به نام خدا

تهیه و تنظیم: وحید کربایی

خرداد ۱۴۰۳

اثبات‌های کتاب هندسه دوازدهم - آمادگی امتحان نهایی

① $r(A \pm B) = rA \pm rB$

اثبات: $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$

$$= r([a_{ij}] \pm [b_{ij}])$$
$$= r([a_{ij} \pm b_{ij}])$$
$$= [r(a_{ij} \pm b_{ij})] = [ra_{ij} \pm rb_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] = r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}]$$
$$= rA \pm rB$$

---

② $(r \pm s)A = rA \pm sA$

اثبات: $A = [a_{ij}]$

$$= (r \pm s)[a_{ij}]$$
$$= [(r \pm s)a_{ij}] = [ra_{ij} \pm sa_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [sa_{ij}] = r[a_{ij}] \pm s[a_{ij}]$$
$$= rA \pm sA$$

---

③ ثابت کنید اگر A و B تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه:

الف) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

اثبات: $(A+B)(A+B) = A \times A + \underline{A \times B} + \underline{B \times A} + B \times B \overset{A \times B = B \times A}{=} A^2 + 2AB + B^2$

ب) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

اثبات: $(A-B)(A+B) = A \times A + \underline{A \times B} - \underline{B \times A} - B \times B \overset{A \times B = B \times A}{=} A^2 - B^2$

---

④ ثابت کنید: «وارون هر ماتریس مربعی درصورت وجود منحصر به فرد است»

اثبات: فرض: $\begin{cases} AB = BA = I \\ AC = CA = I \end{cases}$

$$B = \underline{I}B = \underline{CA}B = C(\overset{I}{AB}) = CI = C$$

۵

معادله دایره $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\longrightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

اثبات:

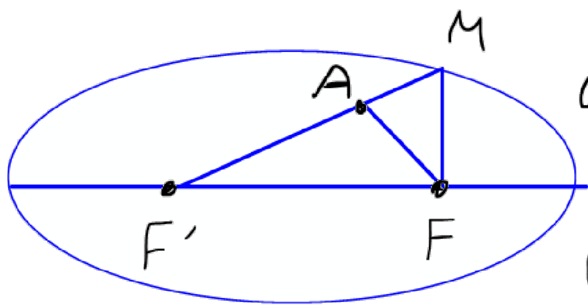
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=0$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}-c=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

۶

ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه مانند A درون بیضی از دو کانون، کوچکتر از $2a$ می باشد.



تعریف بیضی: $MF+MF'=2a$

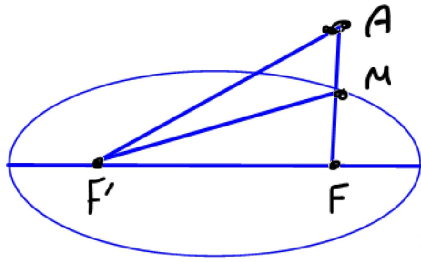
نامساوی مثلث: $MA+MF>AF$

$$\xrightarrow{+AF'} MA+AF'+MF>\overbrace{AF+AF'}^{2a}$$

$$\longrightarrow MF'+MF>2a$$

---

⑦ ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه مانند A خارج بیضی تا دو کانون، بزرگتر است از ۲a



تعریف بیضی $MF+MF'=2a$

نامساوی مثلثی $AF'+AM>MF'$

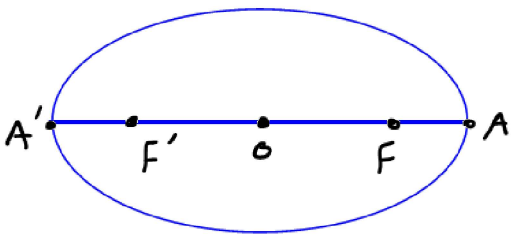
$\xrightarrow{+MF} AF'+MF+AM>\overbrace{MF'+MF}^{2a}$

$\longrightarrow AF'+AF>2a$

---

⑧ ثابت کنید در بیضی، $FA=F'A'$

الف)



تعریف بیضی : $AF+AF'=2a$

تعریف بیضی : $A'F'+A'F=2a$

$\Rightarrow AF+AF'=A'F'+A'F$

$\Rightarrow AF+AF+\cancel{FF'}=A'F'+A'F'+\cancel{FF'}$

$\Rightarrow 2AF=2A'F' \Rightarrow AF=A'F'$

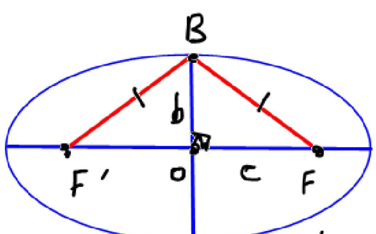
ب)

$AF+AF'=2a \Rightarrow AF+AF+FF'=2a$

$\xRightarrow[AF=A'F']{} AF+A'F'+FF'=2a$

$\Rightarrow \underline{AA'=2a}$

ج) ثابت کنید در بیضی : $a^2=b^2+c^2$



تعریف بیضی $BF+BF'=2a$

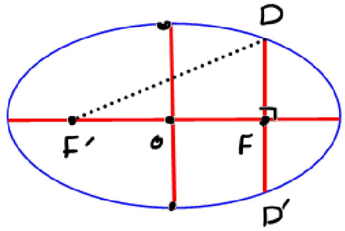
$BF=BF'$ (B روی عمود منصف FF')

$\Rightarrow BF=BF'=a$

فیثاغورس $\overset{\triangle}{BOF}$: $BF^2=BO^2+FO^2$

$\Rightarrow \underline{a^2=b^2+c^2}$

۸) در بیضی زیر، در نقطه F، خط DD' را بر محور کانونی عمود کرده‌ام. ثابت کنید: $DF = D'F = \frac{b^2}{a}$



تعریف بیضی $DF+DF' = 2a \longrightarrow DF' = 2a - DF$ ★

فیثاغورس $DF'^2 = DF^2 + FF'^2 \underset{★}{\Longrightarrow} (2a-DF)^2 = DF^2+FF'^2$

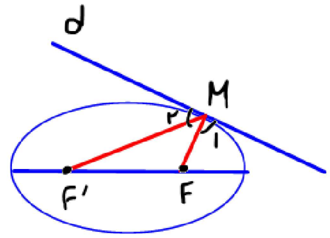
$\Rightarrow 4a^2 - 4a\cdot DF + DF^2 = DF^2 + 4c^2$

$\Rightarrow 4a\cdot DF = 4a^2-4c^2$

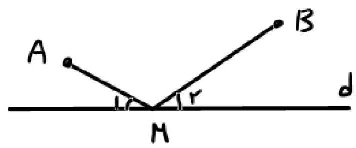
$\Rightarrow DF = \frac{a^2-c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$

---

۹) اگر خط d بر بیضی در نقطه M مماس باشد، ثابت کنید $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$
و همچنین اگر پرتو نوری از کانون F بر بدنه بیضی بتابد، بازتاب آن از نقطه F' می‌گذرد.



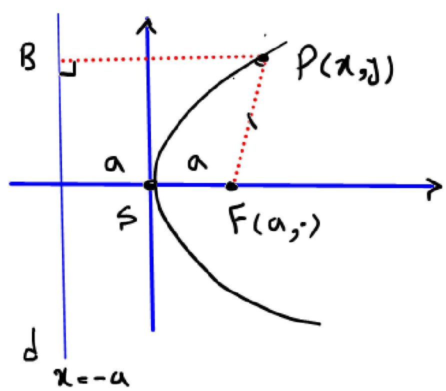
اثبات: می‌دانیم اگر کوتاه‌ترین مسیر از نقطه A به نقطه B با عبور از نقطه M روی خط d، مسیر AMB باشد، آنگاه: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$



حال مطابق فرض، خط d در نقطه M بر بیضی با کانون‌های F و F' مماس است. در این صورت هر نقطه روی خط d انتخاب کنیم مجموع فاصله‌های آن نقطه از دو کانون F و F' بیشتر از $2a$ است و فقط در نقطه M، این مجموع برابر $2a$ است. پس مجموع فواصل M از دو کانون F و F'، مینیمم است. در نتیجه $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$. پس بنابر ویژگی آینه‌های تخت، اگر از کانون F شعاع نوری بر بیضی بتابد، بازتابش آن از کانون F' می‌گذرد.

