۱

گزینه ۴

$$A = \log_{۸}^{۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}} \xrightarrow{\sqrt[۳]{۰/۲۵}=(\frac{۱}{۴})^{\frac{۱}{۳}}=۲^{-\frac{۲}{۳}}} \log_{۲^۳}^{۲\times ۲^{-\frac{۲}{۳}}} \Rightarrow \log_{۲^۳}^{۲^{\frac{۱}{۳}}} = \frac{\frac{۱}{۳}}{۳} = \frac{۱}{۹}$$

$$\log_{۴}^{\frac{۱}{A}-۱} \xrightarrow{A=\frac{۱}{۹}} \log_{۴}^{۹-۱} = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۶

۲

گزینه ۱

$$x^۲ - x - ۲ > ۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۲) > ۰ \Rightarrow x \in (-\infty, -۱) \cup (۲, +\infty) \quad (۱)$$

$$x^۲ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \geq ۱ \Rightarrow x \in (-\infty\,, -۱] \cup [۱, +\infty) \quad (۲)$$

اشتراک جواب‌های به‌دست‌آمده $(-\infty, -۱) \cup (۲, +\infty)$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳

گزینه ۳

ابتدا با توجه به دو تساوی $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $f(-۲) = \frac{۳}{۳۲}$، مقادیر a و b را محاسبه می کنیم.

$$f(۰) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a \times b^{۰} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a \times ۱ = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

$$f(-۲) = \frac{۳}{۳۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}b^{-۲} = \frac{۳}{۳۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲b^۲} = \frac{۱}{۳۲} \Rightarrow ۲b^۲ = ۳۲ \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \xrightarrow{b>۰} b = ۴$$

بنابراین ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x) = \frac{۳}{۲} \times ۴^x$ در می آید. مقدار $f(\frac{۳}{۲})$ برابر است با:

$$f(\frac{۳}{۲}) = \frac{۳}{۲} \times ۴^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲} \times (۲^۲)^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲} \times ۲^۳ = \frac{۳}{۲} \times ۸ = ۳ \times ۴ = ۱۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴

گزینه ۳

بافرض $x=۹$ و تغییر متغیر $\log_a ۹=t$ معادله را تنظیم می‌کنیم:

$$۲\times\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۲}t=۲\Rightarrow\frac{۲}{t}+\frac{t}{۲}=۲\Rightarrow\frac{t}{۲}=۱\Rightarrow t=۲$$
$$\Rightarrow\log_a ۹=۲\Rightarrow ۹=a^۲\xrightarrow{a>\circ}a=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

۵

گزینه ۳

نقاط مشترک دو تابع $C\,(۱,۱)$ و $D\,(۳,۹)$ است.

$$C\in f\Rightarrow ۳^{A+B}=۱\Rightarrow A+B=\circ$$
$$D\in f\Rightarrow ۳^{۳A+B}=۹\Rightarrow ۳A+B=۲$$

$$\begin{cases}A+B=\circ\\ ۳A+B=۲\end{cases}\xrightarrow{(-)}۲A=۲\Rightarrow A=۱\ ,\ B=-۱$$

$$f\,(x)=۳^{x-۱}\Rightarrow f\,(\circ)=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۶

گزینه ۴

$$\log\,(۲x-۵)+\log\,(x+۱)=\log\,(۴x-۱)\Rightarrow\log\,(۲x-۵)\,(x+۱)=\log\,(۴x-۱)$$
$$\Rightarrow ۲x^۲+۲x-۵x-۵=۴x-۱\Rightarrow ۲x^۲-۷x-۴=\circ$$
$$\Rightarrow x=\frac{۷\pm\sqrt{۴۹+۳۲}}{۴}=\frac{۷\pm ۹}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x=۴ & (\text{ق.ق})\\ x=-\frac{۱}{۲} & (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$
$$\log_۳^{(۲x+۱)}=\log_۳^{(۲\times۴+۱)}=\log_۳^{۹}=۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

۷ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) می‌دانیم:

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}\ ,\ \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a\ ,\ \log_a^a = ۱$$

ب) در تابع لگاریتمی $y = \log_b^a$، همواره باید $a > ۰$ و $b = ۱$ باشد.

گام دوم

ابتدا با حل معادلهٔ لگاریتمی داده‌شده، مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$\log (x^۲ - x - ۶) - \log (x - ۳) = \log (۲x - ۵)$$

$$\Rightarrow \log (x - ۳)(x + ۲) - \log (x - ۳) = \log (۲x - ۵)$$

$$\Rightarrow \log \frac{(x - ۳)(x + ۲)}{(x - ۳)} = \log (۲x - ۵) \Rightarrow \log (x + ۲) = \log (۲x - ۵)$$

$$\Rightarrow x + ۲ = ۲x - ۵ \Rightarrow x = ۷$$

به ازای $x = ۷$ تمام لگاریتم‌ها تعریف شده پس این مقدار قابل‌قبول است. حال مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x+۱}$ در پایهٔ ۴ را به ازای $x = ۷$ حساب می‌کنیم:

$$\log_۴^{\sqrt[۳]{x+۱}} = \log_۴^{\sqrt[۳]{۷+۱}} = \log_۴^{\sqrt[۳]{۸}} = \log_۴^{\sqrt[۳]{۲^۳}} = \log_۴^۲ = \log_{۲^۲}^۲ = \frac{۱}{۲}\log_۲^۲ = \frac{۱}{۲}$$

۸ گزینه ۲

باتوجه‌به شکل، دو نقطهٔ $(-\frac{۱}{۳}, ۰)$ و $(۰, -۲)$ در تابع f صدق می‌کنند. بنابراین:

$$(۰, -۲) : f(۰) = -۲ \Rightarrow -۴ + ۲^b = -۲ \Rightarrow ۲^b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$

$$(-\frac{۱}{۳}, ۰) : f(-\frac{۱}{۳}) = ۰ \Rightarrow -۴ + ۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱} = ۰ \Rightarrow ۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱} = ۴ = ۲^۲$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}a + ۱ = ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}a = ۱ \Rightarrow a = -۳$$

با جایگذاری مقادیر a و b در تابع f داریم:

$$f(x) = -۴ + ۲^{-۳x+۱}$$

$$f(-\frac{۵}{۳}) = -۴ + ۲^{-۳\times(-\frac{۵}{۳})+۱} = -۴ + ۲^{۵+۱} = -۴ + ۲^۶ = ۶۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

معادلات نمایی و لگاریتمی را به‌صورت ساده‌شده می‌نویسیم (از معادلهٔ لگاریتمی y را بر حسب x به دست می‌آوریم) با حل دستگاه دومعادله و دومجهول حاصل x و y را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\log y = ۲\log ۳ + \log x \Rightarrow \log y = \log ۳^۲ + \log x$$

$$\Rightarrow \log y = \log ۹x \Rightarrow y = ۹x \quad (۱)$$

$$۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱ \Rightarrow ۲^{x-۷} \times (۲^۲)^{x+y} = ۱ \Rightarrow ۲^{x-۷} \times ۲^{۲x+۲y} = ۱$$

$$\Rightarrow ۲^{۳x+۲y-۷} = ۱ = ۲^۰ \Rightarrow ۳x + ۲y - ۷ = ۰ \xrightarrow{(۱)} ۳x + ۱۸x - ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲۱x = ۷ \Rightarrow x = \frac{۷}{۲۱} = \frac{۱}{۳}$$

$$y = ۹x \Rightarrow y = ۹ \times \frac{۱}{۳} = ۳$$

۱۰ گزینه ۱

با استفاده از ویژگی $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$، معادلهٔ لگاریتمی را ساده کرده و مقدار xy را حساب می کنیم.

$$\log_۳^x + \log_۳^y = ۲ \Rightarrow \log_۳^{xy} = ۲ \xrightarrow{\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c} xy = ۳^۲ = ۹$$

مقادیر $x^۲ + y^۲$ و xy را داریم. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای و با توجه به این که x و y هر دو مثبت هستند، حاصل $x + y$ را محاسبه می کنیم.

$$(x+y)^۲ = x^۲ + y^۲ + ۲xy \xrightarrow[x^۲+y^۲=۴۶]{xy=۹} (x+y)^۲ = ۴۶ + ۱۸ = ۶۴$$

$$\xrightarrow[\text{عدد جلوی لگاریتم}]{x\,,\,y>۰} x + y = ۸ \log_۴^{(x+y)} = \log_۴^۸ = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}\log_۲^۲ = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۱۱

گزینه ۳

$$۳^{x^۲-۲} = ۸۱^x \Rightarrow ۳^{x^۲-۲} = ۳^{۴x} \Rightarrow x^۲ - ۲ = ۴x$$
$$x^۲ - ۴x = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ = ۶ \Rightarrow (x-۲)^۲ = ۶ \Rightarrow x - ۲ = \sqrt{۶}$$

حاصل $\log_۶^{(x-۲)}$ را می‌خواهیم:

$$\log_۶^{(x-۲)} = \log_۶^{\sqrt{۶}} = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲

گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$y = -۱ + \log_b^{(۲(x+\frac{a}{۲}))}$$

تابع به اندازهٔ $+\frac{۱}{۲}$ نسبت به نمودار $y = \log x$ انتقال افقی به سمت راست داشته است. پس:

$$\frac{a}{۲} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -۱$$
$$y = -۱ + \log_b^{(۲x-۱)}$$

