

گزینه ۳

۱

در تابع ثابت هر ورودی‌ای به x دهیم، خروجی یکسانی تحویل می‌گیریم:

$$f(o) = 2b$$

$$f(b) = -7b^2 \Rightarrow 2b = -7b^2 \Rightarrow \begin{cases} b = o \Rightarrow 2b = o \\ b = -\frac{2}{7} \Rightarrow 2b = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

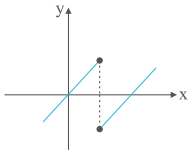
برد تابع همان $f(o)$ است و چون o در گزینه‌ها نیست، پس $-\frac{4}{7}$ را می‌پذیریم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه ۴

۲

نمودار یک رابطه، زمانی تابع است که هر خط عمودی (موازی محور y) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در گزینه ۴، هر خط عمودی (موازی محور y) نمودار داده‌شده را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین تابع است. دقت کنید که در گزینه ۱، خطی عمودی از روی خط‌چین می‌توان رسم کرد که نمودار را در دو نقطه قطع کند.



کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

گزینه ۲

۳

$$f = \{(o, o), (1, 1), (2, 4)\} \cup \{(o, o+o), (o, o+1), (o, o+2), (1, 1+o), (1, 1+1), (1, 1+2), (2, 2+o), (2, 2+1), (2, 2+2)\}$$

$$f = \{(o, o), (o, 1), (o, 2), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

زوج مرتب f دارای ۹ عضو است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

گزینه ۴

۴

تابع ثابت است، پس عضوهای دوم زوج مرتب‌ها همگی برابرند:

$$\begin{cases} 3m + 2 = 8 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2 \\ t = 8 \\ n^2 - 2n = 8 \Rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \Rightarrow (n - 4)(n + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 4 & \text{ق.ق} \\ n = -2 & \text{غ.ق.ق} \end{cases} \end{cases}$$

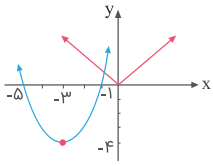
توجه کنید که اگر $n = -2$ باشد، تابع چهار عضوی می‌شود. بنابراین $n = -2$ قابل قبول نیست.

$$\Rightarrow m + n + t = 2 + 4 + 8 = 14$$

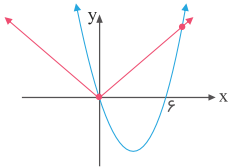
کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

$$y = x^2 + 6x + 5 \Rightarrow y = (x + 3)^2 - 4$$

هر دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



اگر ۵ واحد نمودار را به راست منتقل کنیم، دو تابع در $x = 0$ برخورد می‌کنند و به مطلوب سؤال می‌رسیم.



کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

برای زوج‌های مرتب که روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار دارند، مؤلفه‌های اول و دوم برابرند:

$$n^2 - 3n = 4 \Rightarrow n^2 - 3n - 4 = 0 \Rightarrow (n + 1)(n - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 4 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Rightarrow n^2 + n = 20 \Rightarrow n^2 + n - 20 = 0 \Rightarrow (n - 4)(n + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = -5 \end{cases} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (I), (II)}} n = 4$$

$$m + n = 1 \xrightarrow{n=4} m + 4 = 1 \Rightarrow m = -3$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\begin{cases} (3, a + 2b) \in f \\ (3, 7) \in f \end{cases} \xrightarrow{\text{تابع است}} a + 2b = 7$$

$$\begin{cases} (5, 4) \in f \\ (5, 2a - b) \in f \end{cases} \xrightarrow{\text{تابع است}} 2a - b = 4$$

حال برای به دست آوردن a و b ، دستگاه $\begin{cases} a + 2b = 7 \\ 2a - b = 4 \end{cases}$ را حل می‌کنیم:

$$\times (-2) \begin{cases} a + 2b = 7 \\ 2a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 7 \\ -4a + 2b = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 7 \\ -5b = -10 \end{cases} \Rightarrow b = 2$$

$$a + 2b = 7 \xrightarrow{b=2} a + 4 = 7 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

زوج مرتب‌های $(1, x - 2y)$ و $(1, -7)$ دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند، پس برای تابع بودن این رابطه، باید مؤلفه‌های دوم هم برابر باشند:

$$x - 2y = -7$$

به همین ترتیب برای $(9, x + y)$ و $(9, 5)$ داریم:

$$x + y = 5$$

از حل دو معادله دو مجهول فوق داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -7 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow -3y = -12 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 1$$

خواسته سؤال را می‌یابیم:

$$\frac{x^2 + y^2}{-x - 4y} = \frac{1 + 16}{-1 - 16} = \frac{17}{-17} = -1$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

در تابع ثابت مؤلفه‌های دوم همگی باهم برابرند:

$$\begin{aligned} n^2 + 2n = \lambda &\Rightarrow n^2 + 2n - \lambda = 0 \\ \Rightarrow (n - 2)(n + 4) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

n طبیعی است و $n = 2$ را می‌پذیریم.

$$\begin{aligned} 2t^2 = \lambda &\Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2 \\ f = \{(m + 6, \lambda), (-2, \lambda), (1 - 3m, \lambda)\} \end{aligned}$$

تابع دو عضوی است و m و n طبیعی‌اند:

$$\begin{aligned} m + 6 = -2 &\Rightarrow m = -8 \quad \text{غ.ق.ق} \\ 1 - 3m = -2 &\Rightarrow m = 1 \quad \text{ق.ق} \\ f = \{(7, \lambda), (-2, \lambda)\} &\Rightarrow 7 - 2 = 5 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

شرط تابع بودن یک رابطه این است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه اول برابر داشته باشند و اگر مؤلفه اول آن‌ها باهم برابر بود مؤلفه‌های دوم هم باهم برابر باشند.

$$A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$$

$$(3, m^2), (3, m+2) \in A \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

مقادیر به‌دست‌آمده برای m را بررسی می‌کنیم تا مطمئن شویم رابطه به تابع تبدیل شده است.

$$m = 2 \Rightarrow A = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

به ازای $m = 2$ دو زوج مرتب $(2, 1)$ و $(2, 4)$ در رابطه وجود دارد، پس تابع نیست.

$$m = -1 \Rightarrow A = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$

شرایط تابع بودن برقرار است، پس $m = -1$ تنها مقدار قابل قبول برای m است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

اگر نمودار $y = |x|$ را دو واحد به سمت راست در راستای محور x ها انتقال دهیم، نمودار $y_1 = |x-2|$ به دست می‌آید و اگر نمودار y_1 را دو واحد به سمت پایین در راستای محور y ها انتقال دهیم، نمودار $y = |x-2| - 2$ به دست می‌آید. پس ضابطه نمودار رسم شده به صورت $y = |x-2| - 2$ است.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

راه حل اول: با در دست داشتن دو نقطه $(-1, 3)$ و $(1, -4)$ معادله خط را می‌نویسیم. ابتدا شیب خط را می‌یابیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{3 - (-4)}{-1 - 1} = \frac{-7}{2}$$

حال معادله خط را از رابطه $y - y_0 = m(x - x_0)$ می‌نویسیم:

$$y - 3 = -\frac{7}{2}(x + 1)$$

نقطه $(-2, a)$ را صدق می‌دهیم:

$$a - 3 = -\frac{7}{2}(-1) \Rightarrow a = \frac{7}{2} + 3 = \frac{13}{2} = 6.5$$

راه حل دوم: با توجه به نقاط $(-1, 3)$ و $(1, -4)$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که خط مذکور با افزایش 2 واحدی x ، 7 واحد از y آن کاهش می‌یابد؛ پس به ازای افزایش هر واحد x ، $\frac{7}{2}$ کاهش y داریم.

نقطه $(-2, a)$ یک واحد x کمتری نسبت به $(-1, 3)$ دارد، پس y آن باید $\frac{7}{2}$ بیشتر باشد:

$$a = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

نکته: در صورتی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای به طول a مشترک‌اند که رابطه $f(a) = g(a)$ برقرار باشد. ابتدا ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

بنابراین مقادیری که به ازای آن‌ها $f(x) = g(x)$ می‌باشد را به دست می‌آوریم.

$$x > 0 : f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{ق ق غ} \\ x = 3 & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

$$x < 0 : f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

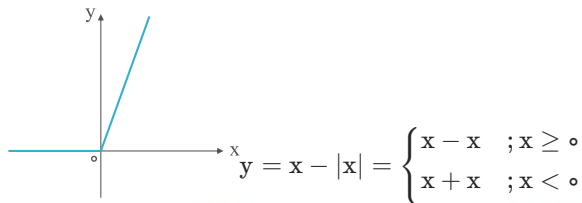
$$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} & \text{ق ق غ} \\ x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

بنابراین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقاط به طول $x = 3$ و $x = 1 - \sqrt{2}$ با یکدیگر برابرند.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

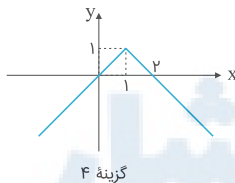
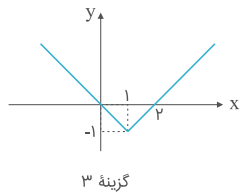
$$y = x + |x| = \begin{cases} x + x & ; x \geq 0 \\ x - x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$



بررسی سایر گزینه‌ها:
گزینه ۱:

$$\Rightarrow y = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ 2x & ; x < 0 \end{cases}$$



کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

گزینه‌های ۳ و ۴ نیز به صورت زیر می‌باشند:

$$f(x) = ax + b$$

$$\begin{cases} f(1) = 5 \Rightarrow a + b = 5 \\ f(3) = -9 \Rightarrow 3a + b = -9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - b = -5 \\ 3a + b = -9 \end{cases} \Rightarrow 2a = -14 \Rightarrow a = -7$$

$$a + b = 5 \xrightarrow{a=-7} b = 12$$

$$\Rightarrow f(x) = -7x + 12$$

$$0 \leq x \leq 5 \Rightarrow -35 \leq -7x \leq 0 \Rightarrow -23 \leq -7x + 12 \leq 12$$

$$\Rightarrow -23 \leq y \leq 12$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

ابتدا با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه دو تابع $f(1+x)$ و $f(1-x)$ را تشکیل می دهیم. یعنی یک بار در ضابطه $f(x)$ به جای متغیر x ، متغیر $(1+x)$ و یک بار متغیر $(1-x)$ را قرار داده و ضابطه هر یک را تعیین می کنیم.

$$f(1+x) = (1+x)^2(2-1-x)^2 = (1+x)^2(1-x)^2 = [(1+x)(1-x)]^2 = (1-x^2)^2$$

$$f(1-x) = (1-x)^2(2-1+x)^2 = (1-x)^2(1+x)^2 = [(1-x)(1+x)]^2 = (1-x^2)^2$$

با داشتن ضوابط دو تابع $f(1+x)$ و $f(1-x)$ ، حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ را به دست می آوریم:

$$f(1+x) - f(1-x) = (1-x^2)^2 - (1-x^2)^2 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

باتوجه به اطلاعات صورت تست نمودار و خط در دو نقطه A و B متقاطعند، بنابراین در این نقاط با یکدیگر برابرند.

ابتدا ضابطه نمودار $y = \frac{|2x|}{x}$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$y = \frac{|2x|}{x} = \begin{cases} \frac{2x}{x} = 2 & ; x > 0 \\ \frac{-2x}{x} = -2 & ; x < 0 \end{cases}$$

نقاطی که ضابطه دو تابع با یکدیگر برابر است را به دست می آوریم. داریم:

$$x > 0 : 2x - 1 = 2 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} ; y = 2 ; A(\frac{3}{2}, 2)$$

$$x < 0 : 2x - 1 = -2 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} ; y = -2 ; B(-\frac{1}{2}, -2)$$

بنابراین دو نمودار و خط در نقاط A و B با مختصات ذکرشده متقاطعند. میانگین طول نقاط A و B برابر است با:

$$\frac{\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$[x - 2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x - 2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

اگر $3 \leq x < 4$ باشد، پس $x - 3 \geq 0$ و $x - 4 < 0$ خواهد بود.

$$f(x) = \underbrace{|x - 3|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|x - 4|}_{\text{منفی}} = x - 3 + (x - 4) = 2x - 7$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 7 = 2x^2 + x - 17 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$$

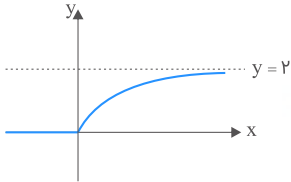
$$\Rightarrow (2x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \times \\ x = -2 \times \end{cases}$$

هیچ کدام از جواب های به دست آمده در فاصله $3 \leq x < 4$ نیستند؛ پس معادله $f(x) = g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + |x|}{|x + 1| + 1} = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{2x}{x + 2} & ; x > 0 \end{cases}$$

به کمک نمودار برد تابع راحت تر محاسبه می شود.



پس برد تابع $\frac{f}{g}(x)$ برابر $[0, 2)$ خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

ساده تر از این امکان ندارد. ضابطه $f(x)$ به ما داده شده است. برای محاسبه $f(8)$ کافی است در ضابطه داده شده به جای x عدد ۸ را قرار دهیم.

