

## باسمه تعالی

پیش نویس سرفصل های کتاب درسی ریاضیات گسسته رشته ریاضی پایه دوازدهم به قرار زیر اعلام می گردد.

۱- بخشپذیری

۲- گراف و کاربردها

۳- ترکیبیات



# مرکز مشاوره تحصیلی

# علیرضا افشار



## بخش پذیری و هم نهستی

۲

- ۱ بخش پذیری در اعداد صحیح
- ۲ رابطه هم نهستی روی  $Z$  و کاربردهای آن

علیرضا افشار

## درس ۱ بخش پذیری در اعداد صحیح<sup>۱</sup>

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی شیء، بدون آنکه باقیمانده‌ای داشته باشیم، یعنی شمارش آن اشیا توسط شمارنده‌ها، مثلاً، ۱۲ شیء را می‌توان توسط شمارنده‌های ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۱۲ شمارش کرد.

به عبارت دیگر شمارنده‌های هر عدد مانند ۱۲ می‌توانند آن عدد را بشمارند. در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد « $a$ » استفاده کرده می‌نویسیم  $2|12$  و می‌خوانیم ۲ می‌شمارد ۱۲ را یا ۲ عاد می‌کند عدد ۱۲ را (عاد کردن یعنی همان شمردن) و یا عدد ۱۲ بر ۲ بخش پذیر است (باقیمانده تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که شمارش تعدادی شیء خاص به صورت صفر تا صفر کار بیهوده‌ای است و لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد یا هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش پذیر نمی‌باشد و نیز توجه دارید که هر عدد بر خودش و ۱ بخش پذیر است؛ یعنی اگر  $a$  عددی طبیعی باشد  $a|a$  و  $1|a$ . (عدد ۱، هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد بر خودش بخش پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش پذیری  $a$  بر  $b$  معادل است با اینکه بنویسیم  $b|a$  ( $a, b$  را می‌شمارد یا  $a, b$  را عاد می‌کند) مفهوم بخش پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به کار برد مثلاً می‌توان گفت، عدد  $-28$  بر  $4$  بخش پذیر است (زیرا،  $-28 = 4 \times (-7)$  یا باقیمانده تقسیم  $-28$  بر عدد  $4$ ، صفر است) پس در حالت کلی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعه اعداد صحیح مفهوم عاد کردن به صورت زیر تعریف می‌شود.

عدد صحیح  $a$  که مخالف صفر است<sup>۲</sup> شمارنده عدد  $b$  است یا  $a$ ،  $b$  را می‌شمارد یا  $b$  بر  $a$  بخش پذیر است یا  $a|b$  هرگاه عددی صحیح چون  $q$  وجود داشته باشد به طوری که  $b = aq$ .

۱- در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.

۲- اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

## کارد در کلاس

۱ با توجه به تعریف رابطه عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف)  $7 \mid 63 \Leftrightarrow 63 = \dots \times \dots$

ب)  $91 = 7 \times \dots \Leftrightarrow \dots \mid 91$

پ)  $-6 \mid 54 \Leftrightarrow \dots = \dots \times (-6)$

ت)  $5 \mid -35 = \Leftrightarrow \dots = 5 \times \dots$

ث)  $0 = 18 \times \dots \Leftrightarrow 18 \mid \dots$

ج)  $a \mid 1 \Rightarrow a = \dots$  یا  $a = \dots$

چ)  $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 \mid \dots$  و  $\dots \mid 26$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و تقسیم اعداد توان دار با پایه‌های برابر ابتدا نشان دهید  $3^5 \mid 3^9$  و سپس ثابت کنید:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

$$(3^9 = 3^5 \times 3^4 \Rightarrow 3^5 \mid \dots)$$

## خواص رابطه عاد کردن

۱ اگر عدد  $a$  عدد  $b$  را بشمارد، آنگاه هر مضرب عدد  $b$  را نیز می‌شمارد یعنی،

$$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

مثال:  $3 \mid 6 \Rightarrow 3 \mid 6 \times 5, 3 \mid 6 \times 4, 3 \mid 6 \times (-7), \dots$

نتیجه: اگر عدد  $a$  عدد  $b$  را بشمارد، آنگاه  $b^n$  را می‌شمارد و در حالت کلی  $b^n$  را می‌شمارد که  $n \in \mathbb{N}$  است. یعنی:

$$\begin{cases} \text{الف) } a \mid b \Rightarrow a \mid b^2 \\ \text{ب) } a \mid b \Rightarrow a \mid b^n \end{cases}$$

برای اثبات (الف) کافی است از خاصیت ۱ استفاده کرده و  $m$  را مساوی  $b$  فرض کنیم و برای اثبات (ب) کافی است

$m = b^{n-1}$  فرض شود.

سؤال: آیا از اینکه  $a \mid bc$  می‌توان نتیجه گرفت که  $a$  حداقل یکی از دو عدد  $b$  و  $c$  را عاد می‌کند؟ به گزاره‌های زیر دقت

کنید و پس از آن پاسخ سؤال را بیان کنید.

الف)  $3 \mid 6 \times 9$  و  $3 \mid 6$  و  $3 \mid 9$

ب)  $3 \mid 6 \times 5$  و  $3 \mid 6$  و  $3 \mid 5$

ج)  $6 \mid 3 \times 4$  و  $6 \mid 3$  و  $6 \mid 4$

سؤال: آیا از اینکه  $a \mid b$  می‌توان نتیجه گرفت  $ka \mid kb$ ؟ آیا از  $ka \mid kb$  می‌توان نتیجه گرفت  $a \mid b$ ؟

$$a \mid b \Rightarrow b = \overset{\text{در } k \text{ ضرب}}{\dots} \Rightarrow kb = \dots \Rightarrow \dots$$

$$ka \mid kb \Rightarrow kb = \dots \Rightarrow \overset{\text{بر } k \text{ تقسیم}}{b} = \dots \Rightarrow \dots$$

۲ اگر عدد  $a$ ، عدد  $b$  را بشمارد و  $b$  نیز  $c$  را بشمارد آنگاه  $a$ ، عدد  $c$  را می‌شمارد.

$$a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$$

اثبات: 
$$\begin{cases} a|b \Rightarrow b = aq_1 \text{ (۱)} \\ b|c \Rightarrow c = bq_2 \end{cases}$$

$$c = bq_2 \stackrel{(۱)}{\Rightarrow} c = \dots q_2 \stackrel{q_1 q_2 = q}{\Rightarrow} c = a \dots \Rightarrow a|c$$

این خاصیت را خاصیت تعدی برای رابطه عاد کردن، می‌نامیم.

سؤال: با استفاده از خاصیت تعدی برای رابطه عاد کردن و کار در کلاس قبل (شماره ۳) نشان دهید:

$$a|b \Rightarrow a|b^n$$

تعدی  $a|b$ : طبق فرض  
 $\Rightarrow \dots | \dots$   
 و می‌دانیم  $b|b^n$

۳ هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$a|b, a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

اثبات: 
$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = \dots \times q_1 \\ a|c \Rightarrow \dots = aq_2 \end{array} \right\} \Rightarrow b \pm c = \dots \underbrace{(\dots)}_q \Rightarrow a|\dots$$

سؤال: آیا از اینکه  $a|b \pm c$  همواره می‌توان نتیجه گرفت که  $a|b$  یا  $a|c$ ؟

۴ اگر  $a|b$  و  $b \neq 0$  در این صورت  $|a| \leq |b|$ .

اثبات: چون  $a|b$  پس  $b = aq$  و چون  $b \neq 0$  پس  $q \neq 0$  و چون  $q \in \mathbb{Z}$  لذا  $|q| \geq 1$ . حال اگر طرفین نامساوی اخیر را

در  $|a|$  ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$1 \leq |q| \Rightarrow |a| \times 1 \leq |a| |q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq \dots$$

نتیجه: اگر  $a|b$  و  $b$  آنگاه  $a = \pm b$ .

اثبات: 
$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow |a| \leq \dots \text{ (۴)} \\ b|a \Rightarrow \dots \leq |a| \text{ (۴)} \end{array} \right\} |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

### کار در کلاس

۱ اگر  $a \neq 0$  عددی صحیح و دو عدد  $(7m+6)$  و  $(6m+5)$  بر  $a$  بخش پذیر باشند ثابت کنید  $a = \pm 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} a|7m+6 \Rightarrow a|42m+\dots \\ a|6m+5 \Rightarrow \dots|42m+\dots \end{array} \right\} \Rightarrow a|(42m+36) - (42m+35)$$

$$\Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ (چرا؟)}$$

۲ اگر  $a|b$  نشان دهید که  $a^n|b^n$ .

اثبات: 
$$a|b \Rightarrow b = aq \stackrel{q^n=q'}{\Rightarrow} b^n = \dots \Rightarrow b^n = \dots q' \Rightarrow a^n|b^n$$

۳ اگر  $a|b$  و  $c|d$  نشان دهید که  $ac|bd$ .

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = aq_1 \\ c|d \Rightarrow \dots = \dots \end{array} \right\} \Rightarrow b \times d = (a \times c) \underbrace{(q_1 q_2)}_q$$

$$\Rightarrow \dots = a \times c \times q \Rightarrow \dots | bd$$

۴ اگر  $a|b$  و  $a|c$  نشان دهید که  $a|mb \pm nc$ .