به‌علاوه مقدار تابع در $x = ۲$ صفر است:

$$y(۲) = -۱ + \log_b^۳ = ۰ \Rightarrow \log_b^۳ = ۱ \Rightarrow b = ۳$$
$$y = -۱ + \log_۳^{(۲x-۱)} \xrightarrow{\text{برخورد با } y=۱} -۱ + \log_۳^{(۲x-۱)} = ۱$$
$$\Rightarrow \log_۳^{(۲x-۱)} = ۲ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۹ \Rightarrow x = ۵$$

راه‌حل دوم: (برای به دست آوردن a و b)

$$y = -۱ + \log_b^{(۲x+a)}$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲x + a > ۰ \Rightarrow x > -\frac{a}{۲} \\ \text{طبق نمودار} : x > \frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow a = -۱$$

$$(۲, ۰) \Rightarrow -۱ + \log_b^۳ = ۰ \Rightarrow b = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳ گزینه ۲

$$a^۲ + ۹b^۲ = ۱۰ab \Rightarrow (a + ۳b)^۲ - ۶ab = ۱۰ab \Rightarrow (a + ۳b)^۲ = ۱۶ab$$
$$\Rightarrow (\frac{a + ۳b}{۴})^۲ = ab$$
$$\log(\frac{a + ۳b}{۴})^۲ = \log ab \Rightarrow ۲ \log(\frac{a + ۳b}{۴}) = \log a + \log b$$

حاصل به‌دست‌آمده دقیقاً واسطهٔ حسابی دو عدد $\log a$ و $\log b$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۴ گزینه ۱

مقدار اولیهٔ عنصر ۲۴ گرم است. همچنین پس از گذشت ۳۰ روز، $\frac{۱}{۱۰}$ باقی‌مانده را ازدست می‌دهد، پس هر ماه مقدار عنصر $\frac{۹}{۱۰}$ برابر می‌شود. پس از گذشت n ماه داریم:

$$f(n) = ۲۴(\frac{۹}{۱۰})^n$$

طبق مفروضات مسئله داریم:

$$۸ = ۲۴(\frac{۹}{۱۰})^n \Rightarrow (\frac{۹}{۱۰})^n = \frac{۱}{۳}$$

از طرفین $\log_{۱۰}$ می‌گیریم:

$$n(\log(\frac{۹}{۱۰})) = \log(\frac{۱}{۳}) \Rightarrow n(\log ۹ - \log ۱۰) = \log(\frac{۱}{۳})$$
$$\Rightarrow n(۲ \log ۳ - \log ۱۰) = -\log ۳ \Rightarrow n(۲ \times ۰/۴۸ - ۱) = -۰/۴۸$$
$$\Rightarrow n(۰/۹۶ - ۱) = -۰/۴۸ \Rightarrow ۰/۰۴n = ۰/۴۸ \Rightarrow n = ۱۲$$

پس ۱۲ ماه یعنی $۳۶۰ = ۳۰ \times ۱۲$ روز زمان نیاز است. (یک ماه را برابر ۳۰ روز در نظر گرفتیم.)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۵

گزینه ۴

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی باشند باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) $D_f = D_g$

۲) $\forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$

حالا این دو شرط را برای هر زوج تابع $f(x)$ و $g(x)$ در گزینه های داده شده بررسی می کنیم.

بررسی گزینهٔ اول:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ۲\log x \Rightarrow D_f = (۰, +\infty) \\ g(x) = \log x^۲ \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{۰\} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینهٔ دوم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^۲}}{|x|} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \\ g(x) = ۱ \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینهٔ سوم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = (\sqrt{x})^۲ \Rightarrow D_f = (۰, +\infty) \\ g(x) = x \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینهٔ چهارم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x}{|x|} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \\ g(x) = \dfrac{|x|}{x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{۰\} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f = D_g$$

هر دو تابع به ازای مقادیر مثبت برابر ۱ و به ازای مقادیر منفی برابر ۱- می شوند، پس برابرند.

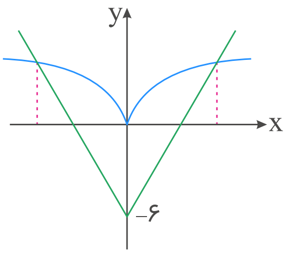
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۱۶

گزینه ۱

$\sqrt{|x|}$ برای تابع مشکلی ایجاد نمی‌کند.

$$۶+\sqrt{|x|}-|x|>۰ \Rightarrow \sqrt{|x|}>|x|-۶$$



$$\sqrt{|x|}=|x|-۶ \xrightarrow{|x|=t} \sqrt{t}=t-۶ \Rightarrow t=۹ \Rightarrow |x|=۹ \Rightarrow x=\pm۹$$

پس جواب $(-۹,۹)$ خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۷

گزینه ۲

در هر روز غلظت محلول $\frac{۱۰۰-۴}{۱۰۰}$ یعنی $\frac{۹۶}{۱۰۰}$ غلظت روز قبل می‌شود، داریم:

$$a_n=a(\frac{۹۶}{۱۰۰})^n$$

حال از معلومات سؤال نتیجه می‌گیریم که:

$$a(\frac{۹۶}{۱۰۰})^n=\frac{۱}{۳}a \Rightarrow n\log(\frac{۹۶}{۱۰۰})=-\log ۳ \Rightarrow n(\log ۲^۵\times ۳-\log ۱۰^۲)=-\log ۳$$

$$\Rightarrow n(۵\log ۲+\log ۳-۲)=-\log ۳ \Rightarrow n(۱/۵+۰/۴۸-۲)=-۰/۴۸ \Rightarrow n=\frac{-۰/۴۸}{-۰/۰۲}=۲۴$$

بنابراین پس از گذشت ۲۴ روز، غلظت محلول $\frac{۱}{۳}$ غلظت اوّلیه می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۸ گزینه ۳

برای حل تست گام های زیر را برمی داریم:

الف) مختصات دو نقطهٔ A و B را در ضابطهٔ تابع $f(x)$ قرار داده و مقادیر a و b را تعیین می کنیم.

ب) با مشخص شدن ضابطهٔ $f(x)$، حاصل $f(-۱)$ را به دست می آوریم.

$$f(x)=a(b)^x-۱ \xrightarrow{A(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})} \frac{۱}{۲}=a(b)^{-\frac{۱}{۲}}-۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}\sqrt{b} \quad (I)$$

$$f(x)=a(b)^x-۱ \xrightarrow{B(۱,۱۱)} ۱۱=ab-۱ \Rightarrow ab=۱۲ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{۳}{۲}\sqrt{b}\times b=۱۲ \Rightarrow b^{\frac{۳}{۲}}=۸ \Rightarrow \sqrt{b^۳}=۸$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} b^۳=۶۴ \Rightarrow b=۴ \xrightarrow{(II)} ۴a=۱۲ \Rightarrow a=۳$$

پس ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x)=۳(۴)^x-۱$ در می آید. $f(-۱)$ برابر است با:

$$f(-۱)=۳(۴)^{-۱}-۱=\frac{۳}{۴}-۱=-\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۹ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{۲^x-\left(\frac{۱}{۲}\right)^x}{۲} \xrightarrow{f^{-۱}(۲)=?} \frac{۲^x-\left(\frac{۱}{۲}\right)^x}{۲}=۲$$

$$\Rightarrow ۲^x-\frac{۱}{۲^x}=۴ \xrightarrow{t=۲^x} t-\frac{۱}{t}=۴ \Rightarrow t^۲-۱=۴t$$

$$\Rightarrow t^۲-۴t-۱=۰ \Rightarrow \Delta=۲۰ \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{۴+۲\sqrt{۵}}{۲}=۲+\sqrt{۵} \\ t=\frac{۴-۲\sqrt{۵}}{۲}=۲-\sqrt{۵} \end{cases}$$

$$t=۲^x \Rightarrow x=\log_۲^t \Rightarrow \begin{cases} x=\log_۲^{(۲+\sqrt{۵})} \\ x=\log_۲^{(۲-\sqrt{۵})} < ۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

جواب $x=\log_۲^{(۲-\sqrt{۵})}$ غیرقابل‌قبول است، زیرا $۲-\sqrt{۵}<۰$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۰

گزینه ۳

برای تعیین محدودهٔ x، از دو طرف نامعادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم. هم چنین در ساده کردن نامعادلهٔ دادهشده از ویژگی $\log a^n = n\log a$ استفاده می کنیم.

$$۲^{-x} < ۰/۰۰۰۰۰۱ \Rightarrow ۲^{-x} < ۱۰^{-۶} \xrightarrow{\text{از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم}} \log ۲^{-x} < \log ۱۰^{-۶}$$
$$\xrightarrow{\log a^n = n\log a} -x\log ۲ < -۶\log ۱۰ \xrightarrow{\log ۱۰=۱} -x\log ۲ < -۶ \xrightarrow{\times(-۱)} x\log ۲ > ۶$$

در صورت سؤال $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ فرض شده است. بنابراین داریم:

$$x(۰/۳۰۱) > ۶ \Rightarrow x(\frac{۳۰۱}{۱۰۰۰}) > ۶ \Rightarrow x > \frac{۶۰۰۰}{۳۰۱} \Rightarrow x > ۱۹/۹۳۳$$

پس کوچک ترین مقدار x با دو رقم اعشار برابر ۱۹/۹۴ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۱

گزینه ۴

دو عبارت لگاریتمی $\log_{۲۱}۱۴۷$ و $\log_{۲۱}۱۳۲۳$ را برحسب $\log_{۲۱}۳$ می‌نویسیم:
جای ۱۴۷، می‌توانیم $\frac{۴۴۱}{۳}$ بنویسیم که خود ۴۴۱ هم $۲۱^۲$ است.

$$\log_{۲۱}۱۴۷ = \log_{۲۱}\frac{۴۴۱}{۳} = \log_{۲۱}۲۱^۲ - \log_{۲۱}۳ = ۲ - \log_{۲۱}^{۳}$$

عدد ۱۳۲۳ هم ۴۴۱×۳ است:

$$\log_{۲۱}۱۳۲۳ = \log_{۲۱}\left(۲۱^۲ \times ۳\right) = \log_{۲۱}۲۱^۲ + \log_{۲۱}۳ = ۲ + \log_{۲۱}۳$$

پس:

$$(\log_{۲۱}(۳))^۲ + \log_{۲۱}(۱۴۷)\log_{۲۱}(۱۳۲۳) = (\log_{۲۱}۳)^۲ + (۲ - \log_{۲۱}۳)(۲ + \log_{۲۱}۳)$$
$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} = (\log_{۲۱}۳)^۲ + ۴ - (\log_{۲۱}۳)^۲ = ۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۲۲ گزینه ۳

راه حل اول:

$$5^x = 10 \Rightarrow x = \log_5 10 = \log_5(2 \times 5) = \log_5 2 + \log_5 5$$
$$\Rightarrow x = \log_5 2 + 1 \Rightarrow \log_5 2 = x - 1$$
$$2^{f(x)} = 20 \Rightarrow f(x) = \log_2 20 = \frac{\log_5 20}{\log_5 2} = \frac{\log_5(4 \times 5)}{\log_5 2}$$
$$= \frac{\log_5(2^2 \times 5)}{\log_5 2} = \frac{2\log_5 2 + \log_5 5}{\log_5 2} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$$

راه حل دوم:

$$\log_5 2 = x - 1$$
$$2^{f(x)} = 20 \Rightarrow f(x) = \log_2 20 = \log_5(2^2 \times 5)$$
$$= 2\log_2 2 + \log_2 5 = 2 + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-2+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۲۳ گزینه ۴

$$0 \le \sin^2 x \le 1 \xrightarrow{\times 5} 0 \le 5\sin^2 x \le 5 \xrightarrow{-1} -1 \le 5\sin^2 x - 1 \le 4$$
$$\xrightarrow{5\sin^2 x - 1 \ge 0} 0 \le 5\sin^2 x - 1 \le 4 \Rightarrow 0 \le \sqrt{5\sin^2 x - 1} \le 2$$
$$\Rightarrow 0 \ge -\sqrt{5\sin^2 x - 1} \ge -2 \Rightarrow 2^0 \ge 2^{-\sqrt{5\sin^2 x - 1}} \ge 2^{-2}$$
$$\Rightarrow 1 \ge f(x) \ge \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{5}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۴

گزینه ۱

یک رابطهٔ فوق العاده مهم در مبحث لگاریتم وجود دارد که قبل از حل سؤال، ابتدا آن را بیان می کنیم:

$$\log ۱۰ = ۱ \Rightarrow \log ۲ \times ۵ = ۱ \Rightarrow \log ۲ + \log ۵ = ۱$$

پس همواره به خاطر داشته باشید که مجموع $\log ۲$ و $\log ۵$ برابر یک است. یعنی اگر در سؤالی یکی از این دو مورد داده شد، دیگری را هم به صورت غیر مستقیم به ما داده اند.

$$\log \sqrt[۳]{۱/۶} = \log \sqrt[۳]{\frac{۱۶}{۱۰}} = \log \sqrt[۳]{\frac{۸}{۵}} = \log \frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}} = \log ۲ - \log \sqrt[۳]{۵} = \log ۲ - \log ۵^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= \log ۲ - \frac{۱}{۳}\log ۵ \xrightarrow[\log ۲ = ۱-۳k]{\log ۵ = ۳k} \log \sqrt[۳]{۱/۶} = ۱ - ۳k - \frac{۱}{۳}(۳k) = ۱ - ۳k - k = ۱ - ۴k$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۲۵

گزینه ۱

نکته: هر نقطه روی نیمساز ربع دوم و چهارم به‌صورت $(\alpha, -\alpha)$ است.

$$\begin{cases} y(-۱) = ۰ \\ y(۱) = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{۱}{۲}}^{(-a+b)} = ۰ \\ \log_{\frac{۱}{۲}}^{(a+b)} = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = ۱ \\ a + b = ۲ \end{cases} \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۲۶

گزینه ۴

$$f(۰) = ۴ \Rightarrow a(\frac{۱}{۳})^{۰} = ۴ \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow f(x) = ۴(\frac{۱}{۳})^{x}$$

$$f(-۲) = ۴(\frac{۱}{۳})^{-۲} = ۴ \times ۳^{۲} = ۴ \times ۹ = ۳۶$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۷

گزینه ۴

با استفاده از دو ویژگی $\log ab = \log a + \log b$ و $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_b^a$، عبارت لگاریتمی را ساده کرده و با توجه به فرض $\log_b^a = \frac{۳}{۲}$، مقدار آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^۲} = \log_{\sqrt{b}}^{a} + \log_{\sqrt{b}}^{b^۲} = \log_{b^{\frac{۱}{۲}}}^{a} + \log_{b^{\frac{۱}{۲}}}^{b^۲} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_b^a + \frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\log_b^b$$

$$= ۲\log_b^a + ۴\log_b^b = ۲(\frac{۳}{۲}) + ۴(۱) = ۳ + ۴ = ۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۲۸

گزینه ۴

$$\log_{۳}^{(۲x^{۲}+۱)} - \log_{۳}^{(x+۲)} = ۱ \Rightarrow \log_{۳}^{\frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲}} = ۱ \Rightarrow \frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲} = ۳$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} - ۳x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹+۴۰}}{۴} = \frac{۳ \pm ۷}{۴} \Rightarrow x = -۱,\ \frac{۱۰}{۴}$$

چون باید $۲x - ۱ > ۰$ باشد، بنابراین جواب $x = \frac{۱۰}{۴}$ قابل‌قبول است.

$$\log_{۸}^{(۲x-۱)} = \log_{۸}^{(\frac{۱۰}{۲}-۱)} = \log_{۸}^{۴} = b \Rightarrow ۴ = ۸^{b} \Rightarrow ۲^{۲} = ۲^{۳b} \Rightarrow b = \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۹

گزینه ۴

$$۳^{۲x+y} = ۹ \times ۳^{x-y} \Rightarrow ۳^{۲x+y} = ۳^{۲+x-y} \Rightarrow ۲x+y = ۲+x-y \Rightarrow ۲y = ۲-x \quad (۱)$$

$$\log(x+۲y) = ۱ + \log y \Rightarrow \log(x+۲y) - \log y = \log ۱۰$$

$$\log\frac{(x+۲y)}{y} = \log ۱۰ \Rightarrow \frac{x+۲y}{y} = ۱۰ \Rightarrow x+۲y = ۱۰y \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)} x+۲y = ۵ \times (۲y) \xrightarrow{(۱)} x+۲-x = ۵(۲-x) \Rightarrow x = \frac{۸}{۵} = ۱/۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۰

گزینه ۱

فرض می‌کنیم $\log_{y} x = t$ باشد:

$$\frac{۱}{t} - ۲t = ۱ \Rightarrow ۱ - ۲t^{۲} = t \Rightarrow ۲t^{۲} + t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = -۱,\ \frac{۱}{۲}$$

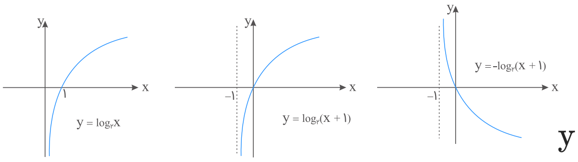
$$\xrightarrow{x,y>۱} \log_{y} x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow x^{۲} = y$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۱

گزینه ۲

به کمک انتقال و قرینهٔ نمودار تابع $\log_{۲}^{x}$، به راحتی به جواب می‌رسیم.



$$y=-\log_{۲}^{(x+۱)}=\log_{۲}^{(x+۱)^{-۱}}\Rightarrow U(x)=(x+۱)^{-۱}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۲

گزینه ۳

با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ را ساده می کنیم تا بتوانیم به آسانی با یکدیگر مقایسه کنیم.

$$f(x)=\log_{۲}^{\frac{۱}{x}}=\log_{۲}^{x^{-۱}}=-\log_{۲}^{x}\ ,\ D_f=(۰,+\infty)$$
$$g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}^{x}=\log_{۲^{-۱}}^{x}=-\log_{۲}^{x}\ ,\ D_g=(۰,+\infty)$$

مشاهده می کنیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ضابطه های برابر و دامنه تعریف یکسان دارند. پس دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی هستند و نمودارهای آن‌ها بر هم منطبق اند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۳