گام دوم

$$f(x) = 3 + \sqrt{2x} \Rightarrow f(8) = 3 + \sqrt{2 \times 8} = 3 + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \Rightarrow f(8) = 7$$

ابتدا $f(-1)$ و سپس با داشتن مقدار آن $f(\sqrt{2})$ را محاسبه می کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2 - x - x^2} \Rightarrow f(-1) = \sqrt{2 - (-1) - (-1)^2} = \sqrt{2 + 1 - 1} = \sqrt{2}$$

برای رسیدن به جواب تست باید حاصل $f(\sqrt{2})$ را محاسبه کنیم:

$$f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2} - 2} = \sqrt{-\sqrt{2}}$$

می دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد، پس حاصل $f(f(-1))$ تعریف نشده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گزینه ۲

۲۲

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3} \approx 1/7$ ، پس:

$$f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2 \times 1 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} f(\sqrt{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{\sqrt{3}} f(\sqrt{3})) = (-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 - 2[-\frac{1}{\sqrt{3}}] = \frac{1}{3} - 2(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx \frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{13}{21}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گزینه ۲

۲۳

$$(a, b) \in f(x) \Rightarrow (b, a) \in f^{-1}(x)$$

بنابراین کافی است مؤلفه‌های هر نقطه را جابه‌جا کنیم و در تابع $y = x^3 - x + 1$ صدق دهیم.

$$1 \times (-2)^3 - (-2) + 1 = -8 + 2 + 1 = -5 \neq 1 \quad \text{گزینه ۱}$$

$$2 \checkmark \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{5}{3} \neq \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$3 \times 2^3 - 2 + 1 = 8 - 2 + 1 = 7 \neq 1 \quad \text{گزینه ۳}$$

$$4 \times \left(-\frac{11}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\frac{11}{\sqrt{3}}\right) + 1 = -\frac{1331}{3\sqrt{3}} + \frac{11}{\sqrt{3}} + 1 \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{گزینه ۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

گزینه ۲

۲۴

$$f(2) = \sqrt{-(2)^2 + 4(2) + 12} = \sqrt{-4 + 8 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$f(2 + \sqrt{7}) = \sqrt{\underbrace{-(2 + \sqrt{7})^2}_{\text{اتحاد مربع}} + 4(2 + \sqrt{7}) + 12}$$

$$= \sqrt{-(4 + 4\sqrt{7} + 7) + 8 + 4\sqrt{7} + 12} = \sqrt{9} = 3$$

$$f(2 + \sqrt{7}) - f(2) = 3 - 4 = -1$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۸

گزینه ۲

۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

با توجه به ضابطه تابع که به صورت $y = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$ است، محدوده اولیه x را به زیربازه‌های زیر تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار y را تعیین می‌کنیم.

$$-2 \leq x < 0, 0 \leq x < 2, 2 \leq x < 4, 4 \leq x < 6$$

گام دوم

برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه‌های به دست آمده، پاره خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$2 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$4 \leq x < 6 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

پس نمودار تابع از چهار پاره خط مساوی به طول ۲ تشکیل شده است.

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4-2x=0 \Rightarrow x=2 \\ 3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

x		$-\frac{1}{3}$		2	
$4-2x$	+		+	○	-
$3x+1$	-	○	+		+
$\frac{4-2x}{3x+1}$	-	○	+	○	-

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6$$

$$\Rightarrow [3x] = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow \text{اعضو ۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$\begin{cases} f(x) \text{ ثابت} \Rightarrow 3(b^2-1)=0 \Rightarrow b=\pm 1 \\ g(x) \text{ ثابت} \Rightarrow (b+1)=0 \Rightarrow b=-1 \end{cases} \Rightarrow b=-1$$

توجه کنید که $g(x) = (b+1)x^2 - 2a$ به صورت $g(x) = (b+1)x^2 - 2a$ است.

$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = -2a \end{cases} \Rightarrow f \times g = -2a^2 = -8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$\Rightarrow |ab| = 2$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$\sqrt{x+3}-1=x \Rightarrow \sqrt{x+3}=x+1 \Rightarrow x+3=x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \in D \\ x=-2 \notin D \end{cases}$$

پس نقطه تلاقی f و f^{-1} نقطه $(1,1)$ است و فاصله آن از مبدأ $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ خواهد شد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

یک تابع به صورت مجموعه ای از زوج مرتبها نمایش داده شده است، برای این که تابع یک به یک شود، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه دوم برابر نداشته باشند. اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب با هم برابر بود باید مؤلفه‌های اول آنها هم برابر باشد. هم چنین شرط تابع بودن در حل این گونه سؤال‌ها فراموش نشود. این که زوج مرتبها نباید مؤلفه اول تکراری داشته باشند و اگر تکراری بود باید مؤلفه‌های دوم هم برابر شود. در رابطه داده شده دو زوج مرتب $(۳, ۲)$ و $(۳, a^۲ - a)$ مشاهده می شود. برای این که رابطه در وهله اول یک تابع باشد، باید مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند:

$$a^۲ - a = ۲ \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow (a - ۲)(a + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۱ \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام یک از این مقادیر تابع یک به یک می شود:

$$a = -۱ \Rightarrow (-۱, ۵) \in f, (-۱, ۴) \in f \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست}$$

بنابراین فقط $a = ۲$ قابل قبول است. حالا مقدار b را به دست می آوریم:

$$(۳, ۲) \in f, (b, ۲) \in f \xrightarrow{\text{تابع f یک به یک است}} b = ۳$$

پس دوتایی (a, b) به صورت $(۲, ۳)$ درمی آید.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۴

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.
روش اول:
به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$۴n^۲ - ۴n + ۱ < ۴n^۲ - ۳n + ۱ < ۴n^۲ \Rightarrow (۲n - ۱)^۲ < ۴n^۲ - ۳n + ۱ < (۲n)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} ۲n - ۱ < \sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱} < ۲n \Rightarrow [\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] = ۲n - ۱$$

از طرف دیگر وقتی $n > ۲$ باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$n^۲ - ۴n + ۴ < n^۲ - ۲n < n^۲ - ۲n + ۱ \Rightarrow (n - ۲)^۲ < n^۲ - ۲n < (n - ۱)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} n - ۲ < \sqrt{n^۲ - ۲n} < n - ۱ \Rightarrow [\sqrt{n^۲ - ۲n}] = n - ۲$$

پس حاصل عبارت داده شده به ازای $n > ۲$ برابر است با:

$$[\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] - ۲[\sqrt{n^۲ - ۲n}] = ۲n - ۱ - ۲(n - ۲) = ۲n - ۱ - ۲n + ۴ = ۳$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$A = [\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] - ۲[\sqrt{n^۲ - ۲n}] \xrightarrow{n=۳} A = [\sqrt{۳۶ - ۹ + ۱}] - ۲[\sqrt{۹ - ۶}]$$

$$= [\sqrt{۲۸}] - ۲[\sqrt{۳}] = ۵ - ۲(۱) = ۵ - ۲ = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

$$\begin{cases} f(x) = b - 3ax \xrightarrow{f \text{ ثابت}} 3a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ g(x) = c - (3b - 3)x \xrightarrow{g \text{ ثابت}} 3b - 3 = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

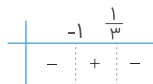
$$\Rightarrow f(x) = 1, \quad g(x) = c$$

$$f + g = 5 \Rightarrow 1 + c = 5 \Rightarrow c = 4$$

$$bc = 1 \times 4 = 4$$

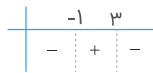
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$\frac{1-3x}{x+1} < 0$$



$$x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$$

$$-2 < \frac{1-3x}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{1-3x}{x+1} + 2 \Rightarrow 0 < \frac{1-3x+2x+2}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{-x+3}{x+1}$$



$$x \in (-1, 3)$$

از اشتراک جواب‌ها به $x \in (\frac{1}{3}, 3)$ می‌رسیم:

$$\frac{1}{3} < x < 3 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow [\frac{x}{2}] = \{0, 1\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

از ویژگی های تابع وارون (معکوس) برای حل تست استفاده می کنیم. اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع f صدق کند، نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه تابع معکوس یا همان f^{-1} صدق می کند. سؤال از ما $f^{-1}(4)$ را می خواهد. فرض کنیم مقدار $f^{-1}(4)$ برابر α شود، در این صورت $(4, \alpha)$ در ضابطه f^{-1} صدق می کند پس نقطه ای به مختصات $(\alpha, 4)$ باید در ضابطه تابع $f(x)$ صدق کند. این نقطه را در ضابطه تابع اصلی جای گذاری کرده و مقدار α را محاسبه می کنیم.

گام دوم

معادله $f(\alpha) = 4$ را حل کرده و مقدار α را به دست می آوریم:

$$f(x) = -x + \sqrt{-2x} \xrightarrow{f(\alpha)=4} 4 = -\alpha + \sqrt{-2\alpha} \Rightarrow \sqrt{-2\alpha} = \alpha + 4$$

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد پس داریم:

$$-2\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 0, \quad \alpha + 4 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -4$$

پس $\alpha \in [-4, 0]$. حالا طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$\begin{aligned} -2\alpha &= (\alpha + 4)^2 \Rightarrow -2\alpha = \alpha^2 + 8\alpha + 16 \Rightarrow \alpha^2 + 10\alpha + 16 = 0 \\ \Rightarrow (\alpha + 8)(\alpha + 2) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \alpha = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

باتوجه به اینکه $\alpha \in [-4, 0]$ است، فقط $\alpha = -2$ قابل قبول خواهد بود.

اعداد داده شده را در ضابطه تابع قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2[x] + [-x] \\ \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(2\left[-\frac{1}{2}\right] + \left[-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right) + \left(2\left[\frac{3}{2}\right] + \left[-\frac{3}{2}\right]\right) \\ -1 < -\frac{1}{2} < 0 &\Rightarrow \left[-\frac{1}{2}\right] = -1, \quad 0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\right] = 0 \\ -2 < -\frac{3}{2} < -1 &\Rightarrow \left[-\frac{3}{2}\right] = -2, \quad 1 < \frac{3}{2} < 2 \Rightarrow \left[\frac{3}{2}\right] = 1 \\ \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) &= (2 \times (-1) + 0) + (2 \times 1 + (-2)) = -2 + 0 = -2 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

اگر خط $3y - 2x = 4$ را به صورت یک تابع در نظر بگیریم، قرینه خط $3y - 2x = 4$ نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع است، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 3y - 4 &= 2x \Rightarrow x = \frac{3y - 4}{2} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{3x - 4}{2} = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -2 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

دقت کنید که x و y فقط باید مقادیر صحیح بپذیرند.

گام دوم

با توجه به این که $|x|$ و $|y|$ مقادیر نامنفی هستند، حالت های زیر برای $|x|$ و $|y|$ می تواند رخ دهد:

$$۱) |x| = ۲, |y| = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲, y = ۰ \Rightarrow (۲, ۰), (-۲, ۰) \in R$$

$$۲) |x| = ۰, |y| = ۲ \Rightarrow x = ۰, y = \pm ۲ \Rightarrow (۰, ۲), (۰, -۲) \in R$$

$$۳) |x| = ۱, |y| = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱, y = \pm ۱ \Rightarrow (۱, ۱), (۱, -۱), (-۱, ۱), (-۱, -۱) \in R$$

بنابراین رابطه R با اعضایش به صورت زیر در می آید:

$$R = \{(۲, ۰), (۰, ۲), (-۲, ۰), (۰, -۲), (۱, ۱), (۱, -۱), (-۱, ۱), (-۱, -۱)\}$$

پس رابطه R دارای ۸ عضو به صورت زوج مرتب است.

$$f\left(\frac{۹}{۴}\right) = \left[\frac{۹}{۴} + \frac{۳}{۴}\right] - \left[-\frac{۹}{۴}\right] = \left[\frac{۱۵}{۴}\right] - \left[-\frac{۹}{۴}\right] = ۳ - (-۳) = ۶$$

$$f\left(-\frac{۱}{۴}\right) = \left[-\frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴}\right] - \left[+\frac{۱}{۴}\right] = [۱] - \left[\frac{۱}{۴}\right] = ۱ - ۰ = ۱$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{۹}{۴}\right) + f\left(-\frac{۱}{۴}\right) = ۶ + ۱ = ۷$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

تابع همانی به صورت $y = x$ است، پس داریم:

$$f(x) = (|a| - |b|)x = x \Rightarrow |a| - |b| = ۱ \quad (I)$$

تابع ثابت به صورت $y = k$ است، پس داریم:

$$g(x) = (b^۲ - ۱)x + (a^۲ + ۱)c = k \Rightarrow b^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow b = \pm ۱$$

از قرار دادن این مقدار در رابطه (I) داریم:

$$|a| - |b| = ۱ \Rightarrow |a| - |\pm ۱| = ۱ \Rightarrow |a| - ۱ = ۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲$$

از $(f - g)(x) = x + ۵$ نتیجه می گیریم:

$$f(x) - g(x) = x - (a^۲ + ۱)c = x + ۵ \Rightarrow -(a^۲ + ۱)c = ۵$$

$$\xrightarrow{a=\pm ۲} -۵c = ۵ \Rightarrow c = -۱$$

اما $a = ۲$ و $a = -۲$ هر دو پذیرفته هستند؛ پس داریم:

$$ac = -۲(-۱) = ۲$$

$$ac = ۲(-۱) = -۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

گام اول

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطه $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

گام دوم

تشکیل ضابطه $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x) = \sqrt{x + |x + 2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} = \sqrt{|-x + 2| - x}$$

$$|-x + 2| - x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2: -x + 2 < 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow x - 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \text{ غ.ق.ق} \\ x \leq 2: -x + 2 \geq 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow -x + 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2x + 2 \geq 0 \\ \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

با توجه به بازه اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$ ، به صورت $x \leq 1$ در می آید.

