatorname{Cos} x| \left(\frac{\operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Sin} x} \right) = -\operatorname{Cos}^2 x$$

۱۹۰- با ساده‌سازی رابطه دوم خواهیم داشت :

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} x} - \operatorname{Sin} x \operatorname{tg} x < 0 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{Cos} x} - \frac{\operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos} x} < 0 \Rightarrow \frac{1 - \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos} x} < 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Cos} x} = \operatorname{Cos} x < 0$$

بنابراین کمان x در ربع دوم و سوم است. با ساده‌سازی رابطه اول :

$$\operatorname{Sin} x + \operatorname{tg} x > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{Cos} x) > 0$$

می‌دانیم همواره $1 + \operatorname{Cos} x \geq 0$ پس $\operatorname{tg} x > 0$ یعنی انتهای کمان در ربع اول یا سوم قرار دارد. با توجه به نتایج بدست آمده، ربع سوم در هر دو نتیجه مشترک می‌باشد. پس انتهای کمان x در ربع سوم بوده و گزینه ۳ صحیح است.

$$191- \text{گزینه } 4 \text{ پاسخ صحیح است. می‌دانیم } \cot^4 \theta = \frac{\operatorname{Cos}^4 \theta}{\operatorname{Sin}^4 \theta}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Sin}^4 \theta} - \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \theta} - \frac{\operatorname{Cos}^4 \theta}{\operatorname{Sin}^4 \theta} = \frac{1 - \operatorname{Sin}^2 \theta - \operatorname{Cos}^4 \theta}{\operatorname{Sin}^4 \theta} = \frac{\operatorname{Cos}^2 \theta - \operatorname{Cos}^4 \theta}{\operatorname{Sin}^4 \theta} = \frac{\operatorname{Cos}^2 \theta (1 - \operatorname{Cos}^2 \theta)}{\operatorname{Sin}^4 \theta}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}^2 \theta \operatorname{Sin}^2 \theta}{\operatorname{Sin}^4 \theta} = \frac{\operatorname{Cos}^2 \theta}{\operatorname{Sin}^2 \theta} = \cot^2 \theta$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} \alpha}{1 + \operatorname{Cos} \alpha}} = \sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha} - \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{Cos} \alpha)(1 - \operatorname{Cos} \alpha)}{(1 + \operatorname{Cos} \alpha)(1 - \operatorname{Cos} \alpha)}}$$

۱۹۲

$$= \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{Cos} \alpha)^2}{1 - \operatorname{Cos}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{Cos} \alpha)^2}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Sin} \alpha} - \frac{1 - \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha} = \operatorname{Cotg} \alpha$$

پس گزینه ۴ صحیح است.
همه رسانه های ما

۱۹۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\cos x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{4}$$

۱۹۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{tg}(285) &= \text{tg}(270 + 15) = -\text{Cotg } 15 \\ \text{tg}(-165) &= -\text{tg}(180 - 15) = \text{tg } 15 \\ \text{Sin}(1095) &= \text{Sin}(6\pi + 15) = \text{Sin } 15 \\ \text{Cos}(255) &= \text{Cos}(270 - 15) = -\text{Sin } 15 \\ \text{tan}(285)\text{tan}(-165) - \text{Sin}(1095)\text{Cos}(255) &= -\cot 15 \times \tan 15 - \text{Sin } 15(-\text{Sin } 15) \end{aligned}$$

$$= -1 + \text{Sin}^2 15 = -(1 - \text{Sin}^2 15) = -\text{Cos}^2 15$$

۱۹۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{tg } 300 = -\text{tg } 60 = -\sqrt{3}, \text{tg } 480 = -\text{tg } 60 = -\sqrt{3}$$

$$2\pi - \frac{\pi}{3} \qquad 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Cos } 210 = -\text{Cos } 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{Sin } 840 = \text{Sin } 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\pi + \frac{\pi}{6} \qquad 5\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\left(-\sqrt{3} \times -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

۱۹۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\text{Sin } 250^\circ + \text{Sin } 70^\circ}{\text{Cos } 560^\circ - \text{Cos } 110^\circ} = \frac{\text{Sin}(270 - 20^\circ) + \text{Sin}(2 \times 360 - 20^\circ)}{\text{Cos}(3 \times 180 + 20^\circ) - \text{Cos}(90 + 20^\circ)} = \frac{-\text{Cos } 20^\circ - \text{Sin } 20^\circ}{-\text{Cos } 20^\circ + \text{Sin } 20^\circ}$$