گزینه ۳

$$\log_{x}^{(۳x+۸)}+\log_{x}^{(x-۶)}=۲\Rightarrow\log_{x}^{(۳x+۸)(x-۶)}=۲\Rightarrow x^{۲}=۳x^{۲}-۱۰x-۴۸\Rightarrow x^{۲}-۵x-۲۴=۰$$

$$\Rightarrow(x-۸)(x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۸\Rightarrow\log_{۴}^{۸}=\log_{۲^{۲}}^{۲^{۳}}=\frac{۳}{۲}\\ x=-۳\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۳۴

گزینه ۲

با استفاده از فرضیات بیان‌شده در صورت سؤال، مقدار $a^{۳}$ را به دست می‌آوریم.

$$\log_{\sqrt{۳}}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_{۳}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲\log_{۳}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \log_{۳}^{a} = \frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{\log_{b}^{a}=c \Rightarrow a=b^{c}} a = ۳^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow a^{۳} = (۳^{\frac{۲}{۳}})^{۳} = ۳^{۲} = ۹$$

با استفاده از ویژگی $\log_{b^{n}}^{a^{m}} = \frac{m}{n}\log_{b}^{a}$ حاصل لگاریتم $(a^{۳}+۷)$ را در مبنای ۸ حساب می کنیم:

$$\log_{۸}^{(a^{۳}+۷)} = \log_{۸}^{(۹+۷)} = \log_{۸}^{۱۶} = \log_{۲^{۳}}^{۲^{۴}} = \frac{۴}{۳}\log_{۲}^{۲} = \frac{۴}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۳۵

گزینه ۳

$$\log_{۲}(۴^{x}+۱۵) = x+۳ \Rightarrow ۴^{x}+۱۵ = ۲^{x+۳}$$

$$\xrightarrow{۲^{x}=t} t^{۲}+۱۵ = ۸t \Rightarrow t^{۲}-۸t+۱۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (t-۳)(t-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۳ = ۲^{x} \Rightarrow x = \log_{۲}۳ \\ t = ۵ = ۲^{x} \Rightarrow x = \log_{۲}۵ \end{cases}$$

$$x_{۱}+x_{۲} = \log_{۲}۳+\log_{۲}۵ = \log_{۲}۱۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۶ گزینه ۲

با مساوی قرار دادن ضابطه‌های دو تابع مختصات نقطهٔ تقاطع یعنی نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = ۴^x \\ g(x) = (\frac{۱}{۲})^{۲x} + \frac{۳}{۲} = (\frac{۱}{۴})^x + \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴^x = (\frac{۱}{۴})^x + \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۴^x - (\frac{۱}{۴})^x = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{(*)} x = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در یکی از توابع}} y = ۲ \Rightarrow A(\frac{۱}{۲}, ۲)$$

$$\Rightarrow \text{فاصله} = \sqrt{(\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}))^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{۲}$$

حل معادلهٔ (*):

$$۴^x - (\frac{۱}{۴})^x = \frac{۳}{۲} \quad , \quad a = ۴^x$$

$$\Rightarrow a - \frac{۱}{a} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a^۲ - \frac{۳}{۲}a - ۱ = ۰ \Rightarrow (a-۲)(a+\frac{۱}{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \\ a = -\frac{۱}{۲} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۷ گزینه ۳

چون تابع از دو نقطهٔ $(۵, ۱۱)$ و $(۲۱, ۱۵)$ می‌گذرد، بنابراین مختصات این نقاط در تابع صدق می‌کند، داریم:

$$(۵, ۱۱) \in f \Rightarrow ۱۱ = a + \log_۲^{(۱۵+b)^۲}$$

$$(۲۱, ۱۵) \in f \Rightarrow ۱۵ = a + \log_۲^{(۶۳+b)^۲}$$

$$\begin{cases} ۱۱ = a + \log_۲^{(۱۵+b)^۲} \\ ۱۵ = a + \log_۲^{(۶۳+b)^۲} \end{cases} \Rightarrow \times(-۱) \begin{cases} -۱۱ + a = -\log_۲^{(۱۵+b)^۲} \\ ۱۵ - a = \log_۲^{(۶۳+b)^۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴ = \log_۲^{(۶۳+b)^۲} - \log_۲^{(۱۵+b)^۲} \Rightarrow ۴ = ۲\log_۲^{(۶۳+b)} - ۲\log_۲^{(۱۵+b)}$$

$$\Rightarrow ۴ = ۲(\log_۲^{(۶۳+b)} - \log_۲^{(۱۵+b)}) \Rightarrow ۲ = \log_۲^{\frac{۶۳+b}{۱۵+b}} \Rightarrow \frac{۶۳+b}{۱۵+b} = ۴$$

$$\Rightarrow ۶۳ + b = ۶۰ + ۴b \Rightarrow ۳b = ۳ \Rightarrow b = ۱$$

$$۱۱ = a + \log_۲^{(۱۵+b)^۲} \xrightarrow{b=۱} ۱۱ = a + \log_۲^{(۱۶)^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۱ - a = ۸ \Rightarrow a = ۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۸

گزینه ۴

در حل تست به دو نکته زیر توجه داشته باشید:

الف) دامنه تعریف تابع $y = \log g(x)$ به صورت $g(x) > 0$ است.

ب) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است.

$$y = \log(x-1) \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (I)$$
$$f(x) = \sqrt{1-\log(x-1)} \Rightarrow 1-\log(x-1) \geq 0 \Rightarrow \log(x-1) \leq 1$$
$$\Rightarrow \log(x-1) \leq \log 10 \Rightarrow 0 < x-1 \leq 10 \Rightarrow 1 < x \leq 11 \quad (II)$$

دامنه تعریف تابع اصلی اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است:

$$(I) \cap (II) : D_f = (1, 11]$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۹

گزینه ۱

در معادلهٔ درجهٔ دو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$، اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \; , \; \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

همچنین از ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\log a + \log b = \log ab$$

پس حاصل $a+b$ و $a \times b$ را به دست می آوریم:

$$x^2 - 10x + 0/1 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌های معادله } a \text{ و } b} \begin{cases} S = a+b = -(\frac{-10}{1}) = 10 \\ P = a \times b = \frac{0/1}{1} = 0/1 \end{cases}$$

حاصل عبارت لگاریتمی را محاسبه می کنیم:

$$\log a + \log b - \log(a+b) = \log ab - \log(a+b)$$
$$= \log 0/1 - \log 10 = \log 10^{-1} - \log 10 = -\log 10 - \log 10 = -1-1 = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۰

گزینه ۳

نقاط برخورد در ضابطهٔ توابع $f(x)=A(۲)^{Bx}$ و $۴y=۵x$ صدق می‌کنند.

$$۴y=۵x \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \Rightarrow y=\frac{۵}{۲} \Rightarrow (۲,\frac{۵}{۲}) \\ x=۴ \Rightarrow y=۵ \Rightarrow (۴,۵) \end{cases}$$

$$f(x)=A(۲)^{Bx} \Rightarrow \begin{cases} (۲,\frac{۵}{۲}) : \frac{۵}{۲}=A(۲)^{B\times ۲} \Rightarrow ۵=۲A(۲)^{۲B} \\ (۴,۵) : ۵=A(۲)^{B\times ۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲A(۲)^{۲B}=A(۲)^{۴B} \Rightarrow ۲^{۲B+۱}=۲^{۴B} \Rightarrow ۲B+۱=۴B \Rightarrow B=\frac{۱}{۲}$$

$$۵=A(۲)^{۴B} \xrightarrow{B=\frac{۱}{۲}} ۵=A(۲)^{۲} \Rightarrow A=\frac{۵}{۴} \Rightarrow f(x)=\frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{x}{۲}}$$

$$\frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{x}{۲}}=۱۰ \Rightarrow (۲)^{\frac{x}{۲}}=۸=۲^{۳} \Rightarrow \frac{x}{۲}=۳ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow f^{-۱}(۱۰)=۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۴۱

گزینه ۴

دو معادلهٔ نمایی و لگاریتمی داده‌شده را ساده می‌کنیم. سپس با تشکیل یک دستگاه، مقادیر x و y را به دست می‌آوریم.
برای حل از دو ویژگی $\log a+\log b=\log ab$ و $a^{n}\times a^{m}=a^{m+n}$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲^{x}\times ۸^{y}=۴ \Rightarrow ۲^{x}\times (۲^{۳})^{y}=۲^{۲} \Rightarrow ۲^{x}\times ۲^{۳y}=۲^{۲} \Rightarrow x+۳y=۲ \\ \log x=\log ۲+\log y \Rightarrow \log x=\log ۲y \Rightarrow x=۲y \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲y+۳y=۲ \Rightarrow ۵y=۲ \Rightarrow y=\frac{۲}{۵} \xrightarrow{x=۲y} x=\frac{۴}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۴۲

گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، پس $ax+b>۰$ بوده و $x>-\frac{b}{a}$ می‌شود. از طریق مقایسه با مقادیر قابل‌قبول برای x، رابطهٔ بین a و b مشخص می‌شود.

ب) $f(۴)=۲$ است. با حل دو معادله و دو مجهول داده‌شده مقادیر a و b مشخص شده و درنهایت $f(-\frac{۴}{۹})$ حساب می‌شود.