اول ضابطه $f(\sqrt{x})$ را تعیین می کنیم. در تعیین ضابطه $f(\sqrt{x})$ حتماً به این نکته توجه داشته باشید که دامنه آن متفاوت با دامنه تابع $f(x)$ است.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

حالا ضابطه تابع $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = (x + \frac{1}{x})^2 - (x^2 + \frac{1}{x^2}) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2, \quad x \in (0, +\infty)$$

بنابراین تابع $g(x)$ یک تابع ثابت است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

$$f(x) = 2 - |x + 1| = \begin{cases} x + 3 & ; x \leq -1 \\ -x + 1 & ; x > -1 \end{cases}$$

$$g(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 2x & ; x > 0 \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2 - |x + 1|}{x + |x|} = \begin{cases} \frac{2}{2} & ; x \leq 0 \\ \frac{1 - x}{2x} & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \quad ; x > 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y > -\frac{1}{2} \Rightarrow R_y = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

نیمساز ناحیه دوم : $y = -x$; $x < 0$

نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را قطع می‌کند، پس:

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$

$$\Rightarrow -x + \frac{1}{2x} = x \Rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$\begin{cases} f(-2) = |(-2)^2 - 5| = |4 - 5| = |-1| = 1 \\ g(2) = \frac{2}{1+2^2} = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1+f(-2)}{g(2)} = \frac{1+1}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = 5$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

به شرطهای اشاره شده در سؤال خوب دقت کنید. هر دو مقدار x و y باید عضو اعداد طبیعی باشند. حالت‌هایی که $2x + y \leq 7$ می‌شود را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

برای حل مرتب مسأله به x از یک مقدار می‌دهیم و مقادیر قابل قبول برای y را مشخص می‌کنیم.

$$1) \quad x = 1 \Rightarrow 2x = 2 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 2 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 5 \xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1, 2, 3, 4, 5$$

در این حالت ۵ زوج مرتب زیر ویژگی موردنظر را دارند:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$$

$$2) \quad x = 2 \Rightarrow 2x = 4 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 4 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 3$$

$$\xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1, 2, 3 \Rightarrow (2, 1), (2, 2), (2, 3) \in R$$

$$3) \quad x = 3 \Rightarrow 2x = 6 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 6 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 1 \xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1$$

در این حالت تنها زوج مرتب $(3, 1)$ عضو رابطه R است.

به ازای مقادیر $x \geq 4$ ، هیچ مقدار طبیعی برای y یافت نمی‌شود. بنابراین رابطه R با زوج مرتب‌های تشکیل دهنده آن به صورت زیر درمی‌آید:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

پس مجموعه R دارای ۹ عضو به صورت زوج مرتب است.

$$-\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq 3x < -1 \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 3$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 3x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq 3x < 1 \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq 3x < \frac{3}{2} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

ابتدا $f(-0/7)$ را می‌یابیم؛ به این منظور در تابع $f(x)$ ، به جای x ، $-0/7$ را قرار می‌دهیم:

$$f(-0/7) = [1 - 3(-0/7)] = [1 + 2/1] = [3/1] = 3$$

به‌طورمشابه برای $f(-0/07)$ داریم:

$$f(-0/07) = [1 - 3(-0/07)] = [1 + 0/21] = [1/21] = 1$$

پس داریم:

$$f(-0/7) - f(-0/07) = 3 - 1 = 2$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

نکته: عمل‌های جمع و تفریق و تقسیم روی دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنه تعریف این توابع هم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

با استفاده از رابطه بالا ابتدا دامنه تعریف توابع $f + g$, $f - g$ و $\frac{f+g}{f-g}$ را به دست آورده و سپس برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ را به دست می‌آوریم.

$$f = \{(3, 4), (2, 6), (5, 3), (1, 5)\} \Rightarrow D_f = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$g = \{(5, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 1)\} \Rightarrow D_g = \{1, 3, 4, 5\}$$

$$\Rightarrow D_{f \pm g} = \{1, 3, 5\}$$

$$D_{\frac{f+g}{f-g}} = D_{f+g} \cap D_{f-g} - \{x | (f-g)(x) = 0\} = D_{f \pm g}$$

$$f + g = \{(1, 5 + 2), (3, 4 + 2), (5, 3 + 6)\}$$

$$= \{(1, 7), (3, 6), (5, 9)\}$$

$$f - g = \{(1, 5 - 2), (3, 4 - 2), (5, 3 - 6)\}$$

$$= \{(1, 3), (3, 2), (5, -3)\}$$

$$\frac{f+g}{f-g} = \left\{ \left(1, \frac{7}{3}\right), \left(3, \frac{6}{2}\right), \left(5, \frac{9}{-3}\right) \right\}$$

$$= \left\{ \left(1, \frac{7}{3}\right), (3, 3), (5, -3) \right\}$$

$$\Rightarrow R_{\frac{f+g}{f-g}} = \left\{ \frac{7}{3}, 3, -3 \right\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

$$(x+1)f(x) \geq 0$$

$$(x+1)f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = -3, -1, 2 \end{cases}$$

دامنه تابع به صورت $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty) \cup \{-1\}$ است که طبق گفته مسئله، دامنه تابع غیرنقطه‌ای

به صورت $\mathbb{R} - (-3, 2)$ خواهد بود.

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$	
$(x+1)f(x)$		+	۰	-	۰	+

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

اگر $0 < x^2 + x < 1$ باشد، $-1 < x < 0$ خواهد بود، بنابراین:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0$$

$$\Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = -1 + 0 - 1 + 0 = -2$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گزینه ۴

۵۰

راه حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

 $x = 0 \Leftarrow$ غ.ق.ق \Leftarrow گزینه (۲) حذف می‌شود. $x = 1 \Leftarrow$ غ.ق.ق \Leftarrow گزینه (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه حل تشریحی:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \Rightarrow 4 - 9x^2 \geq 0 \xrightarrow{x=0} x^2 \leq \frac{4}{9} \xrightarrow{x=0} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

ازطرفی چون $x = 0$ است، پس گزینه (۴) قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

گزینه ۳

۵۱

نمودار تابع $g(x)$ نیمساز ناحیه دوم و چهارم یعنی $g(x) = -x$ است. اگر نمودار تابع $y = x$ را در یک واحد به سمت چپ در راستای محور x ها منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)$ به دست می‌آید بنابراین ضابطه آن $f(x) = x + 1$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{g(x)} = 2 &\Rightarrow f'(x) = 2g(x) \Rightarrow (x+1)' = 2(-x) \\ &\Rightarrow x' + 2x + 1 = -2x \Rightarrow x' + 4x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4^2 - 4(1)(1)}}{1} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه ۲

۵۲

 $y = -x$; $x > 0$: نیمساز ناحیه چهارمنمودار f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را قطع می‌کند، بنابراین:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = -x &\Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{2}{x} = x \Rightarrow 2x = \frac{2}{x} \\ &\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x>0} x = 1 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

گزینه ۴

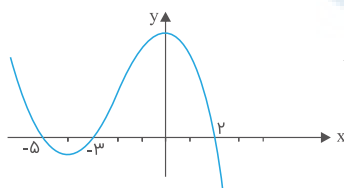
۵۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq 0$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم‌علامت باشند.
 ب) برای به دست آوردن نمودار تابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x-2)$ ، کافی است نمودار تابع $f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

گام دوم

باتوجه به نمودار تابع $f(x-2)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم‌علامت باشند، قابل قبول است پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با: $[-5, -3] \cup [0, 2]$

$$\begin{aligned}
 f(2 - \sqrt{3}) &= \frac{2(2 - \sqrt{3})^2 + 2}{(2 - \sqrt{3})^2 - 3} = \frac{2(4 - 4\sqrt{3} + 3) + 2}{(4 - 4\sqrt{3} + 3) - 3} = \frac{8 - 8\sqrt{3} + 6 + 2}{4 - 4\sqrt{3}} \\
 &= \frac{16 - 8\sqrt{3}}{4 - 4\sqrt{3}} = \frac{4(2 - \sqrt{3})}{4(1 - \sqrt{3})} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}} \\
 &\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{\underbrace{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}_{\text{اتحاد مزدوج}}} \\
 &= \frac{2[2 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3]}{1^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{2(-1 + \sqrt{3})}{-2} = -(-1 + \sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۰

دامنهٔ تابع $\{1\} - [-3, 3]$ است. اگر $(k - 2, 3k + 2)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع باشد، دو حالت رخ می‌دهد:

$$\begin{aligned}
 (1) : (k - 2, 3k + 2) &\subseteq [-3, 1) \Rightarrow \begin{cases} 3k + 2 < 1 \Rightarrow k < -\frac{1}{3} \\ k - 2 \geq -3 \Rightarrow k \geq -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \in [-1, -\frac{1}{3}) \\
 (2) : (k - 2, 3k + 2) &\subseteq (1, 3] \Rightarrow \begin{cases} 3k + 2 \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3} \\ k - 2 > 1 \Rightarrow k > 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset
 \end{aligned}$$

پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

با توجه به صورت سؤال $[x^2 + x] = -1$ بوده و با توجه به ویژگی‌های جزء صحیح محدودهٔ قابل قبول برای $x^2 + x$ به صورت $-1 \leq x^2 + x < 0$ است.

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0$$

هر یک از طرفین نامعادله را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$1) \ x^2 + x \geq -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \\ x^2 \text{ ضریب} = 1 > 0 \end{cases}$$

با توجه به این که $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت است، عبارت $x^2 + x + 1$ همواره مثبت و نامعادله همواره برقرار است.

$$2) \ x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

پس $-1 < x < 0$ جواب نامعادله است و داریم:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

نکته: اعمال جمع و تفریق و تقسیم روی توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنه تعریف این توابع هم به صورت زیر است:

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g, \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

با استفاده از روابط بالا ابتدا دامنه تعریف توابع $f + g$ و $\frac{f+g}{f}$ را مشخص کرده، سپس برد تابع موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$f = \{(\omega, 3), (1, \omega), (3, 4), (6, 2)\} \Rightarrow D_f = \{1, 3, \omega, 6\}$$

$$g = \{(3, 2), (\omega, 6), (1, 2), (2, 1)\} \Rightarrow D_g = \{1, 2, 3, \omega\}$$

$$\Rightarrow D_{f+g} = \{1, 3, \omega\}, \quad D_{\frac{f+g}{f}} = \{1, 3, \omega\}$$

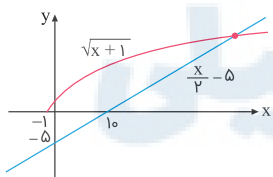
$$f + g = \{(1, \omega + 2), (3, 4 + 2), (\omega, 3 + 6)\} = \{(1, \gamma), (3, 6), (\omega, 9)\}$$

$$\Rightarrow \frac{f+g}{f} = \left\{ \left(1, \frac{\gamma}{\omega}\right), \left(3, \frac{6}{3}\right), \left(\omega, \frac{9}{3}\right) \right\} = \{(1, 1/4), (3, 1/\omega), (\omega, 3)\}$$

$$\Rightarrow R_{\frac{f+g}{f}} = \{1/4, 1/\omega, 3\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} &= \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{x+1}(3-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}-3)}{3^2-(\sqrt{x-1})^2} &= \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \\ \Rightarrow \frac{-2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{10-x} &= \sqrt{x-1} \Rightarrow -2\sqrt{x+1} = 10-x \\ \Rightarrow \sqrt{x+1} &= \frac{x}{2} - 5 \end{aligned}$$



بنابراین تنها یک ریشه مثبت دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۴

گام اول

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد، پس داریم: $xf(x) \geq 0$

گام دوم

حالا با استفاده از جدول تعیین علامت، مشخص می‌کنیم در چه بازه‌هایی $xf(x) \geq 0$ برقرار است. داریم:

x	-۴	-۳	۰	۱	۲
x	-	-	+	+	+
f(x)	+	-	-	+	+
xf(x)	-	+	-	+	+

دو بازه مشخص شده مقادیر قابل قبول برای دامنه تعریف تابع است، پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ به صورت $[1, 2] \cup [-3, 0]$ درمی‌آید.

گزینه ۱

۶۰

$$f(0/7) = [1 - \frac{0/7}{3}] = [1 - \frac{7}{30}] = [\frac{23}{30}] = 0$$

$$f(\pi) = [1 - \frac{\pi}{3}] = -1$$

$$f(0/7) + 2f(\pi) = 0 + 2(-1) = -2$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه ۲

۶۱

روش اول: تشریحی

طبق تعریف تابع قدرمطلق، در فاصله $-\frac{1}{3} < x < -\frac{2}{3}$ تابع $|x| = -x$ است.

$$y = [-2x + (-x)] + x = [-3x] + x$$

برای تعیین $[-3x]$ باید محدوده تغییرات $-3x$ را مشخص کنیم.

$$-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times(-3)} 1 < -3x < 2 \Rightarrow [-3x] = 1$$

بنابراین ضابطه تابع در دامنه موردنظر به صورت زیر است:

$$y = [-2x + |x|] + x = [-3x] + x = 1 + x$$

روش دوم: تستی (عددگذاری)

عدد $x = -\frac{1}{5} = -0/5$ را که در دامنه تابع قرار دارد، در ضابطه تابع و هریک از گزینه‌ها جایگذاری می‌کنیم.

$$y = [-2(-0/5) + |-0/5|] + (-0/5) = [1 + 0/5] - 0/5$$

$$= [1/5] - 0/5 = 1 - 0/5 = 0/5$$

$$1 - 2(-0/5) = 1$$

$$2 - 0/5 + 1 = 0/5$$

$$3 - 0/5 - 2 = -2/5$$

$$4 - 2(-0/5) + \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

فقط مقدار به دست آمده از گزینه "۲" با مقدار تابع برابر است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

$$D_{g-f} = D_g \cap D_f = \{1, 4, 2\}$$

$$g - f = \{(1, 3 - 7), (2, 6 - 5), (4, 9 - 6)\}$$

$$= \{(1, -4), (2, 1), (4, 3)\} \Rightarrow \text{برد} = \{-4, 1, 3\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

ضابطه $\frac{g}{f}(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y = \frac{g}{f}(x) = \frac{x^3}{x^2}$$

به ازای $x = 0$ مخرج کسر تابع $\frac{g}{f}(x)$ صفر می‌شود، بنابراین $x = 0$ عضو دامنه تابع $\frac{g}{f}(x)$ نمی‌باشد، پس می‌توانیم x^2 را از صورت و مخرج کسر ساده کنیم.

$$\frac{g}{f}(x) = x, \quad (x \neq 0)$$

می‌دانیم عملیات روی توابع در دامنه مشترک انجام می‌شود. با شرط $x \neq 0$ تعداد عضوهای مشترک دامنه تابع f و g ده‌تا است.

