مجموعه سؤالات امتحان نهایی 1401

شامل: تعریفی ها، تمرینات و مسائل، اثباتی ها

- ریاضیات گسسته
- هندسه ۳

بهرام جلالی

کلاسینو

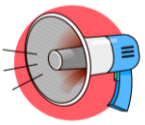
امتحان نهایـــی

ریاضیات گسسته

فصل اول

آشنایی با نظریه اعداد

بارم: ۵–۴ نمره



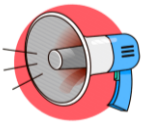
تعریفی‌ها– نقطه‌چین– درست، غلط

مثال نقض: مثالی است که نشان می‌دهد یک حکم در حالت کلی برقرار نیست.

اثبات مستقیم: روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

برهان خلف: در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد (فرض خلف) سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیر ممکن یا متضاد با فرض می‌رسیم می‌گوئیم به تناقض رسیده‌ایم. فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

اثبات بازگشتی: در این روش حکم مسأله را به گزاره‌های هم ارز آن تغییر داده تا به گزاره‌ای که همواره برقرار است می‌رسیم. با توجه به هم ارز بودن گزاره‌ها نتیجه می‌گیریم که حکم مسأله باید همواره دست باشد.



درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱– مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ همواره عددی گنگ است. درست ☑ نادرست ☐

۲– اگر $q \Leftrightarrow p$ درست و q نادرست باشد، آن‌گاه p نادرست است. درست ☑ نادرست ☐

۳– برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{۲}$ از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. درست ☑ نادرست ☐

۴– هیچ عدد حقیقی مانند x وجود ندارد که $\sqrt{x} > x$ باشد. درست ☐ نادرست ☑

۵– اگر $a \mid b$ آن‌گاه $ab \mid c$ درست ☐ نادرست ☑

۶– اگر $a \mid ab$ آن‌گاه $a \mid b$ درست ☐ نادرست ☑

۷– اگر $a \mid b^۲$ و $۳ \mid c$ آن‌گاه $[a,۳c]$ برابر $b^۲$ است. درست ☐ نادرست ☑

۸– باقی‌مانده مربع هر عدد صحیح بر ۳ برابر ۰ یا ۲ است. درست ☐ نادرست ☑

۹– اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n \mid m$ آنگاه $a \overset{n}{\equiv} b$. درست ☐ نادرست ☑

۱۰– باقی‌مانده تقسیم $A = ۴۹۸۵۳۳۷$ بر ۱۱ برابر ۶ است. درست ☐ نادرست ☑

۱۱– برای اثبات درستی یک مطلب، ارائه چند مثال کافیست. درست ☐ نادرست ☑

۱۲– اگر α گویا و β گنگ باشد. $۴\alpha + ۳\beta$ گنگ است. درست ☑ نادرست ☐

۱۳– اگر $a \mid bc$ آنگاه $a \mid b$ یا $a \mid c$ درست ☐ نادرست ☑

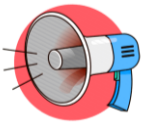
۱۴– اگر $۳a \overset{۴}{\equiv} ۶b$ آنگاه $a \overset{۲}{\equiv} ۲b$. درست ☑ نادرست ☐

۱۵– حاصلضرب هر دو عدد گنگ، گنگ است. درست ☐ نادرست ☑

۱۶– اگر $a \mid b+c$ آنگاه $a \mid b$ یا $a \mid c$. درست ☐ نادرست ☑

۱۷– $-۱۲۷ \overset{۱۲}{\equiv} ۵$ درست ☑ نادرست ☐

۱۸– اگر $a^۲ \mid b^۳$ آن‌گاه $a \mid b$ درست ☐ نادرست ☑



جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱– عدد گنگ ..... $\sqrt[۴]{۵}$ ..... مثال نقضی برای حکم «مربع هر عدد گنگ، عددی گویا است» می‌باشد.

۲– مجموع ۳ عدد صحیح متوالی همواره بر ..... ۳ ..... بخش‌پذیر است.

۳– حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی همواره بر ..... ۲ ..... بخش‌پذیر است.

۴– اگر a عددی صحیح و فرد باشد، آن‌گاه عدد $۲a+۳$ عددی ..... فرد ..... است. (زوج ــ فرد)

۵– اگر $a \mid b+c$ و $a \mid b-c$ آن‌گاه $a \mid mb$، در این صورت m عددی ..... زوج ..... است.

۶– اگر باقی‌مانده تقسیم a بر ۵ برابر ۲ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم $۳a$ بر ۵ برابر با ..... ۱ ..... است.

۷– اگر a عددی فرد باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم $a^۲ + ۵$ بر ۴ برابر با ..... ۲ ..... است.

۸– یکی از مثال‌های نقض گزاره "عدد $۲^{۲^n}+۱$ به ازای هر عدد طبیعی اول است" با انتخاب $n=۵$ رخ می‌دهد.

۹– اگر $a \mid ۱$، آنگاه $a=۱$ یا $a=-۱$ است.

۱۰– با فرض $a \neq ۰$ ، حاصل $\left[(a^۴,a^۳),\left[a,a^۶\right]\right]$ برابر است با $a^۶$.

۱۱– باقی‌مانده تقسیم $A=۵۲۷۳۲۶۰۱$ بر ۱۱ برابر است با ۹.

۱۲– اگر a و b دو عدد طبیعی و $[a,b]=a$ باشد، داریم $(a,b)=b$

۱۳– اگر ۲۰ روز قبل شنبه باشد، ۴۰ روز بعد چهارشنبه است.

۱۴– اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آن دو گزاره را هم‌ارز گویند.

۱۵– رقم یکان عدد $۱۶^{۱۳۹۷}$ برابر است با ۶.

۱۶– با تقسیم طرفین معادله $۴۲x\equiv_۹ ۱۸$ بر ۶ معادله $۷x\equiv_۳ ۳$ بدست می‌آید.

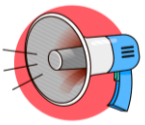
۱۷– اگر ۱۲ بهمن جمعه باشد، ۳۱ مرداد همان سال چهارشنبه است.

۱۸– در تقسیم عدد ۱۲۷– بر ۱۵ باقی‌مانده برابر ۸ و خارج‌قسمت ۹– است.

۱۹– حاصل عبارت $\left([m^۲,m],m^۵\right)$ برابر $m^۲$ است.

۲۰– اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a,b)=۱$ می‌گوییم a و b دو عدد نسبت به هم اول (متباین) هستند.

۲۱– اگر $a \mid b$، مقدار $[a,b]$ برابر با $|b|$ است.



مسائل و تمرینات

۱– با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید: حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌ها است.

۲– اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد A و B بر ۳۹ به ترتیب ۱۷ و ۲۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم $A-B$ بر ۳۹ را محاسبه کنید.

۳– جواب‌های عمومی معادله $۴x\overset{۵}{\equiv}۱۷$ را به دست آورید.

۴– اگر دو عدد $(۳a-۵)$ و $(۴a-۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(۹a+۶)$ را به دست آورید.

۵– باقی‌مانده تقسیم $۲^{۳۱}+۳^{۳۱}+۴^{۳۱}$ را بر ۷ به دست آورید.

۶– باقی‌مانده تقسیم $۲^{۵۰۰}$ بر ۱۳ را به دست آورید.

۷– اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y$

۸– اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفند ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۹– به چند طریق می‌توان ۳۵۰ ریال را به وسیله سکه‌های ۲۰ و ۵۰ ریالی پرداخت که از هر دو سکه استفاده می‌شود؟

۱۰– رقم یکان $۳^{۲۵}+۷^{۷۳}$ را محاسبه کنید.

۱۱– با تبدیل معادله سیاله $۴x+۵y=۹$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب عمومی این معادله سیاله را به دست آورید.

۱۲– اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲+b^۲$ زوج است.

۱۳– باقی‌مانده تقسیم $A=(۲۷)^۷+۱۹$ را بر ۱۳ به دست آورید.

۱۴– برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲$

۱۵– باقی‌مانده تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۲۳}\times ۲۰+۱۰$ را بر ۷ بیابید.

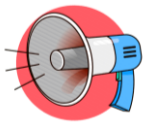
۱۶– اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه ثابت کنید $۴k+۱$ مربع کامل است.

۱۷– جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $۷x+۵y=۱۱$ را به دست آورید.

۱۸– بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $۴k$ و $۱۶k^۲-۱$ را بیابید.

۱۹– اگر باقیمانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۱ برابر ۱۹ باشد، باقیمانده تقسیم $(۱-۲a)$ بر ۳۱ را به دست آورید.

۲۰– اگر $a\mid ۵m-۲$ و $a\mid ۳m+۱$ برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟



اثباتی‌ها

۱– ثابت کنید: اگر $a \mid b$ آن‌گاه $(a,b) = |a|$

۲– اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ $p \nmid a$ ثابت کنید: $(p,a) = 1$.

۳– اگر $a \mid b$ نشان دهید که $a^n \mid b^n$.

۴– ثابت کنید هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول هستند.

۵– اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ نشان دهید که $ac \mid bd$.

۶– اگر $a \mid b$ و $a \mid c$، نشان دهید $a \mid mb \pm nc$.

۷– اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n \mid m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

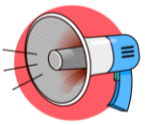
۸– ثابت کنید طرفین دو رابطه هم‌نهشتی با پیمانه‌های برابر را می‌توان در هم ضرب کرد. $a \overset{m}{\equiv} b \;,\; c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$

۹– ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

۱۰– ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.

۱۱– اگر $a \mid b$ ثابت کنید: الف) $a \mid -b$ ب) $-a \mid b$

۱۲– با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید اگر x یک عدد گنگ باشد $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.



پاسخنامه مسائل و تمرینات

پاسخ ۱:

$$xy \le \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \le x^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$$

عبارت فوق همواره برقرار است، پس حکم درست است.

پاسخ ۲:

$$\left.\begin{matrix} A=39q+17 \\ B=39q'+23 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A-B=39(q-q')-6=39(q-q'-1+1)-6$$

$$\Rightarrow A-B=39\underbrace{(q-q'-1)}_{q''}+33 \Rightarrow A-B=39q''+33$$

$$\Rightarrow r=33 \text{ (باقی مانده)}$$

پاسخ ۳:

$$4x \overset{5}{\equiv} 17 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 2$$

$$\Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 2\times 5+2 \overset{5}{\equiv} 12 \overset{\div 4}{\Longrightarrow} x \overset{(5,4)}{\equiv} 3 \Rightarrow x=5k+3$$

پاسخ ٤:

$$3a-5 \overset{10}{\equiv} 4a-7 \Rightarrow -5+7 \overset{10}{\equiv} 4a-3a$$

$$\Rightarrow a \overset{10}{\equiv} 2 \overset{\times 9}{\Longrightarrow} 9a \overset{10}{\equiv} 18 \Rightarrow 9a+6 \overset{10}{\equiv} 24,\ 24 \overset{10}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow 9a+6 \overset{10}{\equiv} 4 \Rightarrow r=4$$

پاسخ ۵:

$$2^6 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow \left(2^6\right)^5 \overset{7}{\equiv} (1)^5 \Rightarrow 2^{30} \overset{7}{\equiv} 1 \overset{\times 2}{\Longrightarrow} 2^{31} \overset{7}{\equiv} 2$$

$$3^3 \overset{7}{\equiv} 6 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow \left(3^3\right)^{10} \overset{7}{\equiv} (-1)^{10} \overset{\times 3}{\Longrightarrow} 3^{31} \overset{7}{\equiv} 3$$

$$4^3 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow (4^3)^{10} \overset{7}{\equiv} (1)^{10} \overset{\times 4}{\Longrightarrow} 4^{31} \overset{7}{\equiv} 4$$

$$2^{31}+3^{31}+4^{31} \overset{7}{\equiv} 2+3+4 \overset{7}{\equiv} 2$$

پاسخ ٦:

$$2^6 \overset{13}{\equiv} -1 \Rightarrow (2^6)^{83} \overset{13}{\equiv} (-1)^{83}$$

$$\Rightarrow 2^{498} \overset{13}{\equiv} -1 \overset{\times 2^2}{\Longrightarrow} 2^{500} \overset{13}{\equiv} -4$$

$$\Rightarrow 2^{500} \overset{13}{\equiv} 13-4 \Rightarrow 2^{500} \overset{13}{\equiv} 9$$

پاسخ ۷:

$$x^2+y^2+1 \ge xy+x+y \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2 \ge 2xy+2x+2y$$

$$\Leftrightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+1+1-2xy-2x-2y \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2 \ge 0$$

با توجه به اینکه رابطه همواره درست است، پس حکم درست است.

پاسخ ۸:

روزهای باقی‌مانده تا ۷ اسفند :

$$d=29+4\times 30+7=156$$

$$156 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow \text{۷ اسفند سه‌شنبه است}$$

پاسخ ۹:

$$20x+50y=350 \Rightarrow 2x+5y=35$$

$$\Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 35 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{(5,2)}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow x=5k$$

$$2(5k)+5y=35 \Rightarrow 5y=35-10k \Rightarrow y=7-2k$$

$$\begin{cases} x \ge 1 \Rightarrow 5k \ge 1 \Rightarrow k \ge \frac{1}{5} \\ y \ge 1 \Rightarrow 7-2k \ge 1 \Rightarrow k \le 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{5} \le k \le 3 \Rightarrow k=1,2,3$$

پس به ۳ طریق انجام‌پذیر است.

پاسخ ۱۰:

$$7^2 \overset{10}{\equiv} 9,\ 9 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow 7^2 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow (7^2)^{36} \overset{10}{\equiv} (-1)^{36}$$

$$\Rightarrow 7^{72} \overset{10}{\equiv} 1 \overset{\times 7}{\Longrightarrow} 7^{73} \overset{10}{\equiv} 7 \quad (1)$$

$$3^2 \overset{10}{\equiv} 9 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow 3^2 \overset{10}{\equiv} -1$$

$$\Rightarrow (3^2)^{12} \overset{10}{\equiv} (-1)^{12} \Rightarrow 3^{24} \overset{10}{\equiv} 1 \overset{\times 3}{\Longrightarrow} 3^{25} \overset{10}{\equiv} 3 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 7^{73}+3^{25} \overset{10}{\equiv} 7+3 \overset{10}{\equiv} 10 \overset{10}{\equiv} 0$$

پاسخ ۱۱:

$$4x+5y=9 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 9 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 4 \overset{+4}{\Longrightarrow} x \overset{(5,4)}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow x=5k+1$$

$$\Rightarrow 4(5k+1)+5y=9 \Rightarrow 5y=-20k+5 \Rightarrow y=-4k+1$$

پاسخ ۱۲:

فرد است، پس هم a و هم b فرد است، بنابراین داریم:

$$a^2+b^2=(2k+1)^2+(2k'+1)^2=4k^2+4k+1+4k'^2+4k'+1$$

$$=2(\underbrace{2k^2+2k+2k'^2+2k'+1}_{q})=2q$$

پس a^2+b^2 زوج است.

پاسخ ۱۳:

$$۲۷=۱۳\times۲+۱\Rightarrow ۲۷\overset{۱۳}{\equiv}۱\Rightarrow (۲۷)^{۷}\overset{۱۳}{\equiv}(۱)^{۷}=۱\ ,\ ۱۹=۱۳\times۱+۶$$

$$\Rightarrow ۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۶\Rightarrow (۲۷)^{۷}+۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۱+۶\Rightarrow A\overset{۱۳}{\equiv}۷$$

پس باقی‌مانده تقسیم A بر ۱۳ برابر ۷ است.

پاسخ ۱۴:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲\Leftrightarrow \frac{a^{۲}+b^{۲}}{ab}\geq ۲$$

$$\Leftrightarrow a^{۲}+b^{۲}-۲ab\geq ۰\Leftrightarrow (a-b)^{۲}\geq ۰$$ بدیهی است

پاسخ ۱۵:

ابتدا ۱۰۰۰ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم:

$$۱۰۰۰=۷(۱۴۲)+۶\ \Rightarrow\ ۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}۶$$

اما $۶\overset{۷}{\equiv}-۱$ پس: $۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}-۱$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰^{۲۳}\overset{۷}{\equiv}(-۱)^{۲۳}=-۱$$

$$\xrightarrow{\times ۲۰}(۱۰۰۰)^{۲۳}\times ۲۰\overset{۷}{\equiv}-۱\times ۲۰=-۲۰$$

$$\xrightarrow{+۱۰}(۱۰۰۰)^{۲۳}\times ۲۰+۱۰\overset{۷}{\equiv}-۲۰+۱۰\overset{۷}{\equiv}-۱۰$$

با دو بار اضافه‌کردن پیمانه به اولین عدد مثبت می‌رسیم، یعنی:

$$-۱۰\overset{۷}{\equiv}-۱۰+۲(۷)\overset{۷}{\equiv}-۱۰+۱۴\overset{۷}{\equiv}۴\ \Rightarrow\ A\overset{۷}{\equiv}۴$$

پاسخ ۱۶:

ضرب دو عدد طبیعی متوالی به صورت $n(n+۱)$ می‌شود. حالا باید ثابت کنیم $۴n(n+۱)+۱$ به صورت توان دوم یک عدد طبیعی است.

$$۴n(n+۱)+۱=۴n^{۲}+۴n+۱=(۲n+۱)^{۲}$$

که عبارت آخر، مربع کامل است.

پاسخ ۱۷:

$$\Rightarrow ۷x\overset{۵}{\equiv}۱۱\qquad \Rightarrow ۷x\overset{۵}{\equiv}۱۱+۲\times ۵=۲۱$$

$$\xrightarrow{\div ۷}x\overset{۵}{\equiv}۳\qquad \Rightarrow x=۵k+۳\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{۷x+۵y=۱۱}۷(۵k+۳)+۵y=۱۱\Rightarrow y=-۷k-۲\ ,k\in\mathbb{Z}$$

پاسخ ۱۸:

$$(۴k,۱۶k^{۲}-۱)=d\Rightarrow\begin{cases}d\mid ۴k\Rightarrow d\mid ۱۶k^{۲}\\ d\mid ۱۶k^{۲}-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}d\mid ۱۶k^{۲}\\ d\mid ۱۶k^{۲}-۱\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}}d\mid ۱\Rightarrow d=۱$$

پاسخ ۱۹:

$$a\overset{۳۱}{\equiv}۱۹\Rightarrow ۲a\overset{۳۱}{\equiv}۳۸\overset{۳۱}{\equiv}۷\Rightarrow ۲a\overset{۳۱}{\equiv}۷\Rightarrow ۲a-۱\overset{۳۱}{\equiv}۶$$

باقی‌مانده = ۶

پاسخ ۲۰:

$$\begin{cases}a\mid ۵m-۲\xrightarrow{\times ۳}a\mid ۱۵m-۶\\ a\mid ۳m+۱\xrightarrow{\times ۵}a\mid ۱۵m+۵\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}}a\mid ۱۱$$

$a=۱$ یا ۱۱

پاسخنامه اثباتی‌ها

پاسخ ۱:

$a \mid b \Rightarrow |a| \mid b$

$a \mid a \Rightarrow |a| \mid a$

اگر برای هر $m > 0$ داشته باشیم $m \mid a$ و $m \mid b$ در این صورت خواهیم داشت:

$$m \mid a \Rightarrow |m| \le |a| \xrightarrow{m>0} m \le |a|$$

پاسخ ۲:

$$(p,a) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid p \xrightarrow{\text{اول } p} d = 1 \text{ یا } d = p \\ d \mid a \end{cases}$$

$$d = p \xrightarrow{d \mid a} p \mid a \quad (\text{این با فرض } p \nmid a \text{ تناقض دارد})$$

$$\Rightarrow d = 1 \Rightarrow (p,a) = 1$$

پاسخ ۳:

$a \mid b \Rightarrow b = aq$

$$\Rightarrow b^n = a^n q^n \xrightarrow{q^n = q'} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n \mid b^n$$

پاسخ ۴:

فرض کنید $(m, m+1) = d$ است، پس داریم

$$\left.\begin{matrix} d \mid m+1 \\ d \mid m \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid (m+1) - m \Rightarrow d \mid 1 \xrightarrow{d>0} d = 1$$

پاسخ ۵:

$a \mid b \Rightarrow b = aq_1$

$c \mid d \Rightarrow d = cq_2$

$$\Rightarrow b \times d = (a \times c)\underbrace{(q_1 q_2)}_{q} \Rightarrow bd = ac(q) \Rightarrow ac \mid bd$$

پاسخ ۶:

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \Rightarrow a \mid mb \\ a \mid c \Rightarrow a \mid nc \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid mb \pm nc$$

پاسخ ۷:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{n \mid m} n \mid a - b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$$

پاسخ ۸:

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{\times c} m \mid ac - bc \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m \mid c - d \xrightarrow{\times b} m \mid bc - bd \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \mid (ac - bc) + (bc - bd)$$

$$\Rightarrow m \mid ac - bd \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$$

پاسخ ۹:

می‌دانیم هر ضریبی از ab به پیمانه ab با صفر هم‌نهشت است

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$\overset{ab}{\equiv} \binom{n}{0}a^n + 0 + 0 + \ldots + 0 + \binom{n}{n}b^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

پاسخ ۱۰:

باید نشان دهیم برای هر x و y نامنفی: $\dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$

برای این منظور ابتدا کل نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\Leftrightarrow (x+y) \ge 2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 \ge 2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \ge 0$$

پاسخ ۱۱:

اگر $a \mid b$ آن‌گاه $q \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $b = aq$.

الف) $b = aq \xrightarrow{\times(-1)} -b = -aq \Rightarrow -b = a\underbrace{(-q)}_{q'} = aq' \Rightarrow a \mid -b$

ب) $b = aq \Rightarrow b = (-a)\underbrace{(-q)}_{q'} = -aq' \Rightarrow -a \mid b$

پاسخ ۱۲:

فرض خلف: فرض کنید $\dfrac{1}{x}$ گنگ نباشد. پس گویا است. و $a, b \neq 0$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ؛ با معکوس کردن این تساوی داریم $x = \dfrac{b}{a}$

پس x هم گویاست. که این با فرض گنگ بودن x در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

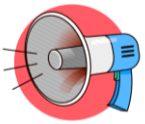
امتحان نهایـــی

ریاضیات گسسته

فصل دوم

گراف و مدل‌سازی

بارم: ۸–۷ نمره



تعریفی‌ها– نقطه‌چین– درست، غلط

مرتبه گراف: تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبه گراف می‌گوئیم و با $P(G)$ نمایش می‌دهیم.

اندازه گراف: تعداد یال‌های گراف G یعنی $|E(G)|$ را اندازه گراف می‌گوییم و با $q(G)$ نمایش می‌دهیم.

درجه یک رأس: درجه رأس a در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس a متصل‌اند. و آن را با $deg(a)$ نمایش می‌دهیم.

گراف k– منتظم: گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند گراف k– منتظم می‌نامیم.

رأس تنها: به رأسی که درجه آن صفر باشد یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها یا ایزوله می‌گوئیم.

گراف تهی: گرافی را که تمام رئوس آن، رأس تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، گراف تهی می‌نامیم.

دو رأس مجاور (همسایه): دو رأس u و v را دو رأس همسایه یا مجاور گوییم هر گاه توسط یالی به هم وصل شده باشند.

مجموعه همسایه‌های یک رأس: فرض کنید $a \in V(G)$ باشد. به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس a متصل هستند «همسایگی باز رأس v» می‌گوییم و با $N_G(a)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردن خود رأس a به $N_G(a)$ همسایگی بسته رأس a را به دست می‌دهد که آن را با $N_G[a]$ نمایش می‌دهیم.

دو یال مجاور: دو یال را مجاور گوییم هر گاه راسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند.

بزرگترین درجه یک گراف: بزرگترین عدد در بین درجات رئوس گراف G است که آن را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم.

کوچک‌ترین درجه یک گراف: کوچک‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G است که آن را با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

زیر گـراف: یک زیر گراف از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیر مجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G، و مجموعه یال‌های آن زیر مجموعه‌ای از مجموعه یال های G باشد.

مکمل گراف: مکمل گراف G را با $\bar{G}$ نمایش می‌دهیم و گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف G است و بین دو رأس از $\bar{G}$ یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد.

گراف کامل: گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر، مجاور باشد گراف کامل می‌نامیم. گراف کامل n رأسـی را با K_n نمایش می‌دهیم. گراف K_n یک گراف n رأسی و $\frac{n(n-1)}{2}$ منتظم است.

مسیر: اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u و v در گـراف G دنبالـه‌ای از رئـوس دو بـه دو متمـایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به طوریکه هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند.

طول مسیر: به تعداد یال‌های موجود در یک مسیر، طول مسیر گویند.

دور: دنباله $v_1v_2....v_nv_1$ $(n \geq 3)$ از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور بـه طول n می‌نامیم.

طوقه: یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند.

همبندی و ناهمبندی گراف: گراف G را همبند می‌نامیم هر گاه بین هر دو رأس آن حـداقل یـک مسـیر وجود داشته باشد، در غیر این‌صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.

مجموعه احاطه‌گر: زیر مجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم هر گاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

مجموعه احاطه‌گر مینیمم: در بین تمـام مجموعـه‌های احاطـه‌گر گـراف G، مجموعـه یـا مجموعـه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌گویند.

عدد احاطه‌گری گراف G: تعداد اعضای مجموعه احاطه‌گر مینیمم را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه احاطه‌گر مینیمال: یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگـر احاطـه‌گر نباشد احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱– مینیمم درجه در یک گراف ساده عددی غیر صفر است. ☐ درست ☑ نادرست

۲– گرافی وجود دارد که درجه رئوس آن ۵,۴,۳,۲,۲ است. ☐ درست ☑ نادرست

۳– $|N_G[v]| = 2\deg(v)$ ☐ درست ☑ نادرست

۴– در گراف ۳– منتظم از مرتبه ۶ مجموع درجات تمام رئوس برابر ۱۲ است. ☐ درست ☑ نادرست

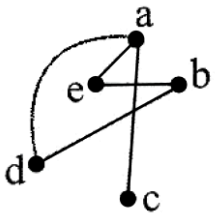
۵– در یک گراف، طول مسیر برابر با تعداد رئوس موجود در آن مسیر است. ☐ درست ☑ نادرست

۶– گرافی ۶ رأسی که ۵ رأس تنها داشته باشد وجود دارد. ☐ درست ☑ نادرست

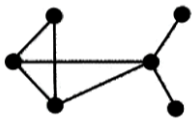
۷– گراف G همبند است هرگاه بین هر دو رأس آن یک یال وجود داشته باشد ☐ درست ☑ نادرست

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱– در گراف مقابل رأس a با ..... رأس دیگر مجاور است.



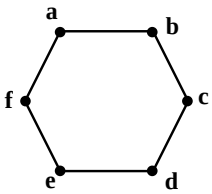
۲– در گراف مقابل حاصل $\Delta(G)+\delta(G)$ برابر با ..... است.

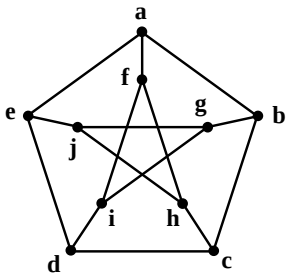

(G)

۳– با مجموعه رئوس $V=\{a,b,c\}$ تعداد ..... گراف ساده می‌توان رسم کرد.

۴– در گراف ۴– منتظم مرتبه ۹ تعداد یال‌ها برابر با ..... است.

۵– یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف مقابل به‌صورت ..... است.





۶– مجموعه ..... $\{a,b,c,d,e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف مقابل است.

۷– در گراف $P_{۱۴}$ عدد احاطه‌گری برابر با ..... $\left\lceil \frac{۱۴}{۲+۱} \right\rceil = ۵$ است.

۸– حاصل $\left\lceil -\frac{\sqrt{۲۲}}{۲} \right\rceil$ برابر با ..... $\lceil -۲/۳ \rceil = -۲$ است.

۹– یک گراف n رأسی حداکثر ..... $\binom{n}{۲}$ یال و حداقل ..... صفر یال دارد.

۱۰– گرافی که درجه تمام رئوس آن ۵ باشد را گراف ..... ۵- منتظم می‌نامند.

۱۱– P_n گرافی است که تنها از یک مسیر ..... n رأسی تشکیل شده است.

۱۲– در گراف k– منتظم از مرتبه P حاصل kp عددی ..... زوج است.

۱۳– اگر در گرافی داشته باشیم $N(a) = \varnothing$ آنگاه a یک رأس ..... ایزوله است.

۱۴– گراف ۴ منتظم گرافی است که: ..... درجه تمام رئوس آن ۴ است .

۱۵– گراف کامل مرتبه ۶: ..... ۱۵ یال دارد.

۱۶– هر گراف ۳– منتظم با ۱۲ یال دارای ..... ۸ رأس است.

۱۷– مجموع درجات رئوس هر گراف ..... دو برابر اندازه گراف G است.

۱۸– در گراف کامل از مرتبه ۴ تعداد دور به طول ۳ برابر ..... $\binom{۴}{۳} \times \frac{(۳-۱)!}{۲} = ۴$ است.

۱۹– گراف کامل $k_۵$ دارای ..... ۵ رأس و ..... ۱۰ یال است.

۲۰– تعداد رأس‌های فرد یک گراف همواره عددی ..... زوج است.

۲۱– در یک گراف k– منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با ..... k است.

۲۲– در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه‌گر ..... مینیمم گراف G می‌نامیم.

۲۳– یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر ..... مینیمال می‌نامیم.

مسائل و تمرینات

۱– اگر به گراف ۴– منتظم، ۱۲ یال اضافه شود، گراف کامل می‌شود. مرتبه و اندازهٔ گراف را مشخص کنید.

۲– یک گراف ۳– منتظم از مرتبهٔ ۷ رسم کنید.

۳– گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G)=\{ab,ac,cd,ef,db,cf,be\}$ مفروض است آن را رسم کنید و به موارد زیر پاسخ دهید.

الف) مرتبه و اندازهٔ گراف G را بنویسید.

ب) درجهٔ رأس‌های گراف G را مشخص کنید.

پ) کدام رأس‌های گراف G را رأس f مجاورند.

ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است.

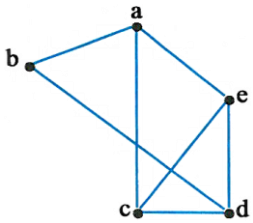
۴– یک گراف ۴ رأسی غیرتهی k– منتظم بکشید که:

الف) k بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

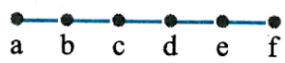
۵– اگر G گرافی ۴– منتظم باشد و $q=3p-5$، حاصل $p+q$ را به‌دست آورید.

۶– در گراف شکل مقابل چند مسیر به طول ۳ از a به e وجود دارد؟



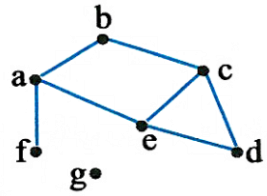
۷– گرافی را مشخص کنید که عدد احاطه‌گری آن، $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.

۸– در گراف شکل زیر، چند مجموعهٔ ۴ عضوی می‌توان نوشت که احاطه‌گر نباشد؟



۹– در گراف C_6 عدد احاطه‌گری را به دست آورید.

۱۰– گراف G را در نظر بگیرید.



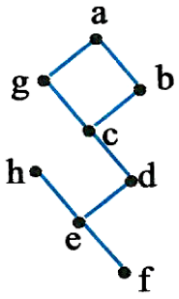
الف) مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

پ) مجموعهٔ همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

ت) اگر $N_{(G)}(x)=\{a,c\}$، آنگاه x کدام رأس است؟

۱۱– عدد احاطه‌گری شکل مقابل را مشخص کنید.



۱۲– عدد احاطه‌گری P_5 را پیدا کنید.

۱۳– یک گراف همبند ۲ ــ منتظم از مرتبهٔ ۲۷ است. عدد احاطه‌گری مینیمم آن چند است؟

۱۴– گراف شکل زیر چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم متمایز داریم؟

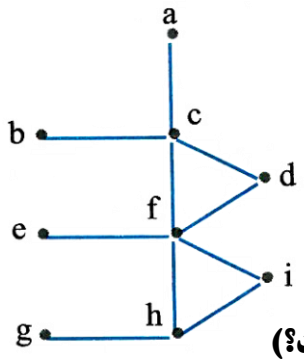
۱۵– هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آن‌ها با یکدیگر دست می‌دهند، ۶ نفر از آن‌ها هر کدام به طور دقیق با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند به‌طور دقیق با ۵ نفر دست داده باشد.

۱۶– الف) یک گراف C_8 رسم کنید. **ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال بنویسید.**

پ) یک مجموعه احاطه‌گر غیر مینیمال بنویسید. **ت) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم بنویسید.**

۱۷– گرافی از مرتبهٔ ۱۴ و اندازهٔ ۲۵ مفروض است. اگر این گراف فقط رئوس از درجه ۳ یا ۵ داشته باشد، این گراف چند رأس درجه ۳ دارد؟

۱۸– با توجه به گراف روبه‌رو به سوال‌های زیر پاسخ دهید.



الف) مجموعه‌ای از رئوس را انتخاب کنید که احاطه‌گر باشد.

ب) مجموعه ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌گر مینیمال باشد.

پ) یک مجموعه احاطه‌گر ۳ عضوی مشخص کنید.

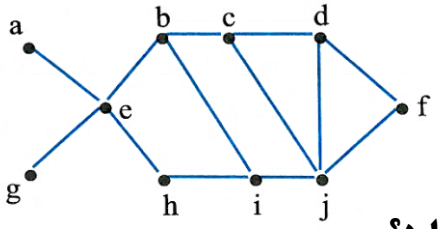
ت) آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از سه رأس e، b و g را احاطه کند؟

ث) حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه کند چند تا است؟ ($\gamma(G)$ چند است؟)

۱۹– در یک گراف از مرتبهٔ ۲۷ عدد احاطه‌گری ۵ است. حداقل Δ را پیدا کنید.

۲۰– در گراف G از مرتبهٔ ۷ می‌دانیم $\gamma(G)=1$ است. تعداد یال‌های این گراف را به‌دست آورید.

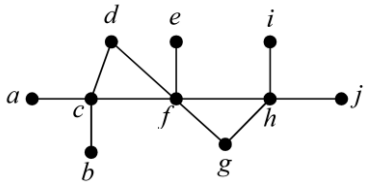
۲۱– عدد احاطه‌گری شکل مقابل را مشخص کنید.



۲۲– در گراف ۲– منتظم همبند از مرتبهٔ ۲۰، مجموعه احاطه‌گر مینیمم، چند عضو دارد؟

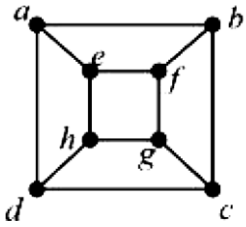
۲۳– دو گراف همبند رسم کنید که مجموع مرتبه و اندازه آن ۸ باشد.

۲۴– در گراف شکل مقابل: الف) یک مجموعه احاطه‌گر بنویسید. ب) یک مجموعه احاطه‌گـر مینیمـال بنویسـید. پ) یـک مجموعه احاطه‌گر مینیمم بنویسید.

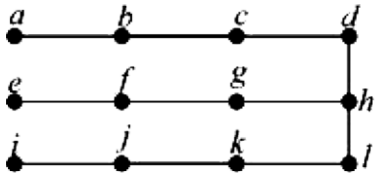


۲۵– عدد احاطه‌گری گراف‌های زیر را تعیین کرده و سپس برای هر گراف یک γ – مجموعه بنویسید.

الف)



ب)



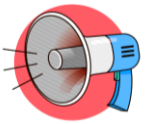
۲۶– الف) گراف ۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن یک باشد.
ب) گراف۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن ۲ بوده و مجموعه احاطه‌گر مینیمم آن یکتا باشد.

۲۷– در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r– منتظم از مرتبه P رسم کنید. در صورتی که ترسیم گراف امکان‌پذیر نبود دلیل ارائه کنید.

الف) $p = ۵$ و $r = ۲$

ب) $p = ۷$ و $r = ۳$

۲۸– در گراف G درجه رأس V برابر با ۹ است و درجه رأس V در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.



اثباتی‌ها

۱– ثابت کنید در یک گراف از مرتبهٔ p با ماکزیمم درجه Δ همواره داریم $\gamma \le p - \Delta$ است.

۲– ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

۳– ثابت کنید در یک گراف k منتظم n راسی همواره داریم: $\gamma(G) \le \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$.

۴– در گراف G از مرتبهٔ p با ماکسیمم درجهٔ Δ ثابت کنید: $\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil$

۵– فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \ge k$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول k است.

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $k+1$ است.

۶– فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G) \ge k$ ثابت کنید که G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.

پاسخنامه مسائل و تمرینات

پاسخ ۱:

$$۴p = ۲q \Rightarrow q = ۲p$$

$$q + ۱۲ = \binom{p}{۲} \Rightarrow ۲p + ۱۲ = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow p^۲ - ۵p - ۲۴ = ۰$$

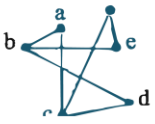
$$\Rightarrow (p-۸)(p+۳) = ۰ \Rightarrow p = ۸ \Rightarrow q = ۱۶$$

پاسخ ۲:

چنین گرافی وجود ندارد؛ چون ۷ رأس درجه ۳ داریم که امکان‌پذیر نیست؛ چون تعداد رأس‌های درجهٔ فرد، نمی‌تواند عددی فرد باشد.

پاسخ ۳:

الف) $p = ۰$ و $q = ۷$



ب) $\deg(a) = ۲ , \deg(b) = ۳ , \deg(c) = ۳ ,$
$\deg(d) = ۲ , \deg(e) = ۲ , \deg(f) = ۲$

پ) e، c با f مجاورند.

ت) مجموعه درجات رئوس $۲q = ۱۴$ است.

پاسخ ٤:

الف) $k = ۳$

ب) $k = ۱$

پاسخ ۵:

$$۴p = ۲q \Rightarrow q = ۲p$$

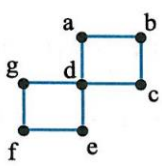
$$q = ۳p - ۵ \Rightarrow ۲p = ۳p - ۵ \Rightarrow p = ۵ \Rightarrow q = ۱۰ \Rightarrow p + q = ۱۵$$

پاسخ ٦:

دو مسیر abde، acde وجود دارد.

پاسخ ۷:

$$n = ۷ \ , \ \Delta = ۴ \Rightarrow \left\lceil \frac{۷}{۵} \right\rceil = ۲$$



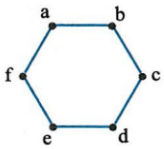
در حالی که عدد احاطه‌گری در این گراف ۳ است.

پاسخ ۸:

مجموعه احاطه‌گر ۲ عضوی نداریم؛ ولی مجموعه $\{f, d, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) \le ۳$، بنابراین $\gamma(G) = ۳$ است.

مجموعه‌های $\{a, b, c, d\}$ و $\{c, d, e, f\}$، ۴ عضوی هستند؛ ولی احاطه‌گر نیستند.

پاسخ ۹:



توجه به شکل روبه‌رو که یک گراف $C_۶$ است $\gamma \ge \left\lceil \frac{۶}{۲+۱} \right\rceil = ۳$ خواهد بود و مجموعه‌ای سه عضوی مانند $\{a, d, b\}$ وجود دارد که احاطه‌گر است. در نتیجه $\gamma(G) \le ۳$ خواهد بود، پس $\gamma(G) = ۳$ است.

پاسخ ۱۰:

الف) $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

ب) $\Delta(G) = ۳$ و $\delta(G) = ۰$

پ) $N_G(e) = \{a, c, d\}$ ، $N_G(g) = \{\ \}$ ، $N_G(f) = \{a\}$

ت) $N_G(x) = \{a, c\} \Rightarrow x = b$

پاسخ ۱۱:

وجه به آن‌که $\gamma \ge \left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$ است ولی مجموعه‌های احاطه‌گر ۲ عضوی نداریم و مجموعه $\{a, c, e\}$ احاطه‌گر مینیم است پس $\gamma \le ۳$ است. پس $\gamma = ۳$ است.

پاسخ ۱۲:

باتوجه به آن‌که $P = ۵$ و $\Delta = ۲$ است، پس $\gamma \ge \left\lceil \frac{۵}{۲+۱} \right\rceil = ۲$ و مجموعه $\{b, d\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس $\gamma \le ۲$ بنابراین $\gamma = ۲$ است.

پاسخ ۱۳:

یک گراف همبند ۲ منتظم از مرتبهٔ ۲۷ یعنی گراف به شکل $C_{۲۷}$ است.

از طرفی می‌دانیم $\gamma(C_{۲۷}) = \left\lceil \frac{۲۷}{۳} \right\rceil$ است. پس $\gamma = ۹$ خواهد بود.

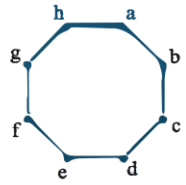
پاسخ ۱٤:

می‌دانیم این گراف $P_۵$ است، پس $\gamma(P_۵) = \left\lceil \frac{۵}{۳} \right\rceil = ۲$ است، پس اگر گراف را به شکل زیر نام‌گذاری کنیم مجموعه‌های $\{a, d\}, \{b, d\}, \{b, e\}$ مجموعه احاطه‌گر مینیمم هستند.

پاسخ ۱۵:

گراف مربوط به این مسأله دارای ۷ رأس است و چون ۶ نفر با ۲ نفر دست داده‌اند، پس ۶ رأس آن‌ها دارای درجه ۲ است، پس درجهٔ رأس هفتم نمی‌تواند عددی فرد باشد.

پاسخ ۱۶:

الف) 

ب) $\{a,c,e,g\}$

پ) $\{a,b,c,d,e,f,g\}$

ت) $\{a,d,g\}$

پاسخ ۱۷:

می‌دانیم درجه رأس‌های این گراف به صورت $\underbrace{۵,\ldots}_{y},\underbrace{۳,\ldots}_{x}$ است، پس داریم:

$$\begin{cases} x+y=۱۴ \\ ۳x+۵y=۲(۲۵) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=۱۴ \\ ۳x+۵y=۵۰ \end{cases} \Rightarrow y=۴, x=۱۰$$

پس ۱۰ راس درجه ۳ داریم.

پاسخ ۱۸:

الف) $\{c,d,f,i,h\}$

ب) $\{c,f,h\}$

پ) $\{c,f,h\}$

ت) خیر

ث) حداقل ۳ تا است. $(\gamma(G)=۳)$

پاسخ ۱۹:

$$\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \Rightarrow ۵ \geq \left\lceil \frac{۲۷}{\Delta+۱} \right\rceil \Rightarrow \Delta \geq ۵$$

پاسخ ۲۰:

با توجه به آن‌که $\gamma(G)=۱$ است، پس رأسی وجود دارد که به تمام رأس‌ها وصل می‌شود. پس $\Delta=۶$.

بنابراین برای آن‌که کم‌ترین مقدار یال را داشته باشیم کافی است از یک رأس به تمام رأس‌ها وصل کنیم یعنی کم‌ترین اندازه $q=۶$ است.

پاسخ ۲۱:

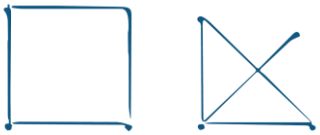
با توجه به آنکه $\gamma \geq \left\lceil \frac{۱۰}{۵} \right\rceil = ۲$ است و مجموعه $\{j,e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است پس $\gamma \leq ۲$ می‌باشد. بنابراین $\gamma = ۲$ می‌شود.

پاسخ ۲۲:

چون گراف ۲- منتظم و همبند است، پس این گراف $C_{۲۰}$ است، بنابراین داریم:

$$\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil \Rightarrow \gamma(C_{۲۰})=\left\lceil \frac{۲۰}{۳} \right\rceil = ۷$$

پاسخ ۲۳:



پاسخ ۲۴:

الف) $\{c,f,h,j\}$

ب) $\{a,b,f,h\}$

پ) $\{c,f,h\}$

پاسخ ۲۵:

الف) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$.

از طرفی مجموعهٔ $\{a,g\}$ یک مجموعهٔ احاطه گری برای آن است .

بنابراین $\gamma(G)=۲$ است و مجموعهٔ $\{a,g\}$ همان ۲- مجموعه است .

ب) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۲}{۳+۱} \right\rceil = ۳$.

از طرفی مجموعهٔ $\{b,f,j,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه گری برای آن است .

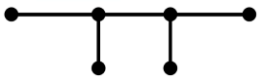
از طرفی با کمتر از ۴ راس نمی توان رئوس گراف را احاطه کرد ، بنابراین

$\gamma(G)=۲$ است

و مجموعهٔ $\{b,f,j,h\}$ همان ۲- مجموعه است .

پاسخ ۲۵:

الف)

ب) 

پاسخ ۲۶:

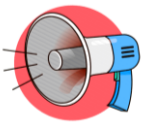
الف)

ب) رسم این گراف امکان‌پذیر نیست زیرا $pr = ۷\times۳ = ۲۱ \neq ۲q$ به عبارت دیگر در گراف‌های منتظم p و r همزمان نمی‌توانند فرد باشند.

پاسخ ۲۷:

$$\deg_G(V)+\deg_{\overline{G}}(V)=p-۱$$

$$۹+۱۲=p-۱ \Rightarrow p=۲۲$$



پاسخنامه اثباتی‌ها:

پاسخ ۱:

می‌دانیم در یک گراف راسی مانند v_i که درجه آن Δ است، $(\Delta+1)$راس را احاطه می‌کند؛ به جز راس v_i گراف دارای $p-(\Delta+1)$راس است که با راس v_i تشکیل یک مجموعه احاطه‌گر با $p-(\Delta+1)+1=p-\Delta$ عضو خواهد داد، پس $\gamma \le p-\Delta$است.

پاسخ ۲:

اگر مجموعه رأس‌ها با درجهٔ زوج را A و مجموعه رأس‌ها با درجهٔ فرد را B فرض کنیم؛ چون مجموع درجه رأس‌ها $2q$ است، داریم:

$$A+B=2q \Rightarrow B=2q-A$$

چون A عددی زوج است، پس $2q-A$ نیز زوج و B زوج خواهد بود، پس تعداد رأس‌های درجهٔ فرد، زوج است.

پاسخ ۳:

می‌دانیم $\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = 2$ است و با توجه به آن‌که در گراف k منتظم همواره $\Delta = K$ است داریم: $\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil = 2$

پاسخ ٤:

اثبات: فرض می‌کنیم مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، دارای γ عضو باشد. هر کدام از این رأس‌های مجموعهٔ احاطه‌گر، حداکثر به Δ رأس وصل هستند؛ یعنی Δ رأس را احاطه می‌کنند، پس با خودش حداکثر $\Delta+1$ رأس احاطه می‌شود. پس کل عضوهای مجموعهٔ احاطه‌گر، حداکثر $\gamma \times (\Delta+1)$ رأس را احاطه می‌کنند، که این تعداد از کل رئوس گراف بزرگ‌تر یا مساوی است؛ یعنی:

$$\gamma(\Delta+1) \ge p \Rightarrow \gamma \ge \frac{p}{\Delta+1}$$

اما چون γ صحیح است، پس: $\gamma \ge \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil$.

پاسخ ۵:

الف) راس دلخواه v_1 را درنظر می‌گیریم. به طور حتم v_1 به رأس دیگری وصل است $(\delta(G) \ge k)$ فرض کنیم آن رأس v_2 باشد، به طور قطع v_2 به رأسی به جز v_1 متصل است $(\delta(G) \ge k)$ و فرض کنیم آن رأس v_3 باشد، اگر v_3 به رأسی از مجموعهٔ $V(G)-\{v_1, v_2\}$ وصل است و فرض کنیم آن رأس v_4 باشد، v_4 به رأسی به جز $V(G)-\{v_1, v_2, v_3\}$ وصل است، به همین‌ترتیب v_k به رأسی به جز $V(G)-\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ وصل است، پس مسیری به طول $v_1v_2\dots v_k$ داریم که مسیری به طول k است.

ب) اگر تمامی رئوس $\delta(G)=k$ باشد، مسیری به طول بیش‌تر از k نداریم، پس گراف G شامل یک مسیر به طول $k+1$ نمی‌باشد.

پاسخ ٦:

رأس دلخواه v_1 را در G درنظر می‌گیریم، به طور حتم v_1 به رأس دیگری متصل است (چون کم‌ترین درجه از ۴ بیشتر است) فرض کنیم آن رأس v_2 باشد، به طور قطع v_2 به رأسی به جز v_1 نیز وصل است (چون کم‌ترین درجه از ۴ بیشتر است). فرض کنیم آن رأس v_3 باشد، هم‌چنین باید v_3 به رأسی از مجموعهٔ $V(G)-\{v_1, v_2\}$ وصل باشد (به دلیل اینکه کم‌ترین درجه از ۴ بیشتر است) فرض می‌کنیم آن رأس v_4 باشد و به طور حتم v_4 به رأسی از مجموعهٔ $V(G)-\{v_1, v_2, v_3\}$ وصل است و فرض می‌کنیم آن رأس v_5 باشد مسیر $v_1v_2v_3v_4v_5$ یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.

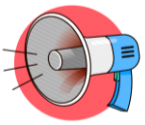
امتحان نهایـــی

ریاضیات گسسته

فصل سوم

ترکیبیات (شمارش)

بارم: ۸–۷ نمره

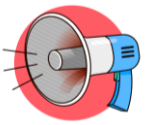


تعریفی‌ها– نقطه‌چین– درست، غلط

مربع لاتین: یک جدول مربع از اعداد $1,2,...,n$ به شکل یک مربع $n\times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد $1,2,...,n$ پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین» می‌نامیم.

درایه: به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.

دو مربع لاتین متعامد: فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند، به طوریکه از کنارهم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B متعامدند. هرگاه هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.



جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

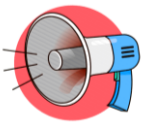
۱– با چهار حرف «الف»، «ب»، «خ»، «ت» و ارقام ۳ و ۴ و ۶ و ۸ و ۹ تعداد $9!$ رمز شامل ۹ کاراکتر می‌توان تشکیل داد.

۲– تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3=10$ برابر 66 است.

۳– با ارقام ۳ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۵ و ۵ به تعداد $\frac{7!}{4!\times 2!}=105$ عدد ۷ رقمی می‌توان تشکیل داد.

۴– در مربع لاتین مقابل حاصل $x+yz$ برابر با 4 است.

x	۲	z
۲	y	۳
۱	۳	۲



مسائل و تمرینات

۱– با حروف کلمه «انتخابات» چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که حرف‌های «ت» کنار هم باشند؟

۲– متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳– تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر را به دست آورید.

$$x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \qquad x_i \geq 0 \;\; ; \;\; 1 \leq i \leq 4$$

۴– چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد، به‌طوری که $1 \leq n \leq 350$ و بر هیچ یک از اعداد ۴ ، ۵ و ۶ بخش‌پذیر نباشد؟

۵– ثابت کنید در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در هر روز تولد شده‌اند؟

۶– تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر را به دست آورید.

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 11 \qquad x_i \geq 0 \;\; , \;\; 1 \leq i \leq 5$$

۷– چه تعداد تابع مانند $f : A \longrightarrow B$ می‌توان تعریف کرد، اگر بدانیم $|A| = 5$ و $|B| = 4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟

۸– اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول می‌کشد. حداکثر زمانی که لازم است تا این قفل باز شود، چند ثانیه است؟

۹– ثابت کنید اگر در یک دبیرستان ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آن‌ها روز و ماه تولدشان یکسان است.

۱۰– به چند طریق می‌توان ۸ نفر را در ۴ اتاق یک نفره و دو اتاق دو نفره جای داد؟

۱۱– چند تابع پوشا از مجموعه $A\{a,b,c,d,e\}$ به $B = \{1,2,3,4\}$ می‌توان نوشت؟

۱۲– در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($1 \leq n \leq 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

۱۳– چند تابع یک به یک از $A = \{1,2,3,4\}$ به $B = \{1,2,3,4,5\}$ وجود دارد که شامل عضو $(2,3)$ باشد؟

۱۴– در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \le n \le 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند؛ ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

۱۵– ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشند.

۱۶– مجموعه اعداد $A = \{1, 2, ..., 84\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ باشد.

۱۷– ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آن‌ها کم‌تر از $\sqrt{8}$ باشد.

۱۸– از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند تابع یک‌به‌یک می‌توان نوشت؟

۱۹– آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟ چرا؟

x		
	x	

y		
	y	

۲۰– نامعادله $x + y + z \le 2$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۲۱– به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد، به شرط آن که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.)

۲۲– چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ وجود دارد که یکی از رقم‌های ۴ و ۲ حداقل یک‌بار ظاهر شوند؟

۲۳– چند مربع لاتین به صورت مقابل وجود دارد؟

	۳	
۱		

۲۴– معادله $x_1 + x_2 + ... + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آن که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

۲۵– از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ چند تابع پوشا به مجموعه $B = \{1, 2, 3\}$ می‌توان نوشت به طوری که شامل زوج مرتب $(a, 1)$ باشد؟

۲۶– تعداد مربع‌های لاتین 2×2 چند تا است؟

۲۷– الف) به چند طریق از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟
ب) اگر از هر چهار نوع گل حداقل یکی انتخاب شود، به چند طریق می‌توان ۸ شاخه گل را انتخاب کرد؟

۲۸– برای مربع لاتین مقابل یک جایگشت مشخص کرده، نشان دهید مربع جدید، خود مربع لاتین است؟

۴	۲	۱	۳
۳	۱	۲	۴
۱	۴	۳	۲
۲	۳	۴	۱

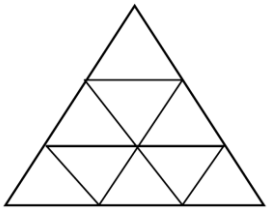
۲۹– بین اعداد طبیعی ۱ تا ۴۰۰ ($1 \le n \le 400$) چند عدد وجود دارد که:

الف) بر ۴ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشد؟

ب) فقط بر یکی از اعداد ۴ یا ۷ بخش‌پذیر باشد؟

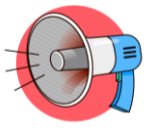
۳۰– به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به‌شرط آن که به هر نفر حداقل یـک خودکـار داده باشیم؟

۳۱– یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه داخل ایـن مثلـث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آن‌ها از یکدیگر کمتر از یک باشد؟



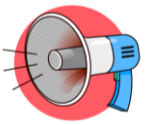
۳۲– یک مربع لاتین 4×4 چرخشی رسم کنید.

۳۳– با ارقام عدد ۱۱۳۲۸۸۱۱۳۳ چند عدد ۱۰ رقمی می‌توان نوشت؟



اثباتی‌ها

۱– ثابت کنید مربع لاتین از مرتبه $n \times n$ وجود دارد.



پاسخنامه مسائل و تمرینات

پاسخ ۱:

حروف «ت» را در کنار هم قرار می‌دهیم، پس داریم: $\frac{۷!}{۳!}=۸۴۰$

پاسخ ۲:

این دو مربع متعامد نیستند؛ زیرا در مربع اول درایه‌هایی که عدد ۱ دارند در درایه‌های متناظر با آن‌ها در مربع دوم عدد ۳ وجود دارد.

پاسخ ۳:

$$x_۲=۰\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۳\Rightarrow \binom{۳+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

$$x_۲=۱\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۲\Rightarrow \binom{۲+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۴}{۲}=۶$$

$$x_۲=۴\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۱\Rightarrow \binom{۱+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۳}{۲}=۳$$

$$x_۲=۹\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۰\Rightarrow \binom{۰+۳-۱}{۳-۱}=۱$$

پس $۱۰+۶+۳+۱=۲۰$ حالت خواهیم داشت.

پاسخ ٤:

با توجه به آن‌که $[۴,۵]=۲۰$ ، $[۵,۶]=۳۰$ ، $[۴,۶]=۱۲$ و $[۵,۴,۶]=۶۰$ داریم:

$$|A|=\left[\frac{۳۵۰}{۵}\right]=۷۰ \qquad |B|=\left[\frac{۳۵۰}{۴}\right]=۸۷ \quad ، \quad |C|=\left[\frac{۳۵۰}{۶}\right]=۵۸$$

$$|A\cap B|=\left[\frac{۳۵۰}{۲۰}\right]=۱۷ \;،\; |A\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{۳۰}\right]=۱۱ \;،\; |B\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{۱۲}\right]=۲۹$$

$$|A\cap B\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{۶۰}\right]=۵$$

$$|A\cup B\cup C|$$

$$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$=۷۰+۸۷+۵۸-۱۷-۱۱-۲۹+۵=۱۶۳$$

$$|S|-|A\cup B\cup C|=۳۵۰-۱۶۳=۱۸۷$$

پاسخ ۵:

تعداد روزهای سال که ۳۶۵ و در حالت کبیسه ۳۶۶ است را لانه فرض می‌کنیم، اگر ۳۶۸ نفر را کبوتر فرض کنیم، پس حداقل ۲ نفر وجود دارند که روز تولد آن‌ها یکسان است.

پاسخ ٦:

$$x_۲=۰\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴+x_۵=۱۱\Rightarrow \binom{۱۱+۴-۱}{۴-۱}=۳۶۴$$

$$x_۲=۱\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴+x_۵=۸\Rightarrow \binom{۸+۴-۱}{۴-۱}=۱۶۵$$

$$x_۲=۲\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴+x_۵=۵\Rightarrow \binom{۵+۴-۱}{۴-۱}=۵۶$$

$$x_۲=۳\Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴+x_۵=۲\Rightarrow \binom{۲+۴-۱}{۴-۱}=۱۰$$

پس کل حالت‌ها $۵۹۵=۱۰+۵۶+۱۶۵+۳۶۴$ است.

پاسخ ۷:

تعداد توابع یک‌به‌یک، $۰=۱\times۲\times۳\times۴$: تعداد توابع $=۴^۵$

پاسخ ۸:

اگر A تعداد رمزهای ۴ رقمی فاقد۷ و B تعداد رمزهای ۴ رقمی فاقد ۸ باشند، داریم:

$$|A|=۹\times۹\times۹\times۹=۹^۴ \qquad |B|=۹\times۹\times۹\times۹=۹^۴$$

$$|A\cap B|=۸\times۸\times۸\times۸=۸^۴$$

$$|S|-|A\cup B|=۱۰^۴-(۹^۴+۹^۴-۸^۴)=۹۷۴$$

ثانیه $۴۸۷۰=۵\times۹۷۴=$ زمان لازم

پس ۴۸۷۰ ثانیه زمان لازم داریم.

پاسخ ۹:

چون ۷ روز در هفته و ۱۲ ماه در سال داریم $۸۴=۱۲\times۷$ لانه داریم؛ چون $۵۰۵=۸۴\times۶+۱$ است، پس حداقل ۷ نفر از آن‌ها روز و ماه تولد یکسان دارند.

پاسخ ۱۰:

$$\frac{\binom{۸}{۱}\binom{۷}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۴!\times۲!}$$

پاسخ ۱۱:

تابع باید به صورت زیر باشد:

$$f=\{(a,-),(b,-),(c,-),(d,-),(e,-)\}$$

یعنی ۵ مکان داریم که باید از چهار عضو مجموعه دوم استفاده کنیم، پس عضو پنجم باید یکی از ۴ عضو مجموعه دوم باشد، یعنی:

$$\binom{۴}{۱}\frac{۵!}{۲!}=۲۴۰$$

پاسخ ۱۲:

$|A|$ تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۲ و $|B|$ تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۳ باشد.

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$=\left[\frac{۹۰}{۲}\right]+\left[\frac{۹۰}{۳}\right]-\left[\frac{۹۰}{۶}\right]=۴۵+۳۰-۱۵=۶۰$$

پاسخ ۱۳:

تابع f به صورت $f=\{(۲,۳),(۱,-),(۳,-),(۴,-)\}$ است، پس تعداد این توابع $۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$ است.

پاسخ ۱۴:

اگر مجموعهٔ A اعداد بخش‌پذیر بر ۴ و B مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۷ باشد، داریم:

$$|A\cap\overline{B}|=|A|-|A\cap B|=\left[\frac{۲۰۰}{۴}\right]-\left[\frac{۲۰۰}{۲۸}\right]=۵۰-۷=۴۳$$

پاسخ ۱۵:

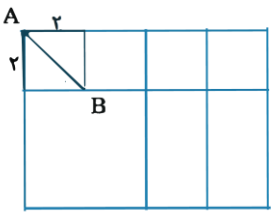
دو لانه داریم که یکی زوج و دیگری فرد است و می‌دانیم مجموع دو عدد زوج و مجموع دو عدد فرد زوج است، پس اگر سه عدد طبیعی را سه کبوتر درنظر بگیریم حداقل یک لانه با دو کبوتر وجود دارد.

پاسخ ۱۶:

می‌دانیم زوج‌های $(۱,۸۴),(۲,۸۳),\ldots,(۴۲,۴۳)$ مجموعشان ۸۵ می‌شود که تعداد آن ۴۲ است، اگر این‌ها را لانه فرض کنیم و ۴۳ عضو A تعداد کبوترها باشند، پس حداقل یکی از این لانه‌ها دو عضوی می‌شود که مجموع آن‌ها ۸۵ است.

پاسخ ۱۷:

این مستطیل ۶×۸ را به ۱۲ مربع ۲×۲ تقسیم می‌کنیم. حداکثر فاصلهٔ بین ۲ نقطه در هر یک از این مربع‌ها $\left(AB=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}\right)$ است، پس ۱۲ لانه داریم. اگر این ۱۳ نقطه را ۱۳ کبوتر درنظر بگیریم، حداقل ۲ نقطه از این نقطه‌ها داخل یکی از این مربع‌ها است که حداکثر فاصلهٔ آن‌ها کم‌تر از $\sqrt{۸}$ است.

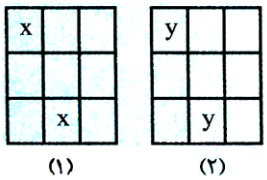


پاسخ ۱۸:

عضو اول A، ۵ انتخاب، دومی ۴، سومی ۳ و چهارمی ۲ انتخاب خواهند داشت. بنابراین داریم: $۵\times۴\times۳\times۲=۱۲۰$

پاسخ ۱۹:

مربع لاتینی که از جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین به دست آید، با خودش متعامد نیست؛ زیرا:



(۱) (۲)

در مربع لاتین شماره (۱) دو درایه مانند x داریم که با جایگشتی مانند $x\to y$ مربع لاتین شماره (۲) ایجاد می‌شود. حالا اگر این دو مربع لاتین را ترکیب کنیم عدد دو رقمی xy تکرار می‌شود؛ یعنی این دو مربع لاتین متعامد نیستند.

پاسخ ۲۰:

$$x+y+z=۰\Rightarrow\binom{۰+۳-۱}{۳-۱}=۱$$

$$x+y+z=۱\Rightarrow\binom{۱+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۳}{۲}=۳$$

$$x+y+z=۲\Rightarrow\binom{۲+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۴}{۲}=۶$$

پس $۱+۳+۶=۱۰$ حالت خواهیم داشت.

پاسخ ۲۱:

این سؤال مانند این است که بگوییم چند تابع یک‌به‌یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی می‌توان نوشت: $۸\times۷\times۶\times۵=۱۶۸۰$

پاسخ ۲۲:

تعداد کل عددهای ۴ رقمی $۴\times۴\times۴\times۴=۲۵۶$ است، فرض کنید مجموعه A و B به ترتیب مجموعه‌هایی ۴ رقمی باشند که در آن‌ها ۲ و ۴ به کار نرفته باشند، بنابراین داریم:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$=۳\times۳\times۳\times۳+۳\times۳\times۳\times۳-۲\times۲\times۲\times۲$$
$$=۸۱+۸۱-۱۶=۱۴۶$$

تعداد عددهایی که در آن‌ها یکی از ارقام ۴ و ۲ حداقل یک بار ظاهر شوند برابر است با: $۲۵۶-۱۴۶=۱۱۰$

پاسخ ۲۳:

x و y باید عدد ۲ باشد پس z و k عدد ۱ هستند. بنابراین t و n عدد ۳ و m باید ۲ باشد. پس یک مربع لاتین بیش‌تر نمی‌تواند ساخت.

n	k	m
y	۳	z
۱	x	t

پاسخ ۲۴:

به $x_۳$ ۴ واحد می‌دهیم و آن را از معادله حذف می‌کنیم و به $x_۵$، ۳ واحد می‌دهیم و ۵ واحد دیگر را تقسیم می‌کنیم.

$$x_۱+x_۲+x_۴+x_۵+x_۶=۵$$

$$\binom{۵+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۹}{۴}=\frac{۹!}{۴!\,۵!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۴\times۳\times۲\times۱\times۵!}=۱۲۶$$

پاسخ ۲۵:

اگر S مجموعهٔ کل توابع و مجموعهٔ $|\overline{۲}\cup\overline{۳}|$ توابعی که شامل ۲ یا ۳ نباشند، در نظر بگیریم، داریم:

$$|S|-|\overline{۲}\cup\overline{۳}|=|S|-(|\overline{۲}|+|\overline{۳}|-|\overline{۲}\cap\overline{۳}|)$$
$$=۱\times۳\times۳\times۳-(۱\times۲\times۲\times۲+۱\times۲\times۲\times۲-۱\times۱\times۱\times۱)$$
$$=۲۷-(۸+۸-۱)=۱۲$$

پاسخ ۲۶:

تعداد مربع‌های لاتین مرتبه ۲×۲ به صورت مقابل می‌باشند که تعداد آن‌ها ۲ تا است.

۲	۱
۱	۲

۱	۲
۲	۱

پاسخ ۲۷:

الف) $\binom{۸+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۱}{۳}=۱۶۵$

ب) ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل بر می‌داریم. $۸-۴=۴$ شاخه گل باقی مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می‌کنیم.

لذا تعداد حالات برابر است با: $\binom{۴+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۷}{۳}=۳۵$

پاسخ ۲۸:

۴	۲	۱	۳
۳	۱	۲	۴
۱	۴	۳	۲
۲	۳	۴	۱

$۱\to۳$، $۲\to۲$، $۳\to۴$، $۴\to۱$

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۱	۴	۲
۲	۴	۱	۳

در هیچ سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود ندارد بنابراین مربع لاتین می‌باشد.

پاسخ ۲۹:

مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۴ را A و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۷ را B می‌نامیم بنابراین:

$$n(A)=\left[\frac{۴۰۰}{۴}\right]=۱۰۰\ ,$$
$$n(B)=\left[\frac{۴۰۰}{۷}\right]=۵۷\ ,$$
$$n(A\cap B)=\left[\frac{۴۰۰}{۴\times۷}\right]=۱۴$$

الف)

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۱۰۰-۱۴=۸۶$$

ب)

$$n(A-B)+n(B-A)\Rightarrow$$
$$=n(A)-n(A\cap B)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow$$
$$=۱۰۰-۱۴+۵۷-۱۴=۱۲۹$$

پاسخ ۳۰:

تعداد حالات ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های از یک مجموعه ۴ عضوی مانند $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ به یک مجموعه ۳ عضوی مانند $B=\{b_۱,b_۲,b_۳\}$، به طوری که برد این توابع همه اعضای B باشد.

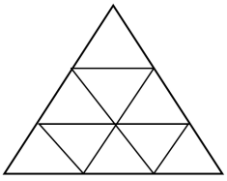
تعریف می‌کنیم A_i مجموعه توابعی است که برد آن‌ها B_i نباشد. بنابراین:

$$|S|=|B|^{|A|}=۳^۴=۸۱\ ,\ |A_۱|=|A_۲|=|A_۳|=۲^۴$$
$$|A_۱\cap A_۲|=|A_۲\cap A_۳|=|A_۱\cap A_۳|=۱^۴=۱$$
$$|A_۱\cap A۲\cap A_۳|=۰$$
$$\Rightarrow|\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}\cap\overline{A_۳}|=|\overline{A_۱}\cup\overline{A_۲}\cup\overline{A_۳}|\Rightarrow$$
$$=|S|-|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|\Rightarrow$$
$$=۸۱-(۱۶+۱۶+۱۶-۱-۱-۱+۰)=۳۶$$

پاسخ ۳۱:

مطابق شکل ، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع (باضلع هایی به طول ۱ واحد) تقسیم می کنیم .

حال نقاط را به عنوان ۱۰ کبوتر و مثلث های کوچک را به عنوان۹ لانه در نظر می گیریم . طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث ها ۱ واحد می باشد ، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ درون مثلث از ۱ واحد کمتر است .

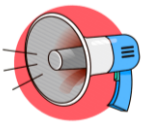


پاسخ ۳۲:

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

پاسخ ۳۳:

$$\frac{۱۰!}{۴!\times۳!\times۲!}$$



پاسخنامه اثباتی‌ها

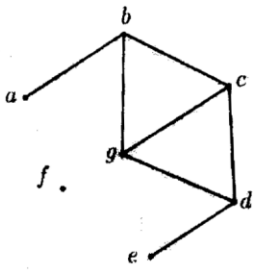
پاسخ ۱:

باید مربع لاتین چرخشی از مرتبهٔ n را به صورت زیر در نظر بگیریم.

	۲	۳		n
n	۱	۲		n−۱
n−۱	n	۱		n−۲
۲	۳	۴	...	

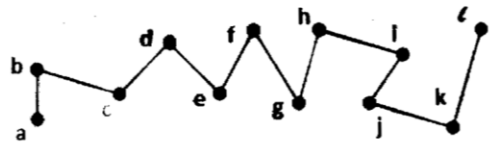
باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **ریاضیات گسسته**	نام و نام خانوادگی :	تعداد صفحه: ۲	ساعت شروع: **۱۰ صبح**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	رشته : **ریاضی فیزیک**	تاریخ امتحان : **۱۳۹۷/۱۰/۸**	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در **نوبت دی** ماه سال **۱۳۹۷**			مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. الف) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4k+1$ مربع کامل است. ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ج) گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است. د)گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.	۱
۲	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است.	۱/۲۵
۳	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: (برای هر دوعدد حقیقی x و y داریم: $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$)	۱
۴	اگر $a>1$ و $a\mid 9k+4$ و $a\mid 5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.	۱
۵	پاسخ هر یک از سوالات زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. الف) اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b\mid a+2$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد a^2+b^2+3 را بر ۸ بیابید. ب) مطلوبست باقی ماندهٔ تقسیم عدد $A=(1000)^{13}\times 12+10$ بر عدد ۷ .	۲/۲۵
۶	معادله همنهشتی $3x\equiv 13 \pmod 7$ را حل و جواب عمومی آن را بدست آورید.	۱
۷	با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید. الف)یک $a-c$ مسیر به طول ۳ بنویسید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. ج) درجه رأس a درگراف $\overline{G}$ را تعیین کنید. د) آیا گراف G همبند است؟ چرا ؟ هـ) یک زیرگراف تهیِ ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید. 	۱/۵
۸	ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۹	گراف G با مجموعه رأسهای $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ و مجموعهٔ یال های $E(G)=\{ae,bc,bd,be,ec,ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (ج)پاسخ دهید. الف) مجموعه همسایگی باز رأس d را بنویسید . ب) اندازه گراف را مشخص کنید. ج) مجموعِ درجات رئوس این گراف برابر چند است؟	۱

ادامه سوالات در صفحه دوم

سؤالات امتحان نهایی درس : **ریاضیات گسسته**	نام و نام خانوادگی :	تعداد صفحه: ۲	ساعت شروع: **۱۰ صبح**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	رشته : **ریاضی فیزیک**	تاریخ امتحان : **۱۳۹۷/۱۰/۸**	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در **نوبت دی** ماه سال **۱۳۹۷**			مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف		نمره
۱۰	گراف کامل k_p دارای ۳۶ یال است در این گراف، مرتبه گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید.	۱
۱۱	گراف $(P_{۱۲})$ در شکل مقابل رسم شده است.  الف) یک γ - مجموعه از آن را مشخص کنید. ب) یک مجموعهٔ احاطه گر مینمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.	۱
۱۲	اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$، در این صورت چند کد یا رمز ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقمِ(متمایز) از A وسه رقمِ (متمایز) از B باشد؟	۱
۱۳	به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد ؟	۱
۱۴	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.	۱/۵
۱۵	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود)	۲
۱۶	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید)	۱/۵
	" موفق باشید " جمع نمره	۲۰

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۱۰ صبح**	مدّت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۷/۱۰/۸**	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور **دی ماه** سال **۱۳۹۷**		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) ج)نادرست (۰/۲۵) د) درست (۰/۲۵) (صفحات: ۳ و ۱۶ و ۳۶ و ۴۲)	۱
۲	اگر $\alpha+۲\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. (۰/۲۵) از طرفی طبق فرض $\alpha+\beta$ نیز عددی گویا است. (۰/۲۵) می‌دانیم تفاضل دوعدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: $(\alpha+۲\beta)-(\alpha+\beta)=\beta\in Q$ (۰/۲۵) اما با توجه به فرض مسأله : β گنگ است (۰/۲۵) با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵) (صفحه: ۸)	۱/۲۵
۳	$\underbrace{۲x^۲+۲y^۲+۲\geq ۲xy+۲x+۲y}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{(x^۲-۲x+۱)+(y^۲-۲y+۱)+(x^۲-۲xy+y^۲)\geq ۰}_{(۰/۲۵)}$ $\Leftrightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲+(x-y)^۲\geq ۰$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow (x-۱)^۲\geq ۰\ ,\ (y-۱)^۲\geq ۰\ ,\ (x-y)^۲\geq ۰$ (۰/۲۵) (صفحه: ۸)	۱
۴	$\begin{matrix}a\mid ۹k+۴\\ a\mid ۵k+۳\end{matrix}\Rightarrow \begin{matrix}a\mid ۴۵k+۲۰\ (۰/۲۵)\\ a\mid ۴۵k+۲۷\ (۰/۲۵)\end{matrix}\Rightarrow a\mid ۷\ (۰/۲۵) \overset{a>۱}{\Rightarrow} a=۷\ (۰/۲۵)$ (صفحه: ۱۶)	۱
۵	الف) a عددی فرد است بنابراین $a+۲$ عددی فرد است و $b\mid a+۲$ ، بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. (۰/۲۵) می دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به علاوه یک است . (۰/۲۵) $a^۲+b^۲+۳=\underset{(۰/۲۵)}{(۸m+۱)}+\underset{(۰/۲۵)}{(۸n+۱)}+۳=۸\underset{(۰/۲۵)}{(m+n)}+۵ \Rightarrow r=۵\ (۰/۲۵)$	۱/۲۵
	(ب) $۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}۶^{۱۳}\overset{۷}{\equiv}-۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰\overset{۷}{\equiv}-۱۲+۱۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰\overset{۷}{\equiv}-۲\overset{۷}{\equiv}۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r=۵$ (۰/۲۵) (صفحات: ۱۶ و ۲۱)	۱
۶	(صفحه: ۲۵) (۰/۲۵) $\Rightarrow x=۷k+۲$ (۰/۲۵) $\underset{(۰/۲۵)}{\overset{(۳,۷)=۱}{\Rightarrow}} x\overset{۷}{\equiv}۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۳x\overset{۷}{\equiv}۶$ (۰/۲۵) $۳x\overset{۷}{\equiv}۱۳$	۱

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۱۰ صبح**	مدّت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۷/۱۰/۸**	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور **دی ماه** سال **۱۳۹۷**		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

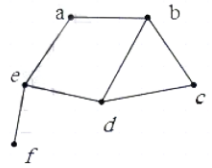
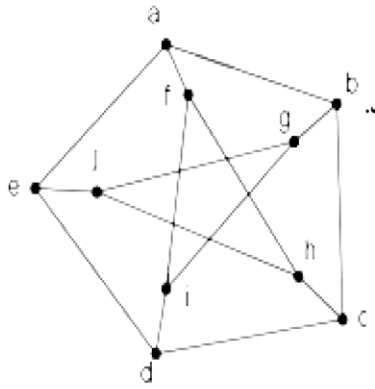
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۷	**الف)** $abgc$ (۰/۲۵) **ب)** $bcdgb$ (۰/۲۵) **ج)** $\deg_{\bar{G}}(a)=۵$ (۰/۲۵) **د) خیر- چون مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد. (۰/۵)** **هـ)** a, b, c, f, g (۰/۲۵) **(صفحات: ۳۶ و ۳۸ و ۳۹)**	۱/۵
۸	**فرض کنیم G یک گراف و A مجموعهٔ همهٔ رئوس فرد گراف G و B مجموعهٔ همهٔ رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم:** $\sum_{v\in V(G)}\deg(v)=\sum_{v\in A}\deg(v)+\sum_{v\in B}\deg(v)$ (۰/۲۵) **از طرفی می دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف G عددی زوج است یعنی** $\sum_{v\in V(G)}\deg(v)$ **زوج** (۰/۲۵) **و** $\sum_{v\in B}\deg(v)$ **زوج است بنابراین تفاضل آنها نیز زوج خواهد شد . (۰/۲۵)** **بنابراین** $\sum_{v\in A}\deg(v)$ **زوج و نتیجه می شود که** $n(A)$ **عددی زوج است. (۰/۲۵)** **(صفحه: ۴۰)**	۱
۹	**الف)** $N_G(d)=\{b,e\}$ (۰/۵) **ب)** $q=۶$ (۰/۲۵) **ج)مجموعِ درجات رئوس = ۱۲** (۰/۲۵) **(صفحه: ۴۱)**	۱
۱۰	$q(K_p)=\frac{p(p-۱)}{۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{p(p-۱)}{۲}=۳۶$ (۰/۲۵) **(صفحه: ۴۲)** $\Rightarrow p=۹$ (۰/۲۵) , $\Delta(G)=p-۱=۸$ (۰/۲۵)	۱
۱۱	**الف)** $\{b,e,h,k\}$ (۰/۵) **ب)** $\{a,c,e,g,i,k\}$ (۰/۵) **(صفحه: ۵۴)**	۱
۱۲	$\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۳}\times ۵!=۷۲۰۰$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) **(صفحه: ۷۲)**	۱
۱۳	$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸$ (۰/۲۵) $x_i\geq ۱$, $i=۱,۲,۳,۴$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \binom{۸-۱}{۴-۱}=\binom{۷}{۳}=۳۵$ (۰/۵) **(صفحه: ۷۳)**	۱

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۱۰ صبح**	مدّت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۷/۱۰/۸**	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور **دی ماه** سال **۱۳۹۷**		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۴	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline \end{array}$ (۰/۵) و $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline \end{array}$ (۰/۵) $\Rightarrow$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline ۱۲ & ۳۱ & ۲۳ \\ \hline ۳۳ & ۲۲ & ۱۱ \\ \hline ۲۱ & ۱۳ & ۳۲ \\ \hline \end{array}$ (۰/۵) (صفحه: ۷۳)	۱/۵
۱۵	تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشا از یک مجموعهٔ ۴ عضوی مانند A به یک مجموعهٔ ۳ عضوی مانند B . $A_i = \{f : A \to B \mid f(a_i) \neq b_j \quad , \quad i = ۱,۲,۳,۴ \quad , \quad j = ۱,۲,۳\}$ (۰/۲۵) $\|S\| = \|B\|^{\|A\|} = ۳^۴ = ۸۱$ (۰/۲۵) , $\|A_۱\| = \|A_۲\| = \|A_۳\| = ۲^۴ = ۱۶$ (۰/۲۵) $\|A_۱ \cap A_۲\| = \|A_۱ \cap A_۳\| = \|A_۲ \cap A_۳\| = ۱$ (۰/۲۵) , $\|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳\| = ۰$ (۰/۲۵), $\|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap \bar{A}_۳\| = \|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}\| = \|S\| - \|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳\| = ۸۱ - (۳\times۱۶ - ۳\times۱ + ۰) = ۳۶$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (صفحات: ۷۸ و ۷۹)	۲
۱۶	$k + ۱ = ۲۰ \Rightarrow k = ۱۹$ (۰/۵) طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد لانه ها همان روزهای سال می باشد. $n = ۳۶۵$ (۰/۵) بنابراین تعداد کبوترها برابر است با $k\,n + ۱ = ۳۶۵\times۱۹ + ۱ = ۶۹۳۶$ (۰/۵) (صفحه: ۸۴)	۱/۵

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **ریاضیات گسسته**	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع: **۸ صبح**	تعداد صفحه: **۲**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	رشته : **ریاضی فیزیک**	تاریخ امتحان : **۱۳۹۸/۳/۲۵**	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۸**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
۱	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست .	۱
۲	درجاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) یک گراف کامل ۸ رأسی ، .....یال دارد. ب)دریک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = ۳$ حداقل .....راس برای احاطه همه رئوس لازم است. ج) اگر در گراف G از مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G) = ۱$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر..... است. د) مجموع درایه های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابربا.....است.	۲
۳	اگر باقی مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $۵n - ۳m$ بر ۱۳ را بدست آورید.	۱/۵
۴	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد .دراین صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید۱۲ بهمن ، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱
۵	با تبدیل معادله سیاله خطی $۵x + ۲y = ۱۸$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵
۶	شکل مقابل نمودارگراف G می باشد. الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید. ج) مجموع درجه های رأس های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید. 	۱/۵
۷	گراف $C_۷$ را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف)یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوی بنویسید. ب) عدد احاطه گری $C_۷$ را به دست آورید. ج)دو مجموعه احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.	۱/۵
۸	الف)ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را میتوان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد ؟ ب)در گراف روبرو یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید. 	۱/۵
	« بقیه سوالات در صفحه دوم»	

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **ریاضیات گسسته**	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع: **۸ صبح**	تعداد صفحه: **۲**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	رشته : **ریاضی فیزیک**	تاریخ امتحان : **۱۳۹۸/۳/۲۵**	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۸**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
۹	الف) یک گراف ۶ رأسی باعدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب) یک گراف ۶ رأسی باعدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	با ارقام ۵,۴,۴,۳,۲,۲,۱,۱ چند عدد ۹رقمی می توان نوشت.	۱
۱۱	۶ دانش آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند کنارهم دریک ردیف قرارگیرند ، به طوری که : الف) به صورت یک در میان قرار بگیرند. ب) همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند. ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.	۱/۵
۱۲	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+....+x_5=10$ با شرط $x_i>0\ ,\ i=2,3,4,5$ را محاسبه کنید.	۱
۱۳	اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هریک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هرکت با هر پیراهن نیزدقیقاً یکبارمورداستفاده قراربگیرد ،چگونه می توانند این کار را ا نجام دهند؟	۱/۵
۱۴	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند.	۱/۲۵
۱۵	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۱/۲۵
	" موفق باشید " جمع نمره	۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۸/۳/۲۵**	
دانش آموزان روزانه ، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور **خرداد ماه سال ۱۳۹۸**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱ — نمره: ۱

اگر دو عدد نامنفی باشند حکم چنین خواهد بود $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ $(۰/۵)$ (صفحه: ۷)

گزاره همیشه درست

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab} \Leftrightarrow \underbrace{a+b-۲\sqrt{ab} \geq ۰}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{۲} \geq ۰}_{(۰/۲۵)}$$

۲ — نمره: ۲

الف) ۲۸ $(۰/۵)$ ب) ۳ راس $(۰/۵)$ ج) $p-۱$ $(۰/۵)$ د) ۱۵ $(۰/۵)$ (صفحه:۳۸و۴۹و۵۳و۶۲)

۳ — نمره: ۱/۵

$$\begin{cases} m = ۱۳q_۱ + ۲ \\ n = ۱۳q_۲ + ۹ \end{cases} (۰/۵) \quad \begin{cases} ۳m = ۱۳(۳q_۱) + ۶ \\ ۵n = ۱۳(۵q_۲) + ۴۵ \end{cases} (۰/۵) \rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q' + ۳۹ \ (۰/۲۵)$$

$$\rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q'' + ۰ \rightarrow r = ۰ \ (۰/۲۵)$$

(صفحه: ۱۴)

۴ — نمره: ۱

روز اول مهر ، شنبه را برابر صفر در نظر میگیریم ۲۹ روز درمهر و سه ماه آبان و آذر ودی و۱۲ روز بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است ،پس داریم : $(۰/۲۵)$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$۲۹+۳۰+۳۰+۳۰+۱۲=۱۳۱ \rightarrow ۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$ $(۰/۵)$

که متناظر این عدد در جدول روز پنج شنبه را نشان می دهد. $(۰/۲۵)$ (صفحه ۲۴)

۵ — نمره: ۱/۵

$$\underbrace{۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹ \ (۰/۵) \Rightarrow y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \ (۰/۲۵)$$

$x = -۲k + ۲ \ (۰/۲۵)$ و $y = ۵k + ۴ \ (۰/۲۵)$

(صفحه: ۲۵)

۶ — نمره: ۱/۵

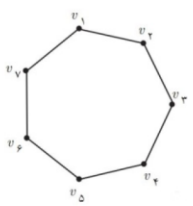
الف) $q = ۷$ $(۰/۲۵)$, $p = ۶$ $(۰/۲۵)$ ب) $N_G(b) = \{a,d,c\}$ $(۰/۲۵)$

ج) تعداد یال‌های گراف G + تعداد یال‌های گراف $\overline{G}$ $= \frac{p(p-۱)}{۲}$ $(۰/۲۵)$

مجموع درجه‌های رئوس گراف $\overline{G}$ $= ۱۶$ $(۰/۲۵)$ $\Rightarrow$ تعداد یال‌های گراف $\overline{G}$ $= ۸$ $(۰/۲۵)$

(صفحه: ۴۱)

۷ — نمره: ۱/۵

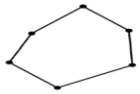


الف) $(۰/۵)$ $\{v_۱, v_۳, v_۴, v_۵\}$ ب) $\gamma(G) = ۳$ $(۰/۵)$

ج) $\{v_۲, v_۴, v_۶\}$ و $\{v_۱, v_۳, v_۵\}$ $(۰/۵)$ (صفحه: ۴۵)

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۸/۳/۲۵**	
دانش آموزان روزانه ، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور **خرداد ماه سال ۱۳۹۸**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۸	الف) اگر $\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه گر غیر مینمال باشد در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که باحذف آنها مجموعه احاطه گر مینمال باقی می ماند. $(۰/۲۵)$ بنا بر این عضوی مانند a_1 را در نظر میگیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم $(۰/۲۵)$ در غیر اینصورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام میدهیم . $(۰/۲۵)$ ب) $A=\{h,g,f,i,j\}$ $(۰/۷۵)$ (صفحه: ۴۶)	۱/۵
۹	الف) (۰/۵) ب)  (۰/۵) (صفحه: ۵۳)	۱
۱۰	$P=\frac{۹!}{۳!\times ۲!\times ۲!}(۰/۷۵) \rightarrow P=۳\times ۷!\ (۰/۲۵)$ (صفحه: ۵۸)	۱
۱۱	الف) $۶!\times ۵!$ $(۰/۵)$ ب) $۷!\times ۵!$ $(۰/۵)$ ج) $۱۰!\times ۲!$ $(۰/۵)$ (صفحه: ۵۷)	۱/۵
۱۲	$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=۱۰ \rightarrow x_1+y_2+۱+y_3+۱+y_4+۱+y_5+۱=۱۰$ $x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=۶\ (۰/۲۵) \xrightarrow[(۰/۲۵)]{\binom{n+k-۱}{k-۱}} \binom{۶+۵-۱}{۵-۱}\ (۰/۵)$ (صفحه: ۷۲)	۱
۱۳	 (۰/۵) (۰/۵) (صفحه: ۶۹)	۱/۵
۱۴	$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\ (۰/۲۵)$ $n(A\cup B)=\left[\frac{۹۰}{۲}\right]+\left[\frac{۹۰}{۳}\right]-\left[\frac{۹۰}{۶}\right]\ (۰/۷۵)\quad n(A\cup B)=۶۰\ (۰/۲۵)$ (صفحه: ۸۴)	۱/۲۵
۱۵	تعداد لانه ها : $۷\times ۱۲=۸۴$ $(۰/۲۵)$ تعداد کبوترها : ۵۰۵ دانش آموز $(۰/۲۵)$ $\begin{array}{r\|l} ۵۰۵ & ۸۴ \\ -۵۰۴ & ۶ \\ \hline ۱ & \end{array}$ $۶+۱=۷$ $(۰/۵)$ طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. $(۰/۲۵)$	۱/۲۵

«همکاران گرامی لطفا برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

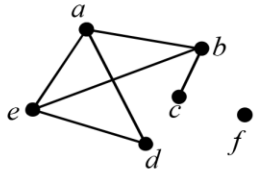
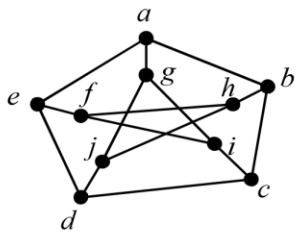
باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **ریاضیات گسسته**	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع: **۸ صبح**	رشته : **ریاضی فیزیک**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	تعداد صفحه: **۲**	تاریخ امتحان : **۱۳۹۹/۰۴/۰۸**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
دانش آموزان روزانه سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۹**			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره

الف) بخش الزامی

دانش‌آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۴ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۱	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.	۱/۷۵
۲	اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این‌صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را به دست آورید.	۱/۲۵
۳	اگر $n\in N$، $n\mid 9k+7$ و $n\mid 7k+6$ ، ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$.	۱
۴	باقی‌مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.	۱/۵
۵	معادله هم‌نهشتی $2x\overset{11}{\equiv}5$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۲۵
۶	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموع درجه‌های رأس‌های هر گراف ..... تعداد یال‌ها است. ب) در یک گراف $k-$منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با ..... است. پ) در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر ..... گراف G می‌نامیم. ت) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر ..... می‌نامیم.	۱
۷	گراف G را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. ب)یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید. 	۱/۲۵
۸	درگراف G، درجه رأس v برابر با ۹ است و درجه رأس v در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.	۰/۷۵
۹	گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید، به طوری که: الف) مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب) بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید. 	۱/۲۵
۱۱	با ارقام عدد ۱،۱،۲،۲،۳،۴ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت.	۰/۷۵
۱۲	به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.	۱/۲۵

« بقیه سوالات در صفحه دوم»

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **ریاضیات گسسته**	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع: **۸ صبح**	رشته : **ریاضی فیزیک**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	تعداد صفحه: **۲**	تاریخ امتحان : **۱۳۹۹/۰۴/۰۸**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
دانش آموزان روزانه سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۹**			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
۱۳	مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اِعمال یک جایگشت بر روی ۱،۲،۳،۴ یک مربع لاتین جدید به دست آورید. ۳ ۴ ۱ ۲ ۱ ۲ ۳ ۴ ۲ ۱ ۴ ۳ ۴ ۳ ۲ ۱	۱
۱۴	در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید. الف) ۳ ۱ ۲ / ۲ ۳ ۱ / ۱ ۲ ۳ و ۱ ۲ ۳ / ۲ ۳ ۱ / ۳ ۱ ۲ ب) ۲ ۱ ۳ / ۱ ۳ ۲ / ۳ ۲ ۱ و ۳ ۲ ۱ / ۲ ۳ ۱ / ۱ ۱ ۳	۱

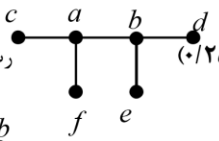
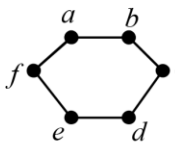
ب) بخش انتخابی

دانش‌آموز عزیز جهت کسب ۴ نمره از سوالات ۱۵ تا ۲۲ فقط ۴ سوال را به دلخواه انتخاب کرده و پاسخ دهید.

۱۵	اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$.	۱
۱۶	گراف G، ۶ رأسی ۳- منتظم است. الف) اندازه گراف G را بیابید. ب) نمودار گراف G را رسم کنید.	۱
۱۷	ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۱۸	۴ دانش آموز پایه دهم و ۳ دانش آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: الف) هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند. ب) همواره دانش‌آموزان پایه دهم کنار هم باشند.	۱
۱۹	به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟(به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.)	۱
۲۰	در بین اعداد طبیعی مانند n، به طوری که $۱\leq n\leq ۱۰۰$، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش‌پذیر است؟	۱
۲۱	در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟	۱
۲۲	قرار است سه کارگر $W_۱, W_۲, W_۳$ در سه روز متوالی با سه ماشین نخ‌ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.	۱
	" موفق باشید " جمع نمره	۲۴

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۲۰دقیقه**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۹/۰۴/۰۸**	
دانش آموزان روزانه سراسرکشور **خرداد ماه سال ۱۳۹۹**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
	پاسخ سوالات الزامی	
۱	**الف) نادرست (۰/۲۵)** $\sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰\notin Q^C$ (۰/۲۵) ، $\sqrt{۲},-\sqrt{۲}\in Q^C$ (۰/۲۵) (مشابه قسمت ت کار در کلاس صفحه ۳) **ب) درست (۰/۲۵)** $(۲k+۱)^۲-۱=\underbrace{۴k^۲+۴k+۱}_{(۰/۲۵)}-۱=\underbrace{۴k(k+۱)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۴\times ۲q}_{(۰/۲۵)}=۸q$ (مسأله۳ صفحه ۱۵)	۱/۷۵
۲	$r=۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a=۴q+۳$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲a+۳=\underbrace{۸q+۹}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۸(q+۱)+۱}_{(۰/۲۵)}=۸q'+۱$ (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه ۱۴)	۱/۲۵
۳	$n\mid ۹k+۷ \quad \times(-۷)$ $n\mid ۷k+۶ \quad \times ۹$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n\mid -۶۳k-۴۹+۶۳k+۵۴$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n\mid ۵$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{n\in N}$ $n=۱$ یا ۵ (۰/۲۵) (مثال صفحه ۱۲)	۱
۴	$۷^۲=۴۹\overset{۱۵}{\equiv}۴$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۷^۴\overset{۱۵}{\equiv}۱۶\overset{۱۵}{\equiv}۱$ (۰/۵) $\Rightarrow ۷^{۲۸}\overset{۱۵}{\equiv}۱$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\times ۷^۲\overset{۱۵}{\equiv}۴\ (۰/۲۵)}$ $۷^{۳۰}\overset{۱۵}{\equiv}۴$ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۸ و ۹ صفحه ۲۹)	۱/۵
۵	$x=۱۱k+۷$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x\overset{۱۱}{\equiv}۷$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{(۵,۱۱)=۱\ (۰/۲۵)}$ $۵x\overset{۱۱}{\equiv}۳۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲\overset{۱۱}{\equiv}۳۵$ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۱۴ صفحه ۳۰)	۱/۲۵
۶	**الف) دو برابر (۰/۲۵)** (نتیجه ابتدای صفحه ۴۰) **ب)** k **(۰/۲۵)** (تعریف گراف منتظم صفحه ۳۵) **پ) مینیمم (۰/۲۵)** (تعریف صفحه ۴۴) **ت) مینیمال (۰/۲۵)** (تعریف صفحه ۴۶)	۱
۷	**الف)** $N_G[a]=\{a,b,e,d\}$ (۰/۵) (مشابه مثال صفحه ۳۶) **ب) دور به طول ۴** a,b,e,d,a (۰/۲۵) (تعریف دور صفحه ۳۸) (در قسمت ب اگر دور را به صورت a,d,e,b,a نوشت، نمره داده شود.) **پ)مسیر به طول ۳،** a,e,b,c (۰/۲۵) **و مسیر به طول ۴،** a,d,e,b,c (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه ۳۸)	۱/۲۵
۸	$\deg_G(v)+\deg_{\bar{G}}(v)=p-۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۹+۱۲=p-۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p=۲۲$ (۰/۲۵) (مسأله ۱ صفحه ۳۸)	۰/۷۵
۹	**الف) گراف روبه‌رو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گریکتا** $\{a,b\}$ **است. (۰/۲۵)** رسم گراف(۰/۲۵)  (تمرین ۹ صفحه ۵۳) **ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه ۲ است که عبارتند از:** $\{a,d\},\{f,c\},\{e,b\}$ **. (۰/۲۵)** (ذکر یک مجموعه کافی است.) **رسم گراف (۰/۲۵)** 	۱
۱۰	**برای گراف مورد سوال داریم** $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \le \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil = ۳ \le \gamma(G)$ **(۰/۵). از طرفی مجموعه** $\{g,h,d\}$ **یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است(۰/۲۵). لذا** $\gamma(G)\le ۳$ **(۰/۲۵). بنابراین** $\gamma(G)=۳$ **. (۰/۲۵)** (قسمت دوم کار در کلاس صفحه ۵۰)	۱/۲۵
۱۱	$\frac{۷!}{۲!\times ۳!}$ (۰/۵) $=۴۲۰$ (۰/۲۵) (مشابه مثال پایین صفحه ۵۸)	۰/۷۵
۱۲	(قسمت پ تمرین ۸ صفحه ۷۱) $x_۱+\cdots+x_۵=۱۱$, $x_۲\ge ۲$, $x_۵\ge ۴$ (۰/۲۵) $x_۱+y_۲+۲+x_۳+x_۴+y_۵+۴=۱۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x_۱+y_۲+x_۳+x_۴+y_۵=۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ **جواب** $=\binom{۵+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۹}{۴}$ (۰/۵)	۱/۲۵
	ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم	

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۲۰دقیقه**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۹/۰۴/۰۸**	
دانش آموزان روزانه سراسرکشور **خرداد ماه سال ۱۳۹۹**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۳	با استفاده از جایگشت $۱\to ۴,۴\to ۳,۳\to ۲,۲\to ۱$ (۰/۵) مربع لاتین به صورت مقابل داریم. (مشابه تمرین ۱۲ صفحه ۷۲) (۰/۵) (برای جایگشت‌های دیگر نیز بارم مناسب در نظر بگیرید.)	۱
۱۴	(الف) (۰/۲۵) متعامدند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود ندارد. (۰/۲۵) (ب) (۰/۲۵) متعامد نیستند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود دارد. (۰/۲۵) (مثال صفحه ۶۵)	۱
	پاسخ سوالات اختیاری	
۱۵	$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge ۲ \Leftrightarrow \frac{x^۲+y^۲}{xy}\ge ۲$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow x^۲+y^۲\ge ۲xy$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow (x-y)^۲\ge ۰$ (۰/۲۵) چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسأله درست است. (۰/۲۵) (قسمت الف تمرین ۱ صفحه ۸)	۱
۱۶	الف) $۳\times ۶=۲q \Rightarrow q=۹$ (۰/۵) (تعریف گراف k- منتظم صفحه ۳۵) ب) رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است. (۰/۵)	۱
۱۷	فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v\in V(G)}\deg(v)=\sum_{v\in A}\deg(v)+\sum_{v\in B}\deg(v)$ (۰/۲۵) .از طرفی $\sum_{v\in V(G)}\deg(v)=۲q$ و $\sum_{v\in B}\deg(v)=۲k$ زوج‌اند.(۰/۲۵) لذا $\sum_{v\in A}\deg(v)=۲q-۲k$ باید زوج باشد.(۰/۲۵) می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد. (۰/۲۵) (صفحه ۴۰)	۱
۱۸	الف) $۳!\times ۴!$ (۰/۵) ب) $۴!\times ۴!$ (۰/۵) (مشابه مثال صفحه ۵۷)	۱
۱۹	تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی (۰/۲۵) ، یعنی: $(۸)_۴=\frac{۸!}{۴!}$ (۰/۵) $=۱۶۸۰$ (۰/۲۵). (مثال پایین صفحه ۷۸)	۱
۲۰	(مشابه کار درکلاس صفحه ۷۶) $A=\{n\in N \mid ۱\le n\le ۱۰۰,\ n=۶k\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]=۱۶$ (۰/۲۵) $B=\{n\in N \mid ۱\le n\le ۱۰۰,\ n=۱۰k\} \Rightarrow |B|=\left[\frac{۱۰۰}{۱۰}\right]=۱۰$ (۰/۲۵) $A\cap B=\{n \mid ۱\le n\le ۱۰۰\ ,n=۳۰k\} \Rightarrow |A\cap B|=\left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right]=۳$ (۰/۲۵) $\Rightarrow |A\cup B|=۱۶+۱۰-۳=۲۳$ (۰/۲۵)	۱

ادامه پاسخ‌ها در صفحه سوم

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۲۰دقیقه**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۹/۰۴/۰۸**	
دانش آموزان روزانه سراسرکشور **خرداد ماه سال ۱۳۹۹**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۲۱	در این مسأله $k=۶ \Rightarrow k+۱=۷$ (۰/۲۵) و تعداد لانه ها ۱۲ است(۰/۲۵). پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می‌بایست $k\,n+۱=۶\times۱۲+۱=۷۳$ باشد. (۰/۵) (مثال صفحه ۸۲)	۱
۲۲	برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص کننده الیاف است. (سوال ۱۴ صفحه ۷۲)	۱
	جمع نمره	۲۰

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۱	۳	۲
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۲	۱	۳

(۰/۲۵) $= A$ (۰/۵) $=$

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۲	۱	۳
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۱	۳	۲

(۰/۲۵) $= B \Rightarrow$

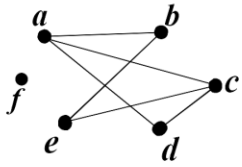
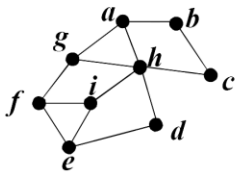
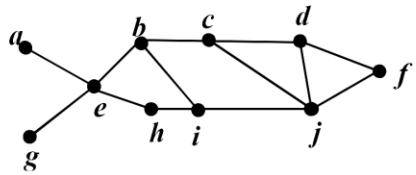
	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

عدد سمت چپ هر درآیه نشان‌دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص‌کننده نوع الیاف است.

«همکاران گرامی لطفا برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **ریاضیات گسسته**	***ساعت شروع:*** ۸ صبح	نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی فیزیک**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	تعداد صفحه: **۲**	تاریخ امتحان : **۱۴۰۰/۰۳/۸**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در**نوبت خرداد** ماه سال **۱۴۰۰**			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف)حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است. ب)هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^۲+y^۲=(x+y)^۲$ برقرار باشد.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a\mid b$ آن گاه عدد ..... شمارنده عدد ..... است. ب) m عددی صحیح است. حاصل $(۲m,۶m^۳)$ برابر با ..... است.	۰/۷۵
۳	به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن ها است.	۱/۲۵
۴	ثابت کنید اگر $p\geq ۵$ عددی اول باشد، آن گاه به یکی ازدو صورت $p=۴k+۱$ یا $p=۴k+۳$ نوشته می شود.	۰/۷۵
۵	باقی‌مانده تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۲۵}\times ۹+۱۱$ را بر ۷ بیابید.	۰/۷۵
۶	معادله $x\overset{۴}{\equiv}۱ ۷$ را حل کنید.	۱
۷	گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید. الف) $N_G(c)$ رابا اعضا مشخص کنید. ب) بزرگ‌ترین درجه در گراف $\overline{G}$ مربوط به کدام رأس و چند است؟ پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید. ت) آیا گراف G همبند است؟ 	۲
۸	تفاوت بین مجموعه احاطه‌گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.	۱
۹	در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد. 	۱
۱۰	عدد احاطه‌گری گراف شکل زیر را با ارائه راه حل، تعیین کنید. 	۱/۵
۱۱	الف) یک گراف ۶ رأسی که $\gamma-$مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید. ب) یک گراف ۶ رأسی که $\gamma-$مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید.	۱/۵
۱۲	کوتاه پاسخ دهید. می‌خواهیم با حروف «ب» و «ج» و ارقام ۱،۲،۴،۵،۶،۸ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است: الف) تعداد رمزهایی که هر یک از آن‌ها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد. ب) تعداد رمزهایی که در آن‌ها حروف کنار هم باشند.	۱

« بقیه سوالات در صفحه دوم»

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **ریاضیات گسسته**	ساعت شروع: ۸ صبح	نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی فیزیک**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	تعداد صفحه: **۲**	تاریخ امتحان : **۱۴۰۰/۰۳/۸**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در**نوبت خرداد** ماه سال **۱۴۰۰**			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
۱۳	به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم : از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.	۲
۱۴	مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را B نام‌گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید. $A=\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline \end{array}$	۱/۵
۱۵	در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفرفوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟	۱/۷۵
۱۶	الف) به چند طریق می توان۴ کلاه متفاوت را بین۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ ب) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟	۱
۱۷	۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟	۰/۷۵
	" موفق باشید " جمع نمره	۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۲۰دقیقه**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۴۰۰/۰۳/۸**	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور **خرداد ماه سال ۱۴۰۰**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	**الف) درست** (۰/۲۵) (سوال ۱۵ صفحه ۱۷) **ب) نادرست** (۰/۲۵) (سوال۴ صفحه ۸)	۰/۵
۲	**الف)عدد a شمارنده عدد b است.** (۰/۵) (مفهوم عاد کردن صفحه ۹) **ب)** $2m$ (۰/۲۵) (ب سوال ۱۶ صفحه۱۷)	۰/۷۵
۳	$xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow 2xy \le x^2+y^2$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \ge 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (۰/۲۵) **گزاره همواره درست** (۰/۲۵)(مشابه الف سوال ۱ صفحه۸)	۱/۲۵
۴	$p=4k$ (۱) , $p=4k+1$ (۲) , $p=4k+2=2(2k+1)$ (۳) , $p=4k+3$ (۴) (۰/۲۵) **در حالت (۱) و (۳) ، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد.** (۰/۲۵) **بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴)خواهند بود.** (۰/۲۵) (مشابه سوال۲ صفحه ۱۵)	۰/۷۵
۵	$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \underbrace{(۱۰۰۰)^{۲۵}\times ۹+۱۱}_{(۰/۲۵)} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۲۵}\times ۹+۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow r=۲$ (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه ۲۱)	۰/۷۵
۶	$7x \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow 7x \overset{۴}{\equiv} ۴\times ۵+۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 7x \overset{۴}{\equiv} ۲۱$ (۰/۲۵) $\overset{(7,4)=1}{\Rightarrow} x \overset{۴}{\equiv} ۳$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=4k+۳$ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۱۴ صفحه ۳۰)	۱
۷	**الف)** $N_G(c)=\{a,e,d\}$ (۰/۷۵) (مشابه مثال صفحه ۳۶) **ب) رأس** f **و** ۵ (۰/۵) (مکمل گراف صفحه ۳۷) **پ)** $abecda$ (۰/۵) (تعریف دور صفحه ۳۸) **ت) خیر** (۰/۲۵) (تعریف گراف همبند صفحه ۳۹)	۲
۸	**مجموعه احاطه‌گر مینیمم مجموعه احاطه‌گری است که کمترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعه احاطه‌گر مینیمال مجموعه احاطه‌گری است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نیست و می تواند از مجموعه احاطه‌گر مینیمم بیشتر عضو داشته باشد.** هر مورد (۰/۲۵) (تعاریف صفحات۴۴ و ۴۶)	۱
۹	(۱) $D=\{a,c,i,d\}$ (در صورتی که مجموعه های مشابه که ویژگی مسأله را داشت، نوشتند، نمره داده شود.) (سوال۴ صفحه ۴۶)	۱
۱۰	**طبق قضیه داریم** $2 \le \gamma(G)$. (۰/۵) $\left\lceil \frac{۱۰}{۴+۱} \right\rceil = 2$ **از طرفی مجموعه** $D=\{e,j\}$ **یک مجموعه احاطه‌گر است.** (۰/۵) **لذا** $\gamma(G) \le 2$ (۰/۲۵) **. بنابراین** $\gamma(G)=2$. (۰/۲۵)(ب سوال ۳ صفحه ۵۲)	۱/۵
۱۱	**الف)** (۰/۷۵) **ب)** (۰/۷۵) (سوال ۸ صفحه ۵۳)	۱/۵
۱۲	**الف)** $۲!\times ۶!$ (۰/۵) **ب)** $۷!\times ۲!$ (۰/۵) (مشابه مثال صفحه ۵۶)	۱
۱۳	$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+x_۶=۱۲$, $x_۱ \ge ۱$, $x_۴ > ۳$, $x_۶=۱$ (۰/۵) $y_۱=x_۱-۱$, $y_۱ \ge ۰$ (۰/۲۵) , $y_۴=x_۴-۴$, $y_۴ \ge ۰$ (۰/۲۵) $y_۱+۱+x_۲+x_۳+y_۴+۴+x_۵+۱=۱۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳+y_۴+x_۵=۶$ (۰/۲۵) $\Rightarrow c=\binom{۱۰}{۴}$ (۰/۵) (مشابه سوال۸صفحه ۷۱)	۲

ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۲۰دقیقه**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۴۰۰/۰۳/۸**	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور **خرداد ماه سال ۱۴۰۰**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۴	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱&۲&۳\\\hline ۲&۳&۱\\\hline ۳&۱&۲\\\hline\end{array} \Rightarrow B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱&۳&۲\\\hline ۲&۱&۳\\\hline ۳&۲&۱\\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲۱&۳۳&۱۲\\\hline ۱۲&۲۱&۳۳\\\hline ۳۳&۱۲&۲۱\\\hline\end{array}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۵) متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر عدد دو رقمی تکراری داریم. (۰/۵) (مشابه سوال ۱۳ صفحه ۷۲)	۱/۵
۱۵	$\|F\|=۱۵\ ,\ \|V\|=۱۱\ ,\ \|B\|=۹\ ,\ \|F\cap V\|=۵\ ,\ \|B\cap V\|=۶\ ,\ \|F\cap B\|=۳$ $\|F\cap B\cap V\|=۳$ $=\|F\|-\|F\cap V\|-\|F\cap B\|+\|F\cap B\cap V\|=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$ (۰/۵) فقط فوتبال بازی کنند. $=\|V\|-\|F\cap V\|-\|V\cap B\|+\|F\cap B\cap V\|=۱۱-۵-۶+۳=۳$ (۰/۵) فقط والیبال بازی کنند. $=\|B\|-\|F\cap B\|-\|V\cap B\|+\|F\cap B\cap V\|=۹-۳-۶+۳=۳$ (۰/۵) فقط بسکتبال بازی کنند. $\Rightarrow$ ج $=۱۰+۳+۳=۱۶$ (۰/۲۵) (ت سوال ۳ صفحه ۸۳)	۱/۷۵
۱۶	**الف)** $۳^۴-(۳\times ۲^۴-۳)=۳۶$ (۰/۵) (مثال صفحه ۷۷) ب) $\frac{۸!}{۴!}=۱۶۸۰$ (۰/۵) (مثال صفحه ۷۸)	۱
۱۷	$k+۱=۵ \Rightarrow k=۴$ (۰/۲۵) , $kn+۱=۵۴ \Rightarrow ۴n=۵۳$ (۰/۲۵) , $n=\left[\frac{۵۳}{۴}\right]=۱۳$ (۰/۲۵) (سوال ۲ کار در کلاس صفحه ۸۲)	۰/۷۵
	جمع نمره	۲۰

«همکاران گرامی لطفا برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»

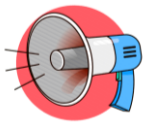
امتحان نهایـــی

هندسه ۳

فصل اول

ماتریس و کاربردها

بارم: حدود ۴ نمره



تعریفی‌ها– نقطه‌چین– درست، غلط

ماتریس: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم.

ماتریس مربعی: اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبه n $(n\times n)$ می‌نامیم.

ماتریس سطری: اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم.

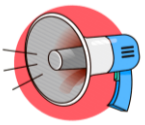
ماتریس ستونی: اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس ستونی می‌نامیم.

ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند.)

ماتریس اسکالر: اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم.

قرینه یک ماتریس: اگر A ماتریسی دلخواه باشد قرینه ماتریس A را با نماد $(-A)$ نمایش داده و از ضرب (-1) در ماتریس A بدست می‌آید. واضح است که $A+(-A)=\bar{0}$

وارون ماتریس: برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون B به‌طوریکه $AB=BA=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.



درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱- جمع ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است. درست ☑ نادرست ☐

۲- اگر $A\times B=\bar{o}$ باشد آنگاه $A=\bar{o}$ یا $B=\bar{o}$. درست ☐ نادرست ☑

۳- در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد. درست ☑ نادرست ☐

۴- ضرب ماتریس خاصیت شرکت‌پذیری دارد. یعنی: $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$. درست ☑ نادرست ☐

۵- درایه‌های روی قطر اصلی هر ماتریس مربعی و ترانهاده آن برابرند. درست ☑ نادرست ☐

۶- اگر $A\times B=A\times C$ باشد آنگاه $B=C$. درست ☐ نادرست ☑

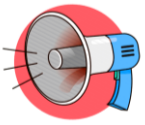
۷- برای هر دو ماتریس مربعی ۲×۲ یا ۳×۳ مانند A و B داریم $|AB|=|A|\times|B|$ درست ☑ نادرست ☐

۸- دترمینان ماتریس قطری برابر است با ضرب اعداد قطر اصلی. درست ☑ نادرست ☐

۹- تنها دترمینان ماتریس مربعی صفر، صفر می‌باشد. درست ☐ نادرست ☑

۱۰- اگر برای ماتریس مربعی A و ماتریسی چون B داشته باشیم: $A\times B=B\times A=I$ آنگاه B وارون A است. درست ☑ نادرست ☐

۱۱- وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است. درست ☑ نادرست ☐



جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱- ماتریس قطری ماتریسی است که ..... به جز درایه‌های روی قطر اصلی، بقیه درایه‌ها صفر هستند.

۲- ماتریس اسکالر، ماتریسی است که ..... هم قطری است و هم همه درایه‌های روی قطر اصلی برابرند.

۳- برای سه ماتریس A و B و C داریم: $A\times(B\times C)=\overset{=}{\ldots\ldots}(A\times B)\times C$

۴- حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری، همواره ماتریسی .....قطری.....است.

۵- دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ برابر است با: .....$ad-bc$.....

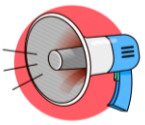
۶- برای ماتریس مربعی $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، داریم: $A^{-1}=$ .....$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.....

۷- برای دو ماتریس ۲×۲ وارون‌پذیر A و B داریم:

$(A^{-1})^{-1}=$ .....A..... ، $(kA)^{-1}=$ .....$\frac{1}{k}\times A^{-1}$..... ، $(A\times B)^{-1}=$ .....$B^{-1}\times A^{-1}$.....

۸- شرط لازم و کافی برای اینکه A^{-1} وجود داشته باشد آن است که .....$|A|\neq 0$.....باشد.

۹- برای ماتریس A که ۳×۳ است داریم: $|kA|=$ .....$k^{3}\times|A|$.....



مسائل و تمرینات

۱- اگر $A=\begin{bmatrix}2x-y & 5\\ z & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3 & 2x+y\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۲- دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$، ولی $AB=\overline{O}$ است.

۳- اگر $A=\begin{bmatrix}4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

۴- اگر $\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$، نشان دهید $A^2-4A-5I_3=O$

۵- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$، ماتریس A^{100} را محاسبه کنید.

۶- اگر $A=\begin{bmatrix}4|A| & 3\\ 1 & |A|\end{bmatrix}$ در این صورت دترمینان A را بیابید.

۷- اگر $\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ 2 & -1 & 1\\ x & 1 & 2\end{vmatrix}=A+x\begin{vmatrix}2 & 7\\ -1 & 1\end{vmatrix}$ باشد، مقدار A را بدست آورید.

۸- دترمینان ماتریس مقابل را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 11\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

۹- دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 5 & -2\end{bmatrix}$ را یک بار به روش ساروس و یک بار بر حسب ستون اول محاسبه کنید.

۱۰- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ و و $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$، حاصل عبارت $5A^{-1}+B^{-1}$ را بدست آورید.

۱۱- اگر A و B دو ماتریس 2×2، $|A|=2$ و $|B|=4$، آنگاه $|A^{-1}B^2|$ چقدر است؟

۱۲- الف) ماتریس ۳×۳ چون A بیابید که $|A|=۵$

ب) ماتریس غیر قطری ۲×۲ چون A بیابید که $|A|=۵$

پ) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ را به روش ساروس بیابید.

۱۳- دستگاه $\begin{cases}۳x-۴y=۱\\ -x+۲y=۱\end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۱۴- به ازای کدام مقدار a دستگاه $\begin{cases}۵x-y=-a-ay\\ ۵ax+۶y=۵\end{cases}$ جواب ندارد.

۱۵- به ازای کدام مقدار a دستگاه $\begin{cases}x-ay=۲\\ (a+۱)x-۲y=۳\end{cases}$ دارای جواب منحصر به فرد است؟

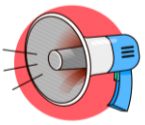
۱۶- ماتریس مربعی A در تساوی $۲A^{۲}-A+I=۰$ صدق می‌کند. نشان دهید A وارون‌پذیر است و وارون A را حساب کنید.

۱۷- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$، از رابطه‌ی $AX=B$ ماتریس X را بیابید.

۱۸- اگر $|A_{۳\times۳}|=۲$، حاصل $|A|\,||A^{-۱}|$ را بیابید.

۱۹- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۵ & ۱\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix}۱۳\\ ۷\end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را به روش ماتریس وارون بیابید.

۲۰- اگر $A_{۳\times۳}$ باشد و $|A|=۲$، آنگاه دترمینان ماتریس $(۲A^{۲})^{-۱}$ چقدر است؟



اثباتی‌ها

۱- اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$، ثابت کنید:

الف) $(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$

ب) $(A-B)(A+B)=A^{۲}-B^{۲}$

۲- برای هر ماتریس ۲×۲ مانند A ثابت کنید: $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$

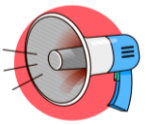
۳- اگر A ماتریسی مربعی ۳×۳ و $k\in\mathbb{R}$، نشان دهید: $|kA|=k^{۳}|A|$

۴- اگر برای ماتریس مربعی A، ماتریس مربعی B موجود باشد که $AB=I$ ثابت کنید A وارون‌پذیر است و $BA=I$.

۵- ثابت کنید $|AB|=|BA|$.

۶- اگر A ماتریسی مربعی وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید: $|A|\neq ۰$

۷- ثابت کنید وارون ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.



پاسخنامه مسائل و تمرینات

پاسخ ۱:

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix}2x-y & 5\\ z & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2x+y\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

حال از برابری ماتریس‌ها داریم:

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-y=3 & (0/25)\\ 2x+y=5\Rightarrow x=2,\ y=1 & (0/25)\\ z=-2 & (0/25)\end{cases}\xrightarrow{(0/25)} x+y+z=2+1-2=1$$

پاسخ ۲:

اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (0/5) و $B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (0/5) باشد، داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\bar{O}\ (0/5)$$

پاسخ ۳:

$$A\times B=\begin{bmatrix}4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3a & -8+2a\\ b-3 & -2b-2\end{bmatrix}\ (1)$$

حال ماتریس قطری ماتریسی است که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر است،پس

$$\begin{cases}-8+2a=0\Rightarrow a=4 & (0/25)\ (0/25)\\ b-3=0\Rightarrow b=3 & (0/25)\ (0/25)\end{cases}$$

پاسخ ٤:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}\ (0/5)$$

$$4A=\begin{bmatrix}4 & 8 & 8\\ 8 & 4 & 8\\ 8 & 8 & 4\end{bmatrix}\ (0/25)\qquad -5I_3=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}\ (0/25)$$

$$\Rightarrow A^2-4A-5I_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=O\ (0/25)$$

پاسخ ۵:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\ (0/25)$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\ (0/25)$$

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}=-4I\ (0/25)$$

$$A^{100}=\left(A^4\right)^{25}=(-4I)^{25}=-4^{25}I=\begin{bmatrix}-4^{25} & 0\\ 0 & -4^{25}\end{bmatrix}\ (0/25)$$

پاسخ ٦:

$$A=\begin{bmatrix}4|A| & 3\\ 1 & |A|\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=4|A|\times|A|-1\times3\ (0/25)$$

$$\Rightarrow|A|=4|A|^2-3\Rightarrow4|A|^2-|A|-3=0$$

$$\Rightarrow|A|=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{8}=\frac{1\pm7}{8}=1,-\frac{6}{8}\ (0/5)$$

(0/25)

پاسخ ۷:

برحسب ستون اول دترمینان را بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ 2 & -1 & 1\\ x & 1 & 2\end{vmatrix}\ (0/5)$$

$$=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & 2\end{vmatrix}+x\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 7\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=1(-2-1)-2(4-7)+x\underset{(0/5)}{\underset{(0/25)}{\underset{(0/25)}{\begin{vmatrix}2 & 7\\ -1 & 1\end{vmatrix}}}}=3+x\underset{(0/25)}{\underset{(0/25)}{\underset{(0/25)}{\begin{vmatrix}2 & 7\\ -1 & 1\end{vmatrix}}}}$$

$$\Rightarrow A=3\ (0/25)$$

پاسخ ۸:

$$A=\begin{bmatrix}4-3 & 4+2\\ -(11-10) & 10+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & 13\end{bmatrix}\ (1)$$

$$|A|=(1)(13)-(-1)(6)=13+6=19\ (0/25)$$

(0/25)

پاسخ ۹:

ساروس:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (+2+60+70)-(-28+15-20) = 132-(-33) = 132+33 = 165$$

بسط ستون اول:

$$|A| = 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2-15)-2(-10-35)+4(15+7) = -13+90+88 = 165$$

پاسخ ۱۰:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3-(-2) = 5 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 5A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 4-3 = 1 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5A^{-1}+B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{درایه‌ها}}{\overset{\text{جمع نظیر به نظیر}}{=}} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۱۱:

می‌دانیم دترمینان روی ماتریس‌های مربعی باز می‌شود:

$$|A^{-1}B^2| = |A^{-1}||B^2| = \frac{1}{|A|}\times|B|^2 = \frac{1}{2}\times 4^2 = \frac{16}{2} = 8$$

پاسخ ۱۲:

الف) کافی است A را ماتریسی قطری در نظر گرفته که حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن (دترمینان) برابر ۵ باشد:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1\times 1\times 5 = 5$$

ب) $$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 6-1 = 5$$

پ) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (5-12+0)-(-15+0+8) = -7-(-7) = -7+7 = 0$$

پاسخ ۱۳:

با توجه به فرض $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (ماتریس ضرایب) و $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ماتریس مقادیر معلوم) و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (ماتریس مجهولات)داریم:

$$X = A^{-1}B \overset{(0/25)}{=} \frac{1}{6-(-1)(-4)}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (0/5)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x=3,\ y=2 \quad (0/25)$$

$$(0/5)$$

پاسخ ۱۴:

باید دو خط موازی باشند، پس داریم:

$$\begin{cases} 5x+(a-1)y=-a \\ 5ax+6y=5 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{5a} = \frac{a-1}{6} \neq \frac{-a}{5} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow a^2-a=6 \Rightarrow a^2-a-6=0 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow (a-3)(a+2)=0 \Rightarrow a=3,\ a=-2 \quad (0/5)$$

پاسخ ۱۵:

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -a \\ (a+1) & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow -2+a^2+a \neq 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) \neq 0 \Rightarrow a \neq -2,\ a \neq 1$$

$$(0/25) \quad (0/25) \quad (0/25) \quad (0/25)$$

پاسخ ۱۶:

$$2A^2-A+I=0 \Rightarrow A-2A^2=I \Rightarrow AI-2AA=I \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow A(I-2A)=I \Rightarrow |A(I-2A)| = |I| \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow |A||I-2A| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \quad (0/5)$$

A وارون‌پذیر است.

$$A(I-2A)=I \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = I-2A \quad (0/25)$$

پاسخ ۱۷:

طبق تعریف فرم ماتریسی دستگاه: $X = A^{-1}B$

$$|A| = 1-0 = 1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۱۸:

طبق دترمینان وارون:

$$|A| = 2 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{2}$$

برای محاسبهٔ $|\frac{1}{2}A|$، چون A از مرتبهٔ 3×3 است پس $\frac{1}{2}$ باید به توان ۳ برسد و از دترمینان خارج شود:

$$(\frac{1}{2})^3|A| = \frac{1}{8}\times 2 = \frac{1}{4}$$

پاسخ ۱۹:

فرم ماتریسی یک دستگاه به صورت $AX = B$ است که $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۳ \\ ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۳y = ۱۳ \\ ۵x + y = ۷ \end{cases}$$

برای حل دستگاه با استفاده از ماتریس وارون، $X = A^{-۱}B$. برای محاسبهٔ $A^{-۱}$ ابتدا دترمینان A را می‌یابیم:

$$|A| = ۲ - (-۱۵) = ۱۷$$

$$\Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۷} & \frac{۳}{۱۷} \\ -\frac{۵}{۱۷} & \frac{۲}{۱۷} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-۱}B = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۷} & \frac{۳}{۱۷} \\ -\frac{۵}{۱۷} & \frac{۲}{۱۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۳ \\ ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۳}{۱۷} + \frac{۲۱}{۱۷} \\ -\frac{۶۵}{۱۷} + \frac{۱۴}{۱۷} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳۴}{۱۷} \\ -\frac{۵۱}{۱۷} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = -۳ \end{cases}$$

پاسخ ۲۰:

با توجه به دترمینان وارون:

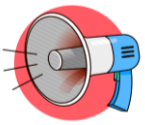
$$|(۲A^۲)^{-۱}| = \frac{۱}{|۲A^۲|}$$

اما ضریب ۲، وقتی از دترمینان خارج می‌شود باید به توان مرتبهٔ ماتریس یعنی ۳ برسد.

$$|۲A^۲| = ۲^۳ |A^۲| = ۸|A^۲|$$

توان ۲ هم به راحتی از دترمینان خارج می‌شود، در نتیجه: $۸|A^۲| = ۸|A|^۲$

$$\Rightarrow |(۲A^۲)^{-۱}| = \frac{۱}{|۲A^۲|} = \frac{۱}{۲^۳|A|^۲} = \frac{۱}{۸|A|^۲} = \frac{۱}{۸\times(۲)^۲} = \frac{۱}{۳۲}$$



پاسخنامه اثباتی‌ها

اثبات ۱:

الف) $(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲ \xrightarrow{A\times B=B\times A}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$A^۲+AB+AB+B^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ (۰/۲۵)

ب) $(A-B)\times(A+B)=A^۲-BA+AB-B^۲ \xrightarrow{AB=BA}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$A^۲-AB+AB-B^۲=A^۲-B^۲$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

اثبات ۲:

۳- $A^{-۱}$، وارون ماتریس A است، پس $A^{-۱}A=I$.

اکنون از طرفین دترمینان می‌گیریم: $|A^{-۱}A|=|I|$

دترمینان روی ضرب ماتریس‌های مربعی باز می‌شود و $|I|=۱$، پس:

$$|A^{-۱}||A|=۱ \Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$$

اثبات ۳:

۴- ابتدا نشان می‌دهیم $|kI|=k^۳$:

$$kI=\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix}$$

می‌دانیم دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر.

$|kI|=(k)(k)(k)=k^۳$

اکنون داریم: $|kA|=|k(IA)|=|(kI)A|=|kI||A|=k^۳|A|$

اثبات ۴:

$AB=I \Rightarrow |AB|=|I| \Rightarrow |A||B|=۱$

$\Rightarrow |A|\neq ۰$ (۰/۲۵) A وارون‌پذیر است.

$B=IB=(A^{-۱}A)B=A^{-۱}(AB)=A^{-۱}I=A^{-۱}$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow BA=A^{-۱}A=I$ (۰/۲۵)

اثبات ۵:

با توجه به آن‌که $|AB|=|A||B|$ داریم: (۰/۲۵)

$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

اثبات ۶:

اگر A وارون پذیر باشد، یعنی داریم:

$AA^{-۱}=I \Rightarrow |AA^{-۱}|=|I| \Rightarrow |A||A^{-۱}|=۱ \Rightarrow |A|\neq ۰$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

اثبات ۷:

فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند، باید ثابت کنیم $B=C$ است.

طبق فرض داریم: $\begin{cases} AB=BA=I \\ AC=CA=I \end{cases}$ (۰/۵)

$B=IB=(CA)B=C(AB)=C(I)=C$ (۰/۵)

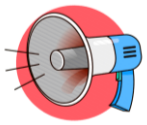
امتحان نهایـــی

هندسه ۳

فصل دوم

آشنایی با مقاطع مخروطی

بارم: حدود ۸ نمره



تعریفی‌ها– نقطه‌چین– درست، غلط

رویه مخروطی: فرض کنید دو خط d و L در نقطه A متقاطع غیر عمود باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط L را یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط L را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

مکان هندسی : مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

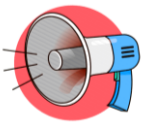
مقاطع مخروطی: اگر صفحه‌ای سطح مخروطی را قطع کند فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی را مقطع مخروطی گویند.

دایره: نقاطی در صفحه که فاصله آنها از نقطه ثابت O برابر مقدار ثابت R باشد، دایره‌ای است که مرکز آن برابر O و شعاع آن برابر R است.

بیضی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله آنها از دو نقطه ثابت برابر مقدار ثابت باشد را بیضی می‌گوییم. دو نقطه ثابت کانون و مقدار ثابت را قطر بزرگ بیضی $(2a)$ گوئیم.

سهمی : مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع در آن صفحه به یک فاصله باشند.

خاصیت بازتابندگی سهمی: اگر پرتو نوری موازی محور کانونی به بدنه یک آینه کروی (که شبیه سهمی است) بتابد انعکاس آن از کانون آینه (کانون سهمی) می‌گذرد و برعکس.



درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱– تنها یک نقطه وجود دارد که از سه نقطه متمایز A و B و C به یک فاصله است. درست ☑ نادرست ☐

۲– هرگاه صفحه‌ای یک سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک می‌تواند هذلولی باشد. درست ☑ نادرست ☐

۳– همواره یک نقطه وجود دارد که از چهار نقطه متمایز در یک صفحه به یک فاصله است. درست ☐ نادرست ☑

۴– تنها یک نقطه درون xoy قرار دارند که از اضلاع زاویه به یک فاصله L باشد. درست ☑ نادرست ☐

۵– معادله دایره‌ای به شعاع r و مرکز $O(\alpha,\beta)$ به‌صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ است. درست ☑ نادرست ☐

۶– معادله دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است عبارت است از $(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=\alpha^2$.
درست ☑ نادرست ☐

۷– دو دایره $x^2+y^2=4$ و $(x-1)^2+y^2=4$ متقاطع‌اند. درست ☑ نادرست ☐

۸– نقطه $A(1,1)$ درون دایره $x^2+y^2=9$ قرار ندارد. درست ☐ نادرست ☑

۹– خط $y=x$ بر دایره $x^2+y^2=2$ مماس است. درست ☐ نادرست ☑

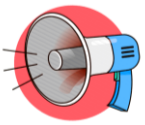
۱۰– اگر $2a$، $2b$ و $2c$ به ترتیب قطرهای بزرگ، کوچک و فاصله کانونی بیضی باشد، داریم: $a=b^2+c^2$.
درست ☑ نادرست ☐

۱۱– اگر خروج از مرکز بیضی برابر با یک باشد بیضی تبدیل به دایره می‌شود. درست ☐ نادرست ☑

۱۲– اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس شود، زاویه MF و MF' با خط d برابرند(F و F' کانون‌ها هستند.)
درست ☑ نادرست ☐

۱۳– در معادله سهمی $y^2=-ax$، کانون $(-a,0)$ و خط هادی $x=a$ می‌باشد. درست ☑ نادرست ☐

۱۴– در سهمی با کانون F و خط هادی d، مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد، روی سهمی است.
درست ☑ نادرست ☐



جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱– مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند ..... خط عمود منصف AB ..... است.

۲– مکان هندسی نقاطی که از اضلاع زاویه xoy به یک فاصله است ..... نیمساز زاویه xoy ..... می‌باشد.

۳– مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله L باشند ..... دو خط موازی با d و به فاصله L از آن هستند. .....

۴– مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله r باشند ..... دایره‌ای به مرکز A و شعاع r می‌باشد. .....

۵– از دوران خط d حول خط L که با آن موازیست، ..... سطح استوانه‌ای ..... به‌وجود می‌آید.

۶– هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، سطح مقطع حاصل ..... هذلولی ..... است.

۷– شرط اینکه رابطه ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادله یک دایره باشد این است که ..... $a^۲+b^۲-۴c>۰$ .....

۸– معادله دایره‌ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس باشد عبارت است از ..... $(x+\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=\alpha^۲$ .....

۹– معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r عبارت است از ..... $x^۲+y^۲=r^۲$ .....

۱۰– شرط آنکه خط $d: ax+by+c=۰$ بر دایره $(a-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ مماس باشد این است که معادله برخورد آن‌ها ..... ریشه مضاعف داشته باشد. .....

۱۱– اگر نقطه A درون دایره $C(O,r)$ باشد، آنگاه ..... $OA<r$ .....

۱۲– اگر رابطه ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$، نمایش یک نقطه باشد، آنگاه مختصات آن نقطه ..... $M\left(-\frac{a}{۲},\frac{-b}{۲}\right)$ ..... است.

۱۳– در بیضی به طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۲a و ۲b و فاصله کانونی ۲c، خروج از مرکز برابر است با ..... $e=\frac{c}{a}$ .....

۱۴– در بیضی با قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۲a و ۲b و فاصله کانونی ۲c، طول وتر کانونی برابر است است با ..... $\frac{۲b^۲}{a}$ .....

۱۵– اگر خروج از مرکز بیضی برابر با ..... صفر ..... باشد، بیضی تبدیل به دایره می‌شود.

۱۶– اگر خروج از مرکز بیضی برابر با ..... یک ..... باشد، بیضی تبدیل به پاره‌خط می‌شود.

۱۷– در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اگر B سر قطر کوچک باشد و F و F' کانون، زاویه FBF' برابر است با ..... ۱۲۰° .....

۱۸– در سهمی $(x-h)^۲=۴a(y-k)$ معادله خط هادی برابر است با ..... $y=-a+k$ .....

۱۹– سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد.

۲۰– بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت یک مقدار ثابت است.

۲۱– در بیضی به طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب $2a$ و $2b$ و فاصله کانونی $2c$، دورترین و نزدیک‌ترین نقاط بیضی از کانون‌ها برابر است با $a-c$ نزدیک‌ترین نقطه $= A'F'$ و $a+c$ دورترین نقطه AF'

۲۲– اگر دو خط موازی d و d'، سهمی را در وترهای AB و $A'B'$ قطع کنند، خط گذرنده بر وسط AB و $A'B'$ با محور تقارن سهمی **موازی است.**

مسائل و تمرینات

۱– نقاط A و B و C و D مفروض هستند. نقاطی در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشند.

۲– نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصله‌ی ۱ واحد و از d به فاصله‌ی ۲ واحد باشد. (تعداد مختلف نقاط را بررسی کنید.)

۳– معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

۴– وضعیت دو دایره‌ی زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$$x^2+y^2-10x-14y+73=0 \qquad x^2+y^2-4x-6y=3$$

۵– معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $O(2,-1)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات برخورد آن را با محورهای به دست آورید.

۶– حدود m را طوری به‌دست آورید که معادله‌ی $x^2+y^2-3x+5y+m=0$ معادله‌ی یک دایره باشد.

۷– معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و بر دایره‌ی $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد.

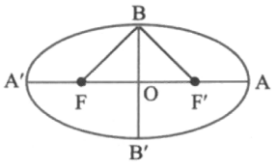
۸– معادله‌ی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که بر خط $3x+4y+10=0$ مماس باشد.

۹– معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x+y=2$ وتری به‌طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

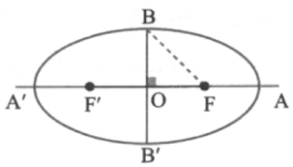
۱۰– شعاع دایره‌ای که از سه نقطه‌ی $(0,0)$، $(1,1)$، $(2,-2)$ می‌گذرد را به‌دست آورید.

۱۱– m و n را طوری به‌دست آورید که نقطه‌ی $S(-1,2)$ رأس سهمی $x=y^2+my+n$ باشد.

۱۲– در بیضی شکل مقابل، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است و نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' چند درجه است؟

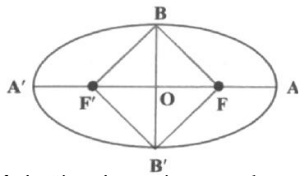


۱۳– در بیضی شکل مقابل فاصله‌ی کانون F تا نزدیک‌ترین رأس برابر ۲ و FB برابر ۵ است. نسبت $\frac{c}{a}$ را پیدا کنید.



۱۴– فاصله‌ی کانون سهمی $x^2-4x=4+8y$ را تا مبدأ مختصات به‌دست آورید.

۱۵– اگر در بیضی شکل مقابل چهارضلعی $BF'B'F'$ مربع باشد نسبت $\frac{c}{a}$ را به‌دست آورید.

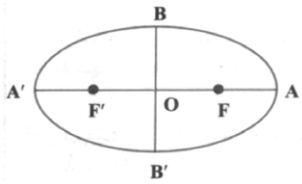


۱۶– سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را به‌دست آورید.

۱۷– معادله سهمی را بنویسید که $F(3,5)$ کانون آن باشد و خط به معادله $x = -3$ خط هادی آن باشد.

۱۸– ابتدا با استفاده از تعریف سهمی معادله‌ی یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن $F(-1,2)$ و خط هادی آن $y = 4$ باشد، سپس مختصات رأس این سهمی را بنویسید.

۱۹– در بیضی شکل مقابل مساحت OAB سه برابر مساحت مثلث FBF' است خروج از مرکز را پیدا کنید.



۲۰– طول قطر کوچک بیضی $4\sqrt{2}$ و فاصله‌ی کانون تا دورترین نقطه‌ی آن ۴ است. قطر بزرگ بیضی را بدست آورید.

۲۱– فاصله‌ی رأس تا خط هادی سهمی $y^2 - y + x = 2$ را پیدا کنید.

۲۲– مختصات رأس، کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله‌ی $x^2 - 4x - 8y - 4 = 0$ را بدست آورید.

۲۳– سهمی $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. هم‌چنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

۲۴– معادله‌ی سهمی را بنویسید که رأس آن $S(-1,2)$ و کانون آن را $F(3,2)$ باشد.

۲۵– فاصله‌ی کانون سهمی به معادله‌ی $2y^2 + 15 = 3(x + 4y)$ از خط هادی سهمی را پیدا کنید.

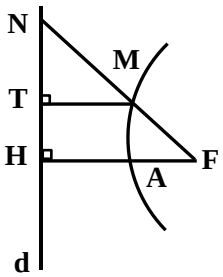
۲۶– وضعیت نقطه $A(1,-2)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ را تعیین کنید.

۲۷– در یک بیضی خروج از مرکز برابر $\frac{4}{5}$ و اندازه قطر بزرگ بیضی برابر ۲۰ است. طول قطر کوچک بیضی و اندازه کانونی آن را بیابید.

۲۸– اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله کانون تا مرکز آن ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

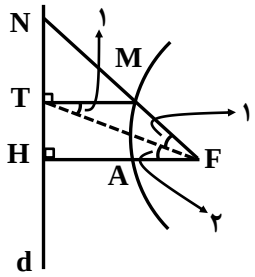
اثباتی‌ها

۱– در شکل مقابل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه‌ی دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا d را در N قطع کند و از نقطه‌ی M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید:



$$\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$

اثبات: اگر از F به T وصل کنیم داریم:

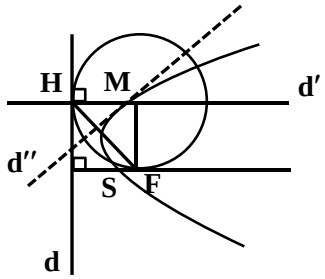


$$\left.\begin{array}{l}MT\parallel FH\\ \text{مورب } TF\end{array}\right\}\Rightarrow T_۱=F_۱$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{روی سهمی } M\Rightarrow MT=MF\Rightarrow T_۱=F_۱\end{array}\right\}\Rightarrow F_۱=F_۲\Rightarrow FT \text{ نیمساز } NFH \text{ است.}$$

$$\overset{\Delta}{NFH}\text{ طبق نیمساز در }\overset{\Delta}{NFH}:\ \frac{FN}{HF}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{HA=FA}\frac{FN}{۲FA}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{\times ۲}\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$

۲– سهمی با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.



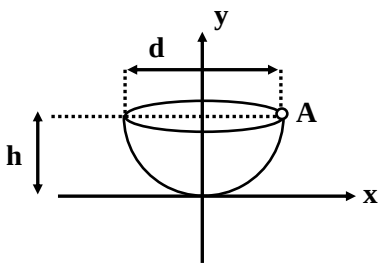
اثبات: مطابق شکل مقابل، سهمی به کانون F و خط هادی d را در نظر می‌گیریم و اثبات را در دو حالت (الف) و (ب) انجام می‌دهیم:

الف): ابتدا دلخواه H را روی d در نظر گرفته و سپس خط d' را در نقطه‌ی H عمود بر d رسم می‌کنیم. حال عمود منصف پاره‌خط HF را رسم کرده (d'') و نقطه‌ی برخورد آن را با d'، M می‌نامیم. از آنجا ه $MH=MF$ است، پس دایره‌ای به مرکز شعاع MH در نقطه‌ی H بر خط d مماس است و از نقطه‌ی F نیز می‌گذرد.

ب): فرض کنیم M نقطه‌ای واقع بر سهمی باشد. بنا به تعریف سهمی داریم: $MH=MF$، پس دایره‌ای به مرکز و شعاع MH بر خط d مماس است و از F نیز می‌گذرد.

«سهمی مکانی هندسی مراکز دوایری است که از یک نقطه‌ی ثابت می‌گذرند و بر خط معلومی که نقطه‌ی ثابت بر آن قرار ندارد مماس باشد. نقطه‌ی ثابت کانون و خط ثابت هادی سهمی است.»

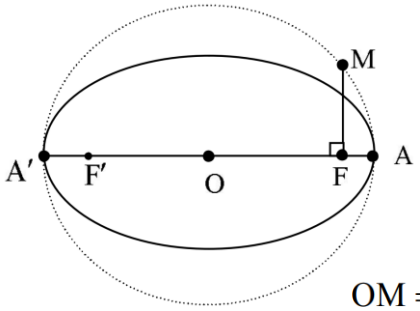
۳– قطر دهانه‌ی یک دیش که از دوران یک سهمی حول محورش حاصل شده است برابر d و عمق دیش برابر h است. ثابت کنید فاصله‌ی کانونی سهمی برابر $a = \frac{d^2}{16h}$ است.



اثبات: با توجه به شکل، رأس سهمی $s(0,0)$ و محور تقارن آن محور yها است. پس معادله‌ی منحنی به صورت $x^2 = 4ay$ است. حال اگر مختصات نقطه‌ی $A(\frac{d}{2},h)$ را در معادله‌ی سهمی قرار دهیم، داریم:

$$x^2 = 4ay \xrightarrow{A(\frac{d}{2},h)} \frac{d^2}{4} = 4ah \rightarrow a = \frac{d^2}{16h}$$

۴– قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

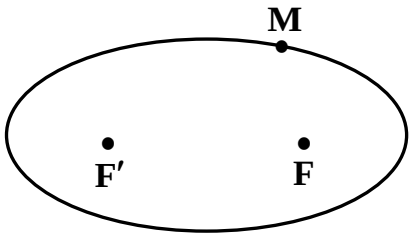


اثبات:

$$OM = OA = a \quad (۰/۲۵)$$

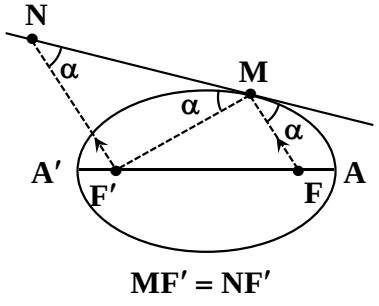
$$\overset{\Delta}{OMF}: OF^2 + MF^2 = OM^2 \xrightarrow{(۰/۲۵)} c^2 + MF^2 = a^2 \xrightarrow{(۰/۲۵)} MF = b \quad (۰/۲۵)$$

۵– در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$



اثبات:

اگر در نقطهٔ M مماسی بر بیضی رسم کنیم و پاره‌خط NF' را به موازات شعاع حامل MF رسم کنیم، در این صورت مجموع طول دو پاره‌خط MF و NF' همواره برابر با اندازهٔ قطر بزرگ بیضی است؛ یعنی:



$$MF + MF' = 2a \xrightarrow{MF' = NF'} \boxed{MF + NF' = 2a}$$

$$MF' = NF'$$

پاسخنامه مسائل و تمرینات

پاسخ ۱:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشند، عمود منصف پاره‌خط AB است که آن را L می‌نامیم. به همین ترتیب مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه D و C به یک فاصله باشند، عمود منصف پاره‌خط CD است که آن را L' می‌نامیم. اگر L و L' متقاطع باشند، مسأله یک جواب دارد، اگر L و L' موازی باشند، مسأله جواب ندارد و اگر بر هم منطبق باشند، مسأله بی‌شمار جواب دارد. (۰/۷۵)

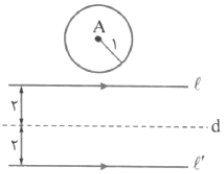
پاسخ ۲:

۴- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۱ واحد باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱ است.

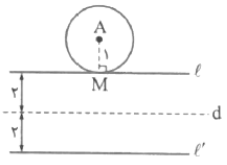
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۲ واحد باشند، دو خط موازی ℓ و ℓ' در طرفین d و به فاصلهٔ ۲ از آن است.

باید وضعیت دایره و دو خط موازی ℓ و ℓ' را بررسی کنیم:

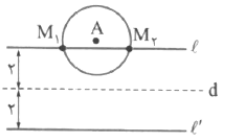
حالت اول: بدون جواب:



حالت دوم: یک جواب: M جواب مسئله است.



حالت سوم: دو جواب (M_1 و M_2)



با توجه به اندازه‌های داده‌شده حالت چهارم رخ نمی‌دهد.

پاسخ ۳:

محل تلاقی دو قطر مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=-1 \Rightarrow O(2,-1) \quad (۰/۵)$$

حال فاصلهٔ مرکز دایره تا مماس شعاع دایره است.

$$r=OH=\frac{|4(2)+3(-1)-6|}{\sqrt{16+9}} \Rightarrow r=\frac{1}{5} \quad (۰/۵)$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=\frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-4x+2y+\frac{124}{25}=0 \quad (۰/۵)$$

پاسخ ٤:

$$x^2-4x+4-4+y^2-6y+9-9=3$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=16 \Rightarrow O(2,3), r=4 \quad (۰/۵)$$

$$x^2-10x+25-25+y^2-14y+49-49+73=0$$

$$(x-5)^2+(y-7)^2=1 \Rightarrow O'(5,7), r'=1 \quad (۰/۵)$$

$$OO'=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=5 \quad (۰/۲۵)$$

(۰/۲۵)

چون $OO'=r+r'$ است. پس دو دایره مماس خارج‌اند. (۰/۲۵)

پاسخ ۵:

می‌دانیم که معادلهٔ استاندارد دایره به شعاع r و مختصات (α,β) به صورت زیر است.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \quad (۰/۲۵)$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-4x+2y+1=0 \quad (۰/۵)$$

$$x=0 \Rightarrow y^2+2y+1=0 \Rightarrow (y+1)^2=0 \Rightarrow y=-1 \quad (۰/۲۵)$$

$$y=0 \Rightarrow x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3} \quad (۰/۲۵)$$

پس نقاط $(2+\sqrt{3},0), (2-\sqrt{3},0)$ محل برخورد با محور xها و نقطهٔ $(0,-1)$ محل برخورد با محور yها است. (۰/۲۵)

پاسخ ٦:

$$x^2+y^2-3x+5y+m=0$$

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{9+25-4m}}{2} \Rightarrow 34-4m>0 \Rightarrow m<\frac{34}{4}$$

(۰/۷۵) (۰/۵) (۰/۵)

پاسخ ۷:

اگر دو دایره مماس داخل باشند. باید $OO' = |r - r'|$ باشد.

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۳$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ - ۴ + y^۲ - ۶y + ۹ - ۹ = ۳$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۶ \Rightarrow O'(۲,۳), r' = ۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$OO' = \sqrt{(۲-۰)^۲ + (۳-۱)^۲} = \sqrt{۴+۴} = ۲\sqrt{۲} \quad (۰/۲۵)$$

$$OO' = |r - r'| \Rightarrow ۲\sqrt{۲} = |r - ۴|$$

$$\Rightarrow r - ۴ = \pm ۲\sqrt{۲} \Rightarrow r = ۲\sqrt{۲} + ۴, \text{یا } r = -۲\sqrt{۲} + ۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = (۲\sqrt{۲} + ۴)^۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲y - ۲۳ - ۱۶\sqrt{۲} = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = (۴ - ۲\sqrt{۲})^۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲y - ۲۳ + ۱۶\sqrt{۲} = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ ۸:

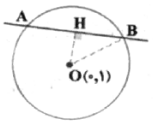
فاصله مرکز تا خط مماس شعاع دایره است.

$$r = OH = \frac{|۳(۰) + ۴(۰) + ۱۰|}{\sqrt{۹+۱۶}} = ۲ \quad (۰/۷۵)$$

$$(x-۰)^۲ + (y-۰)^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۴ \quad (۰/۵)$$

پاسخ ۹:

اگر از مرکز دایره خط عمودی بر آن وتر رسم کنیم آن وتر را نصف می‌کند. $(AH = BH = \sqrt{۲})$ (۰/۲۵)



$$OH = \frac{|۰ + ۱ - ۲|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad (۰/۲۵)$$

$$OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow OB^۲ = \frac{۱}{۲} + ۲ \Rightarrow OB^۲ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow OB = r = \sqrt{\frac{۵}{۲}} \quad (۰/۲۵)$$

$$x^۲ + (y-۱)^۲ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲y - \frac{۳}{۲} = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ ۱۰:

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (۰,۰) \Rightarrow c = ۰ & (۰/۲۵) \\ (۱,۱) \Rightarrow ۱+۱+a+b = ۰ \Rightarrow a+b = -۲ & (۰/۲۵) \\ (۲,-۲) \Rightarrow ۴+۴+۲a-۲b = ۰ \Rightarrow -۲b+۲a = -۸ & \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -۳,\ b = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۳x + y = ۰$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{۱+۹}}{۲} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲} \quad (۰/۵)$$

پاسخ ۱۱:

$$x = y^۲ + my + n \Rightarrow$$

$$y^۲ + my + \frac{m^۲}{۴} = x - n + \frac{m^۲}{۴} \quad (۰/۲۵)$$

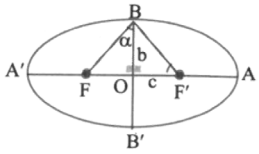
$$\Rightarrow (y + \frac{m}{۲})^۲ = (x - n + \frac{m^۲}{۴}) \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{راس سهمی} = (n - \frac{m^۲}{۴}, -\frac{m}{۲}) = (-۱,۲) \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{m}{۲} = ۲ \Rightarrow m = -۴ & (۰/۵) \\ n - \frac{m^۲}{۴} = -۱ \Rightarrow n - ۴ = -۱ \Rightarrow n = ۳ & (۰/۵) \end{cases}$$

پاسخ ۱۲:

اگر $AA' = ۲a$ باشد، پس $BB' = a$ خواهد بود، پس $b = \frac{a}{۲}$ و $FF' = ۲c$ است؛ چون $BF = BF'$ بنابراین مثلث FBF' متساوی‌الساقین است، و از آنجایی که مجموع فواصل هر نقطهٔ بیضی از کانون‌ها برابر $۲a$ است، پس $BF = a$. خواهیم داشت: (۰/۲۵)



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ = \frac{a^۲}{۴} + c^۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow c^۲ = \frac{۳}{۴}a^۲ \Rightarrow c = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \quad (۰/۲۵)$$

$$\tan\alpha = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} \quad (۰/۲۵)$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{\frac{۱}{۲}a} = \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow F'\hat{B}F = ۲\alpha = ۱۲۰^\circ \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ ۱۳:

$$FA = OA - OF \Rightarrow ۲ = a - c \quad (۰/۵)$$

$$BF^۲ = OF^۲ + OB^۲ = c^۲ + b^۲$$

$$\xrightarrow{c^۲+b^۲=a^۲} BF^۲ = a^۲ \Rightarrow BF = a \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{a = ۵} \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{c = ۳} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ ۱۴:

$$x^۲ - ۴x + ۴ = ۸y + ۸ \Rightarrow (x-۲)^۲ \overset{(۰/۲۵)}{=} ۸(y+۱) \Rightarrow \underset{(۰/۷۵)}{S(۲,-۱), a = ۲}$$

$$\Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{F(۲,۱)} \Rightarrow OF = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵} \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ ۱۵:

می‌دانیم در مربع قطرها با هم برابر هستند یعنی $BB' = FF'$ پس

$$۲b = ۲c \Rightarrow b = c \quad (۰/۲۵)$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} a^۲ = c^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ = ۲c^۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{a = \sqrt{۲}c} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ ۱۶:

کانون سهمی را به دست می‌آوریم:

$$y^۲ = ۴x - ۴ \Rightarrow y^۲ = ۴(x-۱)$$

رأس سهمی $= A(۱,۰)$ (۰/۲۵)

$$a = ۱ \underset{(۰/۲۵)}{,} \text{کانون} = F(۲,۰) \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۰)^۲ = ۹ \quad (۰/۲۵)$$

$$\underset{(۰/۲۵)}{a=۱} \qquad \underset{(۰/۲۵)}{=F(۲,۰)}$$

$$(x-۲)^۲ + y^۲ = ۹ \xrightarrow{y^۲=۴x-۴} (x-۲)^۲ + ۴x - ۴ = ۹$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳ \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \Rightarrow y^۲ = ۸ \Rightarrow y = \pm ۲\sqrt{۲} & (۰/۵) \\ x = -۳ \Rightarrow y^۲ = -۱۶ \text{ غیرممکن} & (۰/۲۵) \end{cases}$$

پس این دو منحنی در دو نقطهٔ $(۳,۲\sqrt{۲})$ و $(۳,-۲\sqrt{۲})$ هم دیگر را قطع می‌کنند. (۰/۲۵)

پاسخ ۱۷:

$$\underset{(۰/۲۵)}{۲a} = \underset{(۰/۲۵)}{۳ - (-۳)} = ۶ \Rightarrow a = ۳$$

$$\Rightarrow \underset{(۰/۵)}{s = (۰,۵)} \Rightarrow \underset{(۰/۵)}{(y-۵)^۲} = ۱۲(x)$$

پاسخ ۱۸:

فاصلهٔ هر نقطه از سهمی تا کانون آن برابر فاصلهٔ آن نقطه تا خط هادی (۰/۲۵)

سهمی است، پس داریم: $F = (-۱,۲) \text{ , } y = ۴ \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-(-۱))^۲ + (y-۲)^۲ = (y-۴)^۲ \quad (۰/۵)$$

$$(x+۱)^۲ = (y-۴)^۲ - (y-۲)^۲ = (y-۴-y+۲)(y-۴+y-۲)$$

$$= -۲(۲y-۶) = -۴(y-۳)$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲ = -۴(y-۳) \Rightarrow \text{رأس}: (-۱,۳)$$

پاسخ ۱۹:

$$S_{AOB} = ۳S_{FBF'}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}OA \times OB = ۳ \times \frac{۱}{۲}FF' \times BO \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}OA = \frac{۳}{۲}FF' \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}a = \frac{۳}{۲}\underset{(۰/۲۵)}{(۲c)} \Rightarrow a = ۶c \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۶} \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ ۲۰:

فاصله کانون تا دورترین نقطه بیضی $= c + a = ۴ \Rightarrow a = ۴ - c$ (۰/۵)

$$۲b = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۲} \quad (۰/۲۵)$$

$$a^۲ - c^۲ = b^۲ \Rightarrow (a-c)(a+c) = ۸ \Rightarrow a - c = ۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow ۲a = ۶ \quad (۰/۲۵) \text{ قطر بزرگ}$$

پاسخ ۲۱:

$$y^۲ - \underset{(۰/۵)}{y} = -x + ۲ \Rightarrow (y - \frac{۱}{۲})^۲ = -x + ۲ + \frac{۱}{۴} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (y-\frac{۱}{۲})^۲ \overset{(۰/۵)}{=} -(x-\frac{۹}{۴})$$

$$۴a \overset{(۰/۲۵)}{=} ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$ فاصله رأس تا خط هادی:

پاسخ ۲۲:

$$x^۲ - ۴x + ۴ = ۸y + ۴ + ۴ \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} (x-۲)^۲ = ۸(y+۱) \quad (۰/۵)$$

راس سهمی $= A(۲,-۱), a = ۲$ (۰/۷۵)

$$y = -۱ - ۲ = -۳, F(۲,-۱+۲) = (۲,۱) \quad (۰/۵)$$

پاسخ ۲۳:

به حالت استاندارد در می‌آوریم:

$y^۲+۴y+۴=۲x+۴$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow (y+۲)^۲=۲(x+۲)$

$۴a=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$ (۰/۵) $\Rightarrow$ رأس سهمی $A=(-۲,-۲)$

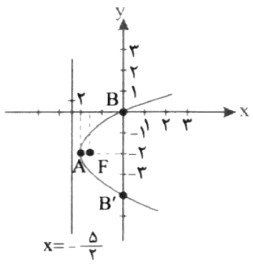
خط هادی: $x=-۲-\frac{۱}{۲}=-\frac{۵}{۲}$ (۰/۵)

کانون $F=(-۲+\frac{۱}{۲},-۲)$ (۰/۵)

حال $x=۰$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$(y+۲)^۲=۴\Rightarrow y+۲=\pm ۲\Rightarrow \begin{cases} y=۰ \\ y=-۴ \end{cases}$ (۰/۵)

پس $(۰,۰)$ ، $(۰,-۴)$ نقاط برخورد با محورهاست.



(۰/۵)

پاسخ ۲۴:

چون عرض دو نقطه برابر است پس سهمی افقی است. (۰/۲۵)

$a=SF=۳-(-۱)\Rightarrow a=۴\Rightarrow (y-۲)^۲=۱۶(x+۱)$

(۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۵)

پاسخ ۲۵:

$۲y^۲-۱۲y=۳x-۱۵\Rightarrow y^۲-۶y=\frac{۳}{۲}x-\frac{۱۵}{۲}$ (۰/۲۵)

(۰/۵)

$\Rightarrow (y-۳)^۲=\frac{۳}{۲}(x-۵)+۹=\frac{۳}{۲}(x+۱)$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵)

$\Rightarrow S(-۱,۳)$ $\Rightarrow ۴a=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲a=\frac{۳}{۴}$ (۰/۲۵)

(۰/۵)

پاسخ ۲۶:

مرکز وشعاع دایره را به دست می آوریم

$x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰\rightarrow o(۱,-۱)$, $r=\sqrt{۲}$ (۰/۵)

$OA=۱$ (۰/۲۵) $\rightarrow OA<r$

نقطه داخل دایره قرار دارد.(۰/۲۵)

پاسخ ۲۷:

$AA'=۲a=۲۰\rightarrow a=۱۰$

$e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}\rightarrow \frac{۴}{۵}=\frac{c}{۱۰}\rightarrow ۵c=۴۰\rightarrow c=۸$

$FF'=۲c=۲\times ۸=۱۶$

$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲-c^۲=b^۲\Rightarrow ۱۰۰-۶۴=b^۲\Rightarrow b=۶$

$BB'=۲b=۲\times ۶=۱۲$

پاسخ ۲۸:

$۲b=۲۴$, $\underbrace{b=۱۲}_{(۰/۲۵)}$, $c=۵$ $\xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲}$ $a^۲=\underset{(۰/۲۵)}{۱۲^۲}+۵^۲$

$\rightarrow a=۱۳(۰/۲۵)$, $\frac{c}{a}=\frac{۵}{۱۳}$ $(۰/۲۵)$

امتحان نهایـــی

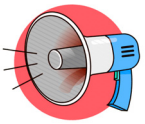
هندسه ۳

فصل سوم

بـــردارهـــا

بارم: حدود ۸ نمره

تعریفی‌ها– نقطه‌چین– درست، غلط



درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱– بردارهای $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ همواره هم‌جهت هستند. درست ☐ نادرست ☑

۲– مجموع طول‌های دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از طول بردار $\vec{a}+\vec{b}$ بیشتر است. درست ☑ نادرست ☐

۳– معادله صفحه yoz برابر است با $x=0$. درست ☑ نادرست ☐

۴– معادله محور y‌ها برابر اس با $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ درست ☑ نادرست ☐

۵– خط $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$ با محور z‌ها موازی است. درست ☑ نادرست ☐

۶– مجموع فواصل نقطه $A(a,a,a)$ از محورهای مختصات برابر است با $3\sqrt{2}a$. درست ☑ نادرست ☐

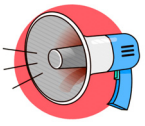
۷– اگر دو بردار غیر صفر برهم عمود باشند، ضرب داخلی آن‌ها برابر با صفر است. درست ☑ نادرست ☐

۸– اگر ضرب خارجی دو بردار غیر صفر برابر با صفر باشد، دو بردار موازیند. درست ☑ نادرست ☐

۹– برای هر دو بردار غیر صفر a و b داریم: $a\times b=b\times a$ درست ☐ نادرست ☑

۱۰– برای بردارهای غیر صفر a و b و c، اگر $a\times b=a\times c$ آنگاه داریم: $b=c$ درست ☐ نادرست ☑

۱۱– برای بردارهای غیر صفر a و b و c، اگر $a.b=a.c$ آنگاه داریم: $b=c$ درست ☐ نادرست ☑



جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۱– فاصله نقطه $A(2,-1,4)$ از مبدأ مختصات برابر است با ..... $\sqrt{4+1+16}=\sqrt{21}$.

۲– همه نقاطی که مختصات آن‌ها در رابطه $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ صدق کنند، ..... محور z‌ها ..... را مشخص می‌کنند.

۳– حجم مکعب حاصل از برخورد صفحات به معادلات $x=1$ ، $x=3$ ، $y=1$ ، $y=4$ ، $z=-2$ ، $z=2$ برابر است با ..... $2\times3\times4=24$.

۴– مختصات وسط پاره‌خط AB که $A(2,-1,4)$ و $B(0,3,6)$ می‌باشد برابر است با ..... $(1,1,5)$.

۵– اگر $\vec{a}=2i-3j+k$ و $\vec{b}=i+j-k$ باشد، طول بردار $2\vec{a}-\vec{b}$ برابر است با ..... .

۶– خط $\begin{cases} x=2 \\ z=3 \end{cases}$ با محور ..... موازی است.

۷– برای سه بردار غیر صفر a و b و c، شرط این که سه بردار در یک صفحه باشند، این است که ..... باشد.

۸– برای سه بردار غیر صفر a و b و c، حاصل $a.(a\times b)$ برابر است با ..... .

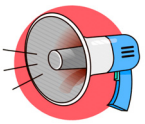
۹– بردار تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ برابر است با ..... .

۱۰– اگر دو بردار برهم عمود باشند، آن‌گاه تصویر یکی بر امتداد دیگری برابر است با ..... .

۱۱– اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر است با ... .

۱۲– برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، داریم : ..... = $\cos\theta$ (θ زاویه بین دو بردار)

۱۳– نامساوی کشی شوارتز بیان می‌کند: ..... $|\vec{a}.\vec{b}|\leq$



مسائل و تمرینات

۱– نقاط $A(1,2,1)$ و $B(3,1,4)$ ، $C(1,5,2)$ سه رأس مثلث ABC می‌باشند. طول میانه AM را به دست آورید.

۲– مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}=(2,-2,-3)$ و $\vec{b}=(4,0,6)$ تولید می‌شود را تعیین کنید.

۳– اگر $\vec{c}=(-1,1,4)$ و $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{a}=(1,-3,4)$ باشند، آنگاه تصویر قائم a بر امتداد بردار $\vec{b}+\vec{c}$ را بدست آورید.

۴– به ازای کدام مقدار a سه بردار $(1,-1,1)$ و $(0,2,1)$ و $(a,0,2)$ در یک صفحه قرار دارند؟

۵– مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A(3,5,7)$ و $B(5,5,0)$ و $C(-4,0,4)$ ساخته می‌شود را به دست آورید.

۶– اگر $\vec{V}_1=(1,-1,1)$ و $\vec{V}_2=(-1,4,-5)$ آن‌گاه حاصل $|\vec{V}_1+\vec{V}_2|+\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2$ را بدست آورید.

۷– بردارهای عمود بر دو بردار $\vec{a}=i+2j+2k$ و $\vec{b}=-i+2j-2k$ را تعیین کنید.

۸– بردارهای $\vec{b}=i+k$ و $\vec{a}=i+j+k$ را در نظر بگیرید.

الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ پیدا کنید.

ب) مساحت متوازی الاضلاعی را به دست آورید که بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو ضلع مجاور آن باشند.

۹– حاصل $3i.(j\times k)+2j.(i\times k)+4k.(i\times j)$ را پیدا کنید.

۱۰– اگر $|a|=4$ و $|b|=6$ و مساحت متوازی الاضلاعی که دو ضلع مجاورش $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است، برابر $12\sqrt{3}$ باشد، اندازه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بدست آورید.

۱۱– اگر $|\vec{a}|=1$ و $|\vec{b}|=2$ و $\vec{b}.\vec{a}=-1$ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید.

۱۲– اگر i,j,k بردارهای واحد باشند، حاصل $(i\times(i\times j))\times k$ را پیدا کنید.

۱۳– اگر $|\vec{a}|=|\vec{b}|=6$ و $\vec{a}.\vec{b}=18$ حاصل $|\vec{a}-\vec{b}|$ را پیدا کنید.

۱۴– بردارهای $\vec{a}=i-j+6k$ و $\vec{b}=(6,4,0)$ و $\vec{c}=(2,1,-1)$ مفروضند. حجم متوازی السطوح تولید شده توسط سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ را محاسبه کنید.

۱۵– نقاط $A=(-1,2,3)$ و $B(-2,4,1)$ و $C=(1,3,5)$ سه رأس مثلث ABC هستند. مطلوب است:

الف) کسینوس زاویه A را در مثلث ABC به دست آورید.

ب) تصویر قائم بردار $\overrightarrow{AB}$ بر امتداد بردار $\overrightarrow{AC}$ را به دست آورید.

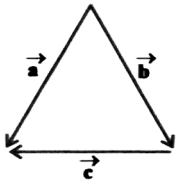
ج) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۱۶– اگر i, j و k بردارهای یکه باشند حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\vec{i}\times(\vec{j}-\vec{k})+\vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k})-\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$$

۱۷– تصویر قائم بردار $(۰,-۳,۶)$ روی امتداد بردار $(۲,-۱,-۲)$ را به دست آورید.

۱۸– در شکل مقابل اندازه‌های بردارهای $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ به ترتیب برابر ۳و۵و۶ است. حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{b},\vec{c}$ را به‌دست آورید.



۱۹– اگر بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{d}=(۳,۴,۲)$ به ترتیب ضلع و قطر متوازی الاضلاع باشند، مساحت متوازی الاضلاع را به دست آورید.

۲۰– اگر $\vec{a}=(۳,m,۱)$ و $\vec{b}=(n,۴,۲)$ و $\vec{a}\times\vec{b}=۰$ باشد، حاصل $\vec{a}.\vec{b}$ را پیدا کنید.

۲۱– اگر $\vec{a}=۳i-j+۲k$ و $\vec{b}=i+j-۲k$ دو ضلع از اضلاع یک مثلث باشند، اندازه ضلع سوم این مثلث را به دست آورید.

۲۲– مساحت متوازی الاضلاعی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، با حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها برابر است. زاویه بین این دو بردار را به دست آورید.

۲۳– اگر $|\vec{b}|=۸$ و دو بردار $b-۲a$ و $\vec{b}+۲a$ برهم عمود باشند، اندازه بردار a را به دست آورید.

۲۴– اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود باشند و $|\vec{a}|=۳$ و $|\vec{b}|=۴$ ، اندازه بردار $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ را بیابید.

۲۵– اگر $۶x+۱۲y-۵z=۱۵$ باشد، حداقل مقدار عبارت $۴x^۲+۹y^۲+z^۲$ را بدست آورید.

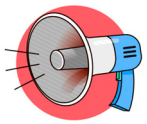
۲۶– بردارهای a و b مفروضند به طوری که $|a|=۳$ ، $|b|=۲۶$ و $|a\times b|=۷۲$ مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۲۷– نقاط $A(۱,۲,m)$ ، $B(-۱,۳,۲)$ و $C(۱,-۱,-۲)$ مفروض هستند. اگر مثلث ABC در رأس B قائم الزاویه باشد، مقدار m را به دست آورید.

۲۸– اگر $\vec{a}=(m,۲,۱)$ $|\vec{b}|=\sqrt{۳۰}$ و دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ برهم عمود باشند، مقدار m را به دست آورید.

۲۹– مساحت متوازی الاضلاعی که مختصات سه رأس آن $(۰,۰,۰)$ ، $(۱,۲,۳)$ و $(۱,-۲,۱)$ می‌باشد را به دست آورید.

۳۰– اگر $A=(a,۰,۰)$ ، $B=(۰,۰,۲a)$ و $C=(a,۰,a)$ باشند، مطلوب است کسینوس زاویه بین بردارهای $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{AB}$.



اثباتی‌ها

۱– اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد، ثابت کنید: $\tan\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\vec{a}.\vec{b}}$

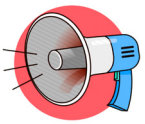
۲– اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر باشند، ثابت کنید $\vec{a}$ $\vec{b} - \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ بر $\vec{a}$ عمود است.

۳– فرض کنید $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند، به طوری که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ ثابت کنید: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

۴– فرض کنید $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردار باشند به طوری که $(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{a})=0$ ثابت کنید بردارهـــای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار دارند.

۵– فرض کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود باشند، ثابت کنید. $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$

۶– برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}.\vec{b})^2$



پاسخنامه مسائل و تمرینات

پاسخ ۱:

$M=(\frac{۳+۱}{۲},\frac{۱+۵}{۲},\frac{۴+۲}{۲})=(۲,۳,۳)$ وسط BC (۰/۲۵)

$AM=(۱,۱,۲)$

$|AM|=\sqrt{۱^۲+۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۶}$ (۰/۲۵)

(۰/۵)

پاسخ ۲:

مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$

$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۲ & -۳ \\ ۴ & ۰ & ۶ \end{vmatrix}=-۱۲\vec{i}-۲۴\vec{j}+۸\vec{k}$ (۱)

$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-۱۲)^۲+(-۲۴)^۲+۸^۲}=۲۸$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

پاسخ ۳:

$b+c$ را به دست می‌آوریم: (۰/۲۵)

$\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶), \vec{a}=(۱,-۳,۴)$

$b+c$ تصویر قائم a بر امتداد $=\frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{b}+\vec{c}|^۲}(\vec{b}+\vec{c})$ (۰/۲۵)

$=\frac{۲+۹+۲۴}{۴+۹+۳۶}(۲,-۳,۶)=\frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)$ (۰/۲۵)

$=\frac{۵}{۷}(۲,-۳,۶)$ (۰/۲۵)

پاسخ ٤:

اگر $\vec{a}=(۱,۰,۱), \vec{b}=(۰,۲,۱), \vec{c}=(a,۰,۲)$ در یک صفحه باشند، داریم:

$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ a & ۰ & ۲ \end{vmatrix}=۴-a-۲a=۰ \Rightarrow a=\frac{۴}{۳}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۵)

پاسخ ۵:

بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را به دست می‌آوریم. نصف اندازهٔ بردار ضرب خارجی آن‌ها برابر مساحت مثلث ABC است.

$\overrightarrow{AB}=(۵-۳,۵-۵,۰-۷)=(۲,۰,-۷)$ (۰/۲۵)

$\overrightarrow{AC}=(-۴-۳,۰-۵,۴-۷)=(-۷,-۵,-۳)$ (۰/۲۵)

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۰ & -۷ \\ -۷ & -۵ & -۳ \end{vmatrix}$ (۰/۵)

$=\vec{i}\begin{vmatrix} ۰ & -۷ \\ -۵ & -۳ \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} ۲ & -۷ \\ -۷ & -۳ \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ -۷ & -۵ \end{vmatrix}$

$=-۳۵\vec{i}+۵۵\vec{j}-۱۰\vec{k}$ (۰/۷۵)

$S=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۵^۲+۵۵^۲+۱۰^۲}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۱۷۴}$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵)

پاسخ ۶:

$\vec{V_۱}.\vec{V_۲}=-۱-۴-۵=-۱۰$ (۰/۵)

$\vec{V_۱}+\vec{V_۲}=(۰,۳,-۴) \rightarrow |\vec{V_۱}+\vec{V_۲}|=\sqrt{۰+۹+۱۶}=۵$ (۰/۲۵)

(۰/۵)

$\Rightarrow |\vec{V_۱}+\vec{V_۲}|+\vec{V_۱}.\vec{V_۲}=-۱۰+۵=-۵$ (۰/۵)

پاسخ ۷:

می‌دانیم که $\vec{a}\times\vec{b}$ هم بر $\vec{a}$ و هم بر $\vec{b}$ عمود است. (۰/۲۵)

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \end{vmatrix}=-۸\vec{i}+۴\vec{k} \Rightarrow$ هربردارعمود $=-۲\alpha\hat{i}+\alpha\hat{k}$

(۰/۷۵) (۰/۲۵)

پاسخ ۸:

الف)

$(۱,۰,۱)=(۱,۰,۱)$ (۰/۲۵) تصویر قائم بردار a برامتداد بردار b $=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{۱+۱}{(\sqrt{۱+۱})^۲}(۱,۰,۱)$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب)

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{k}$ (۰/۵)

$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۲}$ (۰/۵)

پاسخ ۹:

$j\times k=i, i\times k=-j, i\times j=k$

$۳i.(i)+۲j.(-j)+۴k.(k)=۳|i|^۲-۲|j|^۲+۴|k|^۲$ (۰/۷۵) (۰/۵)

$=۳-۲+۴=۵$ (۰/۲۵)

پاسخ ۱۰:

$S=|\vec{a}\times\vec{b}| \Rightarrow ۱۲\sqrt{۳}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ (۰/۵)

$\Rightarrow ۱۲\sqrt{۳}=۴\times۶\sin\theta$ (۰/۵)

$\Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۳}$ یا $\frac{۲\pi}{۳}$ (۰/۵)

پاسخ ۱۱:

$\vec{b}.\vec{a}=-۱ \Rightarrow |\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta=-۱ \Rightarrow \cos\theta=\frac{-۱}{۲\times۱}=\frac{-۱}{۲}$ (۰/۲۵)

(۰/۵) (۰/۵)

$\Rightarrow \theta=۱۲۰^\circ$ (۰/۲۵)

پاسخ ۱۲:

$i\times j=k$ (۰/۲۵) ، $i\times k=-j$ (۰/۲۵) ، $-j\times k=-i$ (۰/۲۵)

$(i\times(i\times j))\times k=(i\times k)=-j\times k=-i$

پاسخ ۱۳:

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^{۲}=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{۲}$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{۲}=\left|\vec{a}\right|^{۲}+\left|\vec{b}\right|^{۲}-۲\vec{a}.\vec{b}\ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{۲}=۶^{۲}+۶^{۲}-۲(۱۸)\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=۶\ (۰/۵)$$

(۰/۵)

پاسخ ۱۴:

حجم متوازی‌السطوح را از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\left|\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|\ (۰/۲۵)$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ ۶ & ۴ & ۰\\ ۲ & ۱ & -۱\end{vmatrix}=-۴\vec{i}+۶\vec{j}-۲\vec{k}\ (۰/۵)$$

حال داریم: $\left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|=|(۱)(-۴)+(-۱)(۶)+۶(-۲)|=۲۲\ (۰/۵)$

پاسخ ۱۵:

الف) $\overrightarrow{AB}=(-۱,۲,-۲)\ (۰/۲۵)\quad\overrightarrow{AC}=(۲,۱,۲)\ (۰/۲۵)$

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-۲+۲-۴}{\sqrt{۱+۴+۴}\sqrt{۴+۱+۴}}=-\frac{۴}{۹}$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) تصویر قائم $\overrightarrow{AB}$ بر $\overrightarrow{AC}$:

$$=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|^{۲}}\overrightarrow{AC}=\frac{-۲+۲-۴}{۴+۱+۴}(۲,۱,۲)\quad(۰/۲۵)$$

(۰/۲۵)

$$=\left(\frac{-۸}{۹},-\frac{۴}{۹},-\frac{۸}{۹}\right)\ (۰/۲۵)$$

ج)

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ -۱ & ۲ & -۲\\ ۲ & ۱ & ۲\end{vmatrix}=۶i-۲j-۵k\ (۰/۲۵)$$

$$S=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴+۲۵}=\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}\ (۰/۲۵)$$

(۰/۲۵)

پاسخ ۱۶:

$$\vec{i}\times\left(\vec{j}-\vec{k}\right)+\vec{j}\times\left(\vec{i}+\vec{k}\right)-\vec{k}\times\left(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)$$

$$=\vec{i}\times\vec{j}-\vec{i}\times\vec{k}+\vec{j}\times\vec{i}+\vec{j}\times\vec{k}-\vec{k}\times\vec{i}-\vec{k}\times\vec{j}+\vec{k}\times\vec{k}\ (۰/۷۵)$$

$$=\vec{k}+\vec{j}-\vec{k}+\vec{i}-\vec{j}+\vec{i}-۰=۲\vec{i}\ (۰/۲۵)$$

(۰/۵)

پاسخ ۱۷:

اگر $\vec{a}=(۰,-۳,۶)$ ، $\vec{b}=(۲,-۱,-۲)$ باشند، داریم:

$$\text{تصویر قائم}\overset{(۰/۲۵)}{=}\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^{۲}}\vec{b}=\frac{۰+۳-۱۲}{\left(\sqrt{۴+۱+۴}\right)^{۲}}(۲,-۱,-۲)\ (۱)$$

$$=(-۲,۱,۲)\ (۰/۵)$$

پاسخ ۱۸:

با توجه به آن‌که $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ است، داریم: (۰/۵)

$$\left|\vec{b}+\vec{c}\right|^{۲}\overset{(۰/۲۵)}{=}\left|\vec{a}\right|^{۲}\Rightarrow\left|\vec{b}\right|^{۲}+\left|\vec{c}\right|^{۲}+۲\vec{b}.\vec{c}=\left|\vec{a}\right|^{۲}\ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow\ ۲۵+۳۶+\underset{(۰/۵)}{۲\vec{b}.\vec{c}}=۹\Rightarrow\vec{b}.\vec{c}=-۲۶\ (۰/۲۵)$$

پاسخ ۱۹:

$\vec{b}=\vec{d}-\vec{a}$ ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع است، داریم:

$$\vec{b}=(۳,۴,۲)-(۲,-۱,۲)=(۱,۵,۰)\ (۰/۷۵)$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\begin{vmatrix}i & j & k\\ ۲ & -۱ & ۲\\ ۱ & ۵ & ۰\end{vmatrix}=-۱۰i+۲j+۱۱k\ (۰/۷۵)$$

$$S=\sqrt{۱۰۰+۴+۱۲۱}=\sqrt{۲۲۵}=۱۵\ (۰/۵)$$

پاسخ ۲۰:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ ۳ & m & ۱\\ n & ۴ & ۲\end{vmatrix}=(۲m-۴)i-(۶-n)j+(۱۲-mn)k\ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲m-۴=۰\Rightarrow m=۲\\ ۶-n=۰\Rightarrow n=۶\end{cases}\overset{(۰/۵)}{\Rightarrow}\vec{a}=(۳,۲,۱),\vec{b}=(۶,۴,۲)\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow\ \vec{a}.\vec{b}=۱۸+۸+۲=۲۸\ (۰/۵)$$

پاسخ ۲۱:

ضلع سوم این مثلث بردار $\vec{a}-\vec{b}$ است، یعنی داریم:

$$\vec{a}-\vec{b}=۲\vec{i}-۲\vec{j}+۴\vec{k}\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{۴+۴+۱۶}=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$$

(۰/۷۵) (۰/۷۵) (۰/۲۵)

پاسخ ۲۲:

$$S=\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\vec{a}.\vec{b}\ (۰/۷۵)$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\Rightarrow\sin\theta=\cos\theta\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

(۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

پاسخ ۲۳:

$b-2a \perp b+2a \Rightarrow$ (۰/۵)

$(b-2a).(b+2a)=0$

$\Rightarrow |b|^2-4|a|^2=0 \Rightarrow 64-4|a|^2=0$ (۰/۵)

$\Rightarrow 64-4|a|^2=0 \Rightarrow |a|^2=16 \Rightarrow |a|=4$ (۰/۲۵) (۰/۵)

پاسخ ۲۴:

$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{0}-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{0}$ (۰/۵)

$=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}=2\vec{b}\times\vec{a}$ (۰/۵)

$|2\vec{b}\times\vec{a}|=2|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta=2\times3\times4\times1=24$ (۰/۲۵) (۰/۵)

پاسخ ۲۵:

اگر $\vec{a}=(2x,3y,z)$ ، $\vec{b}=(3,4,-5)$ باشد، داریم:

$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow |6x+12y-5z|\le\sqrt{4x^2+9y^2+z^2}\times\sqrt{9+16+25}$ (۰/۵)

$\Rightarrow 225\le(4x^2+9y^2+z^2)(50)\Rightarrow 4x^2+9y^2+z^2\ge\frac{9}{2}$ (۰/۵) (۰/۵)

پاسخ ۲۶:

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\Rightarrow 72=26\times3\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{12}{13}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{1-\frac{144}{169}}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{5}{13}$ (۰/۲۵)

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=26\times3\times\left(\pm\frac{5}{13}\right)=\pm30$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

پاسخ ۲۷:

$AB\perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ (۰/۲۵)

$(-2,1,2-m).(2,-4,-4)=0$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow -4-4-8+4m=0$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow m=4$ (۰/۲۵)

پاسخ ۲۸:

$\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}\Leftrightarrow(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=0\Leftrightarrow|\vec{a}|^2-\underbrace{\vec{a}.\vec{b}}_{0}+\underbrace{\vec{b}.\vec{a}}_{0}-|\vec{b}|^2=0\Leftrightarrow|a|^2-|b|^2=0\Leftrightarrow|a|=|b|$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\sqrt{m^2+4+1}=\sqrt{30}\Rightarrow m^2+5=30$ (۰/۲۵) (۰/۵)

$\Rightarrow m^2=25\Rightarrow m=\pm5$ (۰/۲۵)

پاسخ ۲۹:

فرض کنیم $A(1,2,3)$ ، $B(1,-2,1)$ و $O(0,0,0)$ باشد، در این صورت داریم:

$\overrightarrow{AO}=(-1,-2,-3)$ ، $\overrightarrow{BO}=(-1,2,-1)$ (۰/۵)

$\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{BO}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=8i+2j-4k$ (۰/۵)

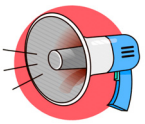
$\Rightarrow S=\sqrt{64+4+16}=2\sqrt{21}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

پاسخ ۳۰:

$\overrightarrow{AB}=(-a,0,2a)$ ، $\overrightarrow{OC}=(a,0,a)$

$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{-a^2+0+2a^2}{\sqrt{a^2+4a^2}\sqrt{a^2+a^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{10a^4}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

(۰/۵) (۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)



پاسخنامه اثباتی‌ها

اثبات ۱:

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |a||b|\sin\theta \quad (1)$ (۰/۵)

$\vec{a}.\vec{b} = |a||b|\cos\theta \quad (2)$ (۰/۵)

طرفین رابطهٔ (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، حال داریم:

$$\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\vec{a}.\vec{b}} = \frac{|a||b|\sin\theta}{|a||b|\cos\theta} \Rightarrow \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\vec{a}.\vec{b}} = \tan\theta$$ (۰/۵) (۰/۵)

اثبات ۲:

$$\vec{a}.(\vec{b} - \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}) = \vec{a}.\vec{b} - \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}|\vec{a}|^2 = \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{b} = 0$$

(۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

پس $\vec{a}$ بر $\vec{b} - \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ عمود است. (۰/۵)

اثبات ۳:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0 \xrightarrow{\vec{a}\times} \vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times 0$$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{0} + \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c} = 0$$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{a}\times\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{a} \quad (1)$$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0 \xrightarrow{\vec{b}\times} \vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{b}\times 0$$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \vec{b}\times\vec{a} + \underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{0} + \vec{b}\times\vec{c} = 0$$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \vec{b}\times\vec{c} = -\vec{b}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b} \Rightarrow \vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \quad (2)$$ (۰/۲۵)

$$\xrightarrow{(1),(2)} \vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$$ (۰/۲۵)

اثبات ۴:

طرفین عبارت داده شده در صورت سؤال را در a ضرب داخلی می‌کنیم.

می‌دانیم ضرب خارجی دو بردار بر صفحه شامل دو بردار عمود است.

$$\vec{a}.\big((\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{b}\times\vec{c}) + (\vec{c}\times\vec{a})\big) = 0$$ (۰/۵)

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})}_{0} + \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) + \underbrace{\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a})}_{0} = 0 \Rightarrow \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\vec{a}$ بر $\vec{b}\times\vec{c}$ عمود است، پس $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار دارند. (۰/۲۵)

اثبات ۵:

چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود هستند پس $\vec{a}.\vec{b} = 0$ است. (۰/۵)

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$$ (۰/۵)

$$= |\vec{a}|^2 - \underbrace{\vec{a}.\vec{b}}_{0} - \underbrace{\vec{b}.\vec{a}}_{0} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$ (۰/۲۵)

(۰/۵)

اثبات ۶:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta \quad (1)$$ (۰/۲۵)

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow (\vec{a}.\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta \quad (2)$$ (۰/۲۵)

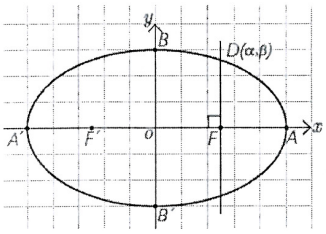
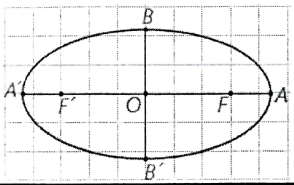
طرفین دو رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم، حال داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}.\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta + |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta$$ (۰/۵)

$$= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$$ (۰/۲۵)

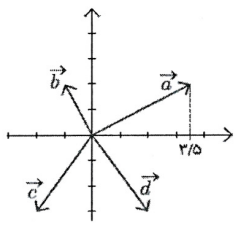
جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه یـــک تهران

سوالات امتحان درس : **هندسه ۳**	پایه : **دوازدهم**	رشته: **ریاضی فیزیک**	مدت امتحان : **۱۰۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: **۷:۴۵ صبح**	تاریخ امتحان : **۹۸/۲/۷** سال تحصیلی : **۹۸-۹۷**	تعداد سوال: **۱۴** تعداد صفحه: **۲**

ردیف	توجه: استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) مجاز است.	بارم
۱	مفاهیم زیر را تعریف کنید. الف) سهمی ب) بردار یکه‌ی i در $\mathcal{R}^2$ و نمایش آن به صورت زوج مرتب	۱/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید: الف) اگر بدنه داخلی یک بیضی، آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی، اشعه‌ی نوری بر بدنه‌ی داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از ..... می‌گذرد. ب) در بیضی هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ به یک نزدیک شود، شکل به ..... نزدیک‌تر می‌شود. پ) فاصله‌ی نقطه‌ی A(1,1,2) از صفحه‌ی xz برابر است با ..... . ت) حاصل عبارت $\vec{i} \times (\vec{k} \times \vec{i})$ برابر است با	۱
۳	درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید: الف) اگر نقطه‌ای درون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از دو کانون، بزرگ‌تر از اندازه‌ی قطر بزرگ بیضی است. ب) معادله‌ی $(y-1)^2 = 4a(x+1)$ مربوط به یک سهمی با رأس (1,-1) است.	۰/۵
۴	گزینه صحیح را در پرسش‌های زیر مشخص کنید: ۱) کانون سهمی به معادله‌ی $(x-1)^2 = -16(y-2)$ نقطه ..... است. الف) (1,-2) ب) (-1,2) ج) (1,2) د) (-1,-2) ۲) تمام نقاطی از صفحه‌ی $\mathcal{R}^2$ که مختصات آن نقاط در دو رابطه‌ی $-2 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 3$ صدق می‌کنند، نقاطی است: الف) درون مربعی به طول ضلع ۳ ب) درون و بیرون مربعی به طول ضلع ۳ ج) درون و روی مربعی به طول ضلع ۳ د) روی مربعی به طول ضلع ۳	۰/۵
۵	مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله‌ی F از هر دو نقطه‌ی O و A برابر ۳ است. اگر خطی که در نقطه‌ی F بر 'AA عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطه‌ی D قطع کند، مختصات D را به‌دست آورید. 	۲
۶	در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه‌ی 'FBF چند درجه است؟ 	۱/۲۵

جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه یـــک تهران

سوالات امتحان درس : **هندسه ۳**	پایه : **دوازدهم**	رشته: **ریاضی فیزیک**	مدت امتحان : **۱۰۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: **۷:۴۵ صبح**	تاریخ امتحان : **۹۸/۲/۷**	تعداد سوال: **۱۴**
		سال تحصیلی : **۹۸-۹۷**	تعداد صفحه: **۲**

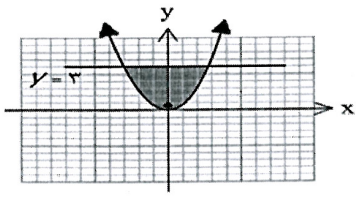
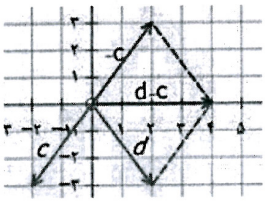
ردیف	صفحه دوم	بارم
۷	سهمی $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را بیابید. سپس مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را مشخص کنید.	۲
۸	اگر نقطه M(2,-1) روی یک سهمی قرار داشته باشد که کانون آن F(-1,-1) است، آن‌گاه فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط هادی آن سهمی چه‌قدر است؟	۱
۹	الف) شکل مربوط به رابطه‌ی $x^2 \le y \le 3$ را رسم کنید. ب) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله‌ی x=0 دارد؟	۰/۷۵ ۰/۷۵
۱۰	الف) در دستگاه مختصات مقابل، مختصات بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{d} - \vec{c}$ را بیابید. سپس اندازه‌ی بردار $\vec{d} - \vec{c}$ را به‌دست آورده و آن را رسم کنید.  ب) بردار $\vec{a} = (-\frac{1}{2}, 2, -3)$ را بر حسب بردارهای یکه نشان دهید.	۱ ۰/۵
۱۱	الف) در صورتی که $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$، ثابت کنید $\vec{a} \cdot \vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert^2$. ب) نشان دهید اگر بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ عمود باشد، آن‌گاه تصویر بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$، بردار صفر است. پ) ثابت کنید اگر حاصل‌ضرب خارجی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ صفر باشد، آن‌گاه دو بردار با هم موازی هستند.	۰/۵ ۱ ۱
۱۲	زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ و $\vec{b} = (0, -2, 2)$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۳	نقاط A(1,1,-2) و B(0,-1,1) و C(1,0,1) مفروض است. تصویر قائم بردار $\overrightarrow{AB}$ بر امتداد بردار $\overrightarrow{AC}$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۴	الف) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} = (1, -3, 2)$ و $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ بیابید. ب) حجم متوازی‌السطوحی که با سه بردار $\vec{a} = (2, 2, -1)$ و $\vec{b} = (3, 0, 2)$ و $\vec{c} = (1, 4, 5)$ تولید می‌شود، چه‌قدر است؟	۰/۵ ۱
	" موفق باشید " جمع نمره	۲۰

جمهوری اسلامی ایران اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران اداره آموزش و پرورش منطقه یـــک تهران			
راهنمای تصحیح امتحان درس : **هندسه ۳**	پایه : **دوازدهم**	رشته: **ریاضی فیزیک**	مدت امتحان : **۱۰۰ دقیقه**
تعداد سوال: **۱۴** تعداد صفحه: **۲**	ساعت شروع: **۷:۴۵ صبح**	تاریخ امتحان : **۹۸/۲/۷**	سال تحصیلی : **۹۸-۹۷**

ردیف	صفحه اول	بارم
۱	الف) مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه، و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه، به یک فاصله باشند. (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (صفحه: ۵۱) ب) برداری به طول واحد در جهت محور xها : $\vec{i}=(1,0)$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (صفحه: ۷۲)	۰ ۱/۷۵
۲	الف) کانون دیگر (۰/۲۵) ب) پاره خط (۰/۲۵) پ) ۱ (۰/۲۵) ت) $\vec{k}$ (۰/۲۵) (صفحات : ۵۰ و ۴۹ و ۶۶-۶۵ و ۸۲)	۱
۳	الف) نادرست (۰/۲۵) (صفحه: ۴۷) ب) نادرست (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه:۵۳)	۰/۵
۴	۱) الف (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه:۵۴) ۲) ج (۰/۲۵) (مشابه کار در کلاس صفحه:۶۳)	۰/۵
۵	F(3,0) F'(-3,0) A(6,0) A'(-6,0) D(3,β) DF+DF'=2a $\Rightarrow \sqrt{(3-3)^2+(\beta-0)^2}+\sqrt{(3+3)^2+(\beta-0)^2}=2\times 6=12$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) $\lvert\beta\rvert+\sqrt{36+\beta^2}=12 \Rightarrow 36+\beta^2=144+\beta^2-24\lvert\beta\rvert \Rightarrow \lvert\beta\rvert=4.5$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) D(3,4.5) D'(3,-4.5) (۰/۲۵) غ.ق.ق (مشابه کار در کلاس صفحه:۴۸)	۰ ۲
۶	$c^2=a^2-b^2=4b^2-b^2=3b^2 \Rightarrow c=\sqrt{3}b$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) $\tan(OBF)=\frac{\sqrt{3}b}{b}=\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{OBF}=60^\circ \Rightarrow \widehat{FBF'}=120^\circ$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (تمرین ۵، صفحه ۵۷)	۱/۲۵ ۰
۷	$(y+2)^2=2(x+2)$ (۰/۲۵) سهمی افقی و دهانه به سمت راست (۰/۲۵) مختصات رأس $\begin{vmatrix}-2\\-2\end{vmatrix}$ (۰/۲۵) مختصات کانون $\begin{vmatrix}-\frac{3}{2}\\-2\end{vmatrix}$ (۰/۲۵) $4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵) خط هادی $x=-\frac{5}{2}=-2.5$ (۰/۲۵) (0,-4) و (0,0) نقاط برخورد با محور مختصات (۰/۲۵) (۰/۲۵) (تمرین ۷، صفحه ۵۸)	۲
۸	MF=MH $\Rightarrow$ $MF=\sqrt{(2+1)^2+(-1+1)^2}=3$ (۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۲۵) (مشابه فعالیت صفحه:۵۱)	۱

راهنمای تصحیح درس: هندسه ۳ | پایه: دوازدهم | رشته: ریاضی فیزیک

مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه | سال تحصیلی: ۹۸-۱۳۹۷ | تاریخ آزمون : ۹۸/۲/۷

ردیف	صفحه دوم	بارم
۹	الف) رسم هر نمودار (۰/۲۵) رنگ بین نمودار (۰/۲۵) (مشابه کار در کلاس صفحه:۶۳)  ب) معادله خط (محور yها) است (۰/۲۵) و معادله x=0 صفحه yz است (۰/۲۵) که شامل محور yها است. (۰/۲۵) (فعالیت ۲ صفحه: ۶۷)	۰/۷۵ ۰/۷۵
۱۰	الف) $\|d-c\|=4$ (۰/۲۵) $d-c=(4,0)$ (۰/۲۵) $a+b=(2.5,4)$ (۰/۲۵) (کار در کلاس صفحه:۷۳)  رسم نمودار (۰/۲۵) ب) $\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ (۰/۵) (مشابه مثال صفحه:۷۵)	۱ ۰/۵
۱۱	الف) $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3=a_1^2+a_2^2+a_3^2=\|\vec{a}\|^2$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (صفحه: ۷۵) ب) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow a'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}=\frac{0}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}=\vec{0}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (کار در کلاس صفحه:۸۰) پ) $\vec{a}\parallel\vec{b} \Rightarrow \theta=\pi$ یا $\theta=0 \Rightarrow sin\theta=0 \Rightarrow \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|sin\theta=0 \Rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|=0 \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (صفحه: ۸۲)	۰/۵ ۱ ۱
۱۲	$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ (۰/۲۵)، $\|\vec{b}\|=2\sqrt{2}$ (۰/۲۵) $\|\vec{a}\|=\sqrt{2}$ (۰/۲۵) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|cos\theta \Rightarrow cos\theta=\frac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=60^\circ$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه: ۷۸)	۱/۵
۱۳	$\overrightarrow{AC}=(0,-1,3)$ (۰/۲۵) $\overrightarrow{AB}=(-1,-2,3)$ (۰/۲۵) تصویر $\overrightarrow{AB}$ بر امتداد $\overrightarrow{AC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}\overrightarrow{AC}=\frac{11}{(\sqrt{10})^2}(0,-1,3)=\left(0,\frac{-11}{10},\frac{33}{10}\right)$ (۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه: ۸۰)	۱/۵
۱۴	الف) $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(13,1,-5)$ (۰/۵) (مشابه تمرین ۵ صفحه: ۸۴) ب) $V=\|a\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\|=\|(2,2,-1)\cdot(-8,-13,12)\|=\|-54\|=54$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه: ۸۳)	۰/۵ ۱
	به سایر راه حل‌های صحیح به تناسب بارم، نمره تعلق می‌گیرد.	۲۰

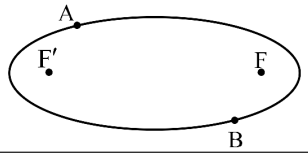
باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **هندسه ۳**	رشته : **ریاضی فیزیک**	تاریخ امتحان: **۱۳۹۸/۳/۲**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	مدت امتحان : **۱۳۵** دقیقه	تعداد صفحه: **۲**
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۸**			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
	استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است .	
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید . الف) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس A.....باشد . ب) مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد. پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک ..... می‌شود. ت) حاصل‌ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، برابر .....است.	۱
۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم، AB=AC ، آنگاه لزوماً B=C است. ب) در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (l) عمود نباشد و با مولد آن (d)نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل‌مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود. پ) نقطه $A(۲,-۳,۰)$ روی صفحه xoy قرار دارد.	۰/۷۵
۳	اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\\ ۰ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\lvert A^{۳}\rvert$ را محاسبه کنید.	۱
۴	در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix}۳x & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۳ & ۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ مقدار x را بیابید.	۱/۲۵
۵	مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases}mx+۳y=-۳\\ ۴x+(m+۴)y=۲\end{cases}$ جواب نداشته باشد.	۱/۲۵
۶	معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=-۵$ بر آن مماس باشد.	۱/۵
۷	در نقطه $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y=۳$ مماسی رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به‌دست آورید.	۱
۸	اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید.	۱/۵
	« ادامه سوالات در صفحه دوم »	

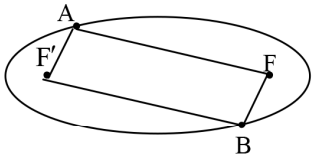
باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **هندسه ۳**	رشته : **ریاضی فیزیک**	تاریخ امتحان: **۱۳۹۸/۳/۲**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	مدت امتحان : **۱۳۵** دقیقه	تعداد صفحه: **۲**
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۸**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
۹	دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F′ کانونهای بیضی‌اند. اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید دو پاره خط AF و BF′ موازی‌اند. 	۱/۲۵
۱۰	سهمی $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ مفروض است. الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به‌دست آورید. ب) نمودار آن را رسم کنید.	۲
۱۱	به سؤالات زیر پاسخ دهید . الف) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسیدکه از نقطه $A = (2,3,4)$ بگذرد و با صفحه xoy موازی باشد. ب) معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟ پ) در فضای $\mathbb{R}^3$، نقطه A به طول ۲ روی محور طولها و نقطه $B = (-4,6,-3)$ مفروض‌اند مختصات وسط AB را بیابید.	۱/۵
۱۲	اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (1,2,1)$ باشد، طول بردار $\vec{a} - 2\vec{b}$ را به‌دست آورید.	۱
۱۳	بردارهای $\vec{a} = (1,-3,2)$ و $\vec{b} = (-2,1,-5)$ را در نظر بگیرید. الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌دست آورید. ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.	۱/۷۵
۱۴	ثابت کنید : دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.	۱
۱۵	مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (1, m, -11)$، $\vec{b} = (2,3,-1)$ و $\vec{c} = (1,-1,3)$ در یک صفحه باشند.	۱
۱۶	اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a}.\vec{b} = 12$ باشد ، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.	۱/۲۵
	موفق و سربلند باشید — جمع نمره	۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **هندسه ۳**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۸/۳/۲**	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور **خرداد ماه** سال **۱۳۹۸**		مرکز سنجش وپایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) $\|A\| \neq 0$ یا مخالف صفر (۰/۲۵) ب) ویژگی مشترک (۰/۲۵) پ) دایره (۰/۲۵) ت) صفر یا $\vec{a}\vec{b}=0$ (۰/۲۵)	۱
۲	الف) نادرست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) پ) درست (۰/۲۵)	۰/۷۵
۳	$\|A\| = ۲(۴-۳) = ۲ \xrightarrow{(۰/۵)} \underbrace{\|A^۲\| = \|A\|^۳}_{(۰/۲۵)} = ۸ \quad (۰/۲۵)$	۱
۴	$\begin{bmatrix} ۳x-۶ & -۶x+۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰ \xrightarrow{(۰/۵)} [-۳x+۶-۶x+۱۲] = ۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} -۹x+۱۸=۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} x = ۲ \, (۰/۲۵)$	۱/۲۵
۵	$\frac{m}{۴} = \frac{۳}{m+۴} \neq \frac{-۳}{۲} \xrightarrow{(۰/۵)} m(m+۴)-۱۲=۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} \begin{cases} m=-۶ \, (۰/۲۵) & \text{غیرقابل قبول} \\ m=۲ \, (۰/۲۵) & \text{قابل قبول} \end{cases}$	۱/۲۵
۶	$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=۲ \quad (۰/۲۵) \\ y=-۱ \quad (۰/۲۵) \end{cases}$, $r = \underbrace{\frac{\|۴(۲)+۳(-۱)+۵\|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}}_{(۰/۵)} = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \quad (۰/۲۵)$ مرکز دایره $o(۲,-۱)$ و شعاع آن برابر $r=۲$ است .معادله دایره برابر با : $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲ = ۴ \quad (۰/۲۵)$ است.	۱/۵
۷	$O(۱,۱) \xrightarrow{۰/۲۵} m_{OA} = \frac{۳-۱}{۲-۱} = ۲ \xrightarrow{۰/۲۵} m' = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{۰/۲۵} y-۳ = \frac{-۱}{۲}(x-۲) \quad (۰/۲۵)$	۱
۸	$\frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} \to c = \underbrace{\frac{۳}{۵}a}_{(۰/۲۵)} \quad , \underbrace{b=۸}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} \underbrace{a^۲ = ۶۴ + \frac{۹}{۲۵}a^۲}_{(۰/۲۵)} \to a=۱۰, c=۶ \, (۰/۵)$ طول قطر بزرگ ۲۰ و فاصله کانونی ۱۲ (۰/۲۵)	۱/۵
۹	نقاط A و B را به کانون های بیضی وصل می کنیم نقطه A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی (۱) $AF + AF' = ۲a$ (۰/۲۵) نقطه B روی بیضی قرار دارد (۲) $BF + BF' = ۲a$ (۰/۲۵) از (۱) و (۲) و فرض ($AF' = BF$)نتیجه می شود $AF = BF'$ (۰/۲۵) بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ یک متوازی الاضلاع است(۰/۲۵) در متوازی الاضلاع ،ضلع های روبرو موازی‌اند. $AF \parallel BF'$ (۰/۲۵) 	۱/۲۵
	« ادامه در صفحه دوم »	

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **هندسه ۳**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۸/۳/۲**	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور **خرداد ماه** سال **۱۳۹۸**		مرکز سنجش وپایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۰	الف- $(y-1)^2=-8(x+1)$ (۰/۲۵) $\longrightarrow A(-1,1)$ (۰/۲۵) دهانه سهمی به چپ و $a=2$ ، خط هادی $x=1$ (۰/۲۵) و کانون سهمی $F(-3,1)$ (۰/۲۵) ب-نقاط کمکی: $B=(-3,5)$, $B'=(-3,-3)$ (۰/۵) رسم شکل (۰/۵)	۲
۱۱	الف) $z=4$ (۰/۵) ب) محور y ها (۰/۵) پ)نقطه $A=(2,0,0)$ (۰/۲۵) و مختصات وسط AB برابر است با: $(-1,3,\frac{-3}{2})$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۲	$\vec{a}-2\vec{b}=\underbrace{(2,0,-1)}_{(۰/۲۵)}-\underbrace{(2,4,2)}_{(۰/۲۵)}=(0,-4,-3)$ (۰/۲۵) , $\left\|\vec{a}-2\vec{b}\right\|=\sqrt{16+9}=5$ (۰/۲۵)	۱
۱۳	الف) $\underbrace{\vec{a'}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}}_{۰/۲۵}=\underbrace{\frac{-2-3-10}{4+1+25}(-2,1,-5)}_{۰/۵}=\underbrace{\frac{-1}{2}(-2,1,-5)}_{۰/۲۵}=(1,-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ یا ب) $\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}=(1,-3,2)\times(-2,1,-5)}_{(۰/۲۵)}=(13,1,-5)$ (۰/۵) (یا : $\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}=(-2,1,-5)\times(1,-3,2)}_{(۰/۲۵)}=(-13,-1,5)$ (۰/۵)	۱/۷۵
۱۴	$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\Leftrightarrow\underbrace{\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{o}\|}_{۰/۲۵}\Leftrightarrow\underbrace{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\times\sin\theta=0}_{۰/۲۵}\xleftarrow{|\vec{a}|\neq0,|\vec{b}|\neq0}\underbrace{\sin\theta=0}_{۰/۲۵}\Leftrightarrow\underbrace{\theta=0\vee\theta=\pi}_{۰/۲۵}\Leftrightarrow\vec{a}\|\vec{b}$	۱
۱۵	$\vec{b}\times\vec{c}=(2,3,-1)\times(1,-1,3)=(8,-7,-5)$ (۰/۲۵) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0\xrightarrow{(۰/۲۵)}(1,m,-11).(8,-7,-5)=8-7m+55=0\xrightarrow{(۰/۲۵)}m=9$ (۰/۲۵)	۱
	« ادامه در صفحه سوم »	

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **هندسه ۳**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۸/۳/۲**	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور **خرداد ماه** سال **۱۳۹۸**		مرکز سنجش وپایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۶	$\cos\theta=\frac{\vec{a}\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}=\frac{۱۲}{۴\times۶}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳}$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
	روش اول:	
	$S_{\text{مثلث}}=\underbrace{\frac{۱}{۲}\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=\frac{۱}{۲}\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin\theta}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۱}{۲}\times۴\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}_{(۰/۲۵)}=۶\sqrt{۳}$ (۰/۲۵)	
	روش دوم:	
	$\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert^{۲}+(\vec{a}\vec{b})^{۲}=\lvert\vec{a}\rvert^{۲}\lvert b\rvert^{۲}$ (۰/۲۵) $\longrightarrow\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert^{۲}+\underset{(۰/۵)}{(۱۲)^{۲}}=(۴)^{۲}(۶)^{۲}$	
	$\longrightarrow\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=۱۲\sqrt{۳}$ (۰/۲۵)	
	مساحت مثلث برابر است با	
	$S=\frac{۱}{۲}\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=۶\sqrt{۳}$ (۰/۲۵)	
	" مصحح گرا می ، به راه حل‌های درست و منطبق بر کتاب درسی بارم به تناسب منظور شود"	۲۰

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **هندسه ۳**	تعداد صفحه: **۳**	تاریخ امتحان: **۱۳۹۹/۴/۱۴**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	مدت امتحان : **۱۳۵** دقیقه	رشته : **ریاضی فیزیک**
دانش آموزان روزانه سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۹**			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aec.medu.ir

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره

استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است .

الف)بخش الزامی

دانش آموزان عزیز به سوالات ۱ تا ۱۲ (جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.)

۱ (۱ نمره)

جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید .

الف) اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۸ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار a برابر .....است.

ب) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند آن را یک ماتریس .....می‌نامیم .

پ) اگرمجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در .....بیضی است.

ت) هرشعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از ..... خواهد گذشت.

۲ (۱ نمره)

درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) در حالت کلی حاصلضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی دارد.

ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۲$ باشد آنگاه $|۲A|=۱۶$ است.

پ) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایرهٔ $C(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارج‌اند، دایره $C'(O,۲r)$ است.

ت) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود..

۳ (۱/۷۵ نمره)

دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ \\ n+۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $|A|+|B|$ را محاسبه کنید.

۴ (۱/۲۵ نمره)

الف) اگر $A=\begin{bmatrix} |A| & ۸ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید .

ب) ماتریس وارون A را حساب کنید.

۵ (۱/۲۵ نمره)

در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$ مقدار x را بیابید.

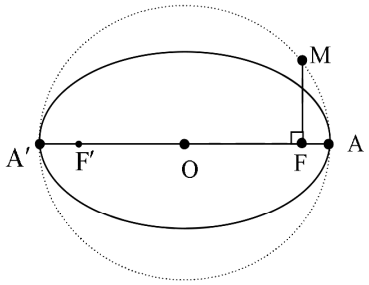
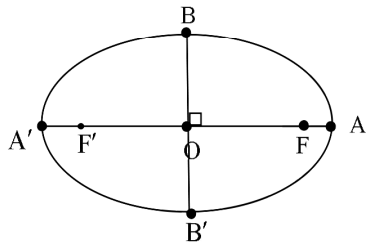
۶ (۱/۵ نمره)

نقاط A ،B ،C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد(بحث کنید).

« ادامه سوالات در صفحه دوم »

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **هندسه ۳**	تعداد صفحه: **۳**	تاریخ امتحان: **۱۳۹۹/۴/۱۴**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	مدت امتحان : **۱۳۵** دقیقه	رشته : **ریاضی فیزیک**
دانش آموزان **روزانه** سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۹**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
۷	معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $۲x+y=۲$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.	۱/۲۵
۸	وضعیت نقطه $A(۱,-۲)$ نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ را تعیین کنید.	۱
۹	قطردایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است واز کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است. 	۱
۱۰	در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $\sqrt{۲}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟ 	۱/۵
۱۱	اگر در یک بیضی طول قطرکوچک ۲۴ و فاصله کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به‌دست آورید.	۱
۱۲	الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی $x^۲-۴y+۸x=۰$ را به‌دست آورید، ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.	۲/۵
	ب) بخش انتخابی **دانش آموز عزیز جهت کسب ۴نمره از سوالات ۱۳ تا ۱۶ فقط ۲ سؤال را به دلخواه انتخاب کرده و پاسخ دهید.**	
۱۳	الف) حدود m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases}۲mx+۳y=۱\\۲x-y=۳\end{cases}$ دارای جواب منحصر به‌فرد باشد. ب) جواب دستگاه مذکور را به ازای $m=۲$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.	۲
	« ادامه سوالات در صفحه سوم »	

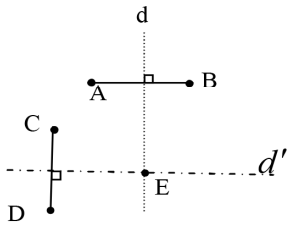
باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **هندسه ۳**	تعداد صفحه: **۳**	تاریخ امتحان: **۱۳۹۹/۴/۱۴**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	مدت امتحان : **۱۳۵** دقیقه	رشته : **ریاضی فیزیک**
دانش آموزان **روزانه** سراسر کشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۹**			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
۱۴	سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.	۲
۱۵	دو بردار $\vec{a} = (3,-2,1)$ ، $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ را در نظر بگیرید. الف) بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $\mathbb{R}^3$ واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود). ب) طول بردار $\vec{a} + 2\vec{b}$ را حساب کنید. پ) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیداکنید.	۲
۱۶	بردارهای $\vec{a} = (-2,0,2)$ و $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$ را در نظر بگیرید. الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید. ب) تصویر قائم بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌دست آورید.	۲
	موفق و سربلند باشید **جمع نمره**	۲۴

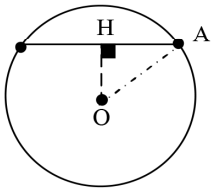
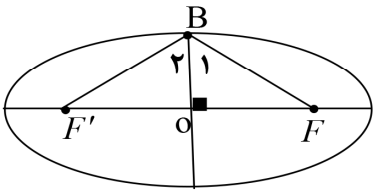
باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **هندسه ۳**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۹/۴/۱۴**	
دانش آموزان روزانه سراسرکشور **خرداد ماه** سال **۱۳۹۹**		مرکز سنجش وپایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) -۶ (۰/۲۵) ب) اسکالر (۰/۲۵) **بخش الف)الزامی** پ) بیرون (۰/۲۵) ت) کانون سهمی (۰/۲۵)	۱
۲	الف) نادرست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) پ) درست (۰/۲۵) ت) نادرست (۰/۲۵)	۱
۳	$\begin{cases} m-۲=۰\rightarrow m=۲\ (۰/۲۵) \\ n+۱=۰\rightarrow n=-۱\ (۰/۲۵) \end{cases}$ $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{(۰/۲۵)} \mid B\mid =۲(-۱)-۱(۷)+۱(-۲)=-۱۱(۰/۵) \quad ,\mid A\mid =۲(۰/۲۵)$ $\mid A\mid +\mid B\mid =۲+(-۱۱)=-۹(۰/۲۵)$	۱/۷۵
۴	الف) $\mid A\mid =۵\mid A\mid \ -۲۴ \xrightarrow{(۰/۵)} \mid A\mid =۶ \quad (۰/۲۵)$ ب)ماتریس **A** وارون پذیر است و وارون آن برابر است با: $A^{-۱}=\underbrace{\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۵ & -۸ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}}_{(۰/۵)}$	۱/۲۵
۵	$\begin{bmatrix} ۱ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} ۲+x & ۴+۲x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{(۰/۵)}=\underbrace{\begin{bmatrix} ۴+۲x+۴+۲x \end{bmatrix}}_{(۰/۵)}=۰\rightarrow x=-۲ \quad (۰/۲۵)$	۱/۲۵
۶	مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند ،عمود منصف پاره خط AB است این خط را **d** می نامیم (۰/۲۵) و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C و **D** به یک فاصله باشد ،عمود منصف پاره خط CD است این خط را d' می نامیم (۰/۲۵) بنابراین نقطه برخورد خطوط **d** و d' جواب مسئله است.(نقطه **E**)(۰/۲۵) اگر خطوط **d** و d' متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد. (۰/۲۵) اگر خطوط **d** و d' منطبق باشند مسئله بی شمار جواب دارد. (۰/۲۵) اگر خطوط **d** و d' موازی باشند مسئله جواب ندارد. (۰/۲۵) 	۱/۵
	« ادامه در صفحه دوم »	

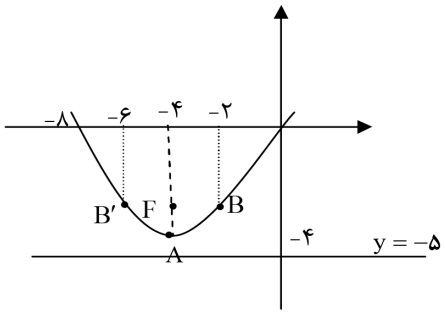
باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **هندسه ۳**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۹/۴/۱۴**	
دانش آموزان روزانه سراسرکشور **خرداد ماه** سال **۱۳۹۹**		مرکز سنجش وپایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۷	$OH=\underbrace{\frac{\lvert ۲(-۱)+۱(-۱)-۲\rvert}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}\ (۰/۲۵)$ $\overset{\Delta}{AOH}(H=۹۰):OH^۲+AH^۲=OA^۲\longrightarrow(\sqrt{۵})^۲+۳^۲=r^۲(۰/۲۵)$ $r=۳(۰/۲۵)\longrightarrow(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۹(۰/۲۵)$ 	۱/۲۵
۸	مرکز وشعاع دایره را به دست می آوریم $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰\rightarrow o(۱,-۱)\ ,\ r=\sqrt{۲}\ \ (۰/۵)$ $OA=۱\ (۰/۲۵)\ \rightarrow OA<r$ نقطه داخل دایره قرار دارد.(۰/۲۵)	۱
۹	$OM=OA=a\ \ (۰/۲۵)$ $\overset{\Delta}{OMF}:OF^۲+MF^۲=OM^۲\xrightarrow{(۰/۲۵)}c^۲+MF^۲=a^۲\xrightarrow{(۰/۲۵)}MF=b\,(۰/۲۵)$	۱
۱۰	$۲a=\sqrt{۲}\ (۲b)\rightarrow a=b\sqrt{۲}\xrightarrow{(۰/۲۵)}\underbrace{\cos B_۱=\frac{OB}{BF}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{b}{b\sqrt{۲}}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}_{(۰/۲۵)}\rightarrow B_۱=۴۵^\circ\ (./۲۵)$ $F\hat{B}F'=۲\times۴۵=۹۰^\circ\ \ (۰/۲۵)$ 	۱/۵
۱۱	$۲b=۲۴\ \ ,\underbrace{b=۱۲}_{(۰/۲۵)},c=۵\xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲}a^۲=\underbrace{۱۲^۲}_{(۰/۲۵)}+۵^۲\rightarrow a=۱۳(۰/۲۵),\frac{c}{a}=\frac{۵}{۱۳}\ (۰/۲۵)$	۱
	« ادامه در صفحه سوم »	

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **هندسه ۳**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۹/۴/۱۴**	
دانش آموزان روزانه سراسرکشور **خرداد ماه** سال **۱۳۹۹**		مرکز سنجش وپایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۲	الف) فرم استاندارد سهمی به صورت $(x+۴)^۲=۴(y+۴)$ است (۰/۵) سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا باز می شود. (۰/۲۵) راس سهمی نقطه $A(-۴,-۴)$ است(۰/۲۵) و $a=۱$ (۰/۲۵) ، مختصات کانون آن نقطه $F(-۴,-۴+۱)=(-۴,-۳)$ است(۰/۲۵). معادله خط هادی سهمی به صورت $y=-۴-۱=-۵$ است (۰/۲۵). ب)نقاط کمکی $B(-۲,-۳)$ و $B'(-۶,-۳)$ (۰/۵) رسم سهمی با استفاده از نقاط کمکی (۰/۲۵)  	۲/۵
	ب) بخش انتخابی	
۱۳	الف) $\underbrace{\frac{۲m}{۲}\neq\frac{۳}{-۱}}_{(۰/۵)}\rightarrow m\neq -۳$ (۰/۲۵) $A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\longrightarrow \lvert A\rvert=-۱۰\neq ۰,$ (۰/۲۵) , $A^{-۱}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}$ (۰/۲۵) ب) $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\underbrace{\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=-۱\end{cases}$ (۰/۵)	۲
۱۴	$y^۲=۴(x-۱)\rightarrow S(۱,۰)$ (۰/۲۵) , $F(۲,۰)$ (۰/۲۵) $(x-۲)^۲+y^۲=۹$ (۰/۲۵) , $\begin{cases}y^۲=۴x-۴\\ y^۲=-x^۲+۴x+۵\end{cases}\xrightarrow{(۰/۲۵)}\begin{cases}x=۳(۰/۲۵) & \text{ق ق}\\ x=-۳(۰/۲۵) & \text{غ ق ق}\end{cases}$ $M(۳,۲\sqrt{۲})$, $M'(۳,-۲\sqrt{۲})$ (۰/۵)	۲
	« ادامه در صفحه چهارم »	

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **هندسه ۳**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۳۹۹/۴/۱۴**	
دانش آموزان **روزانه** سراسرکشور **خرداد ماه** سال **۱۳۹۹**		مرکز سنجش وپایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۵	الف) بردار $\vec{a}$ در ناحیه چهارم (۰/۵)	۲
	ب) $\vec{a}+۲\vec{b}=(۳,-۲,۱)+۲(-۲,۱,-۱)=(-۱,۰,-۱)$ (۰/۵) $\lvert\vec{a}+۲\vec{b}\rvert=\sqrt{۲}$ (۰/۲۵)	
	پ) ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر آنها عمود است (۰/۲۵)	
	$\vec{a}\times\vec{b}=(۱,۱,-۱)$ (۰/۵)	
۱۶	الف) $\vec{a}.\vec{b}=(-۲,۰,۲).(۰,۲,۲)=۴$ (۰/۲۵) $\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert=۲\sqrt{۲}$ (۰/۲۵) $\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵) $\rightarrow\theta=۶۰^\circ$ (۰/۲۵)	۲
	ب) $\vec{a}+\vec{b}=(-۲,۰,۲)+(۰,۲,۲)=(-۲,۲,۴)$ (۰/۲۵) $(\vec{a}+\vec{b})'=\underbrace{\frac{(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert^۲}}_{(۰/۲۵)}\vec{b}=\underbrace{\frac{۱۲}{۸}}_{(۰/۵)}(۰,۲,۲)=(۰,۳,۳)$	
	" مصحح گرا می، به راه حل‌های درست و منطبق بر کتاب درسی بارم به تناسب منظور شود"	۲۴

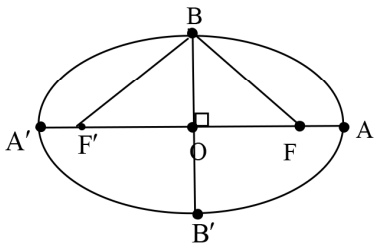
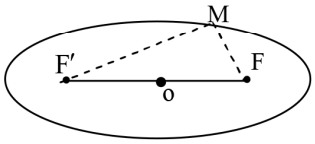
باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **هندسه ۳**	تعداد صفحه: **۳**	تاریخ امتحان: **۱۴۰۰/۳/۲۳**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	رشته : **ریاضی فیزیک**	مدت امتحان : **۱۳۵** دقیقه	نام و نام خانوادگی :
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشوردر نوبت **خرداد** ماه سال **۱۴۰۰**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
	استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است .	
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید . الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & f \\ ۰ & a & ۰ \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد،حاصل دترمینان ماتریس برابر.....است. ب) اگر صفحهٔ P با مولد(d)موازی باشد و از راس سطح مخروطی عبور کند ، در این صورت فصل‌مشترک صفحه P وسطح مخروطی یک .....است. پ)دربیضی ،در حالتی که $\frac{c}{a}=۰$ بیضی به ..... تبدیل می شود . ت)در فضای $R^{۳}$ ، نقطه $(-۳,۲,-۵)$ در ناحیه(کنج) .....دستگاه مختصات قرار دارد.	۱
۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف)اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و $rA=rB$ آن‌گاه داریم: $A=B$. ب) مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند، یک نیم خط عمود بر خط dدر نقطهٔ A است. پ)در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد ، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. ت)اگر زاویه بین دو بردارمخالف صفر، منفرجه باشد ، آنگاه ضرب داخلی آنها یک عدد حقیقی مثبت است .	۱
۳	دوماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.	۱
۴	اگر $۲A=\begin{bmatrix} \lvert A\rvert & -۴ \\ ۱ & \lvert A\rvert \end{bmatrix}$ باشد ، در این صورت حاصل $\lvert A^{-۱}\rvert$ را بیابید.	۱/۵
۵	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} ۳x-۴y=۷ \\ ۲x+y=۱ \end{cases}$	۱
	« ادامه سوالات در صفحه دوم »	

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **هندسه ۳**	تعداد صفحه: **۳**	تاریخ امتحان: **۱۴۰۰/۳/۲۳**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	رشته : **ریاضی فیزیک**	مدت امتحان : **۱۳۵** دقیقه	نام و نام خانوادگی :
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشوردر نوبت **خرداد** ماه سال **۱۴۰۰**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
۶	معادله دایره ای را بنویسیدکه مرکز آن $O'(۲,۱)$ بوده وبرخط $۳x+۴y=-۵$ مماس باشد.	۱
۷	وضعیت دایره $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ با دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.	۱/۵
۸	در شکل مقابل اگر $OF=c, OB=b, OA=a$ باشد ،ثابت کنید : $a^۲=b^۲+c^۲$ 	۱
۹	نقطه M روی بیضی به اقطار ۱۰ و۶ واحد به گونه ای قرار دارد، که فاصله آن تا مرکزبیضی برابر ۴ واحد است . الف)نشان دهید مثلث MFF' قائم الزوایه است. ب)طول MF را به دست آورید . (F, F' کانون های بیضی هستند و $MF<MF'$). 	۱/۵
۱۰	اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس سهمی و $y=۷$ معادلهٔ خط هادی سهمی باشد الف) معادله سهمی را به دست آورید. ب) مختصات کانون سهمی را بیابید	۱/۲۵
۱۱	در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره ای به قطر ۶۰ واحد وگودی (عمق) ۹واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۲	به سؤالات زیر پاسخ دهید . الف)اگر $y=b$ معادلهٔ صفحه‌ای در فضای $R^۳$ باشدکه از نقطه $A=(۲,-۳,۴)$ بگذرد،مقدار عددی b چقدر است؟ ب) معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ y=۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات $R^۳$ است؟ پ) در فضای $R^۳$ ، نقطه A به عرض۲وارتفاع۳ روی صفحه yoz و نقطه $B=(-۴,۶,-۳)$ مفروض‌اند مختصات وسط AB را بیابید.	۱/۵
	« ادامه سوالات در صفحه سوم »	

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **هندسه ۳**	تعداد صفحه: **۳**	تاریخ امتحان: **۱۴۰۰/۳/۲۳**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	رشته : **ریاضی فیزیک**	مدت امتحان : **۱۳۵** دقیقه	نام و نام خانوادگی :
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشوردر نوبت **خرداد** ماه سال **۱۴۰۰**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
۱۳	اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$، $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ باشندآنگاه تصویرقائم بردار $\vec{a}$ برامتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۴	اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$بردارهایی باشند به ترتیب باطول های ۱و۲و۳ بااین ویژگی که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$ ، مقدار عددی عبارت $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۵	ثابت کنید : دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.	۱/۲۵
۱۶	سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروض‌اند. الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به‌دست آورید. ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به‌دست آورید.	۲
	موفق و سربلند باشید — جمع نمره	۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **هندسه ۳**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۴۰۰/۳/۲۳**	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشوردر نوبت **خرداد** ماه سال **۱۴۰۰**		مرکز سنجش وپایش کیفیت آموزشی	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) ۸ (۰/۲۵) ب)خط (۰/۲۵) پ) دایره(۰/۲۵) ت)۶ (۰/۲۵)	۱
۲	الف)درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) پ) درست (۰/۲۵) ت)نادرست (۰/۲۵)	۱
۳	$\begin{cases} m-2=0 \\ n+1=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m=2 \quad (0/25) \\ n=-1 \quad (0/25) \end{cases}$ $AB=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}(0/5)$	۱
۴	$\underbrace{\lvert 2A\rvert=(\lvert A\rvert^2+4)}_{(0/5)} \longrightarrow \underbrace{(\lvert A\rvert-2)^2=0}_{(0/25)} \longrightarrow \lvert A\rvert=2 \quad (0/25)$ $\underbrace{\lvert A^{-1}\rvert=\frac{1}{\lvert A\rvert}}_{(0/25)}=\frac{1}{2}(0/25)$	۱/۵
۵	$A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\underbrace{\frac{1}{3+8}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_{(0/5)}\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}}_{(0/25)}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}(0/25)$	۱
۶	فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر است با : $r=\frac{\lvert 3(2)+4(1)+5\rvert}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{15}{5}=3 \quad (0/5)$ معادله دایره ای برابر است با $(x-2)^2+(y-1)^2=9 \quad (0/5)$	۱
۷	مرکز وشعاع دایره $x^2+y^2-6x-2y+9=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=1$ برابر است با $O'=(3,1) \ , r'=1$ (۰/۵) فاصله دو مرکز برابر $d=oo'=\sqrt{(3)^2+(1)^2}=\sqrt{10} \quad (0/5)$ و $d\rangle r+r'=2 \quad (0/25)$ دو دایره بیرون یکدیگرند(متخارجند)(۰/۲۵) .	۱/۵

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **هندسه ۳**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۴۰۰/۳/۲۳**	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشوردر نوبت **خرداد** ماه سال **۱۴۰۰**		مرکز سنجش وپایش کیفیت آموزشی	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۸	نقطه B روی عمودمنصف پاره خط FF' قرار دارد درنتیجه: $BF = BF'$ (۱) . (۰/۲۵) فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی : $BF + BF' = ۲a \xrightarrow{(۱)} BF = BF' = a$ (۰/۲۵) بنا به رابطه فیثاغورث در مثلث BOF داریم : $OF^۲ + OB^۲ = BF^۲ \xrightarrow{(۰/۲۵)} c^۲ + b^۲ = a^۲$ (۰/۲۵)	۱
۹	الف) $\begin{cases} ۲a = ۱۰ \longrightarrow a = ۵ \\ ۲b = ۶ \longrightarrow b = ۳ \end{cases}$ (۰/۲۵) $\longrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \longrightarrow c = ۴$ (۰/۲۵) در مثلث MFF' میانه وارد بر یک ضلع $MO = \frac{۱}{۲}FF' = ۴$ نصف ضلع روبرو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم الزاویه است. (۰/۲۵) ب) $MF + MF' = ۲a = ۱۰ \longrightarrow MF' = ۱۰ - MF$ (۰/۲۵) $MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \longrightarrow \underbrace{MF^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = ۸^۲}_{(۰/۲۵)} \longrightarrow MF = ۵ - \sqrt{۷}$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۰	الف)با استفاده ازجایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات خواهیم داشت : $a = ۴$ (۰/۲۵) دهانه سهمی روبه پایین است ومعادله آن برابراست با $(x-۲)^۲ = -۴(۴)(y-۳)$ (۰/۵) ب)مختصات کانون سهمی برابر است با $F = (۲,-۱)$ (۰/۵).	۱/۲۵
۱۱	اگر قطر دهانه دیش را با $۲b$ و گودی را با h نمایش دهیم .فاصله کانونی برابر $a = \frac{۴b^۲}{۱۶h}$ (۰/۲۵) است. $h = ۹$, $۲b = ۶۰$ با جایگذاری در رابطه فوق داریم: $a = \frac{(۲b)(۲b)}{۱۶h} = \frac{۶۰ \times ۶۰}{۱۶(۹)} = ۲۵$ (۰/۵) (اگر رابطه فوق به صورت $a = \frac{b^۲}{۴h} = \frac{(۳۰)^۲}{۴(۹)} = ۲۵$ (۰/۷۵) نوشته شود درست است.)	۰/۷۵
۱۲	الف) $b = -۳$ (۰/۵)ب) محور Z ها(۰/۵) پ)نقطه $A = (۰,۲,۳)$ (۰/۲۵) و مختصات وسط AB برابر است با: $(-۲,۴,۰)$(۰/۲۵)	۱/۵
۱۳	$\vec{b} + \vec{c} = (۲,-۳,۶)$ (۰/۵) , $\underbrace{\vec{a'} = \frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{\lvert(\vec{b}+\vec{c})\rvert^۲}(\vec{b}+\vec{c})}_{۰/۲۵} = \frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)$ (۰/۷۵)	۱/۵

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **هندسه ۳**	رشته: **ریاضی فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدّت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان : **۱۴۰۰/۳/۲۳**	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشوردر نوبت **خرداد** ماه سال **۱۴۰۰**		مرکز سنجش وپایش کیفیت آموزشی	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۴	$\left\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right\|^{۲}=\left\|\vec{o}\right\|^{۲}\quad(۰/۲۵)\Rightarrow \left\|\vec{a}\right\|^{۲}+\left\|\vec{b}\right\|^{۲}+\left\|\vec{c}\right\|^{۲}+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰\quad(۰/۵)\Rightarrow$ $۱+۴+۹+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰\quad(۰/۲۵)\Rightarrow(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=-۷\quad(۰/۲۵)$	۱/۲۵
۱۵	$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\Leftrightarrow \underbrace{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}_{۰/۲۵}=\left\|\vec{o}\right\|\Leftrightarrow \underbrace{\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\times\underbrace{\sin\theta}_{۰/۲۵}}_{}=۰\quad\xrightarrow{\left\|\vec{a}\right\|\neq۰,\left\|\vec{b}\right\|\neq۰}$ $\underbrace{\sin\theta=۰}_{۰/۲۵}\Leftrightarrow\underbrace{\theta=۰\vee\theta=\pi}_{۰/۲۵}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}\ (۰/۲۵)$	۱/۲۵
۱۶	الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابراست با : $\underbrace{(-۲\vec{b})\times\vec{c}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{(۲,-۲,۰)}_{(۰/۲۵)}\times(۲,۱,-۲)=\underbrace{(۴,۴,۶)}_{(۰/۵)}$ ب) حجم متوازی السطوح تولید شده توسط سه بردار $\vec{a}$ و$\vec{b}$و $\vec{c}$ برابر است با : $\left\|\underbrace{(\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}))}_{(۰/۲۵)}\right\|=\left\|(۲,۳,۱).\underbrace{(-۲,-۲,-۳)}_{(۰/۵)}\right\|=\underbrace{۱۳}_{(۰/۲۵)}$	۲
	" مصحح گرا می، به راه حل‌های درست و منطبق بر کتاب درسی بارم به تناسب منظور شود"	۲۰

بزرگ ترین همایش جمع بندی هندسه گسسته در کلاسینو

چند روز قبل کنکور

همراه با شما سر جلسه

شبیه ساز کنکور ۱۴۰۱