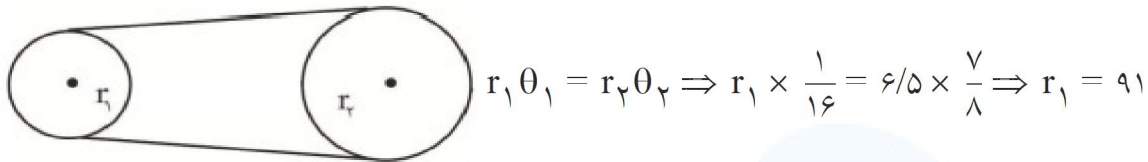
صورت و مخرج را بر $\text{Cos } 20^\circ$ تقسیم می کنیم

$$\frac{-\text{Cos } 20^\circ - \text{Sin } 20^\circ}{-\text{Cos } 20^\circ + \text{Sin } 20^\circ} = \frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - 0/4}{-1 + 0/4} = \frac{-1/4}{-0/6} = \frac{7}{3}$$

۱۹۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} &\text{Sin}\left(\frac{17\pi}{3}\right)\text{Cos}\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \text{tg}\left(\frac{19\pi}{4}\right)\text{Sin}\left(\frac{-11\pi}{6}\right) \\ &= \text{Sin}\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right)\text{Cos}\left(-3\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \text{tg}\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right)\text{Sin}\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(-\text{Sin}\frac{\pi}{3}\right)\left(-\text{Cos}\frac{\pi}{6}\right) + \left(-\text{tg}\frac{\pi}{4}\right)\left(\text{Sin}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۱۹۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
چون طول کمان طی شده هر دو دایره برابر است، پس داریم:

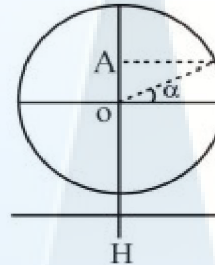


۱۹۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{14\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{OA}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = 1/5$$

$$\Rightarrow AH = 4 + 1/5 = 5/5$$



۲۰۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$1 = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ طول یال مخروط:}$$

با توجه به طول قوس:

$$5\alpha = 6\pi \Rightarrow \alpha = \frac{6 \times 180^\circ}{5} = 216^\circ$$

۲۰۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow y = a + b \cos(x)$$

با توجه به نمودار تابع که عرض از مبدأ آن می نیمم است بنابراین باید ضریب کسینوس منفی باشد ($b < 0$) در نتیجه به ازای $x = \pi$ باید نمودار ماکزیمم شود یعنی نقطه ماکزیمم با عرض ۳ دارای طول π است و تابع از نقاط $A(\pi, 3)$ و

$B\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right)$ می گذرد.

$$A(\pi, 3) \Rightarrow a + b \cos(\pi) = 3 \Rightarrow a - b = 3$$

$$B\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right) \Rightarrow a + b \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0$$

بنابراین $a = 1$, $b = -2$ می باشد.

۲۰۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Sin برعکس} \Rightarrow \text{Max} = a + |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow a - b = \frac{3}{2}$$

$$A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow a + b\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} a - b = \frac{3}{2} \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow y = a + b \sin x$$

چون به ازای $x > 0$ ، شروع صعودی است پس $b > 0$

$$y_{\max} = a + b = 3$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow a + 2a = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 1 + 2 \sin x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

۲۰۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شروع صعودی به ازای $x > 0$ پس $b > 0$ بنابراین برای آنکه تابع ماکزیمم

شود باید $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ باشد، در نتیجه $x = \frac{\pi}{6}$ است یعنی تابع از نقطه $\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$ می‌گذرد.

$$\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right) \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow a + b = \sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} - b$$

$$f(\pi) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \Rightarrow b\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

۲۰۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{ق ق } m = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{\cos(-\theta) = \cos \theta} |m| = \frac{1}{2} \xrightarrow{T = 4\pi} \frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{x = \frac{16\pi}{3}} f\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

۲۰۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{2\pi}{3} \text{، از روی ضابطه } T = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow m = \pm 3$$

چون با توجه به نمودار تابع باید ابتدا Min داشته باشد، بنابراین: $m = 3$

$$\Rightarrow y = 1 - \sin(3x) \xrightarrow{x = \frac{7\pi}{6}} y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 - \sin 3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 - \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

۲۰۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار رسم شده متوجه می‌شویم دوره‌ی تناوب تابع ۶ می‌باشد و می‌دانیم

دوره‌ی تناوب تابع $y = a \sin bx$ از رابطه‌ی $T = \frac{2\pi}{|b|}$ به دست می‌آید. پس داریم:

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|\pi} = 6 \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

از طرفی در تابع $y = a \sin bx$ ماکزیمم تابع برابر $|a|$ است. چون در حاصل ماکزیمم برابر ۲ است. پس:
 $|a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$ در انتها دقت شود با توجه به آن که تابع بلافاصله بعد از $x = 0$ افزایش می‌یابد. باید علامت a و b یکسان باشند. یعنی برای a و b دو حالت ایجاد می‌شود.

$$a = 2, b = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 2 \sin \frac{\pi x}{3} \Rightarrow a + b = \frac{7}{3}$$

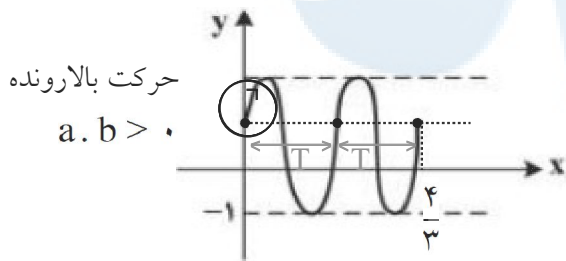
$$a = -2, b = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -2 \sin \left(\frac{-\pi x}{3} \right) = 2 \sin \frac{\pi x}{3} \Rightarrow a + b = -\frac{7}{3}$$

۲۰۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع از مبدأ می‌گذرد بنابراین مختصات مبدأ $O(0, 0)$ را درون تابع قرار می‌دهیم تا یک رابطه بر حسب a و b به دست آید.

$$(0, 0) \in f \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

$$y = a - a \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) = a \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right) \Rightarrow \max = 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -2$$

۲۰۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} 2T &= \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{2}{3} \\ T &= \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |b| = 3$$

$$\min = 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a + b = \begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ -2 - 3 = -5 \end{cases} \text{ هر دو جواب قابل قبول است.}$$

۲۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3 \Rightarrow \text{گزینه ۳ و ۴ غلط}$$

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 1 \\ \max : -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \text{ گزینه ۲ غلط}$$

۲۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2} \right) = 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

$$\min = -3 \Rightarrow -|a| + c = -3 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow |a| = 2$$

$$\max = 1 \Rightarrow |a| + c = 1$$

چون نمودار تابع سینوس باضرب منفی است. (نمودار رو به پایین است). بنابراین $a = -2$ و $b = \frac{1}{3}$ می‌باشد.

$$b = \frac{1}{3}, a = -2 \Rightarrow \frac{a}{b} = -6$$

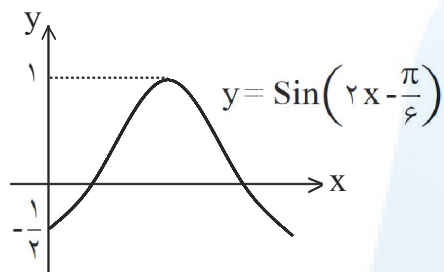
۲۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = a + 2 \sin(bx)$$

$$T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = 3$$

با توجه به ضریب ۲، Sin باید بین ۲ و -۲ باشد و چون نمودار دارای ماکزیمم یک است بنابراین نمودار یک واحد پایین آمده است در نتیجه $a = -1$ است.

$$a + b = -1 + 3 = 2$$



$$T = \frac{2\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار بالا باید a منفی باشد، بنابراین با توجه به

$$1 - a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$a + b = \frac{3}{2}$$

در نتیجه:

۲۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = (4k + 1) \frac{\pi}{8}$$

$$-\pi \leq (4k + 1) \frac{\pi}{8} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -8 \leq 4k + 1 \leq 12 \Rightarrow -2/25 \leq k \leq 2/75 \Rightarrow k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

۲۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع در بازه دو برابر دوره تناوب آن رسم شد است اگر دوره تناوب T فرض شود

$$b = \frac{3}{2} \text{ یا } \frac{\pi}{b} = \frac{2\pi}{3} \text{ در نتیجه } T = \frac{2\pi}{3} \text{ پس } \frac{1}{4} T + T = \pi \text{ و } T = \frac{\pi}{b}$$

۲۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دوره تناوب تابع برابر ۴ و مقدار a منفی است، پس:

$$\frac{\pi}{|a|} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = -\frac{\pi}{4}$$

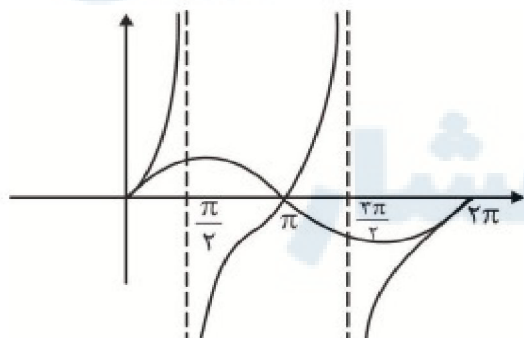
بنابراین $f\left(\frac{16}{3}\right)$ برابر است با:

$$f\left(\frac{16}{3}\right) = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4} \times \frac{16}{3}\right) = -\text{tg}\frac{4\pi}{3} = -\text{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

۲۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به شکل، ابتدا در بازه $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ، $g(x) > f(x)$ و

سپس در بازه $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ، $g(x) < f(x)$ است.



۲۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

۲۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$A = 2 + \sin x \cos x \longrightarrow A = 2 + \frac{1}{2} \sin 2x$$

حال با در نظر گرفتن محدوده‌ی تغییرات $\sin 2x$ به سادگی می‌توانیم به حدود A برسیم:

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{+2} \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{5}{2} \longrightarrow \frac{3}{2} \leq A \leq \frac{5}{2}$$

$$\longrightarrow \text{Min}(A) = \frac{3}{2}$$

$$\text{tg } x + \text{Cotg } x = 4 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 4 \Rightarrow \tag{220}$$

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = 4 \Rightarrow \frac{1}{\sin 2x} = 4 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{4}$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sin^2 x - \sqrt{\sin^2 x} = \sin^2 x - \sin x$$

۲۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$= \sin^2 x (\sin x - 1) = -\sin^2 x \cos x = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x$$

$$\text{tg } 20^\circ (1 + \cos 40^\circ) = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} (2 \cos^2 20^\circ) = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 40^\circ \tag{222}$$

بنابراین گزینه ۲، پاسخ صحیح است.

۲۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \times \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{(1 + (2\cos^2 \alpha - 1))(1 + \cos \alpha)} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha (1 + \cos \alpha)}$$
$$= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \text{tg} \frac{\alpha}{2}$$

۲۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos 165^\circ \times \cos 105^\circ = + \cos 15^\circ \cos 75^\circ = \cos 15^\circ \sin 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۲۲۵- عبارت داده شده را به حاصل جمع تبدیل می‌کنیم:

$$\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۲۲۶- راه حل اول:

$$\cos \alpha \cdot \cos (\epsilon_0 - \alpha) \cos (\epsilon_0 + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

می‌دانیم:

$$a = 20^\circ \Rightarrow \epsilon_0 - a = 40^\circ, \epsilon_0 + a = 80^\circ$$

با قرار دادن $\alpha = 20^\circ$:

$$8 \cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ = 8 \times \frac{1}{4} \times \cos 60^\circ = 8 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 1$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{\sin 20^\circ (8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{4(2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

یادآوری: الف) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

۲۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \quad (\text{ب})$$

$$\begin{aligned} 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) &= 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right] \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right] \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha \end{aligned}$$

۲۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{فرمول: } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت مورد نظر} &= \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta (\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta))} = \frac{1}{\sin^4 \theta \cdot \cos^4 \theta} \\ &= \frac{16}{\sin^4 2\theta} = 16 \sin^{-4} 2\theta \end{aligned}$$

$$1 + \sin x = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \quad -229$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\frac{2(1 + \sin x)}{1 + \cos x} = \frac{2 \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \left(\frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right)^2 = \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)^2$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۲۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = 1 + a \left(\frac{1}{2} \sin(2bx) \right) \Rightarrow y = 1 + \frac{a}{2} \sin(2bx) \Rightarrow 1 + \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{3}{2} \Rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

$$T = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \xrightarrow{a \cdot b > 0} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

تذکر: توجه داشته باشید تابع سینوس برای $x > 0$ صعودی شروع می‌شود پس a و b هم‌علامتند که حالت $a = -1$ و $b = -1$ یعنی $a + b = -2$ در گزینه‌ها نیست.

۲۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

روش اول: با توجه به رابطه‌ی $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ داریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5 - 5 \tan \alpha = 1 + \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{5} = \frac{36}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

روش دوم: با توجه به رابطه‌ی $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ داریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = \frac{2 \times \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{5}{12} \xrightarrow{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta} \cot 2\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{1}{\cot 2\alpha} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

۲۳۲- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) - \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{x}{2}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos x}{\frac{1}{2} \sin x} = 1 \Rightarrow -\cot x = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = -2$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{B + C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{Cotg} \frac{A}{2} = \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = 4$$

۲۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\Delta(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{10} \Rightarrow (\Delta(\sin x + \cos x))^2 = (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{5}$$

$\sin 2x$ را بر حسب $\operatorname{tg} x$ می نویسیم :

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3}{5} \Rightarrow 3 \operatorname{tg}^2 x - 10 \operatorname{tg} x + 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 3, \frac{1}{3}$$

پس گزینه ۴ که یکی از جوابها را بیان می کند، صحیح است.

$$\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4}$$

-۲۳۵

$$\Rightarrow \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 4\alpha = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه ۱ جواب صحیح است.

علیرضا افشار

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = 4$$

$$\Rightarrow 3 \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = -3 \\ \text{یا} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

با توجه به جواب‌های به دست آمده، گزینه ۱ پاسخ صحیح می‌باشد.

۲۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$$

در این جا نیازی برای به دست آوردن جواب‌های کلی معادله‌ی مثلثاتی نیست، فقط کافی است جواب‌ها را در فاصله‌ی داده شده، مشخص کنیم.

$$2 \sin(3x) \cos(3x) = 1$$

۲۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2 \sin(6x) = 1 \Rightarrow \sin(6x) = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} &\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{36} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{36} \end{cases} \\ 6x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} &\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{36} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{36} \end{cases} \end{aligned} \right.$$

این معادله در بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ دارای ۴ جواب است.

۲۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x) \Rightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = (1 - \sin x \cos x)$$

غ ق ق ۲ $\Rightarrow \sin 2x = 2 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \Rightarrow \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 1 - \sin x \cos x = 0$

یا $\Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, x = 2\pi \end{cases} \end{cases}$

$$\text{مجموع} = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

۲۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos^3 x + 3 \cos x = 4 \xrightarrow{\cos x = t} t^3 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-1)(t^2 + t + 4) = 0$$

$$\begin{cases} t-1=0 \Rightarrow t = \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow \{ \dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots \} \\ t^2 + t + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 16 = -15 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ی حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

همان طور که مشاهده می کنیم، معادله ی فوق در بازه ی $[0, 2\pi]$ ، تنها دو ریشه به مقادیر $x = 0, x = 2\pi$ دارد.

۲۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow 4 \sin x (-\cos x) = 1 \Rightarrow -2(2 \sin x \cos x) = 1$$

$$\Rightarrow -2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x_2 = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
x_1	×	$\pi - \frac{\pi}{12}$	$2\pi - \frac{\pi}{12}$
x_2	$\frac{7\pi}{12}$	$\pi + \frac{7\pi}{12}$	×

$$\text{مجموع} = \pi - \frac{\pi}{12} + 2\pi - \frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \pi + \frac{7\pi}{12} = 4\pi + \pi = 5\pi$$

۲۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

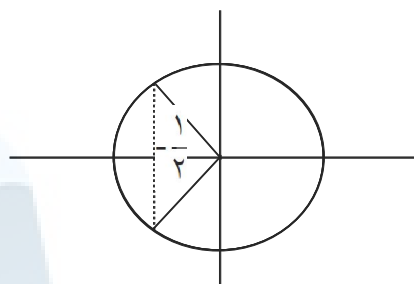
$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$\cos x = \frac{3 \pm 5}{4} = 2, \left(-\frac{1}{2}\right)$$

ق ق
غ ق ق



$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

۲۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2 \tan x \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۲۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ بنابراین داریم:

$$\tan x + \cot x = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = \sqrt{3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{2}{\sqrt{3}} \notin [-1, 1]$$

چون مقدار به دست آمده برای $\sin 2x$ در بازه $[-1, 1]$ قرار نمی گیرد، پس معادله ی داده شده جواب ندارد.

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \\ x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x > 0 \Rightarrow \tan x + \cot x \geq 2 \\ \tan x < 0 \Rightarrow \tan x + \cot x \leq -2 \end{cases}$$

روش دوم:

(توجه کنید که به ازای $\tan x = 0$ عبارت $\tan x + \cot x$ تعریف نشده است زیرا $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ تعریف نشده می باشد) بنابراین مقادیر $\tan x + \cot x$ هرگز نمی تواند در بازه $(-2, 2)$ باشد.

علیرضا افشار

$$\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin x \cos x} = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\frac{1}{2} \sin 2x} \tag{245}$$

$$= \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2 \cotg 2x \Rightarrow -2 \cotg 2x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \cotg 2x = -\sqrt{3} = \cotg \left(\frac{-\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$2x = k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \\ k=2 \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12} \\ k=3 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{17\pi}{12} \\ k=4 \Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12} \end{array} \right.$$

به ازای $k = 1, 2, 3, 4$ پاسخهای بدست آمده برای x در محدوده $[0, 2\pi]$ قرار می‌گیرند. بنابراین معادله فوق 4 جواب دارد و گزینه 4 صحیح است.

$$\frac{\sin^3 x + \sin x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin^3 x + \sin x = \sin x \Rightarrow \sin^3 x = 0 \tag{246}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sin^3 x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \\ \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k'\pi \end{array} \right\} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

247- طرف چپ را بر حسب نصف قوس می‌نویسیم داریم :

$$2 \cos^2 2x = 2 \cos^2 2x + \sin^2 2x \Rightarrow \sin^2 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

در نتیجه گزینه 1 صحیح است.

248- گزینه 3 پاسخ صحیح است.

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} &\Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \text{یا} \\ \sin 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
x_1	$\frac{\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$	×
x_2	×	$\pi - \frac{\pi}{4}$	$2\pi - \frac{\pi}{4}$

جواب‌های بین $[0, 2\pi]$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi - \frac{\pi}{4} = 4\pi$$

۲۵۰- معادله داده شده را حل می‌نماییم:

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \quad \frac{7\pi}{4} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \cos 2x \sin x = \cos 2x &\Rightarrow \cos 2x \sin x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \\ \cos 2x (\sin x - 1) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

پس در فاصله $[0, 2\pi]$ ریشه‌ها عبارتند از: $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ و رئوس یک پنج‌ضلعی غیرمنتظم را تشکیل می‌دهند. پس گزینه ۴ صحیح است.

$$\sin(3x) + \sin(x) = 0 \Rightarrow \sin(3x) = \sin(-x)$$

۲۵۱-

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

دسته اول جواب‌ها که ضریب‌های صحیح $\frac{\pi}{2}$ است، دسته دوم را که ضریب‌های فرد $\frac{\pi}{4}$ است را می‌پوشاند. پس

$x = \frac{k\pi}{2}$ است. بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.

۲۵۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow (1) \quad 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \quad 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$$

$$(1) \cup (2) = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

۲۵۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos(3x) = \cos(\pi - x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \checkmark \\ \text{یا} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{چون}$$

۲۵۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6} \Rightarrow \cos\left(4k\pi + \frac{i\pi}{3}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{i\pi}{6}\right) \Rightarrow \cos \frac{i\pi}{3} = \sin \frac{i\pi}{6}$$

با بررسی کردن اعداد $\{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$ مشخص می‌شود که $\{1, 5, 9\}$ جواب است.

۲۵۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \quad x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

۲۵۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x \Rightarrow \sin^4 x = (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) (\underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{-\cos 2x})$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \sin^2 x \cos 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x (2 \sin^2 x + 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \\ \sin^2 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{مجموع جواب ها} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{30\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$$

۲۵۷- عبارت مورد سوال را ساده می کنیم: $2 \cos x (\sin x + \cos x) = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 1$

$$\Rightarrow \sin 2x + \cos 2x + 1 = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = -1 \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

$$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

۲۵۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) \Rightarrow 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{جمع}} \pi - \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$$

۲۵۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - 3\pi x = (2k+1)\pi \Rightarrow 3\pi x = \frac{\pi}{4} - 2k\pi - \pi \Rightarrow 3\pi x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k}{3} - \frac{1}{4}$$

k	-1	0	1
x	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$

راه دوم: دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T = \frac{2\pi}{|-3\pi|} = \frac{2}{3}$ طول بازه $2 - (-1) = 1$ است پس تعداد ماکزیممها در این بازه

برابر $\frac{2}{3} = 3$ است.



مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

راه‌های ارتباطی مرکز مشاوره

تلگرام

اینستاگرام

وبسایت



AlirezaAfsharOfficial

AlirezaAfsharOriginal

www.AlirezaAfshar.org

رزور مشاوره خصوصی علیرضا افشار

برای رزور مشاوره خصوصی تک جلسه و ماهانه
به شماره ۰۹۳۵۸۹۶۰۵۰۳ در واتساپ پیام دهید

Afshar.xyz

آدرس تمام رسانه ها :