---

۱۰) ثابت کنید معادله سهمی افقی که رأس آن روی مبدأ مختصات است برابر: $y^2=4ax$ می‌باشد.



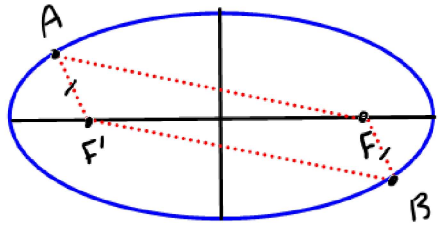
تعریف سهمی: $|PB| = |PF|$

$\Rightarrow |x-(-a)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}$

توان ۲ $\Rightarrow (x+a)^2 = (x-a)^2+y^2$

$\Rightarrow 2ax = -2ax + y^2 \Rightarrow \underline{y^2 = 4ax}$

۱۱ تمرین ۱ ص ۵۷



الف) اگر $AF' = BF \Rightarrow AF' \parallel BF$

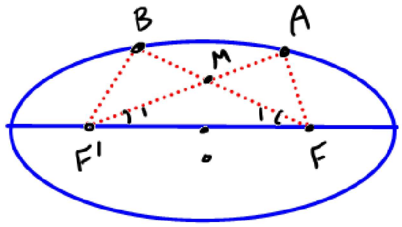
تعریف بیضی $\begin{cases} AF + AF' = 2a \\ BF + BF' = 2a \end{cases} \Rightarrow AF + AF' = BF + BF'$

$\Rightarrow AF = BF'$

بنابراین در چهارضلعی $AFBF'$ ، اضلاع مقابل دو به دو مساوی هستند پس $AFBF'$ متوازی الاضلاع است

$\Rightarrow \boxed{AF' \parallel BF}$

ب)



تعریف بیضی $\begin{cases} AF + AF' = 2a \\ BF + BF' = 2a \end{cases}$

$\Rightarrow AF + AF' = BF + BF'$

$\xRightarrow{AF' = BF} AF = BF' \longrightarrow \begin{cases} AF = BF' \\ AF' = BF \\ FF' = FF' \end{cases}$ ض ض ض $\Rightarrow \triangle AFF' \cong \triangle BFF'$

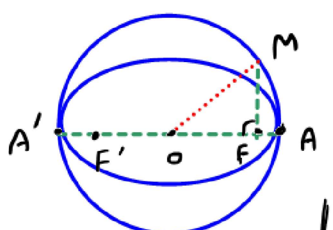
$\Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{F}'_1$

$\Rightarrow MF = MF'$

پس M روی عمود منصف FF' قرار دارد و در نتیجه M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.

---

۱۲ ثابت کنید: $MF = b$



M را به O وصل می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه $M\hat{F}O$ به دست آید

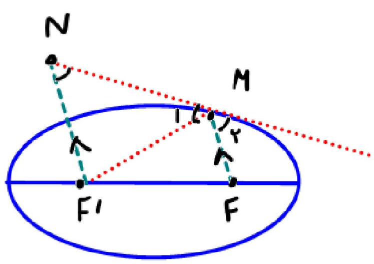
فیثاغورس $MO^2 = MF^2 + OF^2$

$OF = c$ و $\begin{rcases} MO = OA = R \\ OA = a \end{rcases} \Rightarrow MO = a$

$MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow \boxed{MF = b}$

---

۱۳ تمرین ۳ ص ۵۷



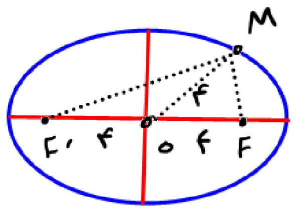
ثابت کنید: $NF' = MF'$

مطابق خاصیت بازتابندگی بیضی: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

طبق قضیه موازی و مورب: $\begin{rcases} MF \parallel NF' \\ MN \text{ مورب} \end{rcases} \Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{N}$

بنابراین: $\hat{N} = \hat{M}_1 \Rightarrow NF' = MF'$

۱۳) سوال ۴ صفحه ۵۷



$2a=10 \Rightarrow a=5$, $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \boxed{c=4}$

$2b=6 \Rightarrow b=3$

$\Rightarrow FO=F'O=4$

بنابراین در مثلث MFF' ، میانه ، نصف ضلع مقابل است پس MFF' قائم الزاویه است .