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{0\} = \{\pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$$

از آنجایی که دامنه و برد تابع $y = x$ برابر است، پس تعداد اعضای مجموعه برد این تابع نیز ۱۰ تا می‌باشد.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

مقدار تابع را به ازای مقادیر خواسته شده محاسبه کرده و حاصل را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = [2x - 1]$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \left[2\left(-\frac{3}{4}\right) - 1\right] = \left[-\frac{3}{2} - 1\right] = \left[-\frac{5}{2}\right] = -3$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \left[2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - 1\right] = [\sqrt{5} - 1] = 1$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -3 + 1 = -2$$

نکته: برای محاسبه $[\sqrt{5} - 1]$ ، می‌دانیم $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$. بنابراین:

$$2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 1 < \sqrt{5} - 1 < 2 \Rightarrow [\sqrt{5} - 1] = 1$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

مقدار تابع را به ازای مقادیر خواسته شده محاسبه کرده و سپس مجموع را به دست می آوریم:

$$f(x) = \left[1 - \frac{x}{2}\right] \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0$$

توجه کنید که:

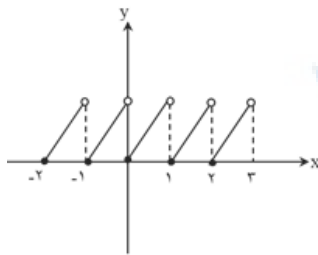
$$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left[1 - \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\right] = \left[1 + \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) + f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 + 1 = 1$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

برای رسم نمودار تابع، محدوده اولیه x را به پنج زیربازه زیر تقسیم می کنیم:



$$-2 \leq x < -1, -1 \leq x < 0, 0 \leq x < 1, 1 \leq x < 2, 2 \leq x < 3$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x - (-2) = x + 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x - (-1) = x + 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - (1) = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - (2) = x - 2$$

در این بازه تابع از پنج پاره خط به اندازه $\sqrt{2}$ تشکیل شده است. پس دوتایی مرتب (n, L) به صورت $(5, \sqrt{2})$ می شود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

اگر $(-2, 9)$ روی وارون تابع باشد، $(-2, 9)$ روی خود تابع قرار دارد:

$$-3(-2)^3 + 2(-2) - 11 = 24 - 4 - 11 = 9$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

ابتدا دامنه تابع $g \times f$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{g \times f} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 4, 3\} \cap \{3, 2, 6, 1\} = \{1, 2, 3\}$$

مقادیر تابع $g \times f$ را به ازای دامنه به دست آمده با توجه به رابطه $(g \times f)(x) = g(x) \times f(x)$ به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow g \times f = \{(1, 1 \times 2), (2, 2 \times 4), (3, 2 \times 3)\}$$

$$\Rightarrow g \times f = \{(1, 2), (2, 8), (3, 6)\}$$

$$\Rightarrow g \times f \text{ برد} = \{2, 8, 6\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

با توجه به ضابطه $f(x)$ ، ابتدا $f(-144)$ و سپس $f(f(-144))$ را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x + 2|x|} \Rightarrow f(-144) = \sqrt{-144 + 2|-144|} \\ = \sqrt{-144 + 288} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow f(-144) = 12$$

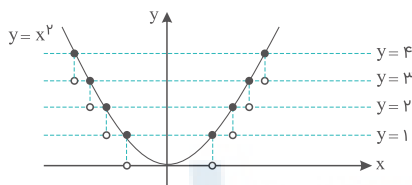
حالا $f(12)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(f(-144)) = f(12) = \sqrt{12 + 2|12|} = \sqrt{12 + 24} = \sqrt{36} = 6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

اول نمودار تابع $y = x^2$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم می‌کنیم.

برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^2]$ از روی نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(-2, 2)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) قرار می‌گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می‌کنیم. در نهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^2]$ در بازه $x \in (-2, 2)$ از هفت پاره خط تشکیل شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

$$f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x - 1} + 1 \\ = \frac{x^2 - 2x(x + 1) + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x + 1}{1 - x^2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

مقدار $[x] + [-x]$ برای اعداد صحیح و غیرصحیح متفاوت است. بنابراین حواستان باشد که برای $f(x)$ دو مقدار به دست می آید، یک مقدار به ازای $x \in \mathbb{Z}$ است و مقدار دیگر به ازای $x \notin \mathbb{Z}$. یعنی:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ضابطه $g(f(x))$ را برای هر یک از این حالت ها تعیین می کنیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = g(0) \xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(0) = 0 + 0 - 2 = -2$$

بنابراین به ازای $x \in \mathbb{Z}$ رابطه $g(f(x)) = -2$ برقرار است.

$$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow g(f(x)) = g(-1) \xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2 \Rightarrow g(f(x)) = -2$$

پس رابطه $g(f(x)) = -2$ به ازای تمام x های صحیح و غیرصحیح یعنی به ازای \mathbb{R} برقرار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

نکته:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

ابتدا $g(x)$ را ساده می کنیم:

$$g(x) = \frac{1-2x}{x+1} = \frac{1-2x+2-2}{x+1} = \frac{-2x-2}{x+1} + \frac{1+2}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

اکنون تابع $g \circ f$ را تشکیل می دهیم:

$$g(f(x)) = -2 + \frac{3}{[x] - x + 1}$$

طبق نکته داریم:

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\text{در } (-1) \text{ ضرب می کنیم}} -1 < [x] - x \leq 0$$

$$\xrightarrow{+1} 0 < [x] - x + 1 \leq 1 \xrightarrow{\text{معکوس می کنیم}} 1 \leq \frac{1}{[x] - x + 1}$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3 \leq \frac{3}{[x] - x + 1} \xrightarrow{-2} 1 \leq \frac{3}{[x] - x + 1} - 2$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \geq 1 \Rightarrow R_{g \circ f} = [1, +\infty)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

گام اول

به شکل ماشین داده شده خوب دقت کنید:

$$\text{ورودی} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow \text{خروجی}$$

متغیر ورودی را x در نظر می گیریم. وارد دستگاهی می شود که این متغیر را دو برابر کرده و از آن دو واحد کم می کند. ما این دستگاه را $f(x)$ فرض می کنیم. دستگاه بعدی را هم $g(x)$ در نظر می گیریم. بنابراین شکل دستگاه را به صورت زیر تکمیل می کنیم:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_x \rightarrow \underbrace{2x - 2}_{f(x)} \rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x} + 1}}_{g(x)} \rightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

خروجی به ازای متغیر ورودی x برابر $\frac{4}{3}$ شده است، یعنی $g(f(x)) = \frac{4}{3}$ است.

گام دوم

حالا با داشتن $f(x)$ و $g(x)$ می توانیم $g(f(x))$ را تعیین کرده و در نهایت مقدار x را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 2, \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \\ g(f(x)) &= \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)} + 1} = \frac{2x - 2}{\sqrt{2x - 2} + 1} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3(2x - 2) = 4\sqrt{2x - 2} + 4 \\ \xrightarrow{\sqrt{2x-2}=t} 3t^2 &= 4t + 4 \Rightarrow 3t^2 - 4t - 4 = 0 \Rightarrow (3t + 2)(t - 2) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \sqrt{2x - 2} = 2 \Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2x - 2} = -\frac{2}{3} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین ورودی این ماشین $x = 3$ به دست آمد.

گام اول

دامنه تابع gof از رابطه $D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$ به دست می آید.

گام دوم

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x - x^2} \Rightarrow x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} | \frac{1+x^2}{1-x^2} \in [0, 1]\}$$

$$0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \quad (1) \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \\ \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) : x \in \{0\}$$

$$g(x) = x^3 + x, \quad f(x) = \frac{2}{5}x - 4$$

اول $f^{-1}(8)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 8 \Rightarrow \frac{2}{5}x - 4 = 8 \Rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow f^{-1}(8) = 30$$

حال داریم:

$$g^{-1}(f^{-1}(8)) = g^{-1}(30)$$

$$g(x) = 30 \Rightarrow x^3 + x = 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g^{-1}(30) = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

تابع داده‌شده اکیداً صعودی است و وارون خود را روی خط $y = x$ ملاقات می‌کند. بنابراین:

$$x^3 + 3x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

حقیقتاً ریشه $x = 2$ را حدس زدیم!

$$x^3 + 3x - 12 = (x - 2)(x^2 + 2x + 6)$$

نقطه $(2, 2)$ محل تقاطع است. فاصله تا مبدأ برابر است با:

$$\sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

با توجه به ضابطه های $f(x)$ و $f(g(x))$ ، تابع $f(g(x))$ را بر حسب تابع $g(x)$ تشکیل می‌دهیم. سپس بدون این که ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین کنیم، x را برابر -2 در نظر گرفته و مقدار $g(-2)$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4, \quad f(g(x)) = 4x^2 + 6x \Rightarrow 2(g(x))^2 + 4 = 4x^2 + 6x \\ &\xrightarrow{x=-2} 2(g(-2))^2 + 4 = 4(-2)^2 + 6(-2) = 4(4) + 6(-2) = 16 - 12 = 4 \\ &\Rightarrow 2(g(-2))^2 + 4 = 4 \Rightarrow 2(g(-2))^2 = 0 \Rightarrow (g(-2))^2 = 0 \Rightarrow g(-2) = 0 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

یک روش این است که از روی تابع اصلی، ضابطه وارون تابع را پیدا کنیم. اما روش ساده تری هم برای حل تست وجود دارد: ابتدا بررسی کنیم در بین گزینه ها کدام گزینه می تواند به عنوان تابع در نظر گرفته شود. سپس با توجه به این که اگر نقطه (α, β) در ضابطه اصلی صدق کند، نقطه (β, α) در وارون آن صدق می کند، گزینه درست را پیدا کنیم.

روش اول:

$$۱) y = \sqrt{x}, x \geq 0, y \geq 0 \xrightarrow{\text{به توان } ۲} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x \geq 0$$

$$۲) y = -\sqrt{-x}, x < 0 \Rightarrow y < 0 \xrightarrow{\text{به توان } ۲} y^2 = -x$$

$$\Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = x|x|, x \in \mathbb{R}$$

روش دوم:

گزینه های ۳ و ۴ اصلاً تابع نیستند. نقطه $(۴, ۲)$ در ضابطه تابع اصلی صدق می کند. فقط گزینه ۱ است که نقطه $(۲, ۴)$ در آن صدق می کند و می تواند به عنوان ضابطه وارون در نظر گرفته شود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

$$f^{-1} = \{(۲, ۱), (۵, ۲), (۴, ۳), (۶, ۴)\}$$

$$g = \{(۲, ۳), (۴, ۲), (۵, ۶), (۳, ۱)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} ۲ \xrightarrow{f^{-1}} ۱ \xrightarrow{g} ۳ \\ ۵ \xrightarrow{f^{-1}} ۲ \xrightarrow{g} ۳ \\ ۴ \xrightarrow{f^{-1}} ۳ \xrightarrow{g} ۱ \\ ۶ \xrightarrow{f^{-1}} ۴ \xrightarrow{g} ۲ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{gof}^{-1} = \{(۵, ۳), (۴, ۱), (۶, ۲)\}$$

حال اگر فرض کنیم $h = \text{gof}^{-1}$ باشد، خواسته مسئله $\frac{g}{h}$ است که باید دامنه های مشترک را در نظر بگیریم و بردها را بر هم تقسیم کنیم:

$$D_h \cap D_g = \{۵, ۴\}$$

$$\frac{g}{h} = \left\{ \left(۵, \frac{۶}{۳} \right), \left(۴, \frac{۲}{۱} \right) \right\} = \{(۵, ۲), (۴, ۲)\}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

گام اول

معکوس تابع نمایی $y = 2^x$ ، تابع لگاریتمی $y = \log_2^x$ است. نقطه برخورد این دو تابع با محورهای A و B نام گذاری کرده و فاصله دو نقطه را محاسبه می کنیم.

گام دوم

روش اول:

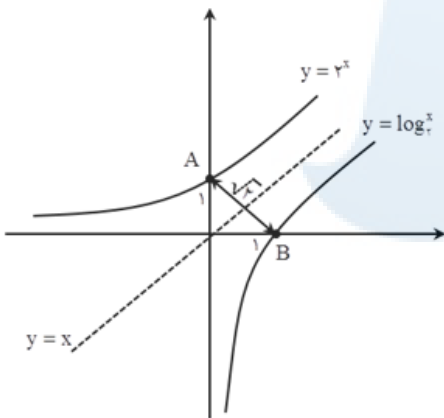
$$y = 2^x \xrightarrow[\text{برخورد با محور } y]{x=0} y = 2^0 = 1$$

پس نقطه برخورد تابع $y = 2^x$ با محور y ها نقطه $A(0, 1)$ است. نقطه برخورد تابع معکوس یا همان $y = \log_2^x$ با محور x ها نقطه $B(1, 0)$ است. فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

روش دوم:

با توجه به اینکه معکوس هر نمودار را می توانیم با رسم تقارن آن نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم، نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم کرده و با ترسیم وارون آن نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع معکوس را به دست می آوریم.