گام دوم

$$x>-\frac{b}{a}, x\in(-\frac{۱}{۲},+\infty)\Rightarrow -\frac{b}{a}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲b \quad (I)$$
$$f(۴)=۲\Rightarrow \log_{۳}^{(۴a+b)}=۲\Rightarrow ۴a+b=۳^{۲}=۹\Rightarrow ۴a+b=۹$$
$$\xrightarrow{(I)} ۴(۲b)+b=۹\Rightarrow ۸b+b=۹\Rightarrow ۹b=۹\Rightarrow b=۱\xrightarrow{(I)} a=۲$$

پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=\log_{۳}^{(۲x+۱)}$ به دست آمد. حالا $f(-\frac{۴}{۹})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-\frac{۴}{۹})=\log_{۳}^{(-\frac{۸}{۹}+۱)}=\log_{۳}^{\frac{۱}{۹}}=\log_{۳}^{۳^{-۲}}=-۲\log_{۳}^{۳}=-۲$$

۴۳

گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) در صورت سؤال دو معادله یکی به صورت نمایی و دیگری لگاریتمی داده‌شده است. در معادلهٔ نمایی تنها مجهول x و در معادلهٔ لگاریتمی x و y مجهول است. پس ابتدا معادلهٔ نمایی را حل کرده و x را محاسبه می کنیم. سپس با جایگذاری x در معادلهٔ لگاریتمی مقدار y را هم به دست می آوریم.

ب) برای حل معادلهٔ نمایی دو طرف را به دو عدد توان دار با پایهٔ ۲ تبدیل کرده و با مساوی قرار دادن توان ها مقدار x را حساب می کنیم.

گام دوم

$$۴\sqrt{۲}=۴^{x}\Rightarrow ۲^{۲}\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=(۲^{۲})^{x}\Rightarrow ۲^{\frac{۵}{۲}}=۲^{۲x}\Rightarrow ۲x=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=\frac{۵}{۴}$$

حال با داشتن مقدار x و حل معادلهٔ لگاریتمی مقدار y را محاسبه می کنیم:

$$۱+\log\sqrt{x+۱}=\log y\xrightarrow{x=\frac{۵}{۴}} ۱+\log\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱}=\log y\Rightarrow \log ۱۰+\log\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\log y$$
$$\Rightarrow \log ۱۰+\log\frac{۳}{۲}=\log y\Rightarrow \log ۱۰(\frac{۳}{۲})=\log ۱۵=\log y\Rightarrow y=۱۵$$

۴۴

گزینه ۱

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1=\sqrt[3]{2^{\frac{a}{2}+b}} \Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b}=1 \Rightarrow \frac{a}{2}+b=0 \Rightarrow b=-\frac{a}{2}(*)$$

$$f^{-1}(8)=5 \Rightarrow f(5)=8 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 8=\sqrt[3]{2^{5a+b}}$$

$$2^{5a+b}=2^{9} \Rightarrow 5a+b=9 \xrightarrow{(*)} 5a-\frac{a}{2}=9 \Rightarrow \frac{9a}{2}=9 \Rightarrow a=2 \xrightarrow{(*)} b=-1$$

در آخر داریم:

$$a-b=2-(-1)=3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴۵

گزینه ۱

با استفاده از ویژگی $\log a+\log b=\log ab$، معادلهٔ لگاریتمی را حل کرده و مقدار x را به دست می آوریم:

$$\log\frac{2}{x}+\log(x+1)=1 \Rightarrow \log\frac{2}{x}(x+1)=1 \Rightarrow \frac{2(x+1)}{x}=10$$

$$\Rightarrow 2(x+1)=10x \Rightarrow 2x+2=10x \Rightarrow 8x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

برای محاسبهٔ $\log_8^x$ از ویژگی $\log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_b^a$ استفاده می کنیم.

$$\log_8^x=\log_8^{\frac{1}{4}}=\log_{2^3}^{2^{-2}}=-\frac{2}{3}\log_2^2=-\frac{2}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۴۶

گزینه ۴

با استفاده از ویژگی های $\log_b^a+\log_b^c=\log_b^{ac}$ و $\log_b^a=c \Rightarrow a=b^c$ معادله را حل می کنیم:

$$\log_2^{(5x+1)}+\log_2^x=2 \Rightarrow \log_2^{(5x+1)x}=2 \Rightarrow (5x+1)x=2^2=4 \Rightarrow 5x^2+x=4$$

$$\Rightarrow 5x^2+x-4=0 \Rightarrow (5x-4)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} 5x-4=0 \Rightarrow 5x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{5} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$x=-1$ به این دلیل قابل‌قبول نیست که عدد جلوی لگاریتم نباید منفی شود. اگر $x=\frac{4}{5}$ باشد، مقدار $\frac{4}{x}$ برابر ۵ به دست می آید.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۴۷ گزینهٔ ۱

$$k = \log_{۳}^{۹A^{۲}} = \log_{۳}^{۹} + \log_{۳}^{A^{۲}} = \log_{۳}^{۳^{۲}} + \log_{۳}^{A^{۲}} \Rightarrow k = ۲\log_{۳}^{۳} + ۲\log_{۳}^{A}$$
$$\xrightarrow{\log_{۳}^{۳}=۱} k = ۲ + ۲\log_{۳}^{A}$$

ازآنجاکه $A = ۳^{a}$، مقدار k برابر است با:

$$\Rightarrow k = ۲ + ۲\log_{۳}^{۳^{a}} = ۲ + ۲a\log_{۳}^{۳} = ۲ + ۲a$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

۴۸ گزینهٔ ۴

برای آنکه دو تابع برابر باشند، باید دامنه‌های یکسانی داشته باشند. در این تست کافی است دامنهٔ تابع $y = \log\frac{x-۲}{x}$ را پیدا کنیم و با دامنهٔ تک‌تک گزینه‌ها مقایسه کنیم.

$$y = \log\frac{x-۲}{x} \Rightarrow \text{دامنه} : \frac{x-۲}{x} > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > ۲ \\ \text{یا} \\ x < ۰ \end{cases}$$

$$\text{گزینهٔ ۱} : y = \log(x-۲) - \log x \Rightarrow \text{دامنه} : \begin{cases} x - ۲ > ۰ \Rightarrow x > ۲ \\ x > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > ۲$$

$$\text{گزینهٔ ۲} : y = \log\frac{x^{۲}-۴}{x(x+۲)} = \log\frac{(x-۲)(x+۲)}{x(x+۲)} \Rightarrow \frac{(x-۲)(x+۲)}{x(x+۲)} > ۰$$

در گزینهٔ ۲ باید $x = -۲$ باشد، پس دامنهٔ آن با دامنهٔ تابع اولیه مغایرت دارد.

$$\text{گزینهٔ ۳} : y = \frac{۱}{۲}\log\left(\frac{x-۲}{x}\right)^{۲} \Rightarrow \left(\frac{x-۲}{x}\right)^{۲} > ۰ \Rightarrow x = ۲, ۰$$

$$\text{گزینهٔ ۴} : y = ۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}} \xrightarrow{\text{دامنه}} \sqrt{\frac{x-۲}{x}} > ۰ \Rightarrow \frac{x-۲}{x} > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > ۲ \\ \text{یا} \\ x < ۰ \end{cases}$$

بنابراین فقط دامنهٔ گزینهٔ ۴ با دامنهٔ تابع اولیه برابر است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۹

گزینه ۳

با استفاده از ویژگی $\log A^n = n\log A$، ابتدا مقدار K را محاسبه می کنیم.

$$\log ۳ + \log \sqrt[۴]{۳} = \log (۸۱)^K \Rightarrow \log ۳ + \log ۳^{\frac{۱}{۴}} = \log (۳^۴)^K = \log ۳^{۴K}$$
$$\xrightarrow{\log A^n = n\log A} \log ۳ + \frac{۱}{۴}\log ۳ = ۴K\log ۳ \Rightarrow (۱+\frac{۱}{۴})\log ۳ = ۴K\log ۳$$
$$\Rightarrow ۴K = ۱+\frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow K = \frac{۵}{۱۶} \text{ یا } \frac{۵}{K} = ۱۶$$

اکنون حاصل لگاریتم $\frac{۵}{K}$ در پایه ۲ را محاسبه می کنیم:

$$\log_۲^{\frac{۵}{K}} = \log_۲^{\frac{۵}{\frac{۵}{۱۶}}} = \log_۲^{۲^۴} = ۴\log_۲^۲ = ۴\times ۱ = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۵۰

گزینه ۳

معادلهٔ توانی را با استفاده از تغییر متغیر $۲^x = t$ حل می کنیم. توجه داشته باشید که مقدار ۲^x همیشه مثبت است.

$$۴^x + ۲^x = ۷۲ \Rightarrow (۲^۲)^x + ۲^x = ۷۲ \Rightarrow (۲^x)^۲ + ۲^x = ۷۲ \xrightarrow{۲^x = t} t^۲ + t = ۷۲$$
$$\Rightarrow t^۲ + t - ۷۲ = ۰ \Rightarrow (t+۹)(t-۸) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t = -۹ & \text{غ.ق.ق} \\ t = ۸ \Rightarrow ۲^x = ۸ \Rightarrow ۲^x = ۲^۳ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

حال که مقدار x را به دست آوردیم آن را در معادلهٔ لگاریتمی قرار داده و با استفاده از ویژگی های لگاریتم، مقدار y را به دست می آوریم.

$$\log(x+۱) + \log(۲y + x^۲) = ۲ \xrightarrow{x=۳} \log ۴ + \log(۲y+۹) = ۲$$
$$\xrightarrow{\log a + \log b = \log ab} \log_{۱۰}^{۴(۲y+۹)} = ۲ \xrightarrow{\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c} ۴(۲y+۹) = ۱۰^۲ = ۱۰۰$$
$$\Rightarrow ۲y + ۹ = ۲۵ \Rightarrow ۲y = ۱۶ \Rightarrow y = ۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۱

گزینه ۲

نکته:

$$۱)\ \log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}(x > ۰, x \neq ۱)$$

$$۲)\ \log_a^{b^n} = n\log_a^b$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\log_{۱۸}^{۸} = \frac{\log_۳^۸}{\log_۳^{۱۸}} = \frac{\log_۳^{۲^۳}}{\log_۳^۲ + \log_۳^۹} = \frac{۳\log_۳^۲}{\log_۳^۲ + \log_۳^{۳^۲}}$$

$$= \frac{۳\log_۳^۲}{\log_۳^۲ + ۲\underbrace{\log_۳^۳}_{۱}} = \frac{۳\left(\frac{۵}{۸}\right)}{\frac{۵}{۸} + ۲} = \frac{\frac{۱۵}{\cancel{۸}}}{\frac{۲۱}{\cancel{۸}}} = \frac{۱۵}{۲۱} = \frac{۵}{۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۲

گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

مختصات دو نقطهٔ $(۲,۶)$ و $(۱۲,۱۰)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند؛ بنابراین مختصات این دو نقطه را در ضابطهٔ تابع جایگذاری کرده و مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$f(۲) = ۶ \Rightarrow a + \log_۲^{(۲b-۴)} = ۶ \Rightarrow \log_۲^{(۲b-۴)} = ۶ - a$$

$$\Rightarrow ۲^{۶-a} = ۲b - ۴ \qquad (۱)$$

$$f(۱۲) = ۱۰ \Rightarrow a + \log_۲^{(۱۲b-۴)} = ۱۰ \Rightarrow \log_۲^{(۱۲b-۴)} = ۱۰ - a$$

$$\Rightarrow ۱۲b - ۴ = ۲^{۱۰-a} \qquad (۲)$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{۲^{۶-a}}{۲^{۱۰-a}} = \frac{۲b-۴}{۱۲b-۴} \Rightarrow ۲^{-۴} = \frac{۲b-۴}{۱۲b-۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۶} = \frac{۲(b-۲)}{۴(۳b-۱)} \Rightarrow ۳b - ۱ = ۸(b-۲) \Rightarrow ۳b - ۱ = ۸b - ۱۶$$

$$\Rightarrow ۵b = ۱۵ \Rightarrow b = ۳ \xrightarrow{(۲)} ۲^{۱۰-a} = ۳۲ = ۲^۵ \Rightarrow ۱۰ - a = ۵ \Rightarrow a = ۵$$

۵۳ گزینه ۲

اگر جمعیت اولیه x نفر باشد، سال اول $\frac{۹۹}{۱۰۰}x$ و سال دوم $\left(\frac{۹۹}{۱۰۰}\right)^{۲}x$ و سال nاُم $\left(\frac{۹۹}{۱۰۰}\right)^{n}x$ نفر خواهد بود.

$$\left(\frac{۹۹}{۱۰۰}\right)^{n}x=\frac{۱}{۲}x\Rightarrow\left(\frac{۱۰۰}{۹۹}\right)^{n}=۲$$

$$\Rightarrow\log\left(\frac{۱۰۰}{۹۹}\right)^{n}=\log ۲\Rightarrow n\left(\log ۱۰۰-\log ۹۹\right)=\log ۲$$

$$\Rightarrow n=\frac{۰/۳}{۲-۱/۹۹۵}=۶۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۴ گزینه ۳

$$\log_{۲}۳=a\Rightarrow ۲^{a}=۳\Rightarrow ۲^{۲a}=۹(*)$$

$$\log_{۸}b=\frac{۲}{۳}(۱+a)\Rightarrow b=۸^{\frac{۲}{۳}(۱+a)}\xrightarrow{۸=۲^{۳}}b=۲^{۲(۱+a)}\Rightarrow b=۲^{۲}\times ۲^{۲a}$$

$$\xrightarrow{(*)}b=۲^{۲}\times ۹\Rightarrow b=۳۶$$

$$\log(۳b-۸)=\log(۳(۳۶)-۸)=\log(۱۰۸-۸)=\log ۱۰۰=۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۵۵ گزینه ۱

$$\log_{۲}۳+۱<\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-[x]}<\log_{۲}۵+۱$$

$$\Rightarrow\log_{۲}۳+۱<-\log_{۲}\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-[x]}<\log_{۲}۵+۱$$

$$\Rightarrow\log_{۲}۳+۱<\log_{۲}\left(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-[x]}\right)^{-۱}<\log_{۲}۵+۱$$

$$\Rightarrow ۶<۱۲+\sqrt{[x]}-[x]<۱۰\xrightarrow{[x]=A}\begin{cases}\sqrt{A}-A+۲<۰\Rightarrow A-\sqrt{A}-۲>۰\\ \sqrt{A}-A+۶>۰\Rightarrow A-\sqrt{A}-۶<۰\end{cases}$$

$$(\sqrt{A}+۱)(\sqrt{A}-۲)>۰\Rightarrow\sqrt{A}-۲>۰\Rightarrow A>۴$$
$$\Rightarrow [x]>۴\Rightarrow x\geq ۵\quad(۱)$$
$$(\sqrt{A}-۳)(\sqrt{A}+۲)<۰\Rightarrow\sqrt{A}-۳<۰\Rightarrow ۰\leq A<۹$$
$$\Rightarrow ۰\leq [x]<۹\Rightarrow ۰\leq x<۹\quad(۲)$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده برابر $[۵,۹)$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۵۶

گزینه ۳

مختصات نقاط $(-۱,۰)$ و $(۰,۲)$ را در ضابطه تابع جایگذاری می‌کنیم و با استفاده از دستگاه معادلات، a و b را به دست می‌آوریم.

$$a(\frac{۱}{۲})^{-۱} + b = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰ \quad , \quad a(\frac{۱}{۲})^{۰} + b = ۲ \Rightarrow a + b = ۲$$

$$\begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ a + b = ۲ \end{cases} \xrightarrow{-} a = -۲ \quad , \quad b = ۴$$

ضابطه تابع f را نوشته و مقدار تابع را در $x = ۱$ به دست می‌آوریم.

$$f(x) = -۲(\frac{۱}{۲})^{x} + ۴ \Rightarrow f(۱) = -۲(\frac{۱}{۲}) + ۴ = ۳$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۵۷

گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

دو تابع در نقطهٔ A متقاطع هستند؛ بنابراین در این نقطه با یکدیگر برخورد می‌کنند. با مساوی قرار دادن ضابطهٔ دو تابع نقطهٔ برخورد را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x} = ۳^{x} + \frac{۸}{۳} \Rightarrow (۳^{-\frac{۱}{۲}})^{۲x} = ۳^{x} + \frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳^{-x} = ۳^{x} + \frac{۸}{۳} \xrightarrow{۳^{-x}=t} t = \frac{۱}{t} + \frac{۸}{۳} \xrightarrow{\times t} t^{۲} = ۱ + \frac{۸}{۳}t$$

$$\xrightarrow{\times ۳} ۳t^{۲} = ۳ + ۸t \Rightarrow ۳t^{۲} - ۸t - ۳ = ۰$$

$$\Delta = (-۸)^{۲} - ۴(۳)(-۳) = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰$$

$$\begin{cases} t_{۱} = \frac{۸+۱۰}{۶} = \frac{۱۸}{۶} = ۳ \Rightarrow ۳^{-x} = ۳ \Rightarrow x = -۱ \\ t_{۲} = \frac{۸-۱۰}{۶} = \frac{-۲}{۶} = -\frac{۱}{۳} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$x = -۱ \Rightarrow y = ۳^{-۱} + \frac{۸}{۳} = \frac{۱}{۳} + \frac{۸}{۳} = \frac{۹}{۳} = ۳$$

بنابراین نقطهٔ برخورد دو تابع نقطهٔ $A(-۱,۳)$ است.
فاصلهٔ نقطهٔ $(-۱,۳)$ از نقطهٔ $(-۱,۱)$ برابر با $۳ - ۱ = ۲$ است.

۵۸

گزینه ۱

$$(0/4)^{2x-1} = (\frac{125}{8})^{x^2}$$

$$\Rightarrow (\frac{125}{8})^{x^2} = ((\frac{5}{2})^3)^{x^2} = (\frac{5}{2})^{3x^2} = (\frac{2}{5})^{-3x^2} = (\frac{4}{10})^{-3x^2}$$

$$\Rightarrow (\frac{4}{10})^{2x-1} = (\frac{4}{10})^{-3x^2} \Rightarrow -3x^2 = 2x - 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{غ.ق.ق} \\ x = \frac{1}{3} & \text{ق.ق} \end{cases}$$

به ازای $x = -1$ عبارت $\log_8^{(9x+1)}$ تعریف‌نشده است.

برای $x = \frac{1}{3}$ داریم:

$$\log_8^{(9x+1)} = \log_8^{(9\times\frac{1}{3}+1)} = \log_8^4 = \log_{2^3}^{2^2} = \frac{2}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۵۹

گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

گام اول

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید همواره مثبت باشد.

ب) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، باید نامنفی باشد.

گام دوم

باتوجه‌به دو قسمت گام اول، مجموعه جواب را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\text{I)}\ x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x > 3 \text{ یا } x < 0$$

$$\text{II)}\ 1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \log(x^2 - 3x) \Rightarrow \log 10 \geq \log(x^2 - 3x)$$

$$\Rightarrow 10 \geq x^2 - 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 5$$

اشتراک دو مجموعه جواب به‌دست‌آمده برابر $[-2, 0) \cup (3, 5]$ است.

۶۰

گزینه ۴

$$y = \sqrt{f(\frac{1}{x}) - f(x)} = \sqrt{2^{\frac{1}{x}} - 2^x}$$

برای یافتن دامنهٔ تعریف تابع به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$2^{\frac{1}{x}} - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} \geq 2^x$$

اگر از طرفین لگاریتم در مبنای ۲ بگیریم، داریم:

$$\log_2^{2^{\frac{1}{x}}} \geq \log_2^{2^x} \Rightarrow \frac{1}{x} \geq x \Rightarrow x - \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \leq 0$$

x		-1		0		1	
$\frac{x^2-1}{x}$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

پس دامنهٔ تعریف تابع عبارت است از: $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

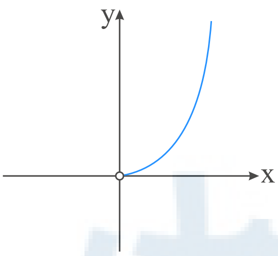
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۶۱

گزینه ۲

دامنهٔ تابع $x > 0$ است.

$$f(x) = 9^{\log_3 x} = 3^{2\log_3 x} = 3^{\log_3 x^2} = x^2$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۶۲ گزینه ۴

$$\log(x+۲)+\log(۲x-۱)=\log(۴x+۱) \Rightarrow \log(x+۲)(۲x-۱)=\log(۴x+۱)$$
$$\Rightarrow (x+۲)(۲x-۱)=(۴x+۱)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-x+۴x-۲=۴x+۱ \Rightarrow ۲x^۲-x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=+\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$x=\frac{۳}{۲}$ قابل‌قبول است.

$$\log_۴(۲x+۵)=\log_۴(۳+۵)=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۶
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

۶۳ گزینه ۱

$$\log_a c+\log_b c=۱ \Rightarrow \frac{۱}{\log_c a}+\frac{۱}{\log_c b}=۱ \Rightarrow \frac{\log_c b+\log_c a}{\log_c a.\log_c b}=۱$$
$$\Rightarrow \log_c a+\log_c b=(\log_c a)(\log_c b)$$
$$\Rightarrow (\log_c a)(\log_c b)=\log_c(ab)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۶۴ گزینه ۲

با استفاده از ویژگی $\log_b^{a^n}=n\log_b^a$ تغییراتی در عبارت $۲\log(۱+\sqrt{۵})$ ایجاد می کنیم.

$$۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۱+\sqrt{۵})^۲=\log(۱+۲\sqrt{۵}+۵)=\log(۶+۲\sqrt{۵})$$

برای محاسبهٔ حاصل عبارت داده‌شده از ویژگی $\log a+\log b=\log ab$ استفاده می کنیم.

$$A=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۶+۲\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})$$
$$=\log(۳۶-۲۰)=\log ۱۶=\log ۲^۴=۴\log ۲ \xrightarrow{\log ۲=k} A=۴k$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۶۵

گزینه ۳

با استفاده از معادلهٔ $\log(y+۲)=۱$ به آسانی مقدار y را حساب می‌کنیم.

$$\log(y+۲)=۱\Rightarrow \log_{۱۰}^{(y+۲)}=۱\Rightarrow y+۲=۱۰\Rightarrow y=۸$$

y را در معادلهٔ دوم قرار داده و مقدار x را به دست می‌آوریم.

$$\log(y-x)+\log(۴x+y)=۲\Rightarrow \log(۸-x)+\log(۴x+۸)=۲$$
$$\xrightarrow{\log a+\log b=\log ab}\log_{۱۰}^{(۸-x)(۴x+۸)}=۲\Rightarrow (۸-x)(۴x+۸)=۱۰^{۲}=۱۰۰$$
$$\Rightarrow -۴x^{۲}+۲۴x+۶۴=۱۰۰\Rightarrow ۴x^{۲}-۲۴x+۳۶=۰\xrightarrow{\div ۴}x^{۲}-۶x+۹=۰$$
$$\Rightarrow (x-۳)^{۲}=۰\Rightarrow x-۳=۰\Rightarrow x=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۶۶

گزینه ۱

$$\log_{۸}۱۸=\log_{۲^{۳}}۱۸=\frac{۱}{۳}\log_{۲}(۳^{۲}\times ۲)=\frac{۱}{۳}(۲\log_{۲}۳+\log_{۲}۲)$$
$$=\frac{۱}{۳}(۲\log_{۲}۳+۱)=m\Rightarrow ۲\log_{۲}۳+۱=۳m$$
$$\Rightarrow ۲\log_{۲}۳=۳m-۱\Rightarrow \log_{۲}۳=\frac{۳m-۱}{۲}$$
$$\log_{۴}۱۲=\log_{۲^{۲}}۱۲=\frac{۱}{۲}\log_{۲}(۲^{۲}\times ۳)=\frac{۱}{۲}(\log_{۲}۲^{۲}+\log_{۲}۳)$$
$$=\frac{۱}{۲}(۲+\log_{۲}۳)=\frac{۱}{۲}(۲+\frac{۳m-۱}{۲})=\frac{۱}{۲}(\frac{۳m+۳}{۲})=\frac{۳}{۴}(m+۱)$$

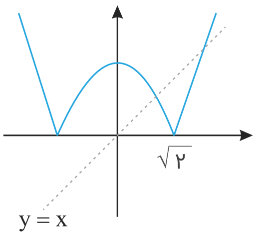
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶۷

گزینه ۴

$$|x^۲-۲|-x>۰\Rightarrow |x^۲-۲|>x \quad (۱)$$

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که یک برخورد در بازهٔ $(۰,\sqrt{۲})$ و یک برخورد در بازهٔ $(\sqrt{۲},+\infty)$است:

$$۰<x<\sqrt{۲} \ : \ |x^۲-۲|=۲-x^۲$$
$$\Rightarrow ۲-x^۲=x\Rightarrow x^۲+x-۲=۰\xrightarrow{۰<x<\sqrt{۲}}x=۱$$
$$x>\sqrt{۲} \ : \ |x^۲-۲|=x^۲-۲$$
$$\Rightarrow x^۲-۲=x\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\xrightarrow{x>\sqrt{۲}}x=۲$$

پس جواب نامعادلهٔ (۱) که همان دامنهٔ تابع است به‌صورت زیر خواهد بود:

$$D=(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۶۸

گزینه ۴

$$\log_x^{(x^۲+۴)}=۱+\log_x^۵\Rightarrow \log_x^{(x^۲+۴)}=\log_x^x+\log_x^۵\Rightarrow \log_x^{(x^۲+۴)}=\log_x^{۵x}$$
$$\Rightarrow x^۲+۴=۵x\Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰$$
$$\Rightarrow (x-۴)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱ & \text{غ.ق.ق}\\ x=۴\end{cases}$$

حال مقدار لگاریتم ۴ در پایهٔ ۲ را حساب می کنیم:

$$\log_۲^۴=\log_۲^{۲^۲}=۲\log_۲^۲=۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۶۹ گزینه ۴

$$f(x)=\frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲}\xrightarrow{f^{-۱}(۲)=?}\frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲}=۲$$

$$\Rightarrow ۲^x+(\frac{۱}{۲})^x=۴\Rightarrow ۲^x+\frac{۱}{۲^x}=۴\xrightarrow{t=۲^x}t+\frac{۱}{t}=۴$$

$$\Rightarrow t^۲+۱=۴t\Rightarrow t^۲-۴t+۱=۰\Rightarrow \Delta=۱۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{۲}=۲+\sqrt{۳}\\ t=\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۲}=۲-\sqrt{۳}\end{cases}$$

$$t=۲^x\Rightarrow x=\log_۲^t\Rightarrow\begin{cases}x=\log_۲^{(۲+\sqrt{۳})}\\ x=\log_۲^{(۲-\sqrt{۳})}<۰ \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

جواب $x=\log_۲^{(۲-\sqrt{۳})}$ غیرقابل‌قبول است، زیرا دامنه $[۰,+\infty)$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۷۰ گزینه ۳

اگر باد اولیهٔ قایق را x در نظر بگیریم آنگاه در روز nاُم باد قایق $x(۰/۹۵)^n$ خواهد بود.

$$x(۰/۹۵)^n=\frac{x}{۲}\Rightarrow(\frac{۹۵}{۱۰۰})^n=\frac{۱}{۲}\Rightarrow(\frac{۲۰}{۱۹})^n=۲\Rightarrow n(\log ۲۰-\log ۱۹)=\log ۲$$