فیثاغورس : $MF^2+MF'^2=FF'^2 \Rightarrow MF^2+MF'^2=64$

تعریف بیضی : $MF+MF'=10 \Rightarrow MF'=10-MF$

$\Rightarrow MF^2+(10-MF)^2=64$

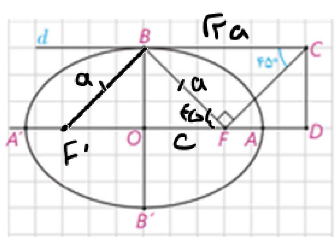
$\Rightarrow 2MF^2-20MF+36=0$

$\Rightarrow MF^2-10MF+18=0 \Rightarrow MF=\frac{10\pm2\sqrt{7}}{2}=5\pm\sqrt{7}$

$\xRightarrow{MF<MF'} \underline{MF=5-\sqrt{7}}$ و $\underline{MF'=5+\sqrt{7}}$

---

۱۴) تمرین ۶ صفحه ۵۸ .



★ مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید :

$BF+BF'=2a \Rightarrow BF=a$

$\sin\hat{C}=\sin45^\circ=\frac{BF}{BC} \Rightarrow BC=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}a \Rightarrow OD=\sqrt{2}a$

$\Rightarrow AD=OD-OA=\sqrt{2}a-a$

$AF=OA-OF=a-c \xrightarrow{c=\frac{\sqrt{2}}{2}a} AF=a-\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\Rightarrow \frac{AD}{AF}=\frac{\sqrt{2}a-a}{a-\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{\sqrt{2}-1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$

---

۱۵) تمرین ۸ صفحه ۵۸

$y=ax^2+bx+c$

$\Rightarrow y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$

$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{1}{a}y+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{1}{a}(y+\frac{b^2}{4a}-c)$

$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{1}{a}(y+\frac{b^2-4ac}{4a})$

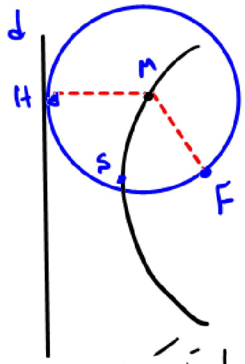
پارامتر سهمی

$4p=\frac{1}{a} \Rightarrow \underline{p=\frac{1}{4a}}$

رأس $S(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$

$a>0 \Rightarrow$ دهانه به سمت بالا $\Rightarrow F(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}+\frac{1}{4a})$

$a<0 \Rightarrow$ دهانه به سمت پایین $\Rightarrow F(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}-\frac{1}{4a})$



۱۶ سوال ۱۱ صـ ۵۸

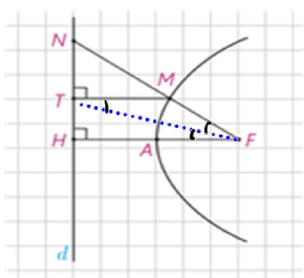
سهمی با کانون F و خط هادی d و رأس S را در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم M نقطه‌ای روی این سهمی باشد. دایره‌ای به مرکز M گذرا از کانون F رسم می‌کنیم. در واقع MF شعاع این دایره است. چون M روی سهمی است پس فاصله M از کانون و خط هادی یکسان است. پس $MF = MH$، در نتیجه فاصله خط d تا مرکز M برابر شعاع دایره است. بنابراین دایره به مرکز M و شعاع MF بر خط هادی d مماس است.

عکس قضیه: فرض کنیم دایره‌ای از کانون F گذشته و بر خط هادی d مماس باشد. پس مرکز دایره از کانون F و خط هادی سهمی به یک فاصله است. در نتیجه بنا بر تعریف سهمی، مرکز دایره روی سهمی قرار دارد.