راه حل اول:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2^x) = 5x^2 + 11$$

$$\Rightarrow g(x) = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 11 = \frac{5}{4}x^2 + 11$$

$$\Rightarrow g(x-7) = \frac{5}{4}(x-7)^2 + 11 \Rightarrow g(x-7) \text{ حداقل } = 11$$

راه حل دوم: برای رسیدن از ضابطه $g(2^x)$ به $g(x-7)$ ، تنها دامنه تغییر می کند و برد ثابت می ماند. بنابراین کمترین مقدار $g(x-7)$ برابر با کمترین مقدار $g(2^x) = 5x^2 + 11$ است. پس برابر با ۱۱ می باشد.

منظور سوال از قرینه نمودار تابع نسبت به خط $y = x$ و ارون تابع است:

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \Rightarrow (y-2)^2 = x-1 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 1$$

$$f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد به راست}} (x-4)^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد پایین}} (x-4)^2 + 1 - 3 = (x-4)^2 - 2$$

$$g(4) = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

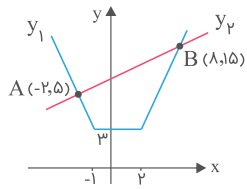
$$y_1 = |x-2| + |x+1|, \quad y_2 = x+7$$

$$y_1 = \begin{cases} -x+2-x-1 & ; x \leq -1 \\ -x+2+x+1 & ; -1 < x \leq 2 \\ x-2+x+1 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \begin{cases} -2x+1 & ; x \leq -1 \\ 3 & ; -1 < x \leq 2 \\ 2x-1 & ; x > 2 \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم:

$$x > 2: 2x-1 = x+7 \Rightarrow x = 8$$

$$x < -1: -2x+1 = x+7 \Rightarrow x = -2$$



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - (-2))^2 + (15 - 5)^2} \\ = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$g(x) = \sqrt{\sqrt{x}+3} + k \xrightarrow{g(1)=1} \sqrt{1+3} + k = 1 \Rightarrow k = -1$$

$$g(x) = \sqrt{\sqrt{x}+3} - 1 \Rightarrow -g(x) = 1 - \sqrt{\sqrt{x}+3} \Rightarrow -g(x+4) = 1 - \sqrt{\sqrt{x+4}+3} \\ \xrightarrow{x=0} y = 1 - \sqrt{2+3} = 1 - \sqrt{5}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

طبق تعریف، دامنه تابع gof از رابطه زیر به دست می آید:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

بنابراین لازم است برای حل تست دامنه تعریف دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ تعیین شود، سپس با استفاده از تعریف گفته شده D_{gof} را مشخص کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x + |x|} = \begin{cases} x \geq 0 : |x| = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x} \\ x < 0 : |x| = -x \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - x} = 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} = \frac{1}{x(x - 4)} \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \\ \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

حالا دامنه تعریف تابع gof را به دست می آوریم:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x + |x|} \in \mathbb{R} - \{0, 4\}\}$$

$$\sqrt{x + |x|} = 4 \xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{2x} = 4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

$$\sqrt{x + |x|} = 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

پس دامنه gof برابر است با: $D_{\text{gof}} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

برای پاسخ گویی به این تست داشتن ضابطه تابع $\text{gof}(x)$ الزامی است. برای رسیدن به این منظور کافی است در ضابطه تابع $g(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه تابع $f(x)$ را قرار دهیم. حالا ببینیم منظور تابع از جمله "مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور x ها قرار می گیرند" چیست؟ اگر قرار باشد تابع gof بالای محور x ها قرار بگیرد باید مقدار y تابع بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین باید مجموعه جواب نامعادله $\text{gof}(x) > 0$ را تعیین کنیم.

گام دوم

تعیین ضابطه $\text{gof}(x)$ و حل نامعادله $\text{gof}(x) > 0$:

$$g(x) = -\frac{1}{4}x + 2, \quad f(x) = x^2 + 3x$$

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{4}(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 2$$

$$\text{gof}(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-4)} x^2 + 3x - 8 < 0$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$

بنابراین در بازه $(-4, 1)$ مقادیر تابع $\text{gof}(x)$ بزرگ تر از صفر بوده و در نتیجه نمودار این تابع روی این بازه بالای محور x ها قرار می گیرد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

می‌دانیم اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع صدق کند، نقطه به مختصات $A'(\beta, \alpha)$ در ضابطه وارون تابع صدق می‌کند.

گام دوم

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow (4, 2) \in f \Rightarrow (2, 4) \in f^{-1}$$

با استفاده از این نقطه گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌توانند جواب تست باشند.

$$x = -4 \Rightarrow f(-4) = -\sqrt{4} = -2 \Rightarrow (-4, -2) \in f \Rightarrow (-2, -4) \in f^{-1}$$

باتوجه به این دو مثال ضابطه وارون تابع به صورت $f^{-1}(x) = x|x|$ خواهد بود.

دو تابع $g(x)$ و $(f \circ g)(x)$ را داریم. می‌دانیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \lambda x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(2x+1) = \lambda x^2 + 6x + 5 \quad (I)$$

با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $2x+1 = t$ باشد، x را برحسب t به دست آورده و در ضابطه (I) جایگذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$\begin{aligned} 2x+1=t &\Rightarrow 2x=t-1 \Rightarrow x=\frac{t-1}{2} \\ f(2x+1) &= \lambda x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(t) = \lambda \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 \\ &= 2(t-1)^2 + 3t - 3 + 5 \\ &\Rightarrow f(t) = 2(t^2 - 2t + 1) + 3t + 2 = 2t^2 - 4t + 2 + 3t + 2 = 2t^2 - t + 4 \end{aligned}$$

بنابراین ضابطه $f(x) = 2x^2 - x + 4$ به صورت $f(x) = 2x^2 - x + 4$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$\begin{aligned} g(x) &= f^{-1}(x) \\ g(3) &= f^{-1}(3) = a \Rightarrow f(a) = 3 \Rightarrow a + 2\sqrt{a} = 3 \Rightarrow a + 2\sqrt{a} - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1 \\ \sqrt{a} = -3 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(3) = 1$$

$$g(15) = f^{-1}(15) = b \Rightarrow f(b) = 15 \Rightarrow b + 2\sqrt{b} = 15 \Rightarrow b + 2\sqrt{b} - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} - 3)(\sqrt{b} + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9 \\ \sqrt{b} = -5 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(15) = 9$$

بنابراین داریم:

$$g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

در صورت مسئله ضابطه دو تابع $f(x)$ و $g(f(x))$ به ما داده شده است. ابتدا با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطه تابع $f \circ g$ کافی است در ضابطه تابع $f(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $g(x)$ را قرار دهیم.

$$f(x) = 2x + 3, \quad g(f(x)) = \lambda x^2 + 22x + 20 \Rightarrow g(2x + 3) = \lambda x^2 + 22x + 20$$

$$2x + 3 = t \Rightarrow 2x = t - 3 \Rightarrow x = \frac{t - 3}{2}$$

$$g(t) = \lambda \left(\frac{t - 3}{2} \right)^2 + 22 \left(\frac{t - 3}{2} \right) + 20 \Rightarrow g(t) = \lambda \left(\frac{t^2 - 6t + 9}{4} \right) + 11(t - 3) + 20$$

$$\Rightarrow g(t) = 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20 = 2t^2 - t + 5 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

حالا ضابطه تابع $f \circ g(x)$ یا همان $f(g(x))$ را تعیین می کنیم:

$$f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = 2x^2 - x + 5 \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - 2x + 10 + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۶

گام اول

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه $(f, 2) \in \text{fog}$ و $(f, 1) \in \text{gof}$ است. $(f, 2) \in \text{fog}$ است، یعنی $f(g(f)) = 2$ است. $(f, 1) \in \text{gof}$ است، یعنی $g(f(f)) = 1$ است. حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

گام دوم

تعیین a و b با استفاده از دو شرط $f(g(f)) = 2$ و $g(f(f)) = 1$:

$$f(g(f)) = 2 \xrightarrow{f(3)=2} g(f) = 3 \xrightarrow{(a,3) \in g} a = f$$

$$g(f(f)) = 1 \xrightarrow{f(f)=5} g(5) = 1 \xrightarrow{(b,1) \in g} b = 5$$

پس دوتایی مرتب (a, b) به صورت $(f, 5)$ درمی آید.

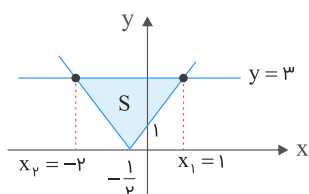
ابتدا تابع gof را به دست می آوریم:

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \Rightarrow (\text{gof})(x) = |2x + 1|$$

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & ; x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

نقاط برخورد تابع $|2x + 1|$ و خط $y = 3$ را می یابیم.

$$2x_1 + 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1, \quad -2x_2 - 1 = 3 \Rightarrow x_2 = -2$$



$$S = \frac{(|x_1| + |x_2|) \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

$$f(6) = f\left(-\frac{1}{6}\right) = 0$$

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 6 \\ g(x) = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = 6 \\ x - \sqrt{x} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

حال هریک از معادلات بالا را حل می‌کنیم:

$$x - \sqrt{x} - 6 = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}>0} t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) = 0 \xrightarrow{t>0} t = 3 \xrightarrow{x=t^2} x = 9$$

$$x - \sqrt{x} + \frac{1}{6} = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}>0} t^2 - t + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \xrightarrow{x=t^2} x = \frac{1}{4}$$

بنابراین نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را در نقاطی به طول ۹ و $\frac{1}{4}$ قطع می‌کند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{9\cos^2(x) - 1} = A$ باشد.

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 9\cos^2(x) - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq A \leq 2$$

تابع موردنظر به صورت $g(A) = 2^A - 2^{-A}$ است. هر دو تابع 2^A و 2^{-A} صعودی اکیدند، پس مجموع آن‌ها صعودی اکید خواهد بود.

$$b = g(2) = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$a = g(-1) = 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow b - a = \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

$$g(x) = \frac{1-3x}{x+2}, \quad f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$$

$$g(f(x)) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)+2} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{1-\frac{6x+9}{2-x}}{\frac{2x+3}{2-x}+2}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4+2x}{2-x}} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{-7x-11}{4x+7} \Rightarrow g(f(x)) = -x-1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

از داخلی‌ترین تابع شروع می‌کنیم:

$$f \circ f \circ f(\sqrt{2}) = f(f(f(\sqrt{2})))$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})(\sqrt{2})}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f \circ f \circ f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم هریک از زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده دو تابع f و g ، توابع f^{-1} و g^{-1} را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها مشخص می‌کنیم، سپس تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا به سراغ تابع f^{-1} می‌رویم، سپس با خروجی‌هایی که به ما می‌دهد بررسی می‌کنیم که تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ تشکیل می‌شود یا خیر.

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4), (4, 3)\}$$

$$g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$$

$$D_{f^{-1}} = \{2, 3, 5, 4\}$$

$$x = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(1) = 2 \Rightarrow (2, 2) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 2 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(3)) = g^{-1}(2) = 3 \Rightarrow (3, 3) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 4 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(4) = 5 \Rightarrow (5, 5) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 3 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(4)) = g^{-1}(3) \Rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

بنابراین تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ به صورت $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$ درمی‌آید.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

وقتی تست اشاره کرده $g(f(a)) = 5$ است، یعنی این که باید از تابع g زوج مرتبی را انتخاب کنیم که در آن مؤلفه دوم برابر ۵ است. در این صورت مؤلفه اول برابر $f(a)$ بوده و با داشتن ضابطه تابع $f(x)$ مقدار a به راحتی محاسبه می‌شود.

گام دوم

$g(f(a)) = 5$ است. در بین زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده تابع g ، زوج مرتب $(6, 5)$ دارای مؤلفه دوم ۵ است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت: $f(a) = 6$. حال با داشتن ضابطه $f(x)$ ، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} \xrightarrow{f(a)=6} a + \sqrt{a} = 6$$

برای حل این معادله می‌توانیم با تغییر متغیر $t = \sqrt{a}$ ، معادله را به یک معادله درجه دو تبدیل کرده و آن را حل کنیم. (فقط حواستان باشد t باید مثبت شود.)

$$a + \sqrt{a} = 6 \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^2 + t = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t + 3)(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -3 & \text{غ ق ق} \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

اما راه سریع‌تر و راحت‌تر برای رسیدن به جواب امتحان گزینه هاست. در این صورت هم، $a = 4$ جواب تست می‌شود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

دامنه تابع fog از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

گام دوم

دامنه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین کرده و با استفاده از رابطه گفته شده در گام اول، D_{fog} را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$$

$$-x^2 + x + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \Rightarrow D_f = (-1, 2)$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2\}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{1}{e}\right)^x > 0} \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2 \Rightarrow (e^{-1})^x < 2 \Rightarrow e^{-x} < 2 \Rightarrow -x < \ln 2$$

$$\xrightarrow{\div -1} x > -\ln 2 \Rightarrow D_{fog} = (-\ln 2, +\infty)$$

$$f(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(-x-1)^2 = -(x+1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به بالا}} -(x+1)^2 + 4$$

حال باید طول نقطه تلاقی این دو منحنی را به دست آوریم؛ پس داریم:

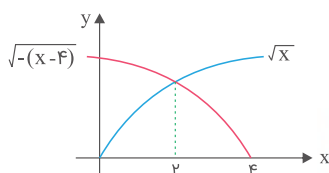
$$(x-1)^2 = -(x+1)^2 + 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -(x^2 + 2x + 1) + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y\text{-ها}} \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{واحد به راست}} \sqrt{-(x-4)}$$

حال دو نمودار را رسم می‌کنیم:



$$\sqrt{x} = \sqrt{-(x-4)} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |x| = |-(x-4)| = |x-4|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x - 4 \Rightarrow 0 = -4 & \times \\ x = -x + 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین $x = 2$ محور تقارن دو نمودار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

راه حل اول:

اگر تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تابع به فرم $f(x) = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5$ تبدیل می شود و اگر تابع $f(x)$ را دو واحد به سمت y های منفی انتقال دهیم، نمودار جدید با ضابطه $g(x) = f(x) - 2$ خواهد بود.

$$g(x) = f(x) - 2 = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 = -(x^2 - 6x + 9) + 2x - 6 + 5 - 2$$

$$\Rightarrow g(x) = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 3 = -x^2 + 8x - 12$$

حال باید $g(x)$ بالای نیمساز ربع اول و سوم، یعنی $y = x$ قرار گیرد.

$$g(x) > x \Rightarrow -x^2 + 8x - 12 > x$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow \underbrace{(x-3)(x-4)}_{h(x)} < 0 \quad (*)$$

x	$-\infty$	ψ	φ	$+\infty$	
h(x)	+	•	-	•	+

$$h(x) < 0 \Rightarrow x \in (3, 4)$$

راه حل دوم: (عدد گذاری)

در صورتی که در (*) قرار دهیم: $x = 4$ ، داریم: $0 < 0$ که غیرقابل قبول است، بنابراین گزینه های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

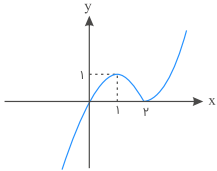
الف) ابتدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطه تابع را به صورت تفکیک‌شده می‌نویسیم. (یک بار فرض می‌کنیم $x \geq 2$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $x < 2$ باشد و ضابطه تابع را تعیین می‌کنیم.)

ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه‌ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می‌کنیم.

ج) باتوجه به این نکته که $D_{f^{-1}} = R_f$ ، دامنه تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطه آن را نیز تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow |x-2| = x-2 \Rightarrow y = x(x-2) \\ x < 2 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \Rightarrow y = -x(x-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & ; x < 2 \end{cases}$$



تنها بازه‌ای که در آن تابع نزولی باشد، بازه $[1, 2]$ است. برد تابع در این بازه $[0, 1]$ است. پس $D_{f^{-1}} = [0, 1]$ (رد گزینه های ۱ و ۲). حال در محدوده مشخص‌شده ضابطه $f^{-1}(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow y = -x^2 + 2x \Rightarrow -y = x^2 - 2x$$

$$\xrightarrow{+1} 1 - y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 1 - y = (x-1)^2 \Rightarrow x-1 = \sqrt{1-y}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x} ; 0 \leq x \leq 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

$$x^2 \sqrt{x^3} = x^2 |x| = \begin{cases} x^3 & ; x \geq 0 \text{ اکیداً صعودی} \\ -x^3 & ; x < 0 \text{ اکیداً نزولی} \end{cases}$$

پس باید وارون تابع ضابطه پایینی را حساب کنیم:

$$y = -x^3 \Rightarrow x^3 = -y \Rightarrow x = \sqrt[3]{-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$$

$$D_f = R_{f^{-1}}, D_{f^{-1}} = R_f$$

$$R_f = [0, +\infty] = D_{f^{-1}} \Rightarrow D_{f^{-1}} : x \geq 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

داریم $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9))$. ابتدا $g^{-1}(-9) = a$ فرض می‌کنیم. پس می‌کنیم $g^{-1}(-9) = a$ باشد، پس $g(a) = -9$ و داریم:

$$g(x) = \frac{3-x}{2} \Rightarrow g(a) = \frac{3-a}{2} = -9 \Rightarrow 3-a = -18 \Rightarrow a = 21$$

پس کافی است $f^{-1}(21) = b$ را حساب کنیم. فرض می‌کنیم $f^{-1}(21) = b$ باشد، پس $f(b) = 21$ است و داریم:

$$f(x) = x^2 - 4x + 9 \Rightarrow f(b) = b^2 - 4b + 9 = 21 \Rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0 \\ \Rightarrow (b-6)(b+2) = 0 \xrightarrow{b \geq 2} b = 6$$

پس $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = 6$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

ضابطه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ما داده شده است و ضابطه تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ را می‌خواهند. برای این کار ابتدا ضابطه دو تابع $f^{-1}(x)$ و $g^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم، سپس برای تعیین ضابطه $g^{-1} \circ f^{-1}$ یا همان $g^{-1}(f^{-1}(x))$ در ضابطه $g^{-1}(x)$ به جای متغیر x ضابطه $f^{-1}(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x) = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان } 2} (y-1)^2 = x \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2; x > 1 \\ g(x) = x^2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x}; x > 0$$

بنابراین ضابطه تابع $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ برابر است با:

$$g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \\ \xrightarrow[\substack{x > 1 \\ x-1 > 0}]{x > 1} g^{-1} \circ f^{-1}(x) = x - 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

$$g^{-1} \circ f^{-1}(a) = g^{-1}(f^{-1}(a)) = \lambda \Rightarrow (f^{-1}(a), \lambda) \in g^{-1} \\ \Rightarrow (\lambda, f^{-1}(a)) \in g \Rightarrow g(\lambda) = f^{-1}(a) \quad (*) \\ g(x) = \sqrt{5x+9} \Rightarrow g(\lambda) = \sqrt{49} \Rightarrow g(\lambda) = 7 \\ \xrightarrow{(*)} f^{-1}(a) = 7 \Rightarrow (a, 7) \in f^{-1} \Rightarrow (7, a) \in f \Rightarrow a = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[\text{راست}]{1 \text{ واحد به سمت}} \frac{1}{x-1} \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} \frac{-1}{x-1} \xrightarrow[\text{پایین}]{2 \text{ واحد رو به}} \frac{-1}{x-1} - 2 \\ \text{حالا: } \frac{1}{x} = \frac{-1}{x-1} - 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = -2 \Rightarrow \frac{x-1+x}{x^2-x} = -2 \\ -2x^2 + 2x = 2x - 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه برخورد}} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right. \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + (\sqrt{2} - 0)^2} \\ = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

اگر دو تابع f و g که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بیان شده‌اند را داشته باشیم، پس $f \cap g$ زیرمجموعه‌ای از این توابع خواهد بود، بنابراین تابع است. همچنین $f - g$ نیز تابع خواهد بود. ترکیب دو تابع f و g یعنی $f \circ g$ نیز تابع است. رابطه $f \cup g$ ممکن است تابع نباشد. به مثال زیر دقت کنید:

تابع است $f = \{(2, 3)\}$

تابع است $g = \{(2, 4)\}$

تابع نیست $f \cup g = \{(2, 3), (2, 4)\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

در سه مرحله مقدار $f(0) + \frac{1}{3}f(2x+1)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{0^2 + 3}{0^2 - 1} = \frac{3}{-1} = -3 \\ f(2x+1) &= \frac{(2x+1)^2 + 3}{(2x+1)^2 - 1} = \frac{(4x^2 + 4x + 1) + 3}{(4x^2 + 4x + 1) - 1} \\ &= \frac{4x^2 + 4x + 4}{4x^2 + 4x} = \frac{4(x^2 + x + 1)}{4(x^2 + x)} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} \\ f(2x+1) + \frac{1}{3}f(0) &= \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} + \frac{1}{3}(-3) \\ &= \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} - 1 = \frac{x^2 + x + 1 - (x^2 + x)}{x^2 + x} = \frac{1}{x^2 + x} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

گاهی اوقات تابع مرکب را به صورت یک ماشین نمایش می‌دهند. به شکل رسم‌شده در این تست خوب دقت کنید:

$$\underset{x}{\rightarrow} \underline{f} \xrightarrow{f(x)} \underline{g} \xrightarrow{g(f(x))} 2x$$

متغیر x به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود. ابتدا وارد ضابطه f می‌شود که خروجی آن $f(x)$ است. در مرحله دوم $f(x)$ وارد ضابطه g می‌شود که در این صورت خروجی آن $g(f(x))$ است. بنابراین در این تست $g(f(x)) = 2x$ است.

گام دوم

ضابطه $g(f(x))$ و $g(x)$ مشخص است. اول ضابطه $f(x)$ را تعیین کرده، سپس با استفاده از آن مقدار $f(5)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x + 4, \quad g(f(x)) = 2x \Rightarrow 3f(x) + 4 = 2x \Rightarrow 3f(x) = 2x - 4 \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow f(5) = \frac{2}{3}(5) - \frac{4}{3} = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y = x$ و $y = \sqrt{-x+2}$ (نیمساز ناحیه اول و سوم)، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-x+2} = x \quad (*) \xrightarrow{\text{به توان } 2} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

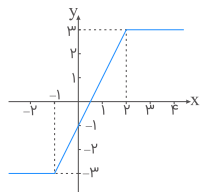
$x = -2$ غیرقابل قبول است، زیرا در معادله $(*)$ صدق نمی‌کند.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

X	-1	2
X+1	-	+
X-2	-	+

$$\begin{aligned} x \leq -1 : f(x) &= -x - 1 + x - 2 = -3 \\ -1 < x \leq 2 : f(x) &= x + 1 + x - 2 = 2x - 1 \\ x > 2 : f(x) &= x + 1 - x + 2 = 3 \end{aligned}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل در فاصله $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را باتوجه به محدوده‌هایی که برای x در نظر می‌گیریم، ساده می‌کنیم. محدوده x بر اساس ریشه عبارت‌های داخل قدر مطلق تعیین می‌شود.

ب) بازه‌ای که در آن تابع $f(x)$ صعودی است (مقدار $f(x)$ به ازای افزایش x در حال افزایش است) را تعیین کرده و در آن بازه ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

ریشه عبارت‌های درون قدر مطلق، $x = -1$ و $x = 3$ است. داریم:

$$x < -1 : f(x) = -2x + 6 - (-x - 1) = -2x + 6 + x + 1 = -x + 7$$

$$-1 \leq x \leq 3 : f(x) = -2x + 6 - (x + 1) = -3x + 5$$

$$x > 3 : f(x) = 2x - 6 - (x + 1) = x - 7$$

در بازه $x > 3$ تابع $f(x) = x - 7$ یک تابع صعودی است. در این بازه ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = x - 7 \Rightarrow x = y + 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 7, \quad x > -4$$

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(6) = f^{-1}(6) = a \Rightarrow f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4 \\ \sqrt{a} = -3 \text{ غ ق} \end{cases} \Rightarrow g(6) = 4$$

$$g(12) = f^{-1}(12) = b \Rightarrow f(b) = 12 \Rightarrow b + \sqrt{b} = 12 \Rightarrow b + \sqrt{b} - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} + 4)(\sqrt{b} - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = -4 \text{ غ ق} \\ \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9 \end{cases} \Rightarrow g(12) = 9$$

بنابراین داریم:

$$g(6) + g(12) = 4 + 9 = 13$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

در تست حاصل مقادیری از دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ از ما خواسته شده است. بنابراین با توجه به دو ضابطه $f(x)$ و $g(x)$ ، ابتدا ضابطه توابع $f \circ g(x)$ و $g \circ f(x)$ را تعیین کرده، سپس حاصل عبارت داده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = |(x+1)^2| \xrightarrow{(x+1)^2 \geq 0} (f \circ g)(x) = (x+1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (|x| + 1)^2$$

$$(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2} + 1)^2 - (|1 - \sqrt{2}| + 1)^2 =$$

$$(2 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 - (\sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

گام اول

تابع دوضابطه‌ای است. برای محاسبه $f(1)$ از ضابطه پایین و برای محاسبه $f(5)$ از ضابطه بالا استفاده می‌کنیم.

گام دوم

$$x > 3 : f(x) = x - \sqrt{x+4} \Rightarrow f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

$$x \leq 3 : f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

پس مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ برابر است با:

$$f(f(5)) + f(f(1)) = f(2) + f(5) = 2(2) + 3 + 2 = 4 + 3 + 2 = 9$$

گزینه ۱

۱۱۹

به راحتی می‌توانیم $(f \circ f) \circ g$ را بسازیم، کافی است ورودی و خروجی‌ها را کنترل کنیم.

$$(x > 0) \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0$$

$$(x = 0) \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0$$

$$(x < 0) \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0$$

در واقع $(f \circ f) \circ g(x) = 0$ است و همواره پیوسته خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه ۴

۱۲۰

با استفاده از ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم (x را بر حسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض می‌کنیم). سپس معادله $f^{-1}(g(a)) = 6$ را حل کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = 2x - 5 \Rightarrow y = 2x - 5 \Rightarrow y + 5 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

$$f^{-1}(g(a)) = 6 \Rightarrow \frac{g(a)+5}{2} = 6 \Rightarrow g(a) + 5 = 12 \Rightarrow g(a) = 7 \xrightarrow{(F,Y) \in g} a = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

گزینه ۴

۱۲۱

برای به دست آوردن $D_{f \circ g}$ اول از همه باید D_f و D_g تعیین شود. سپس با استفاده از رابطه $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ ، دامنه تابع $f \circ g$ را تعیین کنیم.

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \log_v^{(x^v+2x)} \Rightarrow x^v + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ یا } x < -2$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

حالا سراغ تعیین $D_{f \circ g}$ می‌رویم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \mid \log_v^{(x^v+2x)} \leq 3\}$$

$$\log_v^{(x^v+2x)} \leq 3 \Rightarrow x^v + 2x \leq v^3 \Rightarrow x^v + 2x \leq 8 \Rightarrow x^v + 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{f \circ g} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$$

$$\xrightarrow{\text{۱۶ واحد انتقال در جهت مثبت محور } y \text{ ها}} y_1 = -x^2 + 2x + 16$$

حال معادله جدید را با معادله قبلی مساوی قرار می‌دهیم تا نقطه برخورد را به دست آوریم:

$$y = y_1 \Rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \text{ق.ق} \\ x = -2 & \text{غ.ق. زیرا } x > 1 \end{cases}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4, 8)$$

فاصله نقطه A از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{16(1 + 4)} = 4\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد.

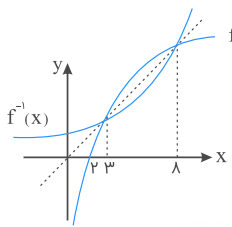
ب) نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.

دامنه تابع $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ محدوده‌ای است که عبارت $x - f^{-1}(x)$ نامنفی می‌شود. پس:

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (همان خط $y = x$) قرینه هم هستند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، نمودار $y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار می‌گیرد و برعکس.

در بازه $[3, 8]$ نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، بنابراین بازه نمودار $y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار گرفته و در نتیجه $x - f^{-1}(x)$ مثبت می‌شود (به عبارت صحیح‌تر نامنفی می‌شود)، بنابراین بازه $[3, 8]$ دامنه تعریف تابع $f(x)$ داده شده است.



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

برای به دست آوردن برد تابع gof ابتدا باید ضابطه آن را تشکیل دهیم.

$$f(x) = x - [x], \quad g(x) = \frac{1-x}{x} \Rightarrow \text{gof}(x) = g(f(x)) = \frac{1-f(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{1-x+[x]}{x-[x]} = \frac{1}{x-[x]} - 1$$

می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ ، ازطرفی $x - [x]$ نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا مخرج کسر تعریف نمی‌شود، لذا:

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow (\text{gof})(x) > 0 \Rightarrow R_{\text{gof}} = (0, +\infty)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

ابتدا با استفاده از ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ ، ضابطه $f(x)$ را به دست می آوریم. سپس ضابطه $g(x)$ را تعیین می کنیم و در نهایت برای این که مقدار $g^{-1}(6)$ را محاسبه کنیم، کافی است $g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را حساب کنیم.

گام دوم

توضیحات گفته شده را مرحله به مرحله پیاده می کنیم:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{2x} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} y^3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2}$$

$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}}$$

$g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را تعیین می کنیم:

$$6 = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}} \Rightarrow 6 + 2 = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}} \Rightarrow \frac{x^3}{2} = 4 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

نقطه $(2, 6)$ در ضابطه $g(x)$ صدق می کند، پس نقطه $(6, 2)$ متعلق به تابع $g^{-1}(x)$ است. بنابراین $g^{-1}(6) = 2$ است.

داریم: $(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = g^{-1}(f^{-1}(20))$ ، پس کافی است $f^{-1}(20)$ را یافته و در تابع g^{-1} قرار دهیم. فرض کنیم $f^{-1}(20) = a$ باشد، پس $f(a) = 20$ است و داریم:

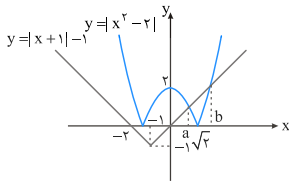
$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = 20 \Rightarrow a = 16 \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

بنابراین $g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16)$. حال فرض می کنیم $g^{-1}(16) = b$ ، پس $g(b) = 16$ است. در نتیجه:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{9x+6}{1-x} \Rightarrow g(b) = \frac{9b+6}{1-b} = 16 \Rightarrow 9b+6 = 16-16b \\ \Rightarrow 25b &= 10 \Rightarrow b = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \\ \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(20)) &= g^{-1}(16) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

دو منحنی $y_1 = |x+1| - 1$ و $y_2 = |x^2 - 2|$ را رسم می‌کنیم.



مجموعه جواب نامعادله (a, b) است. برای یافتن a , $0 < x < \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$|x^2 - 2| = |x + 1| - 1 \Rightarrow -(x^2 - 2) = x + 1 - 1 \Rightarrow -x^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \xrightarrow{0 < x < \sqrt{2}} x = a = 1$$

برای یافتن b , $x > \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 - 2 = x + 1 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{x > \sqrt{2}} x = b = 2$$

$$\text{مجموعه جواب} = (a, b) = (1, 2) \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2+1}{2} = 1.5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

دامنه تابع معکوس $(D_{f^{-1}})$ همان برد تابع اصلی (R_f) است. بنابراین برای تعیین دامنه تعریف تابع معکوس، باید برد تابع اصلی را به دست آوریم. بعد از تعیین $D_{f^{-1}}$ ، ضابطه تابع معکوس را مشخص می‌کنیم. برای یافتن ضابطه تابع معکوس از رابطه $y = f(x)$ ، x را برحسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض بنابراین ضابطه تابع معکوس به صورت $y = f^{-1}(x)$ به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} x^2 + 1 > x^2 &\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \\ \xrightarrow{|x| = \pm x} \sqrt{x^2 + 1} > -x &\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > 0 \xrightarrow{f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}} f(x) > 0 \\ \Rightarrow R_f = (0, +\infty) &\Rightarrow D_{f^{-1}} = (0, +\infty) \end{aligned}$$

دامنه تابع معکوس به صورت $x > 0$ در می‌آید.

$$\begin{aligned} f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} &\Rightarrow y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 1} \\ \xrightarrow{\text{به توان } 2} (y - x)^2 &= x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy = 1 \\ \Rightarrow 2xy = y^2 - 1 &\Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right), x > 0 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

روش اول:

ابتدا با تفکیک دامنه تعریف به دو قسمت $x > 0$ و $x < 0$ ، تکلیف قدرمطلق را روشن کرده و تابع را بازنویسی می‌کنیم. سپس برای هر یک از ضابطه‌های جدید، ضابطه معکوس تابع را به دست می‌آوریم. داریم:

$$x = 0 : y = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 : |x| = x \Rightarrow y = \sqrt{x} ; y > 0 \\ x < 0 : |x| = -x \Rightarrow y = -\sqrt{-x} ; y < 0 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{به توان } 2]{x, y > 0} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x > 0$$

$$y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{به توان } 2]{x, y < 0} y^2 = -x \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

همچنین نقطه $(0, 0)$ باید در ضابطه وارون تابع صدق کند. بنابراین ضابطه معکوس تابع به صورت $y = x|x|$; $x \in \mathbb{R}$ در می‌آید. روش دوم:

اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه $f(x)$ صدق کند، در این صورت نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه $f^{-1}(x)$ صدق می‌کند. نقطه $A(4, 2)$ در ضابطه $f(x)$ صدق می‌کند. پس نقطه $B(2, 4)$ باید عضو تابع وارون باشد. (رد گزینه‌های ۱ و ۲) هم چنین برد تابع $f(x)$ برابر \mathbb{R} است. پس دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ باید مجموعه اعداد حقیقی یا همان \mathbb{R} باشد. تنها گزینه‌ای که تمام این ویژگی‌ها را دارد، گزینه \mathbb{R} است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

در توابع شامل قدر مطلق بهتر است ابتدا تکلیف قدرمطلق را مشخص کنیم. باتوجه به ریشه عبارت داخل قدرمطلق، ضابطه تابع را به صورت تفکیک‌شده به دست می‌آوریم. سپس هرکدام از ضابطه‌ها را که یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر بود انتخاب کرده و ضابطه تابع معکوس را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = 2x - |4 - 2x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \Rightarrow 4 - 2x < 0 \Rightarrow |4 - 2x| = 2x - 4 \Rightarrow f(x) = 2x - 2x + 4 = 4 \\ x \leq 2 \Rightarrow 4 - 2x \geq 0 \Rightarrow |4 - 2x| = 4 - 2x \Rightarrow f(x) = 2x - 4 + 2x = 4x - 4 \end{cases}$$

ضابطه $f(x) = 4$ یک‌به‌یک نیست، پس وارون ندارد؛ پس تابع فقط روی بازه $(-\infty, 2]$ معکوس‌پذیر است. معکوس تابع را در این بازه تعیین می‌کنیم:

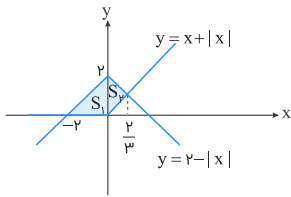
$$x \in (-\infty, 2] \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow 4x \leq 8 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow f(x) \leq 4$$

برد تابع f بازه $(-\infty, 4]$ به دست آمد. پس دامنه f^{-1} نیز بازه $(-\infty, 4]$ خواهد بود.

$$y = 4x - 4 \Rightarrow y + 4 = 4x \Rightarrow x = \frac{y+4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{4} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1 ; x \leq 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}, \quad y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x & ; x \geq 0 \\ x + 2 & ; x < 0 \end{cases}$$



$$2 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{غ.ق.ق} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g : [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} : \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\}$$

همواره داریم $0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$ ، در نتیجه:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0 \xrightarrow{1+x^2 > 0} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

تست ضابطه $f(f(x))$ یا همان $f \circ f(x)$ را از ما می خواهد. برای به دست آوردن ضابطه $f(f(x))$ ، ابتدا باید ضابطه $f(x)$ را به صورت مشخص و دقیق داشته باشیم، سپس باتوجه به آن، ضابطه $f \circ f(x)$ را تعیین کنیم. ضابطه $f(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = 2 - |x - 2| = \begin{cases} x \geq 2 : x - 2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = 2 - x + 2 = 4 - x \\ x < 2 : x - 2 < 0 \Rightarrow f(x) = 2 + x - 2 = x \end{cases}$$

ضابطه $f(f(x))$ را در هریک از این حالات مشخص می کنیم:

$$x \geq 2 : f(f(x)) = 2 - |4 - x - 2| = 2 - |2 - x|$$

$$\xrightarrow{x \geq 2} f(f(x)) = 2 + 2 - x = 4 - x = f(x)$$

$$x < 2 : f(f(x)) = 2 - |x - 2| \xrightarrow{x < 2} 2 + x - 2 = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x)$$

در هر دو حالت ضابطه $f(f(x))$ برابر ضابطه $f(x)$ شد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

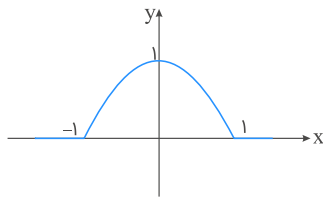
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$x < -1 \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(-1) = 0$$

$$-1 < x \leq 1 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(x) = 1 - x^2$$

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(1) = 0$$

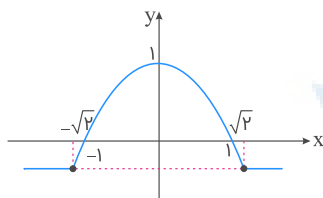
نمودار $g \circ f$ به صورت زیر است:



$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - x^2) = \begin{cases} -1; & 1 - x^2 < -1 \\ 1 - x^2; & -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \\ 1; & 1 - x^2 > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} -1; & |x| > \sqrt{2} \\ 1 - x^2; & |x| \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

نمودار $f \circ g$ به صورت زیر است:



ماکزیمم در نقطه‌ای به طول $\sqrt{2}$ رخ می‌دهد:

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow \max(g \circ f - f \circ g) = 0 - (-1) = 1$$

ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ از ما خواسته شده است. ابتدا باید ضابطه $f^{-1}(x)$ را تعیین کنیم، سپس به جای متغیر x نسبت مثلثاتی $\sin x$ را قرار داده و در پایان ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y\sqrt{1+x^2} = x \\ &\xrightarrow{\text{به توان } 2} y^2(1+x^2) = x^2 \Rightarrow y^2 + y^2x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 - y^2x^2 = y^2 \\ &\Rightarrow x^2(1-y^2) = y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \xrightarrow{\text{هم علامت } y, x} x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} ; -1 < x < 1 \end{aligned}$$

ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\sin x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \xrightarrow{1-\sin^2 x = \cos^2 x} f^{-1}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} \\ &\Rightarrow f^{-1}(\sin x) = \frac{\sin x}{|\cos x|} \end{aligned}$$

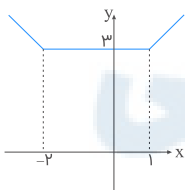
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4 - (x - k + 2)} + k = \sqrt{-x + k + 2} + k \\ A(1, 1) \in y &\Rightarrow \sqrt{1 + k} + k = 1 \Rightarrow k = 0 \\ g(x) = y - 1 &\Rightarrow \sqrt{-x + 2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

بهتر بود که جهت حرکت را اعلام می‌کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

$$f(x) = |x+2| + |x-1| = \begin{cases} 2x+1 & ; x > 1 \\ 3 & ; -2 \leq x \leq 1 \\ -2x-1 & ; x < -2 \end{cases}$$



باتوجه به نمودار تابع گلدانی $y = |x+2| + |x-1|$ ، در فاصله $(-\infty, -2)$ تابع نزولی اکید است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) در توابع شامل قدر مطلق ابتدا باتوجه به ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق، ضابطه تابع را به صورت ساده شده می‌نویسیم.

ب) تعیین می‌کنیم تابع در کدام بازه اکیداً نزولی است.

ج) برای تعیین ضابطه تابع معکوس، x را برحسب y به دست آورده و در نهایت به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگزین می‌کنیم. به این نکته توجه کنید که دامنه تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$f(x) = |2x - 6| - |x + 4| + x$$

$$= \begin{cases} x \leq -4 : -(2x - 6) + (x + 4) + x = 10 \\ -4 < x < 3 : -(2x - 6) - (x + 4) + x = -2x + 2 \\ x \geq 3 : (2x - 6) - (x + 4) + x = 2x - 10 \end{cases}$$

تابع در بازه $(-4, 3)$ اکیداً نزولی است. ضابطه تابع معکوس را به دست می‌آوریم:

$$y = -2x + 2 \Rightarrow y - 2 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

در ضابطه تابع اصلی وقتی $3 < x < -4$ باشد، $-4 < y < 10$ است. پس دامنه تابع معکوس به صورت $(-4, 10)$ درمی‌آید. پس گزینه ۴ درست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

توابع $\text{fog}(x)$ و $\text{gof}(x)$ را تشکیل می‌دهیم و آن‌ها را برابر می‌گذاریم:

$$\text{fog}(x) = f(x + 4) = \frac{2(x + 4) - 1}{(x + 4) + 2} = \frac{2x + 7}{x + 6}$$

$$\text{gof}(x) = g\left(\frac{2x - 1}{x + 2}\right) = \frac{2x - 1}{x + 2} + 4 = \frac{2x - 1 + 4x + 8}{x + 2} = \frac{6x + 7}{x + 2}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{2x + 7}{x + 6} = \frac{6x + 7}{x + 2} \Rightarrow (2x + 7)(x + 2) = (6x + 7)(x + 6)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 7x + 14 = 6x^2 + 36x + 7x + 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 7)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = -1 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

در ضابطه $g(x)$ ، به جای x ضابطه $f(x)$ را جایگذاری می‌کنیم.