(از خاصیت ۱ و خاصیت ۳ استفاده کنید).

در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول آشنا شده‌اید (هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود) این مجموعه که مجموعه‌ای نامتناهی است به صورت  $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  نمایش داده می‌شود.

تذکر: با توجه به تعریف عدد اول، اگر  $p$  عددی اول باشد و  $a$  عددی طبیعی و  $a|p$  در این صورت  $a=1$  یا  $a=p$ .

مثال: اگر  $a$  عددی طبیعی باشد و دو عدد  $(9k+7)$  و  $(7k+6)$  را عا د کند، ثابت کنید  $a=1$  یا  $a=5$ .

$$a | 9k+7 \Rightarrow a | 7 \times (9k+7) \Rightarrow a | 63k + \dots$$

$$a | 7k+6 \Rightarrow a | 9 \times (7k+6) \Rightarrow a | \dots + 54$$

$$\Rightarrow a | (\dots + 54) - (63k + \dots) \Rightarrow a | 5 \Rightarrow a = \dots \text{ یا } a = \dots$$

### خواندنی

می‌دانیم هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی  $10!$  عدد  $10!$  را عا د می‌کند (چرا؟) و به‌طور کلی می‌توان نوشت:  $\forall k \leq n, k|n!$  بنابراین عدد  $100!+2$  عددی اول/ غیر اول است و همین‌طور عدد  $100!+3$  عددی اول/ غیر اول است و بالاخره عدد  $100!+100$  نیز عددی ... است. بنابراین با توجه به اینکه اعداد  $(100!+2)$  و  $(100!+3)$  و ...  $(100!+100)$ ،  $99$  عدد طبیعی و متوالی‌اند ما توانسته‌ایم  $99$  عدد طبیعی متوالی بیابیم که هیچ‌کدام ... نباشند.

آیا شما می‌توانید  $15$  عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ‌کدام اول نباشند؟

(برای اینکه نشان دهیم عدد  $100!+7$  بر  $7$  بخش‌پذیر است، کافی است از یک  $7$  در دو عدد  $100!$  و  $7$ ،

$$\text{فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عا د کردن بنویسیم } 7 | 100! + 7 \Rightarrow 7 | 7 \text{ و } 7 | 100!$$

حال می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطهٔ عا د کردن، مفاهیم  $b|m$  (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیهٔ مشترک) و  $k|m$  (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیهٔ همان شمارنده است اگر بنویسیم  $a|b$  یعنی  $a$  شمارندهٔ  $b$  است یا  $b$  بر  $a$  بخش‌پذیر است و این یعنی

$$a \text{ مقسوم‌علیهٔ } b \text{ است و نیز توجه دارید که } b \text{ مضرب } a \text{ است یعنی } b = aq \text{ یا } a|b.$$

**تعریف:** عدد طبیعی  $d$  را ب م م دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  می نامیم ( $a$  و  $b$  هر دو با هم صفر نیستند) و می نویسیم  $(a, b) = d$  هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند و اگر دو شرط زیر برقرار باشند آنگاه  $(a, b) = d$ .

الف)  $d | a, d | b$

ب)  $\forall m > 0 : m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$

شرط (الف) مقسوم علیه مشترک بودن را برای  $d$  تأمین می کند و شرط (ب) نشان می دهد از هر مقسوم علیه مشترک دلخواهی چون  $m$ ، بزرگ تر است.

به خاطر دارید که اگر  $(a, b) = 1$  در این صورت می گوئیم،  $a$  و  $b$  نسبت به هم اولند.

مثال:  $(1, 12) = 1$  ,  $(7, 11) = 1$  ,  $(4, 9) = 1$  ,  $(3, 4) = 1$

$(4, -6) = 2$  ,  $(0, 6) = 6$  ,  $(8, 16) = 8$  ,  $(6, 9) = 3$

**تعریف:** عدد طبیعی  $c$  را ک م م دو عدد ناصفر  $a$  و  $b$  می نامیم و می نویسیم  $[a, b] = c$  هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند و اگر دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند آنگاه  $[a, b] = c$

الف)  $a | c$  ,  $b | c$

ب)  $\forall m > 0$  ,  $a | m$  ,  $b | m \Rightarrow c \leq m$

توضیح دهید که شرط های (الف) و (ب) هر یک چه ویژگی را تأمین می کنند؟

مثال:  $(-4, 16) = 16$  ,  $[1, 8] = 8$  ,  $[6, 4] = 12$  ,  $[3, 4] = 12$

## کار در کلاس

۱ با توجه به تعاریف ب م م و ک م م ثابت کنید:

الف)  $a | b \Rightarrow (a, b) = |a|$

ب)  $a | b \Rightarrow [a, b] = |b|$

راهنمایی: برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م م را برای  $|a|$  بررسی کنیم یعنی نشان دهیم  $|a| | a$  و ...

و نیز برای هر  $m > 0$  که  $m | a$  و  $m | b$  نشان دهیم  $d \leq \dots$  و همین طور برای اثبات (ب) ...

۲ اگر  $p$  عددی اول باشد و  $a \in \mathbb{Z}$  و  $p \nmid a$ ، ثابت کنید،  $(p, a) = 1$

فرض کنیم  $(p, a) = d$   $\begin{cases} d | p \xrightarrow{\text{اول } p} d = 1 \text{ یا } \dots \\ d | a \end{cases}$  ①

و این با فرض  $p \nmid a$  تناقض دارد)  $d = p \xrightarrow{\text{①}} p | \dots$

پس فقط  $d = \dots$  یا  $(p, a) = \dots$ .

تذکر: توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند مطلب کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد:

$4 \nmid 6$  ولی  $(4, 6) = 2 \neq 1$

## قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$  باقیمانده صفر نباشد یا به بیان دیگر  $a$  بر  $b$  بخش پذیر نباشد ( $b \nmid a$ ) در این صورت قضیه تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می پذیریم) کمک می کند تا بحث بخش پذیری در  $\mathbb{Z}$  را کامل کنیم.

**قضیه تقسیم:** اگر  $a$  عددی صحیح و  $b$  عددی طبیعی باشد در این صورت، (با تقسیم  $a$  بر  $b$ ) اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند  $q$  و  $r$  یافت می شوند به قسمی که  $a = bq + r$  و  $0 \leq r < b$ .

تذکر: همان طور که از مقطع ابتدایی به خاطر دارید در یک تقسیم وقتی  $a$  را بر  $b$  تقسیم می کنیم،  $a$  را مقسوم،  $b$  را مقسوم علیه،  $q$  را خارج قسمت و  $r$  را باقیمانده می نامیم.

مثال: اگر باقیمانده تقسیم اعداد  $m$  و  $n$  بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقیمانده تقسیم عدد  $(2m - 5n)$  را بر ۱۷ به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} m = 17q_1 + 5 \\ n = 17q_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m = 2 \times 17q_1 + 10 \\ -5n = (-5) \times 17q_2 - 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q_1 - 5q_2) - 5 = 17(2q_1 - 5q_2 + 1 - 1) - 5 = 17(\underbrace{2q_1 - 5q_2}_{q_r} - 1) + 17 - 5$$

$$\Rightarrow (2m - 5n) = 17(\underbrace{q_r - 1}_{q_r}) + 12 = 17q_r + 12 \Rightarrow \text{باقیمانده} = r = 12$$

## افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیه تقسیم می دانیم که اگر  $a$  عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی  $b$ ، و با توجه به اینکه باقیمانده تقسیم یعنی  $r$  در رابطه  $0 \leq r < b$  صدق می کند، برای  $a$  بر حسب  $r$  دقیقاً  $b$  حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح  $a$  را بر ۵ تقسیم کنیم در این صورت یا  $a$  بر ۵ بخش پذیر است یعنی  $r = 0$  یا باقیمانده تقسیم  $a$  بر ۵ عدد ۱ است یا ... یا باقیمانده تقسیم ۴ است به عبارت دیگر،  $a = 0 \dots$  یا  $a = 5k + 3$  یا  $a = 0 \dots$  یا  $a = 5k + 1$  یا  $a = 5k$  یا  $a = 5k$  پس می توان گفت هر عدد صحیح مانند  $a$  را می توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

مسئله ۱: اگر  $m \in \mathbb{Z}$  نشان دهید که  $m$  را به یکی از دو صورت  $2k$  یا  $2k + 1$  (زوج یا فرد) می توان نوشت.

حل: کافی است  $m$  را بر ۲ تقسیم کنیم که در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$m = 2k + r, \quad 0 \leq r < 2 \Rightarrow m = \dots \text{ یا } m = \dots$$

مسئله ۲: ثابت کنید اگر  $P > 3$  عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت  $P = 6k + 1$  یا  $P = 6k + 5$  نوشته می شود.

حل: کافی است  $P$  را بر ۶ تقسیم کنیم در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$P = 6k \quad (1)$$

$$P = 6k + 1 \quad (2)$$



$$P = 6k + 2 \quad (3)$$

$$P = 6k + 3 \quad (4)$$

$$P = 6k + 4 \quad (5)$$

$$P = 6k + 5 \quad (6)$$

$P$  در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودن آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از  $P = 3(k+1)$  یا  $P = 3k$  یا  $P = 3|P$  که با اول بودن  $P$  در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلی برقرار نیست مثلاً  $(25 = 6 \times 4 + 1)$  ولی ۲۵ اول نیست.)

مسئله ۳: ابتدا ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد مانند  $a$  به یکی از دو صورت  $4k+1$  یا  $4k+3$  نوشته می‌شود و سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل  $(8t+1)$  نوشته می‌شود (باقیمانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است).  
حل: فرض کنیم  $a \in \mathbb{Z}$  و  $a$  فرد باشد، اگر  $a$  را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$a = 4k \quad (1)$$

$$a = 4k + 1 \quad (2)$$

$$a = 4k + 2 \quad (3)$$

$$a = 4k + 3 \quad (4)$$

(چهار مجموعه  $A_1 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k\}$  و  $A_2 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 1\}$  و  $A_3 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 2\}$  و  $A_4 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 3\}$  مجموعه  $\mathbb{Z}$  را افزاینده می‌کنند.)  
حالت‌های ... و ... زوج بوده و لذا  $a = 4k + 1$  یا  $a = 4k + 3$

$$\text{اگر } a = 4k + 1 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8 \underbrace{(2k^2 + k)}_{k'} + 1 = 8k' + 1$$

$$\text{اگر } a = 4k + 3 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 8 \underbrace{(2k^2 + 3k + 1)}_t + 1 = 8t + 1$$

### تمرین

۱ اگر فرض کنیم  $ab = cd$  ( $a, b, c, d$  اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطه عادی از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲ اگر  $a|b$  ثابت کنید  $a|-b$  و  $a|b$  و  $-a|b$  و  $-a|-b$ .

۳ اگر  $a > 1$  و  $a|9k+4$  و  $a|5k+3$  ثابت کنید  $a$  عددی اول است.

۴ اگر  $k$  ای در  $\mathbb{Z}$  باشد که داشته باشیم،  $5|4k+1$  ثابت کنید:  $25|16k^2 + 28k + 6$

۵ آیا از اینکه  $a|b$  و  $c|d$  همواره می‌توان نتیجه گرفت که  $a+c|b+d$ ؟

۶ ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اولند. (راهنمایی: فرض کنید  $d = (m, m+1)$  و ثابت کنید  $d|1$  و نتیجه بگیرید  $d=1$ ).

۷ اگر  $P \neq q$  و  $P$  و  $q$  هر دو عدد اول باشند ثابت کنید  $(P, q) = 1$ .

۸ اگر  $m, n \in \mathbb{N}$  و  $a, b \in \mathbb{Z}$  در این صورت ثابت کنید:

$$m \leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$$

۹ اگر باقیمانده تقسیم عدد  $a$  بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم عدد  $a$  را بر ۵۶ بیابید.

۱۰ اگر  $a$  عددی صحیح و فرد باشد و  $2|a+b$  در این صورت باقیمانده تقسیم عدد  $(a^2 + b^2 + 3)$  را بر ۸ بیابید.

۱۱ اگر  $n$  عددی صحیح باشد ثابت کنید  $3|n^3 - n$

(راهنمایی: برای  $n$  سه حالت  $n=3k$  و  $n=3k+1$  و  $n=3k+2$  در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید  $3|n^3 - n$ ).

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح  $n$  بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقیمانده تقسیم نیز همواره بر  $n$  بخش پذیر است.

۱۳ اگر  $a$  عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح  $a$  یا  $a+2$  یا  $a+4$  بر ۳ بخش پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد متوالی همواره بر  $3!$  بخش پذیر است.

# مرکز مشاوره تحصیلی

# علیرضا افشار

## درس ۲ رابطه هم‌نهستی روی $\mathbb{Z}$ و کاربردهای آن

### فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقیمانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقیمانده‌ها را نماینده مجموعه‌ای در نظر بگیریم که باقیمانده تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به ترتیب صفر، ۱، ۲ و ۳ باشد داریم:

$$A_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots, 16, \dots\} = [0]_4$$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 1\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, \dots, 13, \dots, 21, \dots\} = [1]_4$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 2\} = \{\dots, -6, \dots, 2, 6, 10, \dots\} = [2]_4$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 3\} = \{\dots, -13, \dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} = [3]_4$$

۱ دو عضو (به صورت دلخواه) از مجموعه  $A_0$  در نظر بگیرید، آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟

۲ از مجموعه  $A_1$  دو عضو دلخواه در نظر گرفته و تفاضل آنها را حساب کنید، آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟

۳ نتیجه‌ای که از ۱ و ۲ گرفتید را در حالت کلی برای هر دو عضو دلخواه از  $A_1$ ، اثبات کنید:

$$a, b \in A_1 \Rightarrow \begin{cases} a = 4k_1 + 1 \\ b = \dots \end{cases} \Rightarrow a - b = (\dots) - (4k_1 + 1)$$

$$\Rightarrow a - b = 4(k_1 - k_2) \Rightarrow 4 \mid \dots$$

۴ آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعه  $A_3$  همگی بر عدد ۴، باقیمانده یکسان دارند؟ در مورد مجموعه  $A_3$  چه می‌توان گفت؟

می‌دانیم مجموعه‌های  $A_0, A_1, A_2, A_3$  یک افزاز برای مجموعه  $\mathbb{Z}$  بوده و بنابراین هر دو عدد صحیح مانند  $a$  و  $b$  یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند یا هر کدام در یک مجموعه واقع هستند ( $A_0, A_1, A_2, A_3$  اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) و لذا اگر  $a$  و  $b$  هر دو در یک مجموعه از

این چهار مجموعه باشند (باقیمانده تقسیم  $a$  بر  $b$  مساوی باشد یا اصطلاحاً  $a$  و  $b$  بر  $4$  هم باقیمانده باشند) همواره  $4 | a - b$  و اگر این طور نباشد  $4 \nmid a - b$ .

تعریف: برای هر عدد طبیعی مانند  $m$  و هر دو عدد صحیح مانند  $a$  و  $b$  اگر  $m | a - b$  (و  $b$  بر  $a$  بر  $m$  هم باقیمانده باشند) می‌گوییم « $a$  هم‌نهشت با  $b$  است به‌سنگ یا پیمانه  $m$ » و می‌نویسیم  $a \equiv b \pmod{m}$ . تعریف رابطه هم‌نهشتی به پیمانه  $m$ ، به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m | a - b \quad (m \in \mathbb{N})$$

قرارداد: مجموعه همه اعداد صحیح که با باقیمانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی  $m$  برابر با  $r$  می‌باشد یعنی،  $[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} | x = mk + r\}$  را کلاس یا دسته هم‌نهشتی  $r$  به پیمانه  $m$  می‌نامیم. برای استفاده از رابطه هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطه عاد کردن، ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی به راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m} \quad \text{ویژگی ۱:}$$

(به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا کم کرد.)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | a + c - b - c \quad \text{اثبات:}$$

$$\Rightarrow m | (a + c) - (\dots + \dots) \Rightarrow (\dots + \dots) \equiv (b + c) \pmod{m}$$

مثال: با توجه به فعالیت قبل فرض کنیم  $7 \equiv -1 \pmod{4}$  یا  $7 \in A_3$  و  $7$  یا  $7 \equiv (-1) \pmod{4}$  در این صورت اگر  $5$  واحد به دو طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم فاصله این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان  $8$  که مضرب  $4$  است باقی می‌ماند به عبارت دیگر اعداد حاصل یعنی  $7 + 5 = 12$  و  $4 + 5 = 9$  نیز در  $A_3$  قرار خواهند گرفت.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m} \quad \text{ویژگی ۲:}$$

(دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | \dots - \dots \Rightarrow m | \dots \times (a - b) \Rightarrow m | ac - \dots \quad \text{اثبات:}$$

$$\Rightarrow \dots \equiv bc \pmod{m}$$

تذکر: عکس ویژگی ۲ برقرار نیست یعنی اگر  $ac \equiv bc \pmod{m}$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که  $a \equiv b \pmod{m}$  (قانون حذف برای رابطه هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m} \quad \text{ویژگی ۳:}$$

(دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان  $n$  برسانیم.) ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$(5 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 5^3 \equiv 2^3 \pmod{3})$$

اثبات: (از اتحاد  $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$  استفاده می‌کنیم)

$$a \equiv b \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | (a-b) \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})}_c \quad (\equiv \Rightarrow \equiv)$$

$$\Rightarrow m | a^n - b^n \Rightarrow \dots \equiv \dots$$

تذکر: می‌دانیم  $5^2 \equiv 3^2$  ولی  $5^4 \not\equiv 3^4$  بنابراین نتیجه می‌گیریم که ...

$$a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow ac \equiv bd \quad (1) \quad a \pm c \equiv b \pm d \quad (2) \quad \text{ویژگی ۴:}$$

(دو طرف دو رابطه هم‌نهشتی که پیمانه‌های یکسان داشته باشند را می‌توان با هم جمع یا منها کرده یا در هم ضرب کرد.)

$$(15 \equiv 10, 7 \equiv 2 \Rightarrow 15 \times 7 \equiv 10 \times 2, 15 \times 2 \equiv 10 \times 7)$$

$$\Rightarrow 15 + 7 \equiv 10 + 2 \Rightarrow 22 \equiv 12$$

اثبات:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \Rightarrow m | \dots \xrightarrow{\times c} \dots \Rightarrow m | ac - bc \\ c \equiv d \Rightarrow m | \dots \xrightarrow{\times b} \dots \Rightarrow m | bc - \dots \end{array} \right\} + \Rightarrow m | (ac - bc) + (\dots - bd)$$

$$\Rightarrow m | ac - \dots \xrightarrow{m} \dots \equiv bd$$

اثبات ۲) به عهده شما

تذکر مهم: (اگر باقیمانده تقسیم  $a$  بر  $m$  مساوی با  $r$  باشد در این صورت  $a \equiv r$ )

$$a = mq + r \Rightarrow a \equiv r$$

$$(279 = 11 \times 16 + 3 \Rightarrow 279 \equiv 3)$$

اثبات:

$$a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m | a - r \Rightarrow \dots \equiv \dots$$

نتیجه ۱: هرگاه بخواهیم هم‌نهشت عدد  $a$  را به پیمانه  $m$ ، مشخص کنیم کافی است عدد  $a$  را بر  $m$  تقسیم کرده و باقیمانده را به دست آوریم.

نتیجه ۲: اگر  $a$  و  $b$  بر عدد طبیعی  $m$ ، هم باقیمانده باشند (باقیمانده‌های تقسیم  $a$  و  $b$  بر  $m$ ، برابر باشد) در این صورت  $a \equiv b$   
مثال: باقیمانده تقسیم عدد  $A = (27)^7 + 19$  را بر ۱۳ بیابید.

$$27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1 \Rightarrow (27)^7 \equiv 1^7 = 1, 19 = 13 \times 1 + 6$$

$$\Rightarrow \underbrace{19}_{\text{①}} \equiv \underbrace{6}_{\text{①}} \Rightarrow (27)^7 + 19 \equiv 1 + 6 \Rightarrow A \equiv 7 \Rightarrow r = 7$$

پس باقیمانده  $A$  بر ۱۳، برابر با ۷ می‌باشد.

مثال: باقیمانده تقسیم عدد  $A = (1000)^{12} \times 12 + 10$  را بر ۷ بیابید.

$$1000 = 7 \times 142 + 6 \Rightarrow 1000 \equiv 6, 6 \equiv -1 \Rightarrow 1000 \equiv -1$$

$$\Rightarrow (1000)^{12} \equiv (-1)^{12} = 1 \Rightarrow (1000)^{12} \times 12 \equiv (-1) \times 12 = -12$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv (-12) + 10 \equiv -2, -2 \equiv 5$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv 5 \Rightarrow r = 5$$

$$a \equiv b \Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$$

ویژگی ۶:

(می توان به دو طرف یک رابطه هم نهستی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.)

$$\begin{array}{l} \text{طبق فرض: } a \equiv b \\ \text{می دانیم: } mt \equiv mk \\ \Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk \end{array}$$

مثال: می دانیم  $7 \equiv 2$  اگر به سمت چپ رابطه  $3 \times 5 = 15$  و به سمت راست آن  $5 \times 5 = 25$  واحد اضافه کنیم خواهیم داشت  $7 + 15 \equiv 2 + 25$  یا  $22 \equiv 27$  که این رابطه برقرار است.

$$ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

ویژگی ۷:

(اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم نهستی را بر عددی تقسیم کنیم می بایست پیمانه آن هم نهستی را بر م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.)

(این ویژگی را بدون اثبات می پذیریم)

نتیجه مهم: اگر  $ac \equiv bc$  و  $(c, m) = 1$  در این صورت  $a \equiv b \pmod{m}$  در واقع قاعده حذف در هم نهستی ها برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد برقرار است.

مثال: واضح است که  $4 \times 6 \equiv 4 \times 3$  و چون  $(4, 3) = 1$  پس  $6 \equiv 3$ .

## فعالیت

همان طور که در مقطع ابتدایی آموختید عدد نویسی ما، در مبنای  $10$  انجام می شود به عبارت دیگر ارزش مکانی ارقام، ده تا ده تا در نظر گرفته می شود (ده تا یکی می شود ده تا و ده تا ده تا می شود صد تا و ده تا صد تا می شود هزار تا و ...) بنابراین به راحتی می توانیم یک عدد را در مبنای ده، بسط بدهیم. به عنوان مثال عدد  $1397$  را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$1397 = 1 \times 1000 + 3 \times 100 + 9 \times 10 + 7$$

$$\Rightarrow 1397 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10 + 7$$

۱ شما هر یک از اعداد زیر را در مبنای ده بسط بدهید:

$$1388109 = 1 \times 10^6 + \dots$$

$$13571122 =$$

۲ باقیمانده تقسیم عدد  $A = 1358112$  را بر عدد  $9$  بیابید.

می‌دانیم  $1^0 \equiv 1$  و بنا بر ویژگی‌های رابطه هم‌نهستی  $1^0 \equiv 1$  بنابراین:

$$A = 1 \times 1^0 + 3 \times 1^0 + \dots + \dots + \dots + 1 \times 1^0 + 2$$

$$1^0 \equiv 1 \Rightarrow 1 \times 1^0 \equiv 1$$

$$1^0 \equiv 1 \Rightarrow 3 \times 1^0 \equiv 3$$

$$1^0 \equiv 1 \Rightarrow \dots \equiv \dots$$

$$1^0 \equiv 1 \Rightarrow \dots \times 1^0 \equiv \dots$$

$$1^0 \equiv 1 \Rightarrow 1 \times 1^0 \equiv \dots$$

$$1^0 \equiv 1 \Rightarrow 1 \times 1^0 \equiv \dots$$

$$\frac{2 \equiv 2}{9}$$

$$A \equiv 1 + 3 + 5 + 8 + 1 + 1 + 2$$

با جمع طرفین هم‌نهستی‌ها داریم:

اگر دقت کنید سمت راست هم‌نهستی‌ها، مجموع ارقام  $A$  است بنابراین می‌توان گفت «باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقیمانده مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

شما عدد  $n$  رقمی  $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_2 a_1 a_0}$  را بسط داده و در هم‌نهستی به پیمانه ۹ به جای هر توان  $1^0$  عدد ۱ را قرار دهید و همین نتیجه‌گیری را در حالت کلی بررسی کنید.

$$A = 1^0 \times a_{n-1} + \dots + \dots + \dots + 1^0 \times a_2 + 1^0 \times a_1 + 1^0 \times a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv \dots$$

### کار در کلاس

۱ با توجه به اینکه  $1^0 \equiv 1$ ، نتیجه می‌گیریم،  $\forall k \in W, 1^k \equiv 1$  بنابراین مشابه فعالیت قبل باقیمانده تقسیم عدد  $A = 598348$  را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلی برای یافتن باقیمانده تقسیم و بخش پذیری اعداد  $n$  رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲ واضح است که  $1^0 \equiv -1$  بنابراین برای هر  $n$  زوج،  $1^0 \equiv 1$  و برای هر  $n$  فرد،  $1^0 \equiv -1$ . حال اگر در هم‌نهستی به پیمانه ۱۱ و در بسط عدد  $A = 4985327$  به جای توان‌های زوج عدد  $1^0$ ، عدد یک و به جای توان‌های فرد عدد  $1^0$ ، عدد  $(-1)$  قرار دهیم باقیمانده عدد  $A$  را بر ۱۱ بیابید.

$$A = 4 \times 1^0 + 9 \times 1^0 + 8 \times 1^0 + \dots + 2 \times 1^0 + 7$$

$$\Rightarrow A \equiv 4 \times \dots + \dots \times (-1) + \dots \times 1 + \dots + 2 \times (-1) + 7$$

$$\Rightarrow A \equiv 7 - 2 + 3 - 5 + 8 - 9 + 4 = 6 \Rightarrow r = \dots$$

۳ می‌دانیم  $10^2 \equiv 0$  و  $10^5 \equiv 0$  و  $10^{10} \equiv 0$  در این صورت:

$$\forall k \in \mathbb{N}; 10^k \equiv \dots \text{ و } 10^k \equiv \dots \text{ و } 10^k \equiv \dots$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد  $n$  رقمی مانند  $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$  به جای توان‌های عدد  $10$  (در هم‌نهشتی‌های به پیمانه  $2$  و  $5$  و  $10$ ) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$A = 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \times a_{n-1} + \dots + \dots + \dots \times a_2 + \dots + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv \dots \text{ و } A \equiv \dots \text{ و } A \equiv a_0$$

نتیجه حاصل را برای یافتن باقیمانده تقسیم اعداد  $n$  رقمی بر  $2$  و  $5$  و  $10$  و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید. یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبه روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده یا مشخص شده است. به‌عنوان مثال اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، در این صورت ۲۲ بهمن در همان سال چند شنبه است؟ برای پاسخ دادن به سؤالاتی شبیه سؤال بالا فعالیت زیر را انجام دهید.

### فعالیت

می‌دانیم هر روز از هفته مانند شنبه پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود، به‌عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این صورت  $19 = 12 + 7$  فروردین و  $26 = 19 + 7$  فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. حتماً در بحث تقویم و روزهای هفته دقت داریم که شش ماه اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال غیر از اسفند (که ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند. البته هر چهار سال یک‌بار (سال کبیسه) اسفند نیز ۳۰ روزه است. حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی ماه چند شنبه است؟

با توجه به مطالب مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز ... می‌رسیم.

حال اگر فاصله ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم ( $28 - 9 = 19$ ) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون  $19 \equiv 5$

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول زیر مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱ اگر در یک سال، اول مهر، شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصله ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن یعنی  $d = 29 + 3 \times 30 + 12 = 131$

۱-۹ دی ماه روز بصیرت نام‌گذاری شده است.



از طرفی  $131 \equiv 0 \pmod{7}$  و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ... پنجشنبه است یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.  
**۲** از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته است؟ درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

## معادله هم نهستی

یک رابطه هم نهستی همراه با مجهولی چون  $x$  به فرم  $ax \equiv b \pmod{m}$  را یک معادله هم نهستی می نامیم و منظور از حل یک معادله هم نهستی پیدا کردن همه جواب هایی چون  $x_0 \in \mathbb{Z}$  است که در معادله فوق صدق کنند یعنی  $ax_0 \equiv b \pmod{m}$  .  
 به عنوان مثال، معادله  $x \equiv 2 \pmod{3}$  را در نظر بگیرید،  $x$  می تواند ۲ باشد و نیز می تواند ۵ باشد. عدد بعدی که می تواند به جای  $x$  قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم می توان تمام جواب های این معادله یا جواب های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف هم نهستی استفاده کنیم،

$$x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 3 \mid x - 2 \Rightarrow (x - 2) = 3k \Rightarrow x = 3k + 2$$

که اگر  $k$  را به ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب های  $x_0 = 2$  و  $x_0 = 5$  و  $x_0 = 8$  را به دست می آوریم و برای هر  $k \in \mathbb{Z}$  ، جوابی برای معادله به دست می آید. در معادله فوق ضرب  $x$  عدد یک است و اگر ضرب  $x$  عددی غیر از یک باشد برای دست یابی به جواب های عمومی معادله، ضرب  $x$  را باید حذف کنیم که ویژگی های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می کنند.  
 مثال: جواب های عمومی معادله  $4x \equiv 17 \pmod{5}$  را به دست آورید.

$$\begin{aligned} 4x \equiv 17 \pmod{5}, 17 \equiv 2 \pmod{5} &\Rightarrow 4x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 2 + (2 \times 5) \pmod{5} \\ &\Rightarrow 4x \equiv 12 \pmod{5} \Rightarrow \cancel{4}x \equiv \cancel{4} \times 3 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3 \\ (5 \mid x - 3) &\Rightarrow x - 3 = 5k \Rightarrow x = 5k + 3 \end{aligned}$$

مثال: همه اعداد صحیح را بیابید که سه برابر آنها منتهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشند.

حل: اگر آن عدد را  $x$  فرض کنیم باید  $7 \mid 3x - 13$  یا  $3x \equiv 13 \pmod{7}$

$$3x \equiv 13 \pmod{7} \Rightarrow 3x \equiv 13 - 7 = 6 \pmod{7} \Rightarrow \cancel{3}x \equiv \cancel{3} \times 2 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 2$$

قضیه: معادله هم نهستی  $ax \equiv b \pmod{m}$  دارای جواب است اگر و فقط اگر  $(a, m) \mid b$  (این قضیه را بدون اثبات می پذیریم).

نتیجه: اگر  $(a, m) = 1$  چون برای هر  $b$ ، همواره  $b \mid b$  پس معادله  $ax \equiv b \pmod{m}$  همواره دارای جواب است.

مثال: معادله  $6x \equiv 11 \pmod{9}$  دارای جواب نیست زیرا،  $(6, 9) = 3$  و  $3 \nmid 11$  و معادله  $4x \equiv 18 \pmod{6}$  دارای جواب است. چرا؟ این

معادله را حل کنید:

$$\begin{aligned} 4x \equiv 18 \pmod{6} &\Rightarrow 2 \times 2x \equiv 2 \times 9 \pmod{6}, (2, 6) = 2 \Rightarrow 2x \equiv 9 \pmod{6} \\ &\Rightarrow 2x \equiv 9 \pmod{6} \Rightarrow 2x \equiv 9 + 3 = 12 \pmod{6} \Rightarrow \cancel{2}x \equiv \cancel{2} \times 6 \pmod{6} \Rightarrow x = 3k + 6 \end{aligned}$$

## حل معادلات سیاله و کاربردهای آن

### فعالیت

۱ آیا می‌توانید یک کیسه ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)  
یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنه ۴ کیلویی و یک وزنه ۳ کیلویی است.

$$4 \times \dots + 1 \times 3 = \dots$$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

$$1 \times \dots + \dots \times 5 = 19$$

در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادله  $4x + 3y = 19$  هستید.

(تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به کار رفته و  $y$  تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به کار رفته است)

۲ اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟

باید جواب‌هایی چون  $y \in W$  و  $x$  بیابیم که  $\dots \times x + \dots \times y = \dots$  چون مجموع دو عدد زوج همواره ... است پس چنین  $x$  و  $y$  ای در  $W$  وجود ندارد.

هرگاه بخواهیم جواب‌های معادله  $ax + by = c$  یعنی  $x$  و  $y$  را در اعداد صحیح بیابیم و  $c \in \mathbb{Z}$  و  $b$  و  $a$  در این صورت معادله مذکور ( $ax + by = c$ ) را یک معادله سیاله درجه اول یا خطی می‌نامیم.

### تبدیل یک معادله سیاله به معادله هم‌نهشتی

معادله سیاله  $ax + by = c$  دارای دو مجهول است و به دو صورت می‌تواند به یک معادله هم‌نهشتی (با مجهول  $x$  یا  $y$ ) تبدیل شود:

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = (-b)y \Rightarrow -b|ax - c \Rightarrow b|ax - c$$

$$\Rightarrow ax \equiv c \pmod{b} \quad (b > 0) \quad \text{و} \quad ax \equiv c \pmod{-b} \quad (b < 0)$$

$$\Rightarrow \overset{-a}{by} \equiv c \quad \text{و} \quad \overset{a}{by} \equiv c$$

و به طریق مشابه می‌توان نوشت:

### کار در کلاس

۱ با تبدیل معادله سیاله  $4x + 5y = 9$  به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله سیاله را بیابید.

$$4x + 5y = 9 \Rightarrow 4x \equiv \dots \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 9 - \dots \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow x \equiv \dots \pmod{5} \Rightarrow \underline{x = 5k + \dots}$$

$$\Rightarrow 4(5k + \dots) + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 4 + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 5y = 5$$

$$\Rightarrow 4k + y = 1 \Rightarrow \underline{y = \dots k + 1}$$

۲ در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می توان عمل وزن کردن را انجام داد؟

کافی است جواب های عمومی معادله  $4x + 3y = 19$  را (بر حسب  $k$ ) بیابیم و به ازای هر  $k \in \mathbb{Z}$  که  $x$  و  $y$  منفی نباشند تعداد حالت ها را شمارش کنیم :

$$\begin{aligned} 4x + 3y = 19 &\Rightarrow 4x \equiv \dots \Rightarrow 4x \equiv 1 \Rightarrow 4x \equiv 1 + \dots \\ &\Rightarrow \cancel{4}x \equiv \cancel{4} \times 1 \Rightarrow \underline{x = 3k + 1} \Rightarrow 4(3k + 1) + 3y = 19 \\ &\Rightarrow 12k + 4 + 3y = 19 \Rightarrow 12k + 3y = \dots \Rightarrow \dots + y = 5 \\ &\Rightarrow \underline{y = -4k + 5} \end{aligned}$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}, k = \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

به ازای  $k=2$  و بیشتر از آن  $y < 0$  و به ازای  $k=-1$  و کمتر از آن  $x < 0$  که قابل قبول نمی باشند و لذا به دو صورت فوق می توان این کیسه ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال : به چند طریق می توان ۱۷۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خرد کرد؟

حل : اگر  $x$  و  $y$  را به ترتیب تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با تعداد جواب های نامنفی  $2000x + 5000y = 17000$

$$\begin{aligned} 2000x + 5000y = 17000 &\Rightarrow 2x + 5y = \dots \Rightarrow 2x \equiv 17, 17 \equiv \dots \\ &\Rightarrow \cancel{2}x \equiv \cancel{2} \times 1 \Rightarrow x \equiv \dots \Rightarrow \underline{x = 5k + 1} \Rightarrow 2(5k + 1) + 5y = 17 \\ &\Rightarrow 10k + 2 + 5y = 17 \Rightarrow 10k + 5y = 15 \Rightarrow \underline{y = -2k + 3} \end{aligned}$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}, k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases} \quad (\text{فقط به ازای } 1 \text{ و } 0 \text{ برای } x \text{ و } y \text{ جواب ها نامنفی هستند})$$

پس به دو طریق امکان خرد کردن ۱۷۰۰۰ تومان به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

مثال : در یک رستوران فقط دو نوع غذای قورمه سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می کند)

حل : اگر تعداد قورمه سبزی و قیمه سفارش داده را به ترتیب با  $x$  و  $y$  نشان دهیم خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} x + y = 5 &\Rightarrow x \equiv 5 \Rightarrow \underline{x = k + \dots} \\ &\Rightarrow k + \cancel{1} + y = \cancel{1} \Rightarrow \underline{y = \dots} \end{aligned}$$

چون  $x$  و  $y$  اعدادی نامنفی هستند پس باید  $k \in \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$  و لذا به ۶ طریق می توانند سفارش غذا بدهند.

مثال : تیراندازی به سمت یک هدف شامل دو دایره هم مرکز تیراندازی می کند، اگر به دایره با شعاع کوچک تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره بزرگ تر بزند ۳ امتیاز می گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر، تیراندازی کرده باشد و همه تیرها داخل دایره بزرگ تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می تواند ثبت شود؟

حل: اگر  $x$  و  $y$  را به ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم:

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \equiv 42 \pmod{3} \Rightarrow 5x \equiv 42 + 3 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 9 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow x = 3k + 9, \quad 5(3k + 9) + 3y = 42 \Rightarrow 15k + 45 + 3y = 42$$

$$\Rightarrow 15k + 3y = -3 \Rightarrow y = -5k - 1$$

$$x, y \in W \Rightarrow k \in \{-1, -2, -3\} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=14 \end{cases}$$

( $x=6$  و  $y=4$  یعنی تیرانداز ۶ تیر را به دایره کوچک‌تر و ۴ تیر را به دایره بزرگ‌تر زده است).

### تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم‌نهستی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

۲ اگر  $k \in \mathbb{Z}$  ثابت کنید، فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است

$$k \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{یا} \quad k \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{یا} \quad k \equiv 2 \pmod{3}$$

(به عبارت دیگر،  $k \in [0]_3$  یا  $k \in [1]_3$  یا  $k \in [2]_3$ )

۳ اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $n | m$  ثابت کنید  $a \equiv b \pmod{n}$ .

۴ فرض کنیم،  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $b \equiv c \pmod{n}$  و  $(m, n) = d$  در این صورت ثابت کنید  $a \equiv c \pmod{d}$ .

۵ ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد  $a$  و  $b$  بر  $m$  مساوی باشند آن‌گاه  $a \equiv b \pmod{m}$ .

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای ختام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

ثابت کنید، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  و  $a, b \in \mathbb{Z}$  همواره  $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$ .

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد  $12^{51} - 11^{51} - 33^{51}$  بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد  $A = (2^{11} + 7) \times 9$  را بر ۲۳ بیابید.

۱۰ اگر دو عدد  $(3a - 5)$  و  $(4a - 7)$  رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد  $(9a + 6)$  را به دست آورید.

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد  $500! + 499! + 498! + \dots + 1!$  را بر ۱۰ به دست آورید (رقم یکان  $A$  را بیابید)

۱۲ جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی  $7x + 5y = 11$  را به دست آورید.

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را توسط اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خرد کرد؟

۱۴ معادله‌های هم‌نهستی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به دست آورید.

الف)  $423x \equiv 79 \pmod{11}$

ب)  $8x \equiv 20 \pmod{12}$

ج)  $51x \equiv 11 \pmod{6}$

۱۵ اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۶ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۷ همه اعداد صحیح چون  $a$  را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

۱۸ به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۹ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه گل به دلخواه انتخاب کرد؟

۲۰ شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده و به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده است و مجموعاً ۷۳ امتیاز

کسب کرده است (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد) در این صورت این شخص به چه صورت‌هایی

می‌توانسته این امتیاز را به دست آورده باشد؟

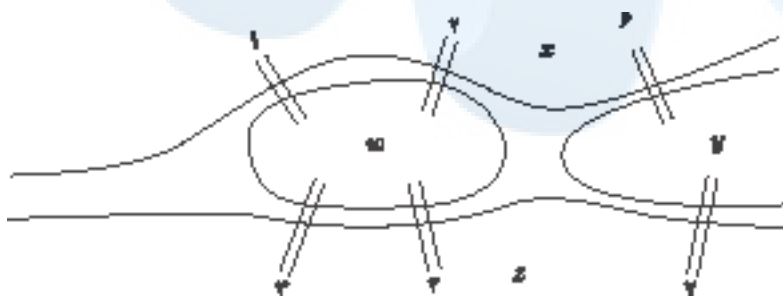
# مرکز مشاوره تحصیلی

# علیرضا افشار

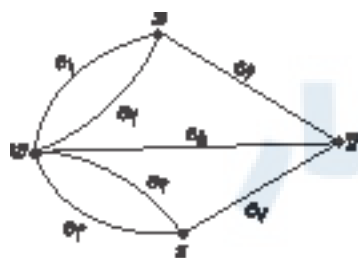
## درس ۱ معرفی گراف، تعاریف و برخی خواص

در اوایل قرن هجدهم، معمایی فکر برخی از اهالی شهر کونیگسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را به خود مشغول کرده بود.

رودخانه این شهر که از میان شهر عبور می کرد مانند آنچه در شکل زیر می بینید، شهر را به چند قسمت تقسیم می کرد. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می توان با شروع از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور کردن از هر کدام از پل ها، به نقطه شروع حرکت برگشت؟



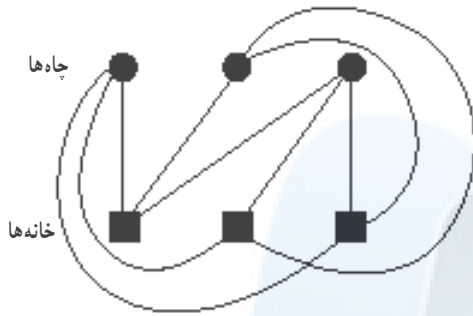
لئوناردو اویلر (۱۷۸۳ - ۱۷۰۷)، ریاضی دان برجسته سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر که امروزه به آن «گراف» می گوئیم کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد این مسئله امکان پذیر نیست.



اگر چهار ناحیه  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $w$  را با ۴ نقطه نمایش دهیم و به ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد نقاط متناظر با آن ناحیه ها را به هم وصل نماییم شکل مقابل به دست می آید که گراف حاصل از مدل سازی مسئله مذکور است. مدل سازی بسیاری از مسائل با گراف، دسته بندی منظم و تفکر منطقی درباره آنها را آسان تر می نماید.

اگرچه بیشتر مورخان تاریخ ریاضی شروع بحث گراف را از این مسئله اویلر می دانند اما بی تردید متفکرین و ریاضی دانان دیگری پیش از آن تاریخ نیز

برای حل مسائل از مدل‌سازی با گراف بهره گرفته‌اند. به‌طور مثال ۱۰۰ سال پیش از آن شیخ بهایی، ریاضی‌دان ایرانی (۱۰۰۰-۹۲۵ خورشیدی) مسئله‌ای به این صورت طرح کرد:



سه رودخانه و سه چاه آب مانند شکل مقابل مفروض‌اند. آیا می‌توان از هر چاه به هر خانه یک کانال آب حفر کرد به طوری که هیچ دو کانالی یکدیگر را قطع نکنند؟

حل این مسئله هم ارتباط نزدیکی به مباحث گراف دارد. اگر خانه‌ها و چاه‌ها را ۶ نقطه مشخص کنیم و کانال‌ها را با خط یا منحنی‌ها نمایش دهیم در این صورت دو مجموعه مجزای ۳ عضوی از نقاط داریم که باید نقاط مجموعه اول به تک‌تک نقاط مجموعه دوم وصل شوند. شکل حاصل از این کار یک گراف است و می‌توان نشان داد که این کار نشدنی است و لااقل دو تا از خط‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند.

مثال: تحلیل وضعیت با استفاده از گراف

فرض کنید بدانیم ۵ تیم فوتبال  $a, b, c, d, e$  در یک گروه قرار دارند و باید دوبه‌دو با هم بازی کنند و برخی از این بازی‌ها انجام شده است و فرض کنید اطلاعات زیر را داشته باشیم:

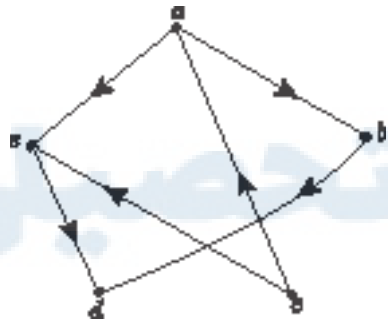
تیم  $a$  تیم‌های  $b$  و  $e$  را برده و به  $c$  باخته است.

تیم  $b$  به  $a$  باخته و از  $d$  برده است.

تیم  $c$  از  $a$  برده و از  $e$  نیز برده است.

تیم  $d$  به تیم  $b$  باخته است و به تیم  $e$  نیز باخته است.

تیم  $e$  به  $a$  و  $c$  باخته و از تیم  $d$  برده است.



فرض کنید برای نمایش تمام اطلاعات بالا به صورت خلاصه، از نموداری به این صورت استفاده کنیم که به ازای هر تیم یک نقطه می‌کشیم و دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر تیم‌های مربوط به آنها با هم بازی کرده باشند و جهت خط یا منحنی‌ای که دو نقطه را به هم وصل می‌کند از تیم برنده به سمت تیم بازنده باشد.

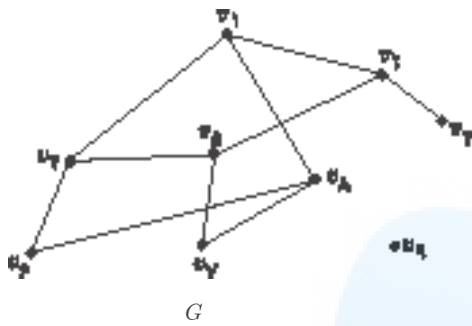
حال با یک نگاه به نمودار رسم شده علاوه بر دریافت اطلاعات بالا به سادگی به سؤال‌های زیر نیز می‌توان جواب داد.

– برای هر تیم مشخص کنید با کدام تیم‌ها بازی نکرده است.

– اگر هر برد ۳ امتیاز داشته باشد در بازی‌هایی که تا اینجا انجام شده است کدام تیم‌ها بیشترین امتیاز را کسب کرده‌اند؟

## تمرین

سؤال دیگری مطرح کنید که با دیدن نمودار گراف بتوان به آن جواب داد.



همان‌طور که دیدیم یک گراف متشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از خطوط. به این نقاط رأس و به خطوط یال می‌گوییم. توجه کنید که یال‌ها لازم نیست حتماً راست باشند و می‌توانند به صورت منحنی نیز باشند و در هر سر یال باید رأسی قرار داشته باشد. یک گراف را می‌توان مانند آنچه دیدیم با رسم نمودار آن نشان داد و نیز می‌توان آن را با نمادهای ریاضی معرفی کرد. در ادامه به شکلی ساده چند تعریف مقدماتی و نحوه نمایش یک گراف را بررسی می‌نماییم.

گراف  $G$  را با ۹ رأس و ۱۰ یال مانند شکل در نظر می‌گیریم و با بررسی آن برخی تعاریف را نیز مطرح می‌نماییم. با توجه به اینکه یک گراف مجموعه‌ای از رئوس و یال‌هاست می‌توان به جای نمایش آن با شکل بالا با نمادهای ریاضی مجموعه یال‌ها و رئوس آن را به صورت زیر نمایش داد.

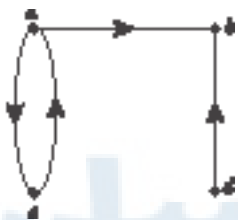
$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_8, v_9\}$$

مجموعه رأس‌های گراف  $G$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8, v_1v_9, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_4v_5, v_4v_7, v_4v_8, v_5v_6, v_5v_7, v_5v_8, v_6v_7, v_6v_8, v_7v_8, v_7v_9, v_8v_9\}$$

مجموعه یال‌های گراف  $G$

به وضوح با داشتن شکل گراف شما می‌توانید مجموعه‌های  $V(G)$  و  $E(G)$  را بنویسید و همچنین با داشتن دو مجموعه  $V(G)$  و  $E(G)$  می‌توانید ابتدا به تعداد  $n(V(G))$  (تعداد اعضای مجموعه  $V(G)$ ) که آن را با  $|V(G)|$  نیز نمایش می‌دهیم (نقطه رأس) مشخص نمایید و سپس با توجه به  $E(G)$  رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید. همان‌طور که در مثال تیم‌های فوتبال ملاحظه کردید گاهی اوقات لازم است برای یال‌ها جهت تعیین کنیم.



به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، گراف جهت‌دار می‌گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال‌ها را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم. به طور مثال مجموعه رئوس و یال‌های گراف جهت‌دار زیر این‌گونه نمایش می‌دهیم.

$$V = \{a, b, c, d\} \quad E = \{(a, b), (a, c), (c, a), (c, d)\}$$

### کار در کلاس

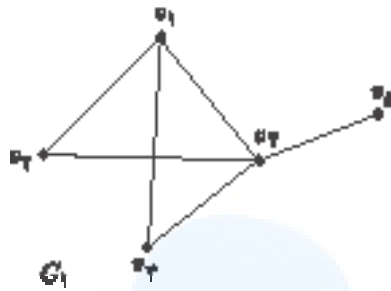
– دو مجموعه  $V(G)$  و  $E(G)$  به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6\}$$

توجه: برای رسم نمودار یک گراف (شکل گراف) روش یکتایی وجود ندارد و شکل گراف باید مشخص نماید که کدام رئوس به هم متصل‌اند و چند بار. به طور مثال برای دو نمودار زیر با نوشتن مجموعه‌های  $V(G)$  و  $E(G)$  برای هر یک از شکل‌های زیر، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.





$$V(G_1) = \{ \quad \quad \quad \}$$

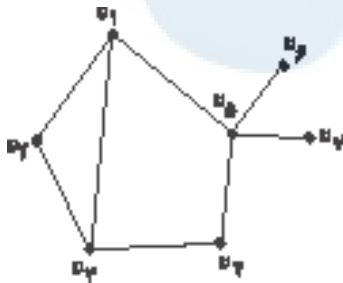
$$E(G_1) = \{ \quad \quad \quad \}$$



$$V(G_2) = \{ \quad \quad \quad \}$$

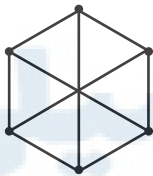
$$E(G_2) = \{ \quad \quad \quad \}$$

■ مرتبه و اندازه یک گراف: تعداد رأس‌های گراف  $G$  یعنی  $|V(G)|$  را مرتبه آن گراف می‌گوییم و با  $p(G)$  نمایش می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف یعنی  $|E(G)|$  را اندازه گراف  $G$  می‌گوییم و با  $q(G)$  نمایش می‌دهیم. معمولاً برای راحتی کار به جای  $p(G)$  از  $p$  و به جای  $q(G)$  از  $q$  استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال گراف‌های نمایش داده شده در شکل قبل از مرتبه ۵ و اندازه ۶ هستند. بنابراین  $p=5$  و  $q=6$ .



■ درجه یک رأس: درجه رأس  $v$  در گراف  $G$  برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف  $G$  که به رأس  $v$  متصل‌اند و آن را با  $deg_G(v)$  یا به‌طور ساده‌تر با  $deg(v)$  یا  $d(v)$  نمایش می‌دهیم. اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را یک رأس فرد و اگر زوج باشد آن را یک رأس زوج می‌نامیم. به‌طور مثال در شکل مقابل داریم:

$$deg(v_1) = 3, \quad deg(v_5) = 4$$



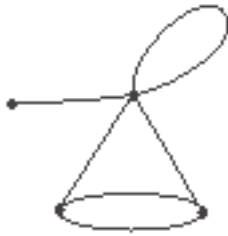
■ گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و مساوی عدد  $k$  باشد را گراف  $k$ -منتظم می‌نامیم. مثلاً گراف مقابل یک گراف ۶ رأسی ۳-منتظم است.

■ رأس تنها: به رأسی که درجه آن صفر باشد؛ یعنی روی هیچ بالی واقع نباشد، رأس تنها (یا ایزوله) می‌گوییم. به‌طور مثال در گراف  $G$  در شکل ۳، رأس  $v_4$  یک رأس تنهاست.

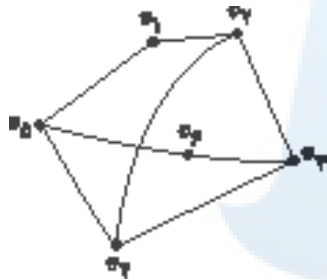
### کار در کلاس

- ۱- درجه سایر رئوس این گراف شکل قبل را بنویسید و مشخص کنید کدام رئوس فرد و کدام رئوس زوج‌اند.
- ۲- گرافی از مرتبه ۵ رسم کنید که:
  - الف) یک رأس تنها داشته باشد.
  - ب) دو رأس تنها داشته باشد.
  - پ) سه رأس تنها داشته باشد.
  - ت) چهار رأس تنها داشته باشد.

ث) هر پنج رأس آن، رأس تنها باشند (گرافی که تمام رئوس آن رأس تنها باشند؛ یعنی هیچ بالی نداشته باشد را گراف تهی می‌نامیم).



توجه: بین دو رأس از یک گراف ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد و همچنین یک یال ممکن است یک رأس را به خود آن رأس وصل نماید که در این صورت به این یال طوقه گفته می‌شود. این دو مورد در شکل روبه‌رو نمایش داده شده‌اند. گرافی که در آن هیچ یک از این دو مورد اتفاق نیفتاده باشد را گراف ساده می‌گوئیم. دیدیم که گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده نیست. ما در این کتاب صرفاً گراف‌های ساده را بررسی خواهیم کرد و از این به بعد منظورمان از گراف، گراف ساده است.



■ دو رأس مجاور (همسایه): دو رأس  $u$  و  $v$  را دو رأس همسایه یا مجاور گوئیم هرگاه توسط بالی به هم وصل شده باشند، یعنی  $uv \in E(G)$ . به طور مثال در گراف مقابل، رأس  $v_1$  با رئوس  $v_2$  و  $v_3$  همسایه است و رأس  $v_2$  با رئوس  $v_1$  و  $v_3$  همسایه است.

توجه: در زمان رسم نمودار یک گراف توجه داشته باشید که هیچ بالی خودش را قطع نکند و همچنین هیچ بالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست عبور نماید.

■ مجموعه همسایه‌های یک رأس: مجموعه همسایه‌های رأس  $v$  در گراف  $G$  مجموعه تمام رأس‌هایی از گراف  $G$  هستند که با  $v$  مجاوراند و آن را با  $N_G[v]$  نمایش می‌دهیم. به طور مثال در گراف  $G$  در شکل ۳ داریم.

$$N_G[v_1] = \{v_2, v_3, v_8\}$$

$$N_G[v_2] = \{v_1\}$$

$$N_G[v_4] = \emptyset$$

■ دو یال مجاور: دو یال را مجاور گوئیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند. به طور مثال در شکل ۳ یال‌های  $v_1v_2$  و  $v_1v_3$  مجاوراند.

■ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه یک گراف: بزرگ‌ترین درجه در بین درجات رئوس گراف  $G$  را با  $\Delta(G)$  و کوچک‌ترین درجه در بین درجات رئوس گراف  $G$  را با  $\delta(G)$  نمایش می‌دهیم و به ترتیب آنها را ماکزیمم و مینیمم درجه گراف می‌نامیم. به طور مثال در گراف روبه‌رو داریم:

$$\Delta(G) = 3, \quad \delta(G) = 0$$



■ زیرگراف: یک زیرگراف از گراف  $G$  گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف  $G$  و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های  $G$  باشد. به طور مثال گراف‌های  $G_1$  و  $G_2$  و  $G_3$  که در زیر آمده‌اند، زیرگراف‌هایی از گراف  $G$  هستند.



■ مکمل یک گراف: مکمل گرافی مانند  $G$  که آن را با  $G^c$  یا  $\bar{G}$  نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف  $G$  است و بین دو رأس از  $G^c$  یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در  $G$  یالی وجود نداشته باشد. در شکل زیر مکمل یک گراف نمایش داده شده است.



مسئله ۱: اگر  $G$  یک گراف با  $n$  رأس و  $v$  یک رأس آن باشد و  $d_G(v)$  و  $d_{\bar{G}}(v)$  به ترتیب درجه رأس  $v$  در گراف‌های  $G$  و  $\bar{G}$  باشند، مقدار  $d_G(V) + d_{\bar{G}}(V)$  را به دست آورید.

مسئله ۲: یک گراف  $n$  رأسی حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

مسئله ۳: اگر  $G$  یک گراف  $n$  رأسی باشد، مقدار  $e(G) + e(\bar{G})$  را به دست آورید.

■ گراف کامل: گرافی که هر رأس آن به تمام رئوس دیگر آن وصل باشد را گراف کامل می‌نامیم. گراف کامل  $n$  رأسی را با  $K_n$  نمایش می‌دهیم.

مسئله ۱: یک گراف کامل  $p$  رأسی چند یال دارد؟

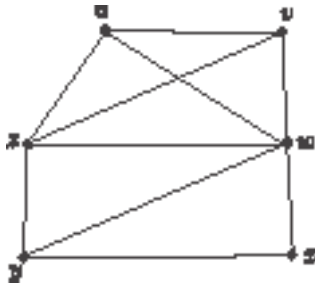
مسئله ۲: اگر  $G$  یک گراف  $p$  رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌های گراف‌های  $G$  و  $\bar{G}$  وجود دارد؟

■ دور، مسیر و هم‌بندی در یک گراف

مسیر: اگر  $u$  و  $v$  دو رأس از گراف  $G$  باشند، یک مسیر از  $u$  به  $v$  (یک  $u-v$  مسیر) در  $G$  دنباله‌ای از رئوس دوه‌دو متمایز در  $G$  است که از  $u$  شروع می‌شود و به  $v$  ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در  $G$  مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می‌کنیم که دنباله متشکل از تنها یک رأس  $v$  یک مسیر با طول صفر از رأس  $v$  به خودش است.

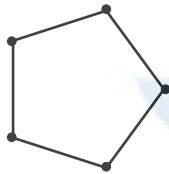
**مثال**

$uvw$  یک مسیر به طول ۲ است.  
 $uzzyvw$  یک مسیر به طول ۴ است.



■ گرافی که تنها از یک مسیر  $n$  رأسی تشکیل شده باشد را با  $P_n$  نمایش می‌دهیم. به طور مثال  $P_5$  در شکل مقابل نمایش داده شده است.

دور: یک دور به طول  $m$  در گراف  $G$  دنباله‌ای از  $m+1$  رأس است که  $m$  رأس اول آن دوبه‌دو متمایزاند و رأس آخر  $(m+1)$  امی همان اولین رأس است. به طور مثال در گراف مثال قبل  $uvwu$ ,  $ywzy$ ,  $xwvuzyx$  دورهایی به ترتیب با طول ۳ و ۴ و ۶ هستند.



■ گرافی که تنها از یک دور  $n$  رأسی تشکیل شده باشد را با  $C_n$  نمایش می‌دهیم. به طور مثال  $C_5$  در شکل مقابل نمایش داده شده است.

**تمرین:**

در گراف مثال قبل، دوری به طول ۵ بیابید.

■ **همبندی و ناهمبندی یک گراف:** گراف  $G$  را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد و در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم. به طور مثال گراف  $H$  در شکل زیر همبند و گراف  $G$  ناهمبند است زیرا مثلاً بین رئوس  $v$  و  $w$  هیچ مسیری وجود ندارد.



## فعالیت

- ۱ سه گراف دلخواه رسم کنید.
- ۲ مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.
- ۳ تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.
- ۴ حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.
- ۵ پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده در این رابطه بحث کنید.

## فعالیت

- ۱ یک گراف دلخواه مانند  $G$  با  $n$  رأس  $v_1, v_2, \dots, v_n$  و  $m$  یال  $e_1, e_2, \dots, e_m$  در نظر بگیرید.
- ۲ تمام یال‌های گراف  $G$  را حذف کنید.
- ۳ مجموع درجات تمام رئوس گراف حاصل چند است؟ تعداد یال‌های گراف حاصل چند است و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟
- ۴ یال  $e_1$  را در جای خود (بین همان دو رأسی که  $e_1$  قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سؤال ۳ جواب دهید.
- ۵ تمام یال‌های  $e_1, e_2, \dots, e_m$  را یکی‌یکی در جای خود قرار دهید تا نهایتاً به گراف اولیه  $G$  برسید و پس از اضافه کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید.
- ۶ آیا مجموع درجات رئوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ چرا؟

$$۷ \text{ برای تساوی } \sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n) = 2m \text{ استدلال خود را بیان نمایید.}$$

با توجه به آنچه در فعالیت به دست آوردیم می‌توان قضیه زیر را بیان نمود.

قضیه: اگر  $G$  یک گراف با مرتبه  $p$  و اندازه  $q$  و  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  مجموعه رئوس آن باشند، آنگاه:

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$$

نتیجه: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات: فرض کنیم  $G$  یک گراف و  $A$  مجموعه رئوس فرد گراف  $G$  و  $B$  مجموعه همه رئوس زوج گراف  $G$  باشد. با

برهان خلف فرض کنیم  $n(A)$  فرد باشد. در این صورت  $\sum_{v \in A} \deg(v)$  عددی فرد است. (چرا؟)

از طرفی  $\sum_{v \in B} \deg(v)$  عددی زوج است. (چرا؟)

لذا  $\sum_{v \in v(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$  یک عدد فرد است و این با قضیه قبل در تناقض است. بنابراین  $n(A)$

نمی‌تواند فرد باشد؛ یعنی تعداد رئوس فرد هر گراف عددی زوج است.

## کار در کلاس

الف) یک جمع ۷ نفره از دانش‌آموزان یک کلاس در نظر بگیرید.  
ب) گراف ۷ رأسی  $G$  را به این صورت تشکیل دهید که به ازای هر دانش‌آموز یک رأس قرار دهید و سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش‌آموزان متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.  
پ) با استفاده از قضیه قبل نشان دهید که امکان ندارد درجه تمام رئوس گراف حاصل برابر با ۳ باشد.  
ت) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

مرکز مشاوره تحصیلی  
علیرضا افشار





مرکز مشاوره تحصیلی  
علیرضا افشار

راه‌های ارتباطی مرکز مشاوره

تلگرام

اینستاگرام

وبسایت



AlirezaAfsharOfficial

AlirezaAfsharOriginal

www.AlirezaAfshar.org

رزور مشاوره خصوصی علیرضا افشار

برای رزور مشاوره خصوصی تک جلسه و ماهانه  
به شماره ۰۹۳۵۸۹۶۰۵۰۳ در واتساپ پیام دهید

Afshar.xyz

آدرس تمام رسانه ها :