---

۱۷ سوال ۱۲ صـ ۵۸



ثابت کنید: $\frac{2NT}{TH} = \frac{FN}{FA}$

راه اول:

M روی سهمی قرار دارد پس $MT = MF$ و نقطه A نیز روی سهمی است

پس $AF = AH$ در نتیجه $2FA = FH$

حال با دوبار استفاده از قضیه تالس داریم:

$$MT \parallel FH \Rightarrow \frac{NT}{TH} = \frac{MN}{MF} \xrightarrow{MF = MT} \frac{NT}{TH} = \frac{MN}{MT} \quad (1)$$

$$MT \parallel FH \Rightarrow \frac{MT}{FH} = \frac{MN}{FN} \xrightarrow{FH = 2FA} \frac{MT}{2FA} = \frac{MN}{FN} \Rightarrow \frac{FN}{2FA} = \frac{MN}{MT} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{NT}{TH} = \frac{FN}{2FA} \Rightarrow \boxed{\frac{2NT}{TH} = \frac{FN}{FA}}$$

راه دوم: ابتدا از F به T وصل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم FT نیمساز زاویه $\hat{F}$ است.

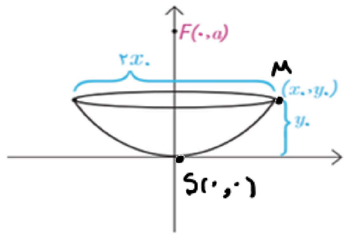
تعریف سهمی $MT = MF \Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{T}_1$

$\left.\begin{array}{l} MT \parallel FH \\ \text{مورب } FT \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{T}_1 = \hat{F}_2$ $\Rightarrow \hat{F}_2 = \hat{F}_1$

طبق قضیه نیمسازها برای نیمساز FT داریم:

$$\frac{NT}{TH} = \frac{FN}{FH} \xrightarrow{FA = AH} \frac{NT}{TH} = \frac{FN}{2FA} \Rightarrow \boxed{\frac{2NT}{TH} = \frac{FN}{FA}}$$

(۱۸) سوال ۱۳ صفحه ۵۹



معادله سهمی: $x^2=4ay \xrightarrow{M(x_0,y_0)} x_0^2=4ay_0$

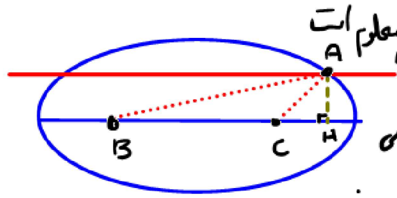
دهانه سهمی d

گودی سهمی h

$$\Rightarrow a=\frac{x_0^2}{4y_0} \xrightarrow[y_0=h]{x_0=\frac{1}{2}d} a=\frac{d^2}{16h}$$

---

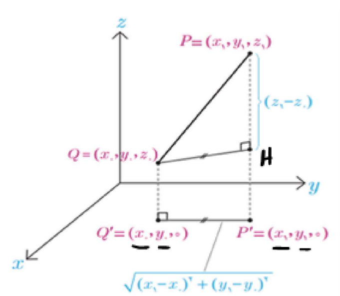
(۱۹) سوال ۱۴ صفحه ۶۵



محیط مثلث و اندازه ضلع BC معلوم است پس: AB+AC معلوم است و مقدار ثابتی دارد. بنابراین رأس A از مثلث ABC روی بیضی با کانون های B و C و مقدار ثابت AB+AC قرار دارد. این بیضی را رسم می کنیم. حال خطی موازی BC و به فاصله AH از آن رسم می کنیم تا بیضی را در نقطه A قطع کند.

---

(۲۰) فاصله دو نقطه P و Q در فضا را بیابید.



$$PQ^2=PH^2+QH^2$$

$$\xrightarrow{QH=Q'P'} PQ^2=(z_1-z_0)^2+\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\right)^2$$

$$\longrightarrow PQ^2=(z_1-z_0)^2+(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2$$

$$\longrightarrow PQ=\sqrt{(z_1-z_0)^2+(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

---

(۲۱) الف) ثابت کنید: $a\cdot b=b\cdot a$

اثبات: $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3) \longrightarrow (a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$$=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3$$

$$=b\cdot a$$

ب) ثابت کنید: $a\cdot a=|a|^2$

اثبات: $\vec{a}(a_1,a_2,a_3) \longrightarrow a\cdot a=(a_1,a_2,a_3)\cdot(a_1,a_2,a_3)$

$$=a_1\times a_1+a_2\times a_2+a_3\times a_3$$

$$=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|a|^2$$

پ) ثابت کنید: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

اثبات: $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$

$$a\cdot(b+c)=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)$$

$$=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)$$

$$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3$$

$$=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)=a\cdot b+a\cdot c$$

۲۲) ثابت کنید: a و b برهم عمود هستند $\iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff |a||b|\cos\theta=0 \overset{|a|\neq 0}{\underset{|b|\neq 0}{\iff}} \cos\theta=0 \overset{0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}{\iff} \theta=\frac{\pi}{2}$$

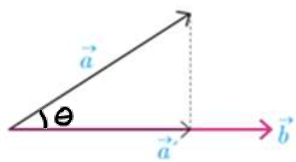
---

۲۳) نامساوی کشی - شوارتز را اثبات کنید: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|$

$$a\cdot b=|a||b|\cos\theta \overset{||}{\Longrightarrow} |\vec{a}\cdot\vec{b}|=\big||\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\big|=|a|\,|b|\,|\cos\theta| \overset{|\cos\theta|\le 1}{\Longrightarrow} |a\cdot b|\le|a||b|$$

---

۲۴)



$$\begin{cases}\vec{a}'=k\cdot\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}'|=k|\vec{b}| \Rightarrow k=\dfrac{|\vec{a}'|}{|b|}\\ |\vec{a}'|=|\vec{a}|\cos\theta\end{cases}$$

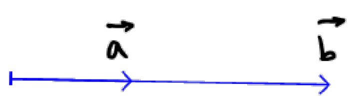
$$\Rightarrow k=\frac{|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}'=\overbrace{\frac{a\cdot b}{|b|^2}}^{k}\vec{b}$$

---

۲۵) ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آن گاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ است.

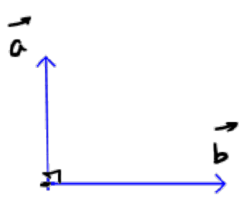
الف)



$$\vec{a}=k\vec{b}$$

$$\vec{a}'=\frac{a\cdot b}{|b|^2}\vec{b}=\frac{\overset{\vec{a}}{\overbrace{kb}}\cdot b}{|b|^2}\vec{b}=\frac{k|b|^2}{|b|^2}\vec{b}=k\vec{b}=\vec{a}$$

ب) ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود باشند، آن گاه تصویر یکی بر امتداد دیگری برابر صفر است.



$$a\perp b \Rightarrow a\cdot b=0$$

$$\vec{a}'=\frac{a\cdot b}{|b|^2}\vec{b} \Rightarrow \vec{a}'=\frac{0}{|b|^2}\vec{b}=\vec{0}$$

---

۲۶) ثابت کنید: $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$ $\quad \vec{a}(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}(b_1,b_2,b_3)$

$$a\cdot(a\times b)=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_2a_1b_3+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1$$

$$=0$$

۲۷) ثابت کنید: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر باشند:

$$\vec{a}\times\vec{b}=0 \iff \vec{a}\parallel\vec{b}$$

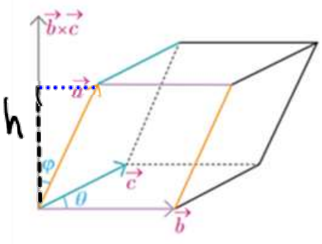
$$\vec{a}\times\vec{b}=0 \iff |a\times b|=0 \iff |a||b|\sin\theta=0 \overset{|a|\neq 0}{\underset{|b|\neq 0}{\iff}} \sin\theta=0 \iff \theta=0 \text{ یا } \pi$$

$$\iff \vec{a}\parallel\vec{b}$$

---

۲۸) اثبات حجم متوازی السطوح:

$|\vec{a}'|=h$



$$V=|a\cdot(b\times c)|$$

$$\text{حجم متوازی السطوح} = S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع} = |\vec{b}\times\vec{c}| \times \frac{a\cdot(b\times c)}{|b\times c|} = a\cdot(b\times c)$$

$$\text{ارتفاع } h = |\vec{a}'| = |a|\cos\varphi = |a|\,\frac{a\cdot(b\times c)}{|a||b\times c|} = \frac{a\cdot(b\times c)}{|b\times c|}$$