گام دوم

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x - 1}{x + 1}\right) = \frac{2 \times \frac{2x - 1}{x + 1} + 2}{2 - \frac{2x - 1}{x + 1}}$$

$$= \frac{\frac{4x - 2 + 2x + 2}{x + 1}}{\frac{2x + 2 - 2x + 1}{x + 1}} = \frac{6x}{3} = 2x \Rightarrow g(f(x)) = 2x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

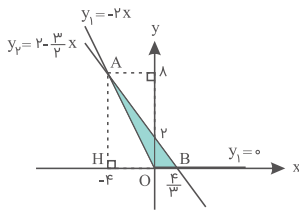
هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq 0$ و $x < 0$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = 0 & ; x \geq 0 \\ -x - x = -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{4}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبه مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطه A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

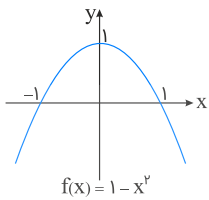
$$2 - \frac{3}{4}x = -2x \Rightarrow -2x + \frac{3}{4}x = 2 \Rightarrow -\frac{1}{4}x = 2 \Rightarrow x = -4$$

$$\xrightarrow{y = -2x} y = 8 \Rightarrow A(-4, 8)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $\triangle ABO$ برابر ۸ است و مساحتش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

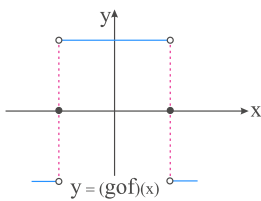


$$-1 < x < 1 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow g(f(x)) = 1$$

$$|x| > 1 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow g(f(x)) = -1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = 0$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| < 1 \\ -1 & ; |x| > 1 \\ 0 & ; |x| = 1 \end{cases}$$



$g \circ f$ در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ ناپیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

جدول تعیین علامت g به صورت زیر است.

x	0	3
x^2	+	+
$f(x)$	+	-
$\sqrt{x^2 f(x)}$	+	-

$$\Rightarrow D_{\sqrt{x^2 f(x)}} = (-\infty, 3]$$

$$x = 0, 1, 2, 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

اعداد $0, 1, 2$ و 3 پذیرفته هستند.

برای تعیین نقطه تلاقی دو تابع f و fog باید اول ضابطه fog مشخص شود. سپس معادله $f(x) = \text{fog}(x)$ را حل کرده و نقطه تلاقی دو تابع که در واقع ریشه همین معادله است را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = (2x - 3)^2, \quad g(x) = x + 2 \Rightarrow \text{fog}(x) = f(g(x)) = (2g(x) - 3)^2 \\ = (2(x + 2) - 3)^2 = (2x + 4 - 3)^2 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

معادله $f(x) = \text{fog}(x)$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = \text{fog}(x) \Rightarrow (2x - 3)^2 = (2x + 1)^2 \\ \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین نمودار دو تابع f و fog در نقطه‌ای به طول $x = \frac{1}{2}$ باهم متقاطع‌اند.
دقت کنید که:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_{\text{fog}} = \mathbb{R}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

نکته: $0 \leq x - [x] < 1$
ابتدا تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = -x^2 + 4x = -x^2 + 4x - 4 + 4 \\ = -(x^2 - 4x + 4) + 4 = -(x - 2)^2 + 4$$

اکنون تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -(2x - [2x] - 2)^2 + 4$$

طبق نکته داریم:

$$0 \leq 2x - [2x] < 1 \xrightarrow{-2} -2 \leq 2x - [2x] - 2 < -1$$

$$\xrightarrow{+4} 2 \leq (2x - [2x] - 2)^2 \leq 4$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -4 \leq -(2x - [2x] - 2)^2 < -1$$

$$\xrightarrow{+4} 0 \leq -(2x - [2x] - 2)^2 + 4 < 3$$

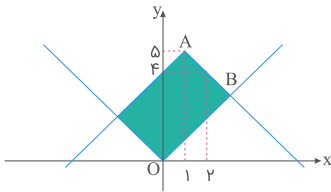
$$\Rightarrow 0 \leq \text{gof}(x) < 3 \Rightarrow R_{\text{gof}} = [0, 3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
$y = 5 - x - 1 $	۴	۵	۴

x	-۱	۰	۱
$y = x $	۱	۰	۱



نقاط برخورد دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$5 - |x - 1| = |x| \Rightarrow |x| + |x - 1| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x + x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3 \\ -x - x + 1 = 5 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

خطوط بر هم عمودند، پس شکل موردنظر یک مستطیل است. فقط مختصات یکی از نقاط برخورد (مانند $B(3, 3)$) را لازم داریم تا مساحت مستطیل به دست آید. طول و عرض برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$|BO| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$S = |AB| \times |BO| = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

ابتدا برد تابع اصلی که همان دامنه تعریف تابع وارون است را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون از روی ضابطه تابع اصلی x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x عبارت $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگذاری کرده و ضابطه را تعیین می‌کنیم.

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{عدد زیر رادیکال با فرجه زوج، مثبت است}} x \geq 1 \\ \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1} \leq 0 \\ \Rightarrow 2 - \sqrt{x-1} \leq 2 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow R_f = (-\infty, 2] \Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$$

اکنون ضابطه تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x-1 = (2-y)^2 \\ \Rightarrow x-1 = 4 - 4y + y^2 \Rightarrow x = 5 - 4y + y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$$

پس ضابطه تابع وارون به صورت $y = x^2 - 4x + 5$; $x \leq 2$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

تابع معکوس تابع g عبارت است از:

$$g^{-1} = \{(-1, 2), (4, -1), (-2, 3), (-3, -4)\}$$

تابع $f(x)$ به ازای مقادیر $x > 0$ ، مثبت و به ازای مقادیر $x < 0$ ، منفی است، پس a قطعاً عددی منفی است.

$$f(a) = -\sqrt{-a} = -2 \Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \Rightarrow a = -4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

$$\begin{aligned} 2^{x+3+|x+3|} - 2 &= 0 \Rightarrow 2^{x+3+|x+3|} = 2 \\ \Rightarrow x + 3 + |x + 3| &= 1 \Rightarrow |x + 3| = -x - 2 \\ \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = -x - 2 \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \\ x + 3 = x + 2 \Rightarrow \text{فاقد جواب} \end{cases} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

راه حل اول: ابتدا وارون تابع $g(x)$ را بر حسب وارون تابع $f(x)$ تعیین کرده، سپس مقدار $g^{-1}(16)$ را محاسبه می کنیم. تابع $g(x)$ را برابر y در نظر می گیریم. داریم:

$$g(x) = f(3x - 4) \Rightarrow y = f(3x - 4)$$

اگر تساوی $g(x) = y$ را داشته باشیم، می توان نتیجه گرفت $g^{-1}(y) = x$ است. با استفاده از همین نتیجه و وارون کردن دو طرف تساوی ضابطه تابع $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} y = f(3x - 4) &\Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(3x - 4)) = f^{-1}(y) = 3x - 4 \\ \Rightarrow 3x = f^{-1}(y) + 4 &\Rightarrow x = \frac{f^{-1}(y) + 4}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x) + 4}{3} \end{aligned}$$

حالا برای به دست آوردن مقدار $g^{-1}(16)$ ابتدا مقدار $f^{-1}(16)$ را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=16} f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 16 + 4 = 20 \\ g^{-1}(16) &= \frac{20 + 4}{3} = \frac{24}{3} = 8 \end{aligned}$$

راه حل دوم: فرض می کنیم $g^{-1}(16) = a$ ، پس داریم: $g(a) = 16$

$$g(x) = f(3x - 4) \Rightarrow g(a) = f(3a - 4) = 16 \Rightarrow f^{-1}(16) = 3a - 4$$

$$f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 20 = 3a - 4 \Rightarrow a = \frac{24}{3} = 8$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

$$\text{gog}(\circ) = \text{g}(\text{g}(\circ)) = \text{g}(۲) = ۳$$

$$\text{gof}^{-1}(-۲) = \text{g}(f^{-1}(-۲))$$

برای پیدا کردن $f^{-1}(-۲)$ ، ابتدا باید ضابطه تابع f را بیابیم:

$$\begin{cases} f(\circ) = -۳ \\ f(۲) = \circ \end{cases} \Rightarrow m = \frac{\circ - (-۳)}{۲ - \circ} = \frac{۳}{۲}$$

$$y - \circ = \frac{۳}{۲}(x - ۲) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - ۳$$

$$f^{-1}(-۲) = a \Rightarrow f(a) = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a - ۳ = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{g}(f^{-1}(-۲)) = \text{g}\left(\frac{۲}{۳}\right) (*)$$

حال به بررسی ضابطه g برای $x \leq ۱$ میپردازیم:

$$g(\circ) = ۲, g(۱) = ۱ \Rightarrow m = \frac{۱ - ۲}{۱ - \circ} = -۱$$

$$y - ۱ = -۱(x - ۱) \Rightarrow y - ۱ = -x + ۱ \Rightarrow y = -x + ۲; x \leq ۱$$

$$\Rightarrow \text{g}\left(\frac{۲}{۳}\right) = -\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴}{۳} (**)$$

بنابراین:

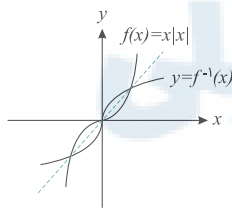
$$\xrightarrow{(*),(**)} \text{gof}^{-1}(-۲) = \text{g}(f^{-1}(-۲)) = \text{g}\left(\frac{۲}{۳}\right) = \frac{۴}{۳}$$

$$\text{gof}^{-1}(-۲) \times \text{gog}(\circ) = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم. نمودار f^{-1} قرینه $f(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & ; x \geq \circ \\ -x^۲ & ; x < \circ \end{cases}$$

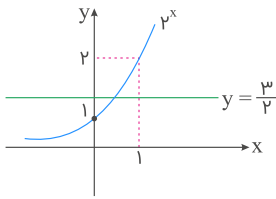


کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

$$2^{\sin x} \xrightarrow{\text{سمت راست } \frac{\pi}{2}} 2^{\sin(x-\frac{\pi}{2})} = 2^{|\cos x|} \xrightarrow{\text{به پایین } \frac{\pi}{2}} 2^{|\cos x| - \frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow 2^{|\cos x|} = \frac{2^{\pi}}{2}$$

نمودار 2^x و $y = \frac{2^{\pi}}{2}$ را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل به ازای یک مقدار x در فاصله $(0, 1)$ ، $2^x = \frac{2^{\pi}}{2}$ می‌شود.

پس معادله $2^{|\cos x|} = \frac{2^{\pi}}{2}$ در فاصله $[0, \pi]$ دو جواب دارد، یکی در ناحیه اول و یکی در ناحیه دوم، چراکه در این نواحی $1 \geq |\cos x| \geq 0$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) ضابطه تابع $\text{fog}(x)$ یعنی $f(g(x))$ ، با جایگذاری ضابطه $g(x)$ در تابع $f(x)$ به دست می‌آید.
ب) می‌خواهیم نمودار تابع $\text{fog}(x)$ زیر محور x ها قرار بگیرد پس باید مجموعه جواب نامعادله $\text{fog}(x) < 0$ را به دست آوریم.

گام دوم

$$\begin{aligned} \text{fog}(x) = f(g(x)) &= \left(\frac{1}{2}(x-3)\right)^2 + \frac{1}{2}(x-3) - 2 = \frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 2 \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} = \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

حالا مجموعه جواب نامعادله $\text{fog}(x) < 0$ را تعیین می‌کنیم:

$$\text{fog}(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4} < 0 \xrightarrow{\times 4} x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 5)$$

هریک از توابع $f + g$, $f \circ f$, gof و fog را تعیین کرده و در مورد پیوستگی آن در $x = 0$ بحث می‌کنیم.
بررسی گزینه اول:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} - 2x & ; x < 0 \\ 1 + 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f + g)(x) = -\frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (f + g)(x) = 1$$

بنابراین تابع $f + g$ در $x = 0$ ناپیوسته است.
بررسی گزینه دوم:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{f(x)} & ; f(x) < 0 \\ 2f(x) & ; f(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{x} & ; x < 0 \\ 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ f(x) = -\frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ f(x) = 0$$

بنابراین تابع $f \circ f$ در $x = 0$ ناپیوسته است.
بررسی گزینه سوم:

$$\begin{aligned} \text{gof}(x) &= g(f(x)) = \begin{cases} -2f(x) & ; f(x) < 0 \\ 1 & ; f(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2(-\frac{1}{x}) & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{x} & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{gof}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{gof}(x) = \text{gof}(0) = 1$$

پس تابع gof در $x = 0$ پیوسته است.
بررسی گزینه چهارم:

$$\text{fog}(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{g(x)} & ; g(x) < 0 \\ 2g(x) & ; g(x) \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه تابع $g(x)$ این تابع همواره نامنفی است، پس تابع fog برای ضابطه بالا تشکