ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌هایش برابر باشد.

توجه: در ماتریس مربعی A، قطری که دربردارنده‌ی درایه‌های a_{ii} است، قطر اصلی نامیده می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۳ & ۳ \\ ۴ & ۴ & ۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

قطر اصلی　　قطر اصلی

ماتریس سطری و ستونی: ماتریسی که تنها از یک سطر تشکیل شده باشد، ماتریس سطری و ماتریسی که تنها از یک ستون تشکیل شده باشد، ماتریس ستونی نامیده می‌شود.

ماتریس سطری

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

ماتریس ستونی

$$B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری: یک ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های آن، غیر از درایه‌های قطر اصلی، مساوی صفر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن باهم مساوی باشند، یک ماتریس اسکالر نامیده می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌های موجود در آن برابر صفر باشد. این ماتریس را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

$$B=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس A و B با هم برابرند، اگر:

۱- هم مرتبه باشند (تعداد سطرها و ستون‌ها در آن دو برابر باشد).

۲- درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر برابر باشد.

جمع و تفاضل دو ماتریس:

حاصل جمع دو ماتریس A و B، از جمع تک تک درایه‌های این دو ماتریس به‌دست می‌آید. برای تفاضل زیر، این موضوع صادق است.

توجه: برای این که دو ماتریس قابل جمع‌کردن باشند، شرط لازم و کافی این است که هم‌مرتبه باشند.

توجه: اگر دو ماتریس A و B از مرتبه‌ی $m\times n$ باشند، آنگاه حاصل جمع آن ها نیز از مرتبه‌ی $m\times n$ خواهد بود.

برای مثال فرض‌کنید:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۴&۵&۶\\۷&۸&۹\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}۹&۸&۷\\۶&۵&۴\\۳&۲&۱\end{bmatrix}$$

آنگاه:

$$A+B=\begin{bmatrix}۱+۹&۲+۸&۳+۷\\۴+۶&۵+۵&۶+۴\\۷+۳&۸+۲&۹+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰&۱۰&۱۰\\۱۰&۱۰&۱۰\\۱۰&۱۰&۱۰\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}۱-۹&۲-۸&۳-۷\\۴-۶&۵-۵&۶-۴\\۷-۳&۸-۲&۹-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸&-۶&-۴\\-۲&۰&۲\\۴&۶&۸\end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس:

برای ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس، کافی است آن عدد حقیقی را در تک تک درایه‌های آن ماتریس ضرب کنیم.

برای مثال:

$$۲\times\begin{bmatrix}۱&۳&۵\\۷&۹&۱۱\\۱۳&۱۰&۱۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\times۱&۲\times۳&۲\times۵\\۲\times۷&۲\times۹&۲\times۱۱\\۲\times۱۳&۲\times۱۳&۲\times۱۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۶&۱۰\\۱۳&۱۸&۲۲\\۲۶&۲۸&۳۰\end{bmatrix}$$

توجه: اگر عدد ۱ – را در یک ماتریس ضرب کنیم، حاصل قرینه‌ی آن ماتریس خواهد بود. برای مثال قرینه‌ی ماتریس A رسم آن را با $-A$ نشان می دهیم، عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۱\end{bmatrix} \qquad -A=\begin{bmatrix}-۱&-۲\\-۲&-۱\end{bmatrix}$$

روشن است که $A+(-A)=\bar{O}$

ضرب دو ماتریس در هم:

فرض کنید A ماتریسی $m\times k$ و B ماتریسی $k\times n$ باشد، آنگاه حاصل‌ضرب این دو ماتریس، ماتریسی $m\times n$ به نام C خواهد بود $(A\times B=C)$. درایه ی c_{ij} از این ماتریس از ضرب درایه‌های سطر i ام در درایه‌های ستون j ام به‌دست می‌آید.

برای مثال:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\\۵&۶\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}۱&۲&۳&۴\\۵&۶&۷&۸\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱۱&۱۴&۱۷&۲۰\\۲۳&۳۰&۳۷&۴۴\\۳۵&۴۶&۵۷&۶۸\end{bmatrix}$$

توجه: ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد $A\times B\neq B\times A$

توجه: ماتریس قطری $n\times n$ که تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، برابر واحد باشند، ماتریس همانی مرتبه‌ی n یا واحد نامیده می‌شود (I_n). برای مثال

$$I_۳=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

توجه: ماتریس همانی، عضو خنثی در ضرب ماتریس‌هاست، یعنی اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد، آنگاه:

$$A\times I_n=I_n\times A=A$$

خواص ماتریس ها:

۱) $A+B=B+A$ خاصیت جابه‌جایی

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ خاصیت شرکت‌پذیری

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس ها

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ خاصیت عضو قرینه

۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۶) $(r\pm k)A=rA\pm kA$

۷) $rA=rB\xrightarrow{r\neq ۰}A=B$ یا $A=B\rightarrow rA=rB$

۸) $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ خاصیت توزیع پذیری یا بخشی

۹) $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

*** خلاصه نکات مربوط به وارون ماتریس و دترمینان**

ماتریس وارون: وارون ماتریس مربعی A را با A^{-1} نمایش می‌دهیم و داریم $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$

قضیه ۱:

قضیه‌ی یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی، در صورت وجود، منحصربه‌فرد (یکتا) است.

وارون $A_{2\times 2}$:

معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادله:

فرض‌کنید می‌خواهیم معادله دومجهولی زیر را حل‌کنیم:

$$\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$$

این معادله را می‌توانیم به صورت یک تساوی ماتریسی بنویسیم:

ماتریس ضرایب: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

ماتریس مقادیر معلوم: $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$

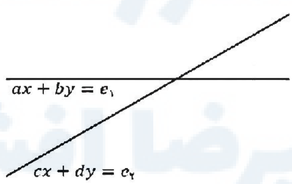
ماتریس مجهولات: $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

پس خواهیم داشت: $AX = B \to X = A^{-1}B$

اکنون با سه حالت روبرو هستیم:

حالت اول: $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$

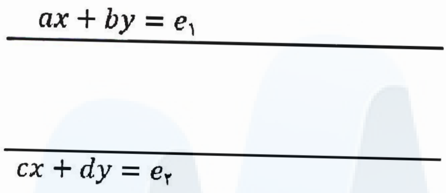
در این حالت دو خط $ax + by = e_1$ و $cx + dy = e_2$ در یک نقطه متقاطع‌اند. درنتیجه این دستگاه معادله، یک جواب مشخص دارد.



شکل ۱-۱

حالت دوم: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\neq\frac{e_1}{e_2}$

در این حالت دو خط $ax+by=e_1$ و $cx+dy=c_2$ موازی‌اند. درنتیجه این دستگاه معادله، هیچ جوابی ندارد.



شکل ۱-۲

حالت سوم: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{e_1}{e_2}$

در این حالت دو خط $ax+by=e_1$ و $cx+dy=e_2$ برهم منطبق‌اند. درنتیجه این دستگاه معادله، بینهایت جواب خواهدداشت.

شکل ۱-۳

نتیجه: اگر $|A|$ (دترمینان ماتریس ضرایب) غیرصفر باشد، دستگاه معادله ما یک جواب منحصر به فرد دارد و اگر برابر صفر باشد، یا جوابی ندارد و یا دستگاه مورد نظر ما بی‌نهایت جواب دارد.

دترمینان یک ماتریس:

دترمینان ماتریس مربعی A را با نماد $|A|$ نمایش می‌دهیم.

الف) $A_{1\times1}$: اگر $A=[k]$ باشد، آنگاه $|A|=k$

ب) $A_{2\times2}$: اگر $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$، آنگاه $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

ج) $A_{3\times3}$: اگر $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$، آنگاه:

$$|A|=a_{11}\times\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\times\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

(توجه‌کنید که دستور فوق را می‌توان برای هر سطر یا ستون دلخواه از ماتریس A بازنویسی کرد.)

دستور ساروس:

به‌طور مستقیم می‌توان دترمینان یک ماتریس ۳ × ۳ را از تساوی زیر به‌دست آورد:

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

نکته ۱: $|BA| = |AB| = |A||B|$

نکته ۲: $|A^n| = |A|^n$ (n یک عدد طبیعی است.)

نکته ۳: فرض‌کنید $A = \begin{bmatrix} k & \cdot & \cdot \\ \cdot & m & \cdot \\ \cdot & \cdot & n \end{bmatrix}$ آنگاه $|A| = \mathrm{kmn}$

نکته ۴: دترمینان ماتریس مربعی صفر، مساوی صفر است.

نکته ۵: $|KA| = k^n|A|$ (n، مرتبه‌ی ماتریس A را نشان می‌دهد.)

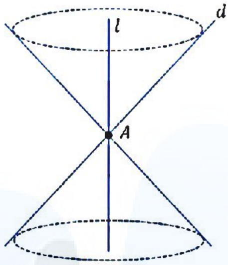
نکته ۶: $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

نکته ۷: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

• خلاصه نکات مربوط به آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

در شکل زیر دو خط d و l در نقطه‌ی A متقاطع (غیر عمود) هستند. چنانچه خط d را حول محور l دوران دهیم، یک رویه‌ی مخروطی (سطح مخروطی) تشکیل می‌شود.



شکل ۲-۱

در این صورت خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد این رویه‌ی مخروطی، می‌نامیم.

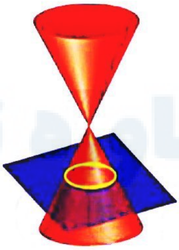
• مقاطع مخروطی:

از فصل مشترک یک صفحه و یک رویه‌ی مخروطی، مقاطع مخروطی تشکیل می‌شوند.

در زیر به مهمترین آن‌ها اشاره‌کرده‌ایم:

دایره: اگر صفحه‌ای عمود بر محور رویه‌ی مخروطی، با آن برخورد کند و از رأس آن عبور نکند، یک دایره تشکیل می‌دهد.

توجه: اگر این صفحه از رأس رویه‌ی مخروطی عبور کند، فصل مشترک آن با سطح مخروطی، یک نقطه خواهد بود.



دایره

شکل ۲-۲

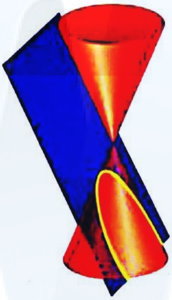
بیضی: اگر صفحه‌ای که بر محور رویه‌ی مخروطی عمود نباشد و با مولد آن نیز موازی نباشد، تنها یکی از دو نیمه‌ی رویه‌ی مخروطی را قطع‌کند، تشکیل یک بیضی می‌دهد.

بیضی

شکل ۲-۳

سهمی: اگر صفحه‌ای موازی با مولد رویه‌ی مخروطی، سطح مخروطی را قطع‌کند (طوری‌که از رأس رویه‌ی مخروطی عبور نکرده باشد)، تشکیل یک سهمی می‌دهد.

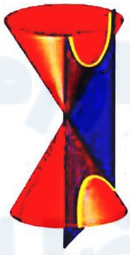
توجه: اگر این صفحه از رأس رویه‌ی مخروطی عبورکند، فصل مشترک آن‌ها یک خط خواهد بود.



سهمی

شکل ۲-۴

هذلولی: اگر صفحه‌ای به‌گونه‌ای باشد که هر دو نیمه‌ی بالایی و پایینی یک رویه‌ی مخروطی را قطع‌کند (طوری‌که شامل محور این رویه‌ی مخروطی نباشد)، تشکیل یک هذلولی می‌دهد.



هذلولی

شکل ۲-۵

مکان هندسی: مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا، که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی مشترک دارند و هر نقطه که آن ویژگی را دارا باشد و عضوی از آن مجموعه باشد را مکان هندسی می‌نامند.

پند پدربزرگ

مکان هندسی های زیر را به خاطر بسپارید:

۱- مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه‌ی ثابت (مانند A و B) به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

۲- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله‌ی ثابت k قراردارند، دو خط به‌موازات d و به فاصله‌ی k در دو طرف آن است.

۳- مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است.

۴- مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی ثابت o به فاصله‌ی ثابت r می‌باشند، دایره‌ای به مرکز o و شعاع r است.

برای یافتن مکان هندسی نقاطی ، با یک سری ویژگی مشخص ، از نکتهٔ زیر استفاده می کنیم:

نکته مهم: اگر $S_۱$ مکان هندسی نقاطی با ویژگی $P_۱$ و $S_۲$ مکان هندسی نقاطی با ویژگی $P_۲$ باشد، آنگاه $S_۱ \cap S_۲$ مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی $P_۱$ و $P_۲$ را دارند.

*** خلاصه نکات مربوط به مبحث دایره**

دایره‌ی $C(O \text{ و } r)$ را درنظر بگیرید که مختصات مرکز آن به‌صورت $O(a \text{ و } b)$ باشد. معادله‌ی این دایره به‌صورت زیر می‌باشد:

$$(x-a)^۲+(y-b)^۲=r^۲$$

معادله‌ی ضمنی دایره در حالت کلی به‌صورت زیر است:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

دید مهندسی

اگر معادله‌ی ضمنی یک دایره به‌صورت زیر باشد:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

آنگاه می‌توان آن را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left(x+\frac{a}{۲}\right)^۲+\left(y+\frac{b}{۲}\right)^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

اگر $a^۲+b^۲>۴c$ باشد، آنگاه معادله‌ی فوق یک دایره را در صفحه مشخص می‌کند که مختصات مرکز آن $O\left(\frac{-a}{۲} \text{ و } \frac{-b}{۲}\right)$ است و شعاع آن برابر $\sqrt{\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}}$ می‌باشد.

اگر $a^۲+b^۲=۴c$ باشد، آنگاه این معادله تنها یک نقطه به مختصات $\left(\frac{-a}{۲} \text{ و } \frac{-b}{۲}\right)$ را در صفحه مشخص می‌کند.

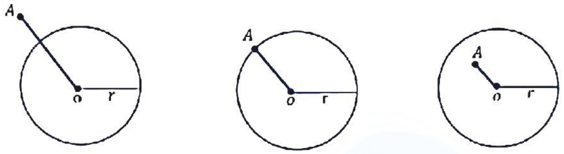
اگر $a^۲+b^۲<۴c$ باشد، این معادله هیچ نقطه‌ای را در صفحه مشخص نمی‌کند.

اگر A نقطه‌ای واقع در صفحه‌ی دایره $C(O\text{ و }r)$ باشد:

۱- اگر $OA > r$ باشد، آنگاه این نقطه خارج دایره قراردارد.

۲- اگر $OA = r$ باشد، آنگاه این نقطه روی دایره قراردارد.

۳- اگر $OA < r$ باشد، آنگاه این نقطه داخل دایره قراردارد.



شکل ۲-۶

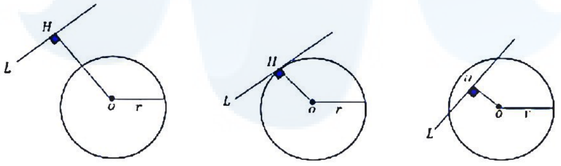
وضعیت خط و دایره:

اگر L خطی واقع در صفحه‌ی دایره $C(o\text{ و }r)$ باشد:

۱- اگر $OH > r$ باشد، آنگاه این خط دایره را قطع نمی‌کند.

۲- اگر $OH = r$ باشد، آنگاه این خط بر دایره مماس است.

۳- اگر $OH < r$ باشد، آنگاه این خط دایره را قطع می‌کند.



شکل ۲-۷

یادآوری

فاصله‌ی نقطه‌ی $(m\text{ و }n)$ از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$d = \frac{|am + bn + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

وضعیت دو دایره نسبت به هم:

اگر $C(O_1\text{ و }r_1)$ و $C'(O_2\text{ و }r_2)$ دو دایره باشند:

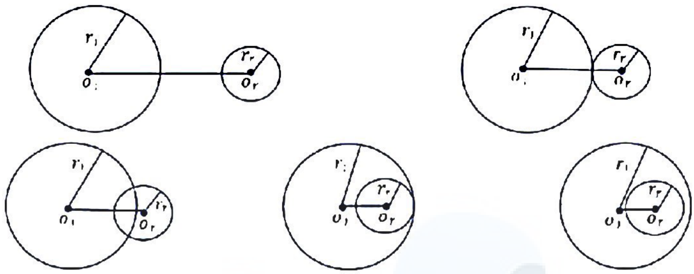
۱- چنانچه $O_1O_2 > r_1 + r_2$ باشد، آنگاه دو دایره‌ی C و C' متخارج‌اند.

۲- چنانچه $O_1O_2 = r_1 + r_2$ باشد، آنگاه دو دایره‌ی C و C' برهم مماس‌اند.

۳- چنانچه $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$ باشد، آنگاه دو دایره‌ی C و C' متقاطع‌اند.

۴- چنانچه $O_1O_2 = |r_1 - r_2|$ باشد، آنگاه دو دایره‌ی C و C' مماس به داخل‌اند.

۵- چنانچه $O_1O_2 < |r_1 - r_2|$ باشد، آنگاه دو دایره‌ی C و C' متداخل‌اند.



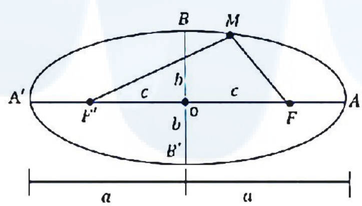
شکل ۲-۸

توجه: خط مماس در نقطه‌ی تماس، بر شعاع دایره عمود است.

● **خلاصه نکات مربوط به مبحث بیضی و سهمی**

بیضی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصلشان از دو نقطه، یک مقدار ثابت و مشخص باشد را بیضی می‌نامیم.

ترمینولوژی بیضی:



شکل ۲-۹

۱- قطر بزرگ $= AA' = 2a$

۲- قطر کوچک $= BB' = 2b$

۳- فاصله‌ی کانونی $= OF = c$

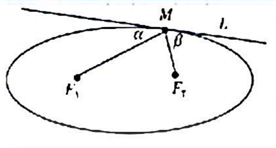
۴- F و F' کانون‌های بیضی هستند.

۵- $MF + MF' = 2a$

۶- $b^2 + c^2 = a^2$

۷- خروج از مرکز بیضی $= \frac{c}{a} \leftarrow$ کشیدگی بیضی به این پارامتر وابسته است.

دید مهندسی



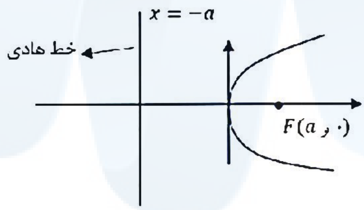
شکل ۲-۱۰

خط L در نقطهٔ M بر بیضی بالا مماس است . در نتیجه $\alpha = B$ همچنین مسیر $F_1 M F_2$ ، کوتاه ترین مسیر برای رفتن از F_1 به F_2 ، با شرط این که از نقطه ای روی خط L عبور کنیم است.

با توجه به این نتیجه می توان نشان داد که اگر سطح داخلی بیضی یک آینه باشد و از یکی از کانون های بیضی اشعه ای به سمت بدنهٔ آن تابیده شود، انعکاس این نور از کانون دیگر بیضی عبور خواهد کرد.

سهمی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط مشخص و یک نقطه‌ی ثابت (که بر آن خط واقع نباشد)، به یک فاصله باشند.

معادله‌ی $y^2 = 4ax$، فرم ساده‌ای از یک معادله‌ی سهمی است که شکل زیر را مشخص می‌کند:



شکل ۲-۱۱

در شکل فوق داریم:

$a =$ فاصله‌ی کانونی سهمی = فاصله‌ی کانون تا رأس سهمی = فاصله‌ی خط هادی تا رأس سهمی

$2a =$ فاصله‌ی کانون تا خط هادی

در این مثال به طور خاص، محور x محور تقارن سهمی است که به آن محور سهمی یا محور کانونی سهمی نیز می‌گویند.

اکنون جدولی از کتاب را که در آن معادلات استاندارد یا متقارن سهمی را بیان کرده است، نمایش می‌دهیم.

دهانه‌ی سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادله‌ی سهمی
رو به راست	$y = k$	$x = -a + h$	$(a + h , k)$	$(y - k)^2 = 4a(x - h)$
رو به چپ	$y = k$	$x = a + h$	$(-a + h , k)$	$(y - k)^2 = -4a(x - h)$
رو به بالا	$x = h$	$y = -a + k$	$(h , a + k)$	$(x - h)^2 = 4a(y - k)$
رو به پایین	$x = h$	$y = a + k$	$(h , -a + k)$	$(x - h)^2 = -4a(y - k)$

جدول ۲-۱

❋تبدیل معادله‌ی یک سهمی به صورت متعارف:

قصد داریم معادلات زیر را به صورت متعارف، بازنویسی کنیم:

الف) $y^{2} + ay + bx + c = 0$

فرم متعارف:

$$\left(y+\frac{a}{2}\right)^{2} = -4\left(\frac{b}{4}\right)\left(x-\left(\frac{a^{2}-4c}{b}\right)\right)$$

ب) $x^{2} + bx + ay + c = 0$

فرم متعارف:

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^{2} = -4\left(\frac{a}{4}\right)\left(y-\left(\frac{b^{2}-4c}{a}\right)\right)$$

❋مراحل رسم یک سهمی:

۱- ابتدا معادله‌ی ضمنی را به‌صورت یک معادله‌ی متعارف بازنویسی کنید.

۲- از روی معادله‌ی متعارف و با توجه به جدول ۲-۱، مختصات رأس سهمی، کانون سهمی، فاصله‌ی کانونی(a)، خط هادی و جهت دهانه‌ی سهمی را مشخص کنید.

۳- خطی که از کانون به رأس سهمی متصل می‌شود را ترسیم کنید و به‌این‌ترتیب، محور سهمی را رسم نمایید.

۴- عمود بر محور سهمی، خطی رسم کنید و برروی آن، دو نقطه‌ی B و B' را به‌گونه‌ای مشخص‌کنید که فاصله‌ی آن‌ها از کانون(F) برابر $2a$ باشد. می‌توان نشان‌داد که این دو نقطه (B و B')، برروی سهمی واقع‌اند.

۵- به‌کمک نقاط B و B' و رأس سهمی، نمودار تقریبی آن را ترسیم کنید.

دید مهندسی

اگر فرض‌کنیم که بدنه‌ی سهمی از جنس آینه باشد، آنگاه هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن موازی با محور سهمی خواهد بود و هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه‌ی آن بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی عبور خواهد کرد.

شکل ۲-۱۲

شروع ۲۰ درصد بخش اختیاری

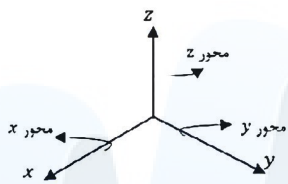
فصل سوم: بردارها

● خلاصه نکات مربوط به فضای R^3

فضای R^3: تمام سه‌تایی‌های مرتب (a و b و c) که در آن‌ها a، b و c اعداد حقیقی‌اند، فضای R^3 را تشکیل می‌دهند.

$$R^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$$

محورهای دستگاه مختصات R^3 به‌صورت زیر است:



شکل ۳-۱

با این تقسیم‌بندی، صفحه به ۸ ناحیه‌ی مختلف تقسیم می‌شود که در جدول زیر مشخصات هر یک را عنوان کرده‌ایم:

علامت محورها			شماره ناحیه
z	y	x	
+	+	+	۱
+	+	−	۲
+	−	−	۳
+	−	+	۴
−	+	+	۵
−	+	−	۶
−	−	−	۷
−	−	+	۸

جدول ۳-۱

مختصات هر نقطه در این دستگاه، در واقع سه‌مؤلفه‌ی x، y و z این نقطه را مشخص می‌کند.

نکته‌ی مهم: فاصله‌ی دو نقطه‌ی $M = (a, b, c)$ و $N = (x, y, z)$ برابر است با:

$$|MN| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

دید مهندسی

۱- مکان هندسی نقاطی از فضای $R^۳$ که مؤلفه‌ی z آن‌ها در تساوی $z = k$ (k یک عدد حقیقی ثابت است)صدق می‌کند، صفحه‌ای است که بر محور z عمود است و آن را در نقطه‌ای به مختصات $(k$ و ۰ و ۰$)$ قطع می‌کند.

۲- مکان هندسی نقاطی از $R^۳$ که مؤلفه‌ی y آن‌ها در تساوی $y = k$ (kیک عدد حقیقی ثابت است) صدق می‌کند، صفحه‌ای است که بر محور y عمود است و آن را در نقطه‌ای به مختصات $($۰ و k و ۰$)$ قطع می‌کند.

۳- مکان هندسی نقاطی از $R^۳$ که مؤلفه‌ی x آن‌ها در تساوی $x = k$ (k یک عدد حقیقی ثابت است) صدق می‌کند، صفحه‌ای است که بر محور k عمود است و آن را در نقطه‌ای به مختصات $($۰ و ۰ و $k)$ قطع می‌کند.

کمی تأمل!

مکان هندسی نقاطی در فضای $R^۳$ که مؤلفه‌های x و y آن‌ها در دو تساوی $x = k$ و $y = s$ صدق می‌کنند، یک خط را تشکیل می‌دهند.

***بردارها:**

دو بردار همسنگ: دو بردار را مساوی یا همسنگ گوییم اگر اندازه و جهت آن‌دو یکسان باشد.

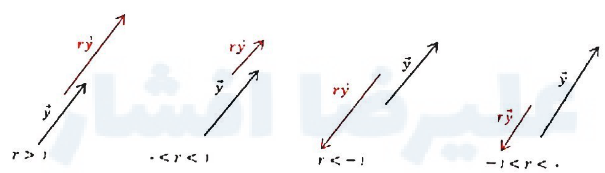
اگر $\vec{y} = (y_۱ , y_۲)$ یک بردار در دستگاه مختصات $R^۲$ باشد، آنگاه اندازه‌ی آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$|\vec{y}| = \sqrt{y_۱^۲ + y_۲^۲}$$

همچنین اگر r یک عدد حقیقی باشد، آنگاه $r\vec{y}$برابراست‌با:

$$r\vec{y} = (ry_۱ , ry_۲)$$

حالات مختلف $r\vec{y}$ به‌صورت زیر خواهدبود:

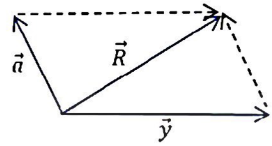


شکل ۳-۲

توجه: اگر $r = -۱$ باشد، آنگاه $r\vec{y}$ را قرینه‌ی $\vec{y}$ می‌نامیم و به‌صورت $-\vec{y}$ نمایش می‌دهیم.

اگر $\vec{a} = (a_1 \text{ و } a_2)$ هم یک بردار در دستگاه مختصات باشد، آنگاه:

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{y} = \left(a_1 + y_1 \text{ و } a_2 + y_2\right)$$



شکل ۳-۳

$\vec{R}$ را برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{y}$ می‌نامیم.

مفاهیم برداری در فضای R^3، مشابه مطالب فوق است.

اگر $\vec{y} = \left(y_1 \text{ و } y_2 \text{ و } y_3\right)$ یک بردار در دستگاه مختصات R^3 باشد، آنگاه اندازه‌ی آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$|\vec{y}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$$

همچنین اگر r یک عدد حقیقی باشد، آنگاه بردار $r\vec{y}$ برابراست‌با:

$$r\vec{y} = (ry_1 \text{ و } ry_2 \text{ و } ry_3)$$

اگر $\vec{a} = (a_1 \text{ و } a_2 \text{ و } a_3)$ یک بردار در فضای R^3 باشد، آنگاه برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{y}$ ($\vec{R}$) برابراست‌با:

$$\vec{R} = \vec{y} + \vec{a} = (y_1 + a_1 \text{ و } y_2 + a_2 \text{ و } y_3 + a_3)$$

تفاضل دو بردار $\vec{y}$ و $\vec{a}$ نیز برابراست‌با:

$$\vec{y} - \vec{a} = (y_1 - a_1 \text{ و } y_2 - a_2 \text{ و } y_3 - a_3)$$

بردار صفر: بردار $\vec{O} = \left(0 \text{ و } 0 \text{ و } 0\right)$ را بردار صفر می‌نامیم.

خواص جمع بردارها:

فرض کنید $\vec{x}$، $\vec{y}$ و $\vec{z}$ سه بردار دلخواه در فضای R^3 باشد، آنگاه داریم:

۱- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (خاصیت جا به جایی جمع)

۲- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (خاصیت شرکت پذیری در جمع)

۳- $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{O}$ (عضو قرینه)

۴- $\vec{x} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{x} = \vec{x}$ (عضو خنثی)

۵- $r(\vec{x} + \vec{y}) = r\vec{x} + r\vec{y}$

۶- $(r + s)\vec{x} = r\vec{x} + s\vec{x}$

۷- $r(s\vec{x}) = s(r\vec{x})$

۸- اگر $\vec{y} = r\vec{x}$ آنگاه $|\vec{y}| = |r||\vec{x}|$

بردارهای یکّه

در فضای R^3 با سه بردار i، j و k با مشخصات زیر، به‌ترتیب سه بردار یکّه در جهت x و y و z هستند:

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \qquad \vec{j} = (0, 1, 0) \qquad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

به‌کمک بردارهای یکّه می‌توان یک بردار دلخواه مانند $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ را نمایش‌داد:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$$

● خلاصه نکات مربوط به ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

ضرب داخلی

چنانچه $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ و $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ دو بردار در R^3 باشند، در این‌صورت ضرب داخلی $\vec{x}$ در $\vec{y}$ ($\vec{x} \cdot \vec{y}$) عبارتست از:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

خواص ضرب داخلی:

فرض‌کنید $\vec{x}$ $\vec{y}$ و $\vec{z}$ سه بردار در فضای R^3 باشند، آنگاه:

۱- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

۲- $\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2$

۳- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$

۴- دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ برهم عمودند اگر و تنها اگر $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

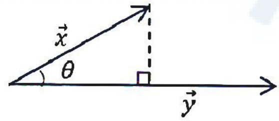
۵- $\vec{x} \cdot \vec{O} = \vec{O} \cdot \vec{x} = 0$

۶- (خیلی مهم) $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta$ (θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ است و $0 < \theta < \pi$)

۷- $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \le |\vec{x}||\vec{y}|$ (نامساوی کوشی-شوارتز)

۸- اگر $\vec{z} \cdot \vec{x} = \vec{z} \cdot \vec{y}$ آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت که $\vec{x} = \vec{y}$

● تصویر قائم بردار $\vec{x}$ بر بردار $\vec{y}$



شکل ۳-۴

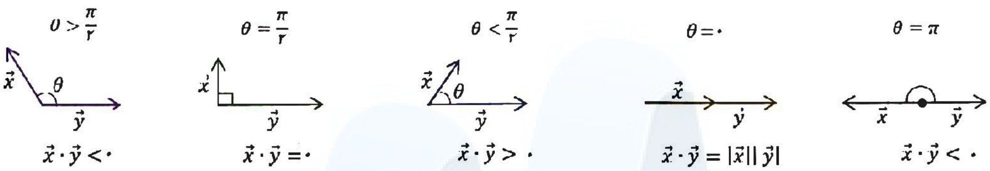
اگر تصویر قائم بردار $\vec{x}$ بر بردار $\vec{y}$ را با $\vec{x'}$ نمایش دهیم، آنگاه:

$$\vec{x'} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|y|^{2}} \vec{y}$$

اندازه‌ی تصویر قائم بردار $\vec{x}$ بر بردار $\vec{y}$ برابراست‌با:

$$\frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{|\vec{y}|} = \left| |\vec{x}| \cos\theta \right|$$

در شکل زیر، حالات مختلف قرارگیری دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ را نمایش داده‌ایم:



شکل ۳-۵

ضرب خارجی

چنانچه $\vec{x} = (x_1 , x_2 , x_3)$ و $\vec{y} = (y_1 , y_2 , y_3)$ دو بردار در فضای R^3 باشند، آنگاه:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \left(x_2 y_3 - x_3 y_2 , x_3 y_1 - x_1 y_3 , x_1 y_2 - y_2 x_1 \right)$$

خواص ضرب خارجی:

فرض کنید $\vec{x}$، $\vec{y}$ و $\vec{z}$ سه بردار در فضای R^3 باشند، آنگاه:

۱- $\vec{x} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = 0$ و $\vec{y} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = 0$

نتیجه : بردار $\vec{x} \times \vec{y}$ بر هردو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ عمود است.

۲- $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

۳- $\vec{x} \times \vec{x} = 0$

۴- $r(\vec{x} \times \vec{y}) = (r\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (r\vec{y})$

۵- $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$

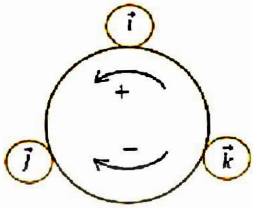
۶- $(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \times \vec{z}) + (\vec{y} + \vec{z})$

۷- (خیلی مهم) $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin\theta$

(θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ است.)

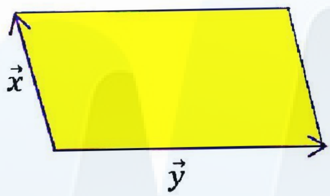
۸- $\vec{x} \times \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \parallel \vec{y}$

۹- $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ,\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ \ ,\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$



شکل ۳-۶

۱۰- اندازه‌ی بردار $\vec{x}\times\vec{y}$ برابر مساحت متوازی‌الاضلاع زیر است.

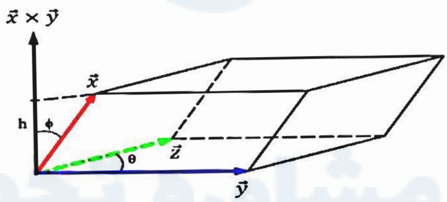


شکل ۳-۷

۱۱- اگر $\vec{x}\times\vec{y}=\vec{x}\times\vec{z}$ آنگاه <u>نمی‌توان</u> نتیجه گرفت که $\vec{y}=\vec{z}$.

●حجم متوازی‌السطوح:

در شکل زیر به کمک سه بردار $\vec{x}$ ، $\vec{y}$ و $\vec{z}$ یک متوازی السطوح بنا کرده ایم:



شکل ۳-۸

ارتفاع این متوازی‌السطوح (h) از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$h=\frac{\vec{x}\,.\,(\vec{y}\times\vec{z})}{|\vec{y}\times\vec{z}|^{2}}(\vec{y}+\vec{z})$$

همچنین حجم این متوازی‌السطوح از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{حجم متوازی السطوح}=|\vec{x}\,.\,(\vec{y}\times\vec{x})|=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$

نتیجه مهم: سه بردار $\vec{x}$ ، $\vec{y}$ و $\vec{z}$ در یک صفحه واقع‌اند اگر و تنها اگر $|\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{x})|$ برابر با صفر باشد.