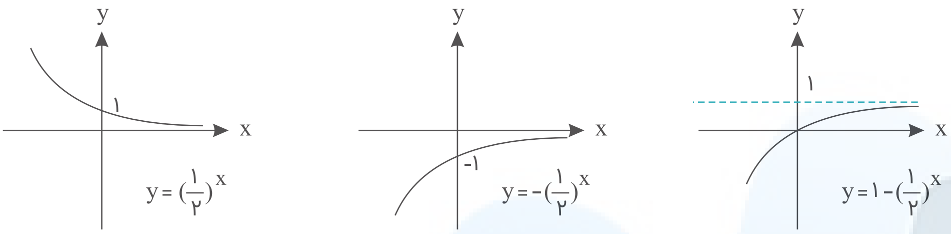
$$\Rightarrow n=\frac{۰/۳۰۱}{۱/۳۰۱-۱/۲۸۷}=۲۱/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۷۱

گزینه ۳

ابتدا محدودهٔ تابع $f(x) = ۱ - (\frac{۱}{۲})^x$ را تعیین کنید (بهترین شیوه رسم شکل است). سپس دامنهٔ تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ را به دست می‌آوریم. نمودار تابع $f(x) = ۱ - (\frac{۱}{۲})^x$ را رسم می‌کنیم:



عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد. داریم:

$$y = \sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x\ ,\ f(x) \geq ۰ \\ x\ ,\ f(x) < ۰ \end{cases}$$ (باید x و $f(x)$ هم علامت باشند)

با توجه به نمودار تابع $f(x) = ۱ - (\frac{۱}{۲})^x$، هر جا که x مثبت است، $f(x)$ هم مثبت است و هر جا که x منفی است $f(x)$ هم منفی است. بنابراین دامنه تعریف تابع به صورت $(-\infty, +\infty)$ در می‌آید.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۷۲

گزینه ۲

$$\frac{۳^{x}(۱+۳+۳^۲+۳^۳+۳^۴+۳^۵)}{۲^{x}(۲^{-۲}+۲^{-۱}+۱+۲+۲^۲+۲^۳)}=۵۲$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۳}{۲}\right)^{x}=\frac{۵۲\times ۱۵/۷۵}{۳۶۴}=\frac{۸۱۹}{۳۶۴}=۲/۲۵\Rightarrow x=۲$$

نکته:

$$۱+۳+۳^۲+۳^۳+۳^۴+۳^۵=\frac{۱(۱-۳^۶)}{۱-۳}=۳۶۴$$

$$۲^{-۲}+۲^{-۱}+۱+۲+۲^۲+۲^۳=\frac{\frac{۱}{۴}(۱-۲^۶)}{۱-۲}=\frac{۶۳}{۴}=۱۵/۷۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۷۳

گزینه ۱

ابتدا از معادلهٔ نمایی داده‌شده مقدار a را حساب می کنیم.

$$۴^{a}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow (۲^۲)^{a}=۲^۱\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=۲^{۲a}=۲^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow ۲a=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

با دانستن مقدار a محاسبهٔ لگاریتم داده‌شده کار چندان سختی نیست.

$$\log_{۴}^{(۴a+۱)}=\log_{۴}^{۴(\frac{۳}{۴})+۱}=\log_{۴}^{۳+۱}=\log_{۴}^{۴}=۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۷۴

گزینه ۲

نمودارهای دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع هستند، پس:

$$f(-۱) = g(-۱) \Rightarrow ۳^{-a+b} = \left(\frac{۱}{۹}\right)^{-۱}$$
$$\Rightarrow ۳^{-a+b} = ۹ = ۳^{۲} \Rightarrow -a + b = ۲ \qquad (*)$$

ازطرفی $f(۲) = \frac{۱}{۳}$، بنابراین:

$$۳^{۲a+b} = \frac{۱}{۳} = ۳^{-۱} \Rightarrow ۲a + b = -۱ \qquad (**)$$

از حل دستگاه معادلات $(*)$ و $(**)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -a + b = ۲ \\ ۲a + b = -۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} ۳a = -۳ \Rightarrow a = -۱ \xrightarrow{(*)} b = ۱ \Rightarrow f(x) = ۳^{-x+۱}$$

حال برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۲۷)$، کافی است معادلهٔ $f(x) = ۲۷$ را حل کنیم:

$$۳^{-x+۱} = ۲۷ = ۳^{۳} \Rightarrow -x + ۱ = ۳ \Rightarrow -x = ۲ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲۷) = -۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۷۵

گزینه ۱

باتوجه‌به شکل، دو نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ و $(۰, -۶)$ در تابع $f(x)$ صدق می‌کنند؛ بنابراین:

$$(۰, -۶) : f(۰) = -۶ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۰+b} = -۶ \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^{b} = ۳$$

$$\Rightarrow ۳^{-b} = ۳ \Rightarrow -b = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

$$\left(\frac{۱}{۲}, ۰\right) : f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۰ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۹$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۳^{۲} \Rightarrow ۳^{-\frac{۱}{۲}a+۱} = ۳^{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}a + ۱ = ۲$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = -۲$$

مقادیر a و b را در تابع f جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۲x-۱} \Rightarrow f(۲) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۴-۱} = -۹ + ۳^{۵}$$

$$= -۹ + ۲۴۳ = ۲۳۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷۶

گزینه ۳

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow a + b(\frac{۱}{۲})^{۰} = ۰ \Rightarrow a + b = ۰ \quad (۱)$$

$$f^{-۱}(-۱) = -۱ \Rightarrow f(-۱) = -۱ \Rightarrow a + b(\frac{۱}{۲})^{-۱} = -۱$$

$$\Rightarrow a + ۲b = -۱ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۰ \\ a + ۲b = -۱ \end{cases} \Rightarrow b = -۱,\ a = ۱$$

$$a - b = ۱ - (-۱) = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۷۷

گزینه ۴

ابتدا نقاط مشترک دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = x^۲ - x \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow A(۱, ۰) \\ x = ۲ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow B(۲, ۲) \end{cases}$$

$$A \in f \Rightarrow -۲ + (\frac{۱}{۲})^{A+B} = ۰ \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{A+B} = ۲ \Rightarrow A + B = -۱ \quad (۱)$$

$$B \in f \Rightarrow -۲ + (\frac{۱}{۲})^{۲A+B} = ۲ \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{۲A+B} = ۴ \Rightarrow ۲A + B = -۲ \quad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} A + B = -۱ \\ ۲A + B = -۲ \end{cases} \xrightarrow{(-)} A = -۱ \ , \ B = ۰$$

تابع به فرم $f(x) = -۲ + (\frac{۱}{۲})^{-x}$ خلاصه می‌شود.

$$f(۳) = -۲ + (\frac{۱}{۲})^{-۳} = -۲ + ۸ = ۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۷۸

گزینه ۴

$$(۸۱)^{-۱} = ۳^{-۴} \quad , \quad ۹^{x-۱} = ۳^{۲x-۲} \quad , \quad (-\frac{۱}{۳})^{x} = (-۳)^{-x}$$

معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$۳^{-۴} \times ۳^{۲x-۲} = (-۳)^{-x} \Rightarrow ۳^{۲x-۶} = (-۳)^{-x}$$
$$۲x - ۶ = -x \Rightarrow x = ۲$$

چون x زوج است، $(-۳)^{-x}$ برابر همان ۳^{-x} می‌باشد.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷۹ گزینه ۴

$$\begin{cases} y = ۲^x \\ y = (\sqrt{۲})^{x+۱} + ۴ \end{cases} \Rightarrow ۲^x = \sqrt{۲} \times ۲^{\frac{x}{۲}} + ۴ \xrightarrow{۲^{\frac{x}{۲}}=t} t^۲ = \sqrt{۲}t + ۴ \Rightarrow t^۲ - \sqrt{۲}t - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{۲} \pm ۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} t = ۲\sqrt{۲} \\ t = -\sqrt{۲} \text{ غق‌ق} \end{cases}$$

$$۲^{\frac{x}{۲}} = t \xrightarrow{t=۲\sqrt{۲}} ۲^{\frac{x}{۲}} = ۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow y = ۲^۳ = ۸$$

$$d = \sqrt{(۳-۰)^۲ + (۸-۴)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۰ گزینه ۱

نکته:

$$۱)\ \log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$$

$$۲)\ \log_a^{b^n} = n \log_a^b$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\log_۴^۳ = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۴} = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۲^۲} = ۰/۸$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\frac{\log ۳}{\log ۲} = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۲} = ۱/۶ \Rightarrow \log ۳ = ۱/۶ \log ۲ \quad (*)$$

سپس باتوجه‌به $(*)$ مقدار $\log_{۱۲}^۶$ را به دست می‌آوریم:

$$\log_{۱۲}^۶ = \frac{\log ۶}{\log ۱۲} = \frac{\log ۲ \times ۳}{\log ۲^۲ \times ۳} = \frac{\log ۲ + \log ۳}{\log ۲^۲ + \log ۳} = \frac{\log ۲ + \log ۳}{۲\log ۲ + \log ۳}$$

$$= \frac{\log ۲ + ۱/۶ \log ۲}{۲\log ۲ + ۱/۶ \log ۲} = \frac{(۱+۱/۶)\log ۲}{(۲+۱/۶)\log ۲} = \frac{۲/۶}{۳/۶} = \frac{۱۳}{۱۸}$$

توجه کنید که برای به دست آوردن رابطهٔ $(*)$، می‌توانستیم به صورت زیر عمل کنیم:

نکته: $\log_{a^m}^{b^n} = \frac{n}{m}\log_a^b$

$$\log_۴^۳ = \log_{۲^۲}^۳ = \frac{۱}{۲}\log_۲^۳ = ۰/۸ \Rightarrow \log ۳ = ۱/۶ \log ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