

فصل سوم: بردارها

فضای R^2 :

هر نقطه از صفحه مختصات را به صورت زوج مرتب (x, y) نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه $\{(x, y) | x, y \in R\}$ شامل همه نقاط صفحه مختصات می‌باشد و آن را با R^2 نمایش می‌دهند، یعنی $R^2 = \{(x, y) | x, y \in R\}$.

چند مثال در فضای R^2

مثال: نمودار روابط زیر را رسم کنید.

الف. $x = 0$

ب. $y = 0$

ج. $x = 1, -1 \leq y < 3$

د. $-1 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$

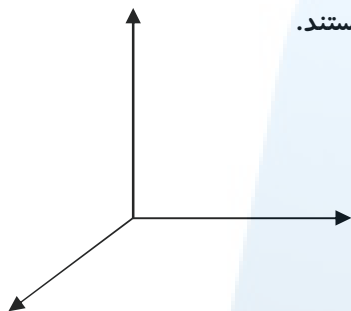
ه. $y = x^2, -1 < x \leq 2$

و. $x^2 < y \leq 2$

ز. $y \geq x^2$

دستگاه مختصات سه بعدی:

در دستگاه مختصات سه بعدی، سه مولفه طول، عرض و ارتفاع داریم؛ یعنی دستگاه مختصات سه بعدی شامل ox ، oy و oz است و هر نقطه آن به شکل (x, y, z) نمایش داده می‌شود. در دستگاه مختصات سه بعدی محورهای ox ، oy و oz دو بدو بر هم عمودند و بردارهای i ، j و k بردارهای یکه (؟) محورها می‌باشد. دستگاه مختصات سه بعدی، یک دستگاه راست گرد (جهت مثلثاتی) است که می‌توان جای x ، y و z را با رعایت ترتیب آن‌ها (اول x ، بعد y و سپس z ، در جهت مثلثاتی) عوض کرد. از برخورد هر دو محور یک صفحه تشکیل شده است. صفحات مورد نظر xoy ، xoz ، yoz هستند.



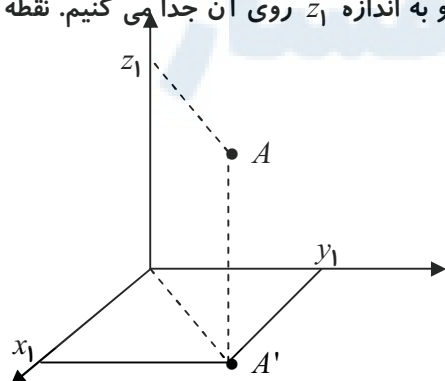
محورها فضا را به هشت ناحیه تقسیم می‌شود که چهارتای آن بالای صفحه xoy و چهار تای آن پایین صفحه xoy قرار می‌گیرد و مانند دستگاه مختصات دو بعدی شماره گذاری می‌شود.

شماره ناحیه	علامت محورها		
	z	y	x
۵	+	+	-
۶	-	+	-
۷	-	-	-
۸	+	-	-

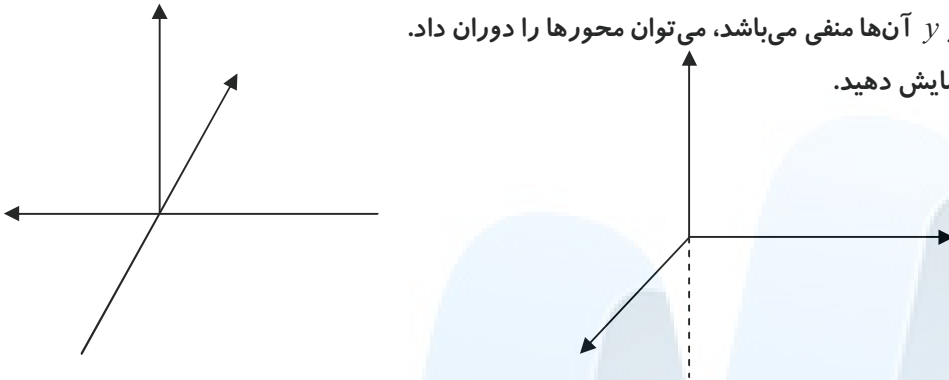
شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	-	+	+
۳	-	-	+
۴	+	-	+

نمایش هندسی نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ در دستگاه مختصات

برای مشخص کردن نقطه A در دستگاه مختصات، به اندازه x_1 و y_1 روی محورهای مختصات جدا کرده تا نقطه A' روی صفحه xoy مانند حالت دو بعدی مشخص شود. از نقطه A' خطی موازی محور z را رسم می‌کنیم و به اندازه z_1 روی آن جدا می‌کنیم. نقطه حاصل، نقطه A خواهد بود.

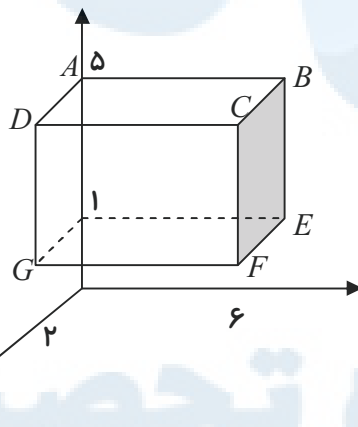


توجه: برای نمایش بهتر نقاطی که مولفه‌های x و y آن‌ها منفی می‌باشد، می‌توان محورها را دوران داد.
مثال: نقاط $A(1, 2, -1)$ و $B(-2, -1, 2)$ را نمایش دهید.



مثال: در مکعب شکل مقابل:

الف. مختصات رئوس مکعب را بنویسید.



ب. معادله وجه $ABCD$ را بنویسید.

ج. معادله یال AD را بنویسید.

د. نقطه‌ای روی وجه $CBEF$ مشخص کنید.

ه. نقطه‌ای روی یال CF مشخص کنید.

و. معادله مکعب را مشخص کنید.

تصویر وقرینه‌ی یک نقطه نسبت به صفحات و محورهای مختصات:

الف. در تصویر روی محور یا صفحات مختصات، مولفه‌های محور یا صفحات ذکر شده را ثابت نگه می‌داریم و بقیه مولفه‌ها صفر می‌شوند.

مثال: تصویر نقطه $A(\alpha, \beta, \gamma)$ را روی محورهای مختصات خواسته شده بدست آورید.

۱. روی محور x ها

۲. روی محور y ها

۳. روی صفحه xoy

۴. روی محور z ها

۵. روی صفحه xoz

۶. روی صفحه yoz

ب. در قرینه نسبت به محور یا صفحات مختصات، مولفه‌های محور یا صفحات ذکر شده را ثابت نگه می‌داریم و بقیه مولفه‌ها قرینه می‌شوند.

مثال: قرینه نقطه $A(\alpha, \beta, \gamma)$ را روی محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱. نسبت به محور x ها

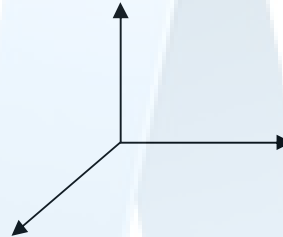
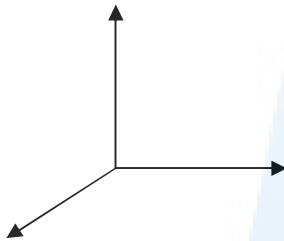
۳. نسبت به محور z ها

۵. نسبت به صفحه yoz

۲. نسبت به محور y ها

۴. نسبت به صفحه xoy

۶. نسبت به صفحه xoz



چند قرینه دیگر: قرینه نقطه $A(\alpha, \beta, \gamma)$ نسبت به صفحه $x = y$ ، $A'(\beta, \alpha, \gamma)$ و نسبت به صفحه $x = -y$ ، $A'(-\beta, -\alpha, \gamma)$ است. و نسبت به صفحه $x = k$ ، $A'(2k - \alpha, \beta, \gamma)$ می‌باشد.

مثال: نقطه $A(-1, -3, 2)$ مفروض است، اگر قرینه نقطه A نسبت به صفحه xoz ، A' و تصویر نقطه A' روی محور y ها، A'' باشد؛ حاصل جمع عرض‌های دو نقطه A' و A'' کدام است؟

۶. ۴

۳. ۳

۲. صفر

۱. -۳

فاصله نقطه از صفحات و محورهای مختصات:

برای محاسبه فاصله نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ تا محورهای مختصات یا صفحات مختصات، باید مولفه ذکر شده را در رابطه $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ صفر قرار دهیم.

مثال: فاصله نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ را تا محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۲. محور y ها

۴. صفحه xoy

۶. صفحه yoz

۱. محور x ها

۳. محور z ها

۵. صفحه xoz

اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ دو نقطه در فضا باشند؛

۱. فاصله این دو نقطه برابر است با $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

۲. مختصات نقطه M وسط پاره خط AB به صورت $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ می‌باشد.

توجه: با توجه به رابطه بالا فاصله نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ از مبدا مختصات برابر است با $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

مثال: اگر فاصله نقطه A از محورهای ox ، oy و oz به ترتیب برابر با $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{5}$ باشد، فاصله نقطه A از مبدا مختصات چقدر است؟

۴. $2\sqrt{2}$ ۳. $\sqrt{6}$

۲. ۲

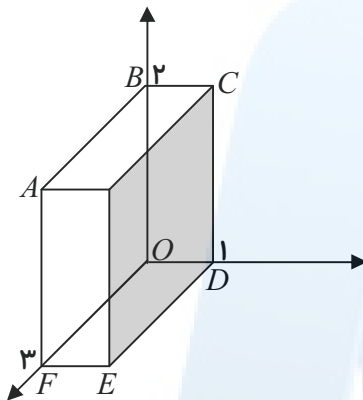
۱. $\sqrt{3}$

مثال: اگر شکل مقابل نمایش یک اتاق باشد، مطلوبست:

الف. طول قطر کف اتاق

ب. طول قطر اتاق

ج. مختصات مرکز اتاق



نکته: مرکز ثقل (نقطه گرانیگاه) مثلث ABC را با نماد G نشان داده و محل برخورد میانه می‌باشد. مختصات G از رابطه $G = \frac{A+B+C}{3}$ بدست می‌آید.

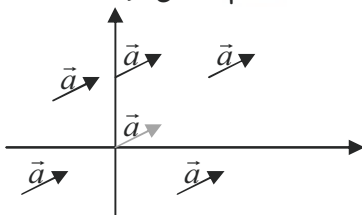
نکته: می‌دانیم در متوازی الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند؛ پس بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$ ، رابطه $A+C = B+D$ برقرار است.

مثال: اگر $A(-1, 0, 2)$ ، $B(2, 1, 1)$ و $D(4, -1, 3)$ سه راس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، مختصات راس C را بیابید.

بردارها:

هر پاره خط جهت دار مانند $\overrightarrow{AB}$ ، یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن A و انتهای آن B می‌باشد. این بردار را با $\overrightarrow{AB}$ و اندازه آن را با نماد $|\overrightarrow{AB}|$ نشان می‌دهند. اغلب برای سهولت بردار را با یک حرف کوچک لاتین مانند $\vec{a}$ نشان می‌دهند.

دو بردار را مساوی یا همسنگ گوئیم هرگاه اندازه و جهت آن‌ها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. پس بی‌شمار بردار مساوی هم وجود دارد. اصطلاحاً این بردارهای برابر را بردارهای هم ارز می‌گویند.



طول بردار: اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ ابتدا و انتهای بردار $\vec{a} = \vec{AB}$ باشند، آن گاه بردار به صورت

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

معرفی می شود. و طول آن از رابطه

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

بدست می آید. و طول بردار $\vec{OA} = \vec{A}$ از رابطه

$$|\vec{OA}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

بدست می آید.

ضرب عدد در بردار:

برای ضرب عدد حقیقی k در بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ ، کافی است عدد k را در تک تک مولفه های بردار ضرب کنیم. $k\vec{a} = (k a_1, k a_2, k a_3)$

اگر $k > 0$ آن گاه $\vec{a}$ و $k\vec{a}$ هم جهت و اگر $k < 0$ باشد، غیر هم جهت هستند. پس می توان گفت دو بردار زمانی موازی هم هستند که مضرب هم باشند.

نکته: در صورتی دو بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ موازی یکدیگرند که مضرب هم باشند یعنی:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

مثال: اگر بردارهای $\vec{a}(m-1, 1, n+m)$ و $\vec{b}(0, -2, -4)$ موازی باشند، $n-m$ کدام است؟

۲.۴

۱.۳

۲. صفر

-۲.۱

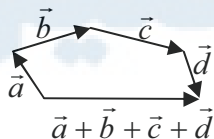
جمع دو بردار:

جمع دو بردار را از دو رویکرد تحلیلی و هندسی بررسی می کنیم.

الف. تحلیلی: اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ باشند، آن گاه: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ یعنی برای جمع دو بردار، طولها با هم و عرضها با هم و ارتفاعها با هم جمع می شوند.

ب. هندسی: جمع دو بردار به روش هندسی به دو روش زیر انجام می شود:

۱. روش مثلثی: زمانی از این روش استفاده می شود که دو (یا چند) بردار، پشت سر هم باشند. یعنی انتهای بردار قبلی، ابتدای بردار بعدی باشد. در این روش، مجموع بردارها از وصل کردن ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر به دست می آید.



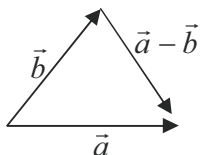
مثال: به کمک جمع دو بردار نشان دهید: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = B - A$

۲. روش متوازی الاضلاع: وقتی دو بردار، هم مبدا (هم راس) باشند، برای جمع از روش متوازی الاضلاع استفاده می کنیم. در این روش از انتهای هر بردار، موازی و هم ارز بردار دیگر رسم می کنیم، قطر متوازی الاضلاع که ابتدای آن راس مشترک دو بردار است، جمع دو بردار را نشان می دهد.

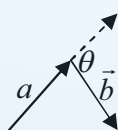
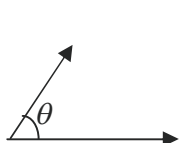
تفاضل (تفریق) دو بردار

الف. تحلیلی: اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ باشند، آن گاه: $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ یعنی برای تفریق دو بردار، طولها از هم و عرضها از هم و ارتفاعها از هم کم می شوند.

ب. هندسی: برای تفاضل دو برداری که هم مبدا هستند، از انتهای بردار دوم به انتهای بردار اول وصل می کنیم.

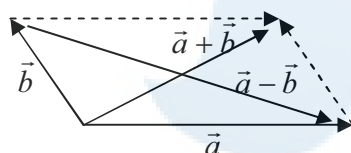


زاویه بین دو بردار: اگر دو بردار هم ابتدا (هم انتها) باشند، آن گاه زاویه تشکیل شده، $(0 \leq \theta \leq \pi)$ زاویه بین دو بردار نامیده می شود.

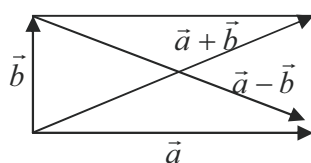


نکته: دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ قطرهای متوازی الاضلاعی هستند که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می شود. پس:

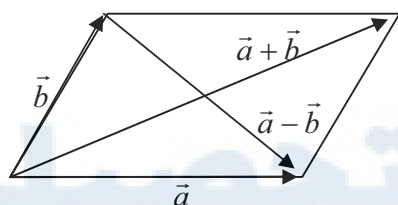
۱. اگر زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بیشتر از 90° باشد آن گاه $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$



۲. اگر زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ 90° باشد آن گاه $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$



۳. اگر زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کم تر از 90° باشد آن گاه $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$



برداریکه: بردار به طول یک بردار یکه نامیده می شود. اگر $\vec{a}$ برداری دلخواه باشد، آن گاه $e_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ برداری به طول یک و در جهت بردار $\vec{a}$ می باشد. بردارهای یکه محورهای مختصات به ترتیب $i(1, 0, 0)$ ، $j(0, 1, 0)$ و $k(0, 0, 1)$ می باشند.

نکته: می دانیم که در لوزی قطرها بر هم عمودند، یکدیگر را نصف می کنیم و نیمساز زاویه ها می باشند، پس $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ اگر و تنها اگر $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$. در این صورت $\vec{a} + \vec{b}$ نیمساز زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می باشد.

نکته: اگر بخواهیم نیمساز زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابیم، ابتدا باید دو بردار یکه یا هم طول در راستای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بسازیم؛ سپس جمع این دو بردار نقش نیمساز را خواهند داشت. پس نیمساز زاویه داخلی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت $e_{\vec{a}} + e_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ یا هر مضربی از آن از

جمله $|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ می باشد.

هندسه دوازدهم

فصل سوم : بردارها

تهیه و تنظیم: سید علی شیرغلامی

صفحه: ۸۵

نمایش یک بردار بر حسب بردارهای یکه محورها: فرض کنید $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ یک بردار باشد در این صورت بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ بر حسب بردارهای یکه محورها نوشته ایم.

مثال: اگر $\vec{a} = i + 2j - k$ و $\vec{b} = (2, -1, -3)$ آن گاه اندازه بردار $2\vec{a} - 3\vec{b}$ را بدست آورید.

مثال: نقاط $A(-1, 2, 1)$ و $B(2, -1, -2)$ مفروض اند. اگر $\vec{BM} = \frac{3}{2} \vec{MA}$ باشد، مجموع طول و ارتفاع نقطه M کدام است؟

۱. ۴

۲. $\frac{3}{5}$ ۳. $\frac{2}{5}$

۴. صفر

مثال: بر روی دو بردار $\vec{a} = -i + 2j + 3k$ و $\vec{b} = 2i - j + k$ متوازی الاضلاعی ساخته شده است. طول قطر کوچک کدام است؟

۱. $\sqrt{18}$ ۲. $\sqrt{20}$ ۳. $\sqrt{22}$ ۴. $\sqrt{24}$

مثال: چهار بردار OA و OB و OC و OD در تساوی $\vec{OA} + k \vec{OC} = \vec{OB} + k \vec{OD}$ صدق می کنند؛ چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

۱. مستطیل

۲. دوزنقه

۳. لوزی

۴. متوازی الاضلاع

مثال: سه بردار با اندازه برابر در رابطه $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ صدق می کند، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

۱. صفر

۲. ۶۰

۳. ۱۲۰

۴. ۹۰

مثال: اگر $\vec{a} = mi + j - 2k$ و $\vec{b} = 3j - k$ باشد و $\vec{a} + \vec{b}$ بر $\vec{a} - \vec{b}$ عمود باشد، آن گاه بردار $\vec{a} + \vec{b}$ کدام است؟

۱. $\sqrt{30}$ ۲. $\sqrt{29}$ ۳. $\sqrt{31}$ ۴. $\sqrt{26}$

مثال: زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 53° می باشد، زاویه بین بردارهای $e\vec{a} + e\vec{b}$ و $|\vec{a}| - |\vec{b}|$ چند درجه است؟

۱. ۵۰

۲. ۲۵

۳. ۹۰

۴. ۲۷۰

مثال: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار هم طول که زاویه آن‌ها با جهت مثبت محور x ها به ترتیب 24° و 56° درجه باشد، زاویه برآیند هندسی این دو بردار با جهت مثبت محور x ها کدام است؟

۷۰. ۴

۲۰. ۳

۴۰. ۲

۳۰. ۱

چند تست فضای R^3 و بردار

۱. اگر نقطه $A(m-1, m^2-4, m^2-2m)$ روی محور OX و نقطه $B(m^2+2m, m+1, n-m+3)$ روی صفحه xy باشند، نقطه $C(m+2n, m-n, m+n)$ روی قرار دارد.

۴

۴. صفحه YOZ ۳. محور y ها۲. صفحه XOZ ۱. محور z ها۲. اندازه تصویر بردار $\vec{v}(3, 1, 2)$ بر صفحه yz کدام است؟

۱

۴. $\sqrt{14}$ ۳. $\sqrt{13}$ ۲. $\sqrt{10}$ ۱. $\sqrt{5}$ ۳. اندازه تصاویر بردار a روی صفحات برابر $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ است. طول بردار a کدام است؟

۱

۴. ۵

۳. ۳

۲. ۴

۱. ۵

۴. نقاط $A(1, 2, -3)$ و $B(-1, 2, 4)$ مفروض اند. فاصله نقطه A' ، قرینه نقطه A نسبت به محور x ها از نقطه B' ، تصویر B روی صفحه xy کدام است؟

۴

۴. $\sqrt{29}$ ۳. $\sqrt{24}$ ۲. $\sqrt{17}$ ۱. $\sqrt{10}$ ۵. اگر نقاط $M(1, -2, 2)$ ، $N(0, -3, 3)$ و $P(4, a, b)$ روی یک خط راست باشند، $a+b$ کدام است؟

۳

۴. -۱

۳. صفر

۲. ۱

۱. ۲

۶. نقاط A ، B ، C و D در رابطه $\vec{OA} - \vec{OB} = m(\vec{OD} - \vec{OC})$ صدق می کنند، اگر $m > 1$ باشد چهار ضلعی $ABCD$ همواره کدام است؟

۱

۴. مستطیل

۳. متوازی الاضلاع

۲. لوزی

۱. دوزنقه

۷. طول تصویر پاره خط AB که در آن $A(1, 2, 3)$ و $B(5, 5, 1)$ است بر صفحه xy کدام است؟

۱

۴. ۹

۳. ۷

۲. $\sqrt{29}$

۱. ۵

۸. در مستطیل $ABCD$ حاصل $\vec{CA} + \vec{DB}$ کدام است؟

۳

۴. $2\vec{AB}$ ۳. $2\vec{DA}$ ۲. $\vec{O}$ ۱. $2\vec{BC}$ ۹. حاصل $\vec{AO} + \vec{AB} + \vec{OB}$ کدام است؟

۴

۴. $2\vec{AB}$ ۳. $\vec{BA}$ ۲. $2\vec{BA}$ ۱. $\vec{O}$

هندسه دوازدهم

فصل سوم : بردارها

تهیه و تنظیم: سید علی شیرغلامی

صفحه: ۸۷

۱۰. دو بردار $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ به طول های مساوی با محور OX به ترتیب 43° و 75° می سازند. زاویه بردار $\vec{OA} + \vec{OB}$ با محور OX چند درجه است؟

۲

۴. 57° ۳. 58° ۲. 59° ۱. 60°

۱۱. بر روی بردارهای $i\hat{e} - 2\hat{j}$ و $2\sqrt{2}\hat{k}$ یک مکعب مستطیل ساخته شده است. فاصله مرکز مکعب مستطیل تا مبدا مختصات چه قدر است؟

۲

۴. $4\sqrt{3}$

۳. ۴

۲. $2\sqrt{3}$

۱. ۳

۱۲. اگر نقاط $A(1, 2, 3)$ ، $B(2, 3, -1)$ و $C(-1, 0, 1)$ رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، مجموع طول و ارتفاع نقطه D کدام است؟

۳

۴. ۴

۳. ۳

۲. -۳

۱. -۴

۱۳. اگر $v_1 = 2i + 3j + k$ و $v_2 = i - j + k$ ، حاصل $\frac{|v_1 - 2v_2|}{|v_1 + 2v_2|}$ کدام است؟

۱

۴. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ۲. $\sqrt{6}$

۱. ۱

۱۴. نقاط $A(5, -4, 1)$ ، $B(-1, 2, 4)$ و $O(0, 0, 0)$ مفروض هستند و $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ می باشد. مقدار $|\vec{OM}|$ کدام است؟

۱

۴. $\sqrt{14}$ ۳. $\sqrt{13}$ ۲. $\sqrt{11}$ ۱. $\sqrt{10}$

۱۵. اگر دو بردار $\vec{a} = 2i - j + 3k$ و $\vec{b} = i + 2j + 4k$ دو ضلع مجاور یک مثلث با راس مشترک باشند، طول ضلع سوم مثلث برابر است با:

۲

۴. $\sqrt{13}$ ۳. $\sqrt{12}$ ۲. $\sqrt{11}$ ۱. $\sqrt{10}$

۱۶. اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، زاویه بین دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ کدام است؟

۳

۴. $\frac{3\pi}{8}$ ۳. $\frac{\pi}{8}$ ۲. $\frac{\pi}{3}$ ۱. $\frac{\pi}{4}$

۱۷. مساحت ناحیه‌ای که با روابط $|x-1| \leq 2$ و $|y+3| \leq 2$ مشخص می شود، کدام است؟

۴

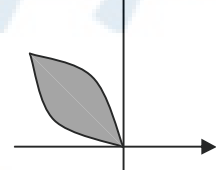
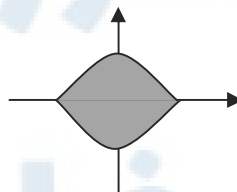
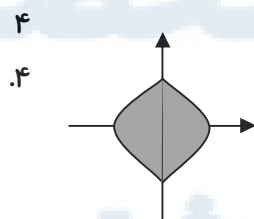
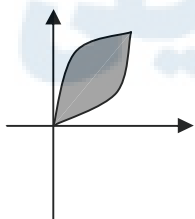
۴. ۸

۳. ۹

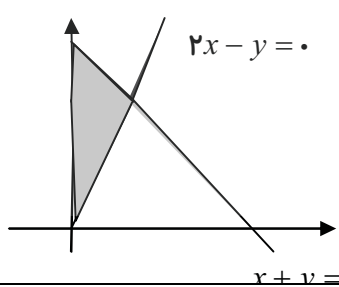
۲. ۶

۱. ۱۰

۱۸. نموداری که با روابط $x \geq y^2$ ، $y \geq x^2$ مشخص می شود، کدام است؟



۱



۱۹. نمودار کدام یک از روابط زیر به صورت مقابل است؟

$$\begin{cases} 2x - y \leq 0 \\ x + y \leq 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y \leq 0 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

هندسه دوازدهم	فصل سوم : بردارها	تهیه و تنظیم: سید علی شیرغلامی	صفحه: ۸۸
۲۰. به ازای کدام مقدار n ، نقطه $A(2n, 1-n)$ بالای نیمساز ربع دوم و چهارم و پایین محور x ها قرار دارد؟	$\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x + y \geq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y \leq 0 \\ x + y \geq 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$	
۱. $n > -1$	۲. $0 < n < 1$	۳. $-1 < n < 1$	۴. $n > 1$
۲۱. نموداری که با روابط $xy < 0$ و $ x - y = 1$ مشخص می شود، کدام است؟	۲. یک مربع	۳. یک مستطیل	۴. دو پاره خط
۲۲. اگر فاصله نقطه A از صفحات مختصات ۴، ۵ و $2\sqrt{10}$ باشد، فاصله A از مبدا مختصات کدام است؟	۱. ۱۰	۲. ۸	۳. ۹
۲۳. اگر نقطه M وسط پاره خط AB باشد، با شرط $A = (1, -2, 5)$ و $B = (1, 2, m)$ ، کم ترین طول پاره خط OM کدام است؟	۱. ۱	۲. $\frac{1}{2}$	۳. $\frac{3}{2}$
۲۴. نقطه $A = (16, 5, 12)$ مفروض است. تفاضل فواصل آن از محور x ها و y ها کدام است؟	۱. ۶	۲. ۷	۳. ۸
۲۵. مجموع فواصل نقطه $A = (2, -2, -1)$ از صفحات مختصات چند برابر فاصله آن تا مبدا مختصات است؟	۱. $\frac{5}{3}$	۲. $\frac{5}{2}$	۳. $\frac{3}{2}$
۲۶. نقطه A به مختصات $(-1, 2, 3)$ مفروض است. چند نقطه روی صفحه XOZ موجود است که فاصله اش از نقطه A برابر ۳ باشد؟	۱. ۱	۲. ۲	۳. صفر
۲۷. قرینه نقطه $A = (2 - a, a, -a)$ نسبت به نقطه $B = (1, -1, 2)$ روی صفحه XOZ قرار دارد. طول پاره خط AB کدام است؟	۱. $\sqrt{5}$	۲. $2\sqrt{2}$	۳. $\sqrt{10}$
۲۸. قرینه نقطه $A = (b+1, 2a, 1)$ نسبت به صفحه XOZ روی خط $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$ قرار دارد. زوج مرتب (a, b) کدام است؟	۱. $(2, 2)$	۲. $(-2, -2)$	۳. $(2, -2)$
۲۹. قرینه نقطه $A = (-3, 4, 5)$ نسبت به خط $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$ کدام است؟	۱. $(3, -8, 5)$	۲. $(-3, -8, 5)$	۳. $(-3, 8, 5)$
۳۰. در چهار ضلعی $ABCD$ اگر M وسط CD باشد، حاصل $\vec{AB} - \vec{DA} - \vec{CB}$ کدام است؟	۱. $2\vec{AM}$	۲. $\vec{AM}$	۳. $2\vec{MA}$
۳۱. دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ غیر موازیند. اگر دوبردار $\vec{u} = (x-2)\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{v} = (2x+1)\vec{a} - \vec{b}$ موازی باشند، مقدار x کدام است؟	۱. $1 -$	۲. $\frac{1}{3}$	۳. 1
۳۲. زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با 60° و $ \vec{a} = 2 \vec{b} $ زاویه بین دو بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ چند درجه است؟	۱. ۳۰	۲. ۶۰	۳. ۴۵

۳۳. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر باشند به طوری که $\vec{a} + \vec{b}$ بر $\vec{a} - \vec{b}$ عمود باشد، آن گاه کدام گزاره درست است؟

۱. $\vec{a} \perp \vec{b}$ ۲. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ۳. $\vec{a} \perp \vec{b}$ و $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ۴. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

۲

۳۴. زاویه بین دو بردار $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\vec{v} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ کدام است؟

۱. 45° ۲. 90° ۳. 180° ۴. 0°

۲

۳۵. زاویه بین دو بردار $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\vec{v} = |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ کدام است؟

۱. 0° ۲. 45° ۳. 90° ۴. 180°

۱

۳۶. اگر $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ باشد، کدام بردار نیم ساز زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است؟

۱. $\vec{j} + \vec{k}$ ۲. $\vec{j} - \vec{k}$ ۳. $-\vec{j} + \vec{k}$ ۴. $-\vec{j} - \vec{k}$

۲

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار



مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار



مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

ضرب داخلی: اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند، ضرب داخلی آن‌ها با نماد $a \cdot b$ نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود (محاسبه می شود)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

مثال: ضرب داخلی دو بردار $\vec{a} = i - j$ و $\vec{b} = 2i + 3k$ را حساب کنید.

مثال: اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}| |\vec{b}| = 0$ باشد، زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چقدر است؟

۱. صفر

۲. $\frac{\pi}{4}$ ۳. $\frac{\pi}{2}$ ۴. π

مثال: ویژگی های ضرب داخلی دو بردار:

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

۲. خاصیت پخش نسبت به جمع و تفریق بردارها:

$$(\vec{b} \pm \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} \pm \vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$$

در واقع فاکتورگیری نیز برقرار است.

۳. اگر $r \in R$ آن گاه $r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r\vec{b})$

$$4. \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

۵. طرفین یک رابطه را می توان در یک بردار، ضرب داخلی کرد ولی عکس آن درست نیست.

$$\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

مثال: اگر $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 3$ و $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 7$ ، آن گاه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{4}$ ۲. $\frac{\pi}{3}$ ۳. $\frac{\pi}{2}$ ۴. $\frac{2\pi}{3}$

کاربرد ضرب داخلی:

۱. شرط عمود بودن دو بردار: شرط لازم و کافی برای عمود بودن دو بردار این است که ضرب داخلی آن‌ها صفر شود.

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، 120° می‌باشد و بردار $2\vec{a} + \vec{b}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود است. در این صورت $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ کدام است؟

۱.۴

۲.۳

۳.۲

۴.۱

۲. زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از رابطه $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ بدست می‌آید.مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، 120° می‌باشد و $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ، زاویه بین بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و بردار کوچکتر چند درجه است؟

۱.۳۰

۲.۴۵

۳.۹۰

۴.۱۲۰

مثال: اگر $A(1, 2, 5)$ و $B(3, 1, 7)$ و $C(4, -1, 5)$ سه راس مثلث باشد، زاویه A کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{4}$

۲. $\frac{\pi}{6}$

۳. $\frac{\pi}{3}$

۴. $\frac{\pi}{2}$

۳. استفاده از اتحادها در بردارها

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) \quad \text{نتیجه:}$$

مثال: در هر حالت مقدار خواسته شده را بدست آورید.

هندسه دوازدهم

فصل سوم : بردارها

تهیه و تنظیم: سید علی شیرغلامی

صفحه: ۹۴

۱. $\vec{a} + \vec{b} = i + 2j + k$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

۲. $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = ?$

مثال: اگر $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ و $\theta = 60^\circ$ باشند. طول بردارهای $4\vec{a} - 3\vec{b}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ را بیابید.

مثال: اگر $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$ و $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$ آن گاه طول بردار $\vec{a} - \vec{b}$ چقدر است؟

۴. $\sqrt{97}$

۳. $\sqrt{93}$

۲. ۸

۱. ۶

۴. نامساوی کوشی شوارتز:

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند آن گاه $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$

مثال: نامساوی بالا را ثابت کنید.

مثال: اگر $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ باشد، بیشترین مقدار عبارت $6x - 3y + 2z$ کدام است؟

۴. ۳

۳. ۹

۲. ۲۱

۱. ۷

مثال: اگر $z + 4y + 3x = 6$ ، کمترین مقدار $z^2 + y^2 + x^2$ کدام است؟

۲. ۱

۴. ۲

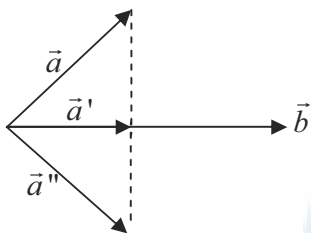
۶. ۳

۳۶. ۴

۵. کاربرد مهم: تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی امتداد (راستای) بردار $\vec{b}$:
تصویر $\vec{a}$ را با نماد $\vec{a}'$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

و قرینه بردار $\vec{a}$ نسبت به بردار $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}''$ نشان داده و $\vec{a}'' = 2\vec{a}' - \vec{a}$



$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} \text{ و } |\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \theta \text{ و } |\vec{a}''| = |\vec{a}|$$

مثال: تصویر بردار $\vec{a} = (2, -1, 2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (1, -1, 0)$ بیابید.

چند تست ضرب داخلی:

۱. با فرض $a = (3, m, 5)$ و $b = (3 - m, 7, 0)$ ، به ازای یک مقدار m دو بردار $a + b$ و $a - b$ عمود برهم هستند. زاویه بین دو بردار a و b در این حالت، چند درجه است؟

۳۰. ۱

۴۵. ۲

۶۰. ۳

۹۰. ۴

۳

۲. دو بردار a و b با معلومات $|a| = 5$ و $|b| = 7$ و $a - b = 2i + j - 3k$ مفروض اند. تصویر قائم بردار b بر روی بردار a ، چند برابر بردار a است؟

۰. ۷. ۱

۰. ۸. ۲

۱. ۲. ۳

۱. ۴. ۴

۳

۳. سه بردار $v_1 = (1, -1, a)$ و $v_2 = (2, b, 1)$ و $v_3 = (c, 3, 2)$ دو به دو برهم عمودند. کدام است $a + b + c$ ؟

۵. ۱

۶. ۲

۷. ۳

۸. ۴

۱

هندسه دوازدهم

فصل سوم : بردارها

تهیه و تنظیم: سید علی شیرغلامی

صفحه: ۹۶

۴. نقطه‌ی O مبدا مختصات و $\vec{OA} = 3i + j$ و $\vec{OB} = -i + 5j + 4k$ و $\vec{OC} = -i + 5j + 4k$ مفروض هستند. اگر $\vec{AM} = -\frac{3}{4}\vec{AB}$ باشد. کسینوس زاویه‌ی

بردار $\vec{OM}$ با محور y ها کدام است؟

۱. $-\frac{2}{5}$ ۲. $-\frac{2}{7}$ ۳. $\frac{2}{5}$ ۴. $\frac{3}{7}$ ۵. $\frac{2}{7}$

۵. سه نقطه $A(2, 1, 0)$ و $B(3, -1, 2)$ و $C(-1, 1, 3)$ سه راس مثلثی هستند. $\cos A$ کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۲. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۵. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

۶. بر روی دو بردار $a = 3i + 3j$ و $b = i - j - 2k$ متوازی الاضلاع ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این متوازی الاضلاع، کدام است؟

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{2}{3}$ ۵. $\frac{2}{3}$

۷. اگر بردار $a = (1, -1, m)$ با محور z ها زاویه ۴۵ درجه بسازد، کسینوس زاویه‌ی این بردار با محور x ها کدام است؟

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۵. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۸. دو بردار $a = 3i - 6j + 3k$ و $b = -7i + 4j + k$ نسبت به بردار c قرینه یکدیگرند. اگر زاویه بین دو بردار a و c در بازه $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ باشد، آن گاه بردار جهت c کدام است؟

۱. $\frac{1}{2}(-2i + 2j + k)$ ۲. $\frac{1}{3}(-2i - j + 2k)$ ۳. $\frac{1}{3}(2i - 2j + k)$ ۴. $\frac{1}{3}(2i + j - 2k)$ ۵. $\frac{1}{3}(2i + j - 2k)$

۹. قرینه بردار $a = (-2, 0, 1)$ نسبت به امتداد بردار $b = (1, 2, -1)$ کدام بردار است؟

۱. $(1, -2, 0)$ ۲. $(-1, 2, 0)$ ۳. $(0, 2, -1)$ ۴. $(0, -2, 1)$ ۵. $(0, -2, 1)$

۱۰. سه بردار a و b و c با اندازه‌ی ۳ و ۴ و ۷ واحد در رابطه $a + b + c = 0$ صدق می کنند، مقدار $a.b + b.c + c.a$ کدام است؟

۱. -37 ۲. -19 ۳. 19 ۴. 37 ۵. 37

۱۱. تصویر قائم بردار $(0, -3, 6)$ روی امتداد بردار $(2, -1, -2)$ کدام بردار است؟

۱. $(2, -1, -2)$ ۲. $(-2, 1, 2)$ ۳. $(4, -2, -4)$ ۴. $(2, 3, -1)$ ۵. $(2, 3, -1)$

۱۲. بردارهای $a(3, 2, 4)$ و بردار $b(2, 1, m)$ برهم عمودند و بردارهای b و $c(n, -2, p)$ با هم موازی هستند. حاصل $n + p + m$ کدام است؟

۱. -2 ۲. -1 ۳. صفر ۴. 1 ۵. 1

۱۳. m چقدر باشد تا نقاط $A(2, 1, 4)$ ، $B(m-1, 5, 2m+1)$ و $C(3, 3, 1)$ رئوس یک مثلث قائم الزاویه در راس A باشند؟

۱. $\frac{14}{5}$ ۲. $\frac{5}{14}$ ۳. $\frac{-14}{5}$ ۴. $\frac{-5}{14}$ ۵. $\frac{-5}{14}$

۱۴. اگر $|a| = 2$ و $|b| = 3$ و $a.b = 4$ باشد، حاصل $(3a + b) \cdot (a + 2b)$ چه قدر است؟

۱. 28 ۲. 30 ۳. 50 ۴. 58 ۵. 58

۱۵. در مربع $ABCD$ به قطر AC ، حاصل $\vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{AB}$ برابر است با:

۱. 8 ۲. 6 ۳. $4\sqrt{2}$ ۴. $8\sqrt{2}$ ۵. $8\sqrt{2}$

۱۶. حاصل $i.(2j + k) + 3i.(j - k) + 2i.(i + 2k)$ کدام است؟

هندسه دوازدهم	فصل سوم : بردارها	تهیه و تنظیم: سید علی شیرغلامی	صفحه: ۹۷
۱. ۲-۱	۲-۱	۳-۱	۴-۱
۱۷. در مکعب مقابل به ضلع واحد، حاصل $(\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{FC}) \cdot (\overrightarrow{2GB} + \overrightarrow{EC})$ کدام است؟	۴. ۲	۳-۴	۴-۶
۱۸. در شکل مقابل اگر $ a =1, b =1, c =3$ و $ d =5$ باشد حاصل $a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$ کدام است؟	۵. ۱	۳	۴
۱۹. اگر اندازه دو بردار $v_1 = 2i + (a+1)j + 4k$ و $v_2 = ai + 4j + 3k$ برابر باشند، کسینوس زاویه بین دو بردار کدام است؟	۴/۵. ۲	۳	۴
۲۰. در مکعب مستطیل مقابل با ابعاد ۱ و ۲ و ۲، کسینوس زاویه C در مثلث ABC کدام است؟	۵/۵. ۴	۳	۴
۲۱. اگر $a = 3i - 4k$ و اندازه تصویر بردار b در امتداد بردار a برابر ۲ باشد، $a \cdot b$ کدام است؟	۱۶/۲۹. ۱	۴/۲۹. ۳	۲۸/۲۹. ۴
۲۲. اگر $a \cdot j = -2a \cdot k = a \cdot (-2i + 3j + 2k) = 2$ ، اندازه تصویر بردار $u(-3, -3, 3)$ روی بردار a کدام است؟	۱. صفر	۲. $\frac{1}{5}$	۳. $\frac{1}{3}$
۲۳. اگر $4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}z + \sqrt{2}y + 6x$ باشد، مینیمم مقدار $9x^2 + y^2 + 2z^2$ کدام است؟	۲. $\frac{2}{3}$	۳. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$	۴. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
۲۴. اگر $9 = 9y^2 + 4x^2 + z^2$ ، ماکزیمم عبارت $4x + 6y + z$ کدام است؟	۱. $\sqrt{2}$	۲. ۴	۳. ۲
۲۵. اگر $A(-1, 2)$ و $B(1, 1)$ دو نقطه باشند، مکان هندسی نقاطی مانند M که در رابطه $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ صدق کنند، کدام است؟	۱. $x^2 + y^2 = 3y + 1$	۲. $x^2 + y^2 = 1 - 3y$	۳. $x^2 + y^2 = 3y - 1$
	۴. $x^2 + y^2 = -3y - 1$		



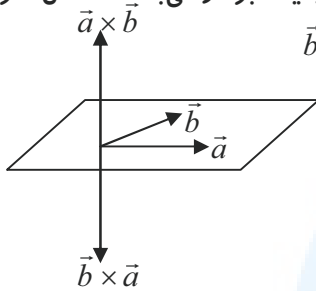
مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار



مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

ضرب خارجی دو بردار (ضرب برداری - ضرب بیرونی):

برخلاف ضرب داخلی دو بردار که حاصل آن یک عدد حقیقی است، حاصل ضرب خارجی دو بردار، یک بردار می‌باشد. حاصل ضرب خارجی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a} \times \vec{b}$ یا $\vec{a} \wedge \vec{b}$ نمایش داده می‌شود. $\vec{a} \times \vec{b}$ برداری است عمود بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (قانون دست راست)



فرض کنیم $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در فضای R^3 باشند ضرب خارجی $\vec{a} \times \vec{b}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \quad \text{نکته: اندازه } \vec{a} \times \vec{b}$$

مثال: اگر $\vec{v}_1(-1, 1, 2)$ و $\vec{v}_2(1, -2, 3)$ باشد، زاویه $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ با کدام محور بزرگ‌تر است؟

۱. محور x ها ۲. محور y ها ۳. محور z ها ۴. با هر سه یکسان است

مثال: اگر $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3$ آن‌گاه زاویه بین این دو بردار کدام است؟

۱. ۳۰ ۲. ۴۵ ۳. ۶۰ ۴. ۹۰

مثال: بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}(0, 2, -1)$ و $\vec{b}(2, 3, 1)$ کدام است؟

۱. $5i - 2j + 4k$ ۲. $5i + 2j - 4k$ ۳. $-5i + 2j + 4k$ ۴. $5i + 2j + 4k$

نکته: بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ (یا $\vec{b} \times \vec{a}$) بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و همه ترکیبات خطی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت $m\vec{a} + n\vec{b}$ عمود است.

مثال: دو بردار با مولفه‌های $\vec{a}(1, 2, -1)$ و $\vec{b}(2, 4, m)$ مفروضند. به ازای کدام مقادیر m اندازه بردار $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ برابر صفر است.

۱. $m = -2$ ۲. $m = \pm 2$ ۳. هیچ مقدار m ۴. هر مقدار m

مثال: بردار $\vec{v}$ به طول ۲۶، عمود بر دو بردار $\vec{a}(4, -2, -3)$ و $\vec{b}(0, 1, 3)$ می‌باشد. مختصات بردار $\vec{v}$ کدام است؟

۱. $(6, 24, -8)$ ۲. $(-6, 24, -8)$ ۳. $(3, 12, -4)$ ۴. $(-3, 12, -4)$

ویژگی‌های ضرب خارجی دو بردار:

۱. ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ و $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

۲. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}|$

۳. خاصیت شرکتپذیری ندارد. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

۴. $(r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b}) = r(\vec{a} \times \vec{b})$, $r \in \mathbb{R}$

۵. خاصیت توزیع پذیری $(\vec{b} \pm \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} \pm \vec{c} \times \vec{a}$ $\vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \pm \vec{a} \times \vec{c}$

۶. خاصیت حذف برقرار نیست. $\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ولی عکس آن برقرار نیست.

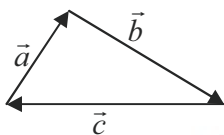
۷. ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر صفر است. یعنی $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

۸. دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر و فقط اگر ضرب خارجی آن‌ها صفر برداری شود. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

۹. اتحادها برقرار نیستند.

مثال: اگر $|\vec{a}| = 4$ ، $|\vec{b}| = 5$ و $|(a+b) \times (a-b)| = 20$ باشد، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{4}$ ۲. $\frac{\pi}{3}$ ۳. $\frac{\pi}{2}$ ۴. $\frac{\pi}{6}$



نکته: (حرکت دوری) اگر $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ آن گاه $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

مثال: اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند به طوری که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ و $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{u}$ باشد، آن گاه $\vec{a} \times \vec{c}$ برابر کدام است؟

۱. $\vec{u}$ ۲. $-\vec{u}$ ۳. $-\frac{1}{2}\vec{u}$ ۴. $\frac{1}{2}\vec{u}$

کاربرد ضرب خارجی در مساحت متوازی الاضلاع و مثلث:

مساحت متوازی الاضلاعی که بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن باشد، از رابطه $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$ بدست می‌آید و مساحت مثلثی (شکلی) که با این دو بردار پدید می‌آید به صورت $S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$ محاسبه می‌شود.

نکته: مساحت متوازی الاضلاعی که دو قطر آن d و d' باشد به صورت $S = \frac{1}{2} |d \times d'|$ محاسبه می‌شود.

نکته: اگر $\vec{a}$ و $\vec{d}$ به ترتیب یک ضلع و یک قطر متوازی الاضلاع باشند مساحت متوازی از رابطه $S = |\vec{a} \times \vec{d}|$ نیز محاسبه می‌شود.
مثال: درستی نکات بالا را بررسی کنید.

مثال: مساحت متوازی الاضلاعی که سه راس آن نقاط $(1, 2, 1)$ و $(0, 1, 1)$ و $(1, -1, 2)$ باشد، چقدر است؟

$$\sqrt{15} \cdot 4$$

$$\sqrt{13} \cdot 3$$

$$\sqrt{11} \cdot 2$$

$$\sqrt{10} \cdot 1$$

مثال: در یک متوازی الاضلاع، قاعده و ارتفاع به ترتیب ۵ و ۳ می‌باشد. حاصل عبارت $|\vec{AB} \times \vec{AD}| + |\vec{AB} \times \vec{AC}| + |\vec{AC} \times \vec{BD}|$ کدام است؟

$$75 \cdot 4$$

$$60 \cdot 3$$

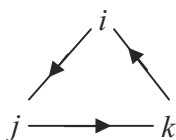
$$25 \cdot 2$$

$$50 \cdot 1$$

ضرب داخلی و خارجی بردارهای یک‌محوره:

ضرب داخلی: $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ و $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$

ضرب خارجی: مانند حرکت دوری: $i \times j = k$ و $j \times k = i$ و $k \times i = j$ و خلاف جهت مثلاً $i \times k = -j$



مثال: حاصل $2i \cdot (j \times k) + 3j \cdot (i \times k) + 4k \cdot (i \times j)$ کدام است؟

$$4 \cdot \text{صفر}$$

$$3 \cdot 3$$

$$2 \cdot 2$$

$$1 \cdot 1$$

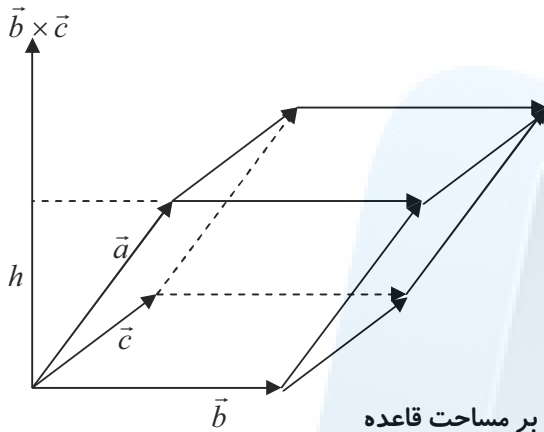
مثال: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طولهای ۵ و ۸ مفروضند. مساحت تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویه بین دو بردار کمتر از قائمه باشد، اندازه تفاضل این دو بردار کدام است؟

۵. ۱

۶. ۲

۳. ۵/۶

۴. ۵/۷



حجم متوازی السطوح:

می دانیم مساحت قاعده متوازی السطوح برابر است با $|\vec{b} \times \vec{c}|$ و طول ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با اندازه، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b} \times \vec{c}$

یعنی $h = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ و از طرفی ارتفاع برابر است با حجم متوازی السطوح تقسیم بر مساحت قاعده

لذا حجم متوازی السطوح از رابطه $V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ بدست می آید.

به ضرب $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ، ضرب مختلط نیز می گویند.

نکته: ضرب مختلط دارای حرکت دوری می باشد. یعنی

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

مثال: اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

۴. $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$ ۳. $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$ ۲. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ۱. $\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$

چند کاربرد ضرب مختلط:

۱. اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ، $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، حجم متوازی السطوح

تولید شده توسط این سه بردار از رابطه زیر بدست می آید.

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

نکته: حجم منشور مثلث القاعده با سه بردار بالا نصف حجم متوازی السطوح می باشد.

نکته: حجم چهاروجهی (هرم) $\frac{1}{3}$ حجم منشور و در نتیجه $\frac{1}{6}$ حجم متوازی السطوح می باشد.

هندسه دوازدهم

فصل سوم : بردارها

تهیه و تنظیم: سید علی شیرغلامی

صفحه: ۱۰۴

مثال: حجم متوازی السطوح که یال‌های آن بردارهای $\vec{a} = i + 2j + 3k$ و $\vec{b} = j + 2k$ و $\vec{c} = i + 3k$ باشد، چقدر است؟

۲.۱

۴.۲

۸.۳

۱۲.۴

مثال: بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به طوری که $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ و $|\vec{c}| = 3$ و $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ و زاویه بردار $\vec{a}$ با صفحه شامل $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر 60° می‌باشد. حجم متوازی السطوحی که بر این سه بردار بنا می‌شود، چقدر است؟

۱. صفر

۲. ۶

۳. $6\sqrt{3}$ ۴. $4\sqrt{3}$

۲. (کاربرد مهم دوم) هم صفحه بودن سه بردار

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \text{سه بردار در یک صفحه واقع باشند.}$$

در واقع متوازی السطوحی تشکیل نشود.

مثال: سه بردار $(1, -1, 1)$ و $(0, 2, 1)$ و $(m, 0, 2)$ هم صفحه‌اند. m کدام است؟۱. $\frac{3}{4}$ ۲. $\frac{4}{3}$ ۳. $-\frac{3}{4}$ ۴. $-\frac{4}{3}$ مثال: به ازای کدام مقدار m ، بردار $\vec{a} = (1, 2, m)$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار در راستاهای $(0, -1, 2)$ و $(2, 3, -1)$ نوشت؟۱. $\frac{2}{3}$ ۲. $-\frac{2}{3}$ ۳. $\frac{3}{2}$ ۴. $-\frac{3}{2}$

چند تمرین کتاب صفحه ۸۴:

۱. برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است، تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به دست آورید.الف. $\vec{b} = i$ ، $\vec{a}(2, -1, 2)$ ب. $\vec{b}(3, 2, 1)$ و $\vec{a}(2, 3, 1)$ ۲. سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بنزید که برای آنها $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.۳. اگر $\vec{a}(1, -3, 4)$ و $\vec{b}(3, -4, 2)$ و $\vec{c}(-1, 1, 4)$ باشند، آن گاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را بدست آورید.۴. برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}(1, -3, 2)$ و $\vec{b}(-2, 1, -5)$ را پیدا کنید.۵. سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بنزید که برای آنها $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ بحث کنید.۶. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروضاند به طوری که $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{b}| = 26$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

هندسه دوازدهم

فصل سوم: بردارها

تهیه و تنظیم: سید علی شیرغلامی

صفحه: ۱۰۶

۷. مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A(3, 5, 7)$ ، $B(5, 5, 0)$ و $(-4, 0, 4)$ داده شده است را بیابید.

۸. فرض کنید $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ را حساب کنید.

چند تست ضرب خارجی:

۱. اگر $a \times b = \vec{0}$ و بردارهای a و b غیر صفر باشند. آن گاه الزاماً کدام درست است؟

۱. $a = -b$ ۲. $a = b$ ۳. $a \perp b$ ۴. $a \parallel b$ ۴

۲. اگر i, j, k بردارهای واحد مختصات باشند، حاصل $k \times (i \times j)$ کدام است؟

۱. $\vec{0}$ ۲. $-i$ ۳. j ۴. $-k$ ۲

۳. اگر $a = i - 2j$ ، $b = 3j + 2k$ و $c = 4i + j - 2k$ باشد، تصویر بردار $(a \times b) \times c$ روی محور x ها کدام است؟

۱. i ۲. $3i$ ۳. $2i$ ۴. $4i$ ۱

۴. دو بردار با تساوی $a = (1, 2, -1)$ و $b = (2, 4, m)$ مفروضند. به ازای کدام مقادیر m ، اندازه بردار $(a \times b) \cdot (a + b)$ برابر صفر است؟

۱. فقط $m = -2$ ۲. فقط $m = \pm 2$ ۳. هیچ مقدار m ۴. هر عدد حقیقی m ۴

۵. اگر بردار $a = (x, y, z)$ بر بردارهای $b = (1, -1, 2)$ و $c = (2, 0, 1)$ عمود باشد و $|a| = 2$ باشد، حاصل $x + y + z$ کدام است؟

۱. $\frac{10}{\sqrt{14}}$ ۲. $\frac{12}{\sqrt{14}}$ ۳. $\frac{6}{\sqrt{14}}$ ۴. $\frac{8}{\sqrt{14}}$ ۴

۶. اگر $i = 2$ و $j = -4$ باشد، $a \times k$ کدام است؟

۱. $-4i + 2j$ ۲. $4i - 2j$ ۳. $-4i + 2j$ ۴. $-4i - 2j$ ۴

۷. تصویر بردار $a \times b$ بر روی $2a - b$ کدام است؟

۱. $\vec{0}$ ۲. $2a + b$ ۳. $b - 2a$ ۴. $b \times a$ ۱

۸. اگر $|v_1 \times v_2| = 4$ باشد، اندازه بردار $(3v_1 - v_2) \times (v_1 + v_2)$ چه قدر است؟

۱. ۱۶ ۲. ۸ ۳. ۴ ۴. صفر ۱

۹. حاصل $(2a + b) \times (c - a) + (b + c) \times (a + b)$ کدام است؟

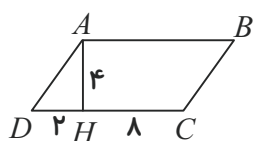
۱. $a \times c$ ۲. $c \times a$ ۳. $\vec{0}$ ۴. $b \times c$ ۱

صفحه: ۱۰۷

تهیه و تنظیم: سید علی شیرغلامی

فصل سوم: بردارها

هندسه دوازدهم

۱۰. در متوازی الاضلاع مقابل حاصل $|AB \times AC| + |AC \times BD| + |AB \times AD|$ کدام است؟

۳

۱۲۰. ۲

۸۰. ۱

۲۰۰. ۴

۱۶۰. ۳

۱۱. اگر بردارهای a ، b و c در رابطه $a + b + c = \vec{0}$ صدق کنند و $|a| = |b| = |c| = \sqrt{2}$ باشد، $|a \times c|$ کدام است؟

۴

 $\sqrt{3}$. ۴ $\sqrt{2}$. ۳

۱. ۲

 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ۱۱۲. اگر a ، b و c سه بردار غیر صفر باشند و $a + b + c = \vec{0}$ و $a \times b = 3k$ باشد، حاصل $4c \times a - c \times b$ کدام است؟

۳

 $18k$. ۴ $15k$. ۳ $14k$. ۲ $9k$. ۱۱۳. اگر اندازه ضرب خارجی دو بردار a و $b \times c$ با ضرب داخلی آنها برابر باشد، زاویه بین a و $b \times c$ کدام است؟

۲

 $\frac{\pi}{3}$. ۴ $\frac{\pi}{2}$. ۳ $\frac{\pi}{4}$. ۲ $\frac{\pi}{6}$. ۱۱۴. زاویه بین دو بردار a و b کمتر از ۹۰ است، $|a| = 6$ ، $|b| = 5$ و $|a \times (a + b)| = 18$ حاصل $a \cdot (a + b)$ کدام است؟

۳

 64 . ۴ 60 . ۳ 56 . ۲ 54 . ۱۱۵. مساحت مثلث ABC با سه راس $A(1, -2, 3)$ ، $B(2, 0, 1)$ و $C(-3, 2, 1)$ کدام است؟

۴

 $\sqrt{65}$. ۴ $\sqrt{54}$. ۳ $\sqrt{42}$. ۲ $\sqrt{35}$. ۱۱۶. اگر $a(1, -2, 3)$ و $b(2, 0, 1)$ ، مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $a + 3b$ و $2a + 5b$ کدام است؟

۳

 $5\sqrt{3}$. ۴ $3\sqrt{5}$. ۳ $\sqrt{2}$. ۲ $2\sqrt{3}$. ۱۱۷. اگر $a = 2i - j + k$ و $b = j - k$ باشند، مساحت مثلثی که بر روی بردار $a \times b$ و $a + 2b$ ساخته می شود، کدام است؟

۴

 $2\sqrt{3}$. ۴

۳. ۳

 $2\sqrt{2}$. ۲ $\sqrt{5}$. ۱۱۸. چهار بردار a ، b ، c و d در دو رابطه $a \times c = d \times b$ و $a \times d = c \times b$ صدق می کنند. الزاماً دو بردار غیر صفر $a + b$ و $c + d$ نسبت به

هم کدام وضع را دارند؟

۴

۴. موازی

۳. عمود

۲. قرینه

۱. مساوی

۱۹. دو بردار ثابت $a(-1, 2, 3)$ و $b(-1, 0, 3)$ و بردار متغیر c مفروض اند. اگر $a \times c = b \times c$ باشد، مکان بردار c کدام است؟ ۲۱. موازی با محور x ها ۲. موازی محور y ها ۳. موازی محور z ها ۴. همه بردارهای گذرنده از مبدا مختصات۲۰. m چه قدر باشد تا چهار نقطه $A(m - 2, m, 1)$ ، $B(0, 2, 1)$ ، $C(2, -3, 2)$ و $D(1, 2, 4)$ در یک صفحه باشند؟

۲

۶. ۴

۳. ۳

۲. ۲

۱. ۱

۲۱. اگر a ، b و c سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

۲

 $(a \times c) \cdot b$. ۴ $b \cdot (a \times c)$. ۳ $a \cdot (b \times c)$. ۲ $a \cdot (c \times b)$. ۱

۱

۲۲. اگر $a \times c = a \times b$ و $b \neq c$ ، آن گاه کدام نتیجه گیری نادرست است؟۴. a ، b و c موازی یک صفحه اند۳. $a \cdot (b \times c) = 0$ ۲. a موازی $b - c$ ۱. a عمود بر $b - c$ ۲۳. اگر $a = (2, -3, 1)$ و $b = (1, 2, -4)$ باشند، حجم متوازی السطوحی که بر روی سه بردار a ، b و $a \times b$ ساخته شود، کدام است؟

۲

۲۵۰. ۴

۲۴۵. ۳

۲۳۰. ۲

۲۲۵. ۱

۲۴. بر روی سه بردار $a = 2i - j$ ، $b = j + 3k$ و $c = 4i - k$ یک متوازی السطوح ساخته شده است. اگر قاعده این متوازی السطوح رابردارهای a و b تشکیل دهند، ارتفاع متوازی السطوح کدام است؟

هندسه دوازدهم	فصل سوم : بردارها	تهیه و تنظیم: سید علی شیرغلامی	صفحه: ۱۰۸
۱. ۱	۲. ۱/۵	۳. $\sqrt{3}$	۴. ۲
۲۵. به ازای کدام مقدار m ، بردار $(-3, 10, m)$ برابر مجموع دو بردار هم راستا با بردارهای $(3, 1, 2)$ و $(1, 4, -2)$ است؟			
۱. ۱۰-	۲. ۸-	۳. ۹	۴. ۱۱
۲۶. بین سه بردار a ، b و c رابطه $(a \times b) + (b \times c) + (c \times a) = 0$ برقرار است. وضعیت این سه بردار نسبت به هم چگونه است؟			
۱. موازی هم	۲. منطبق برهم	۳. واقع در یک صفحه	۴. دو به دو عمود بر هم
۲۷. اگر a ، b و c سه بردار غیر صفر باشند، خلاصه شده $((b+c) \times (c-a)) \cdot (2a-b)$ کدام است؟			
۱. $a \cdot (b \times c)$	۲. $2a \cdot (b \times c)$	۳. $3a \cdot (b \times c)$	۴. صفر

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار



مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار



مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

راه‌های ارتباطی مرکز مشاوره

تلگرام



AlirezaAfsharOfficial

اینستاگرام



AlirezaAfsharOriginal

وبسایت



www.AlirezaAfshar.org

رزور مشاوره خصوصی علیرضا افشار

برای رزرو مشاوره خصوصی تک جلسه و ماهانه
به شماره ۰۹۳۵۸۹۶۰۵۰۳ در واتساپ پیام دهید

Afshar.xyz

آدرس تمام رسانه ها :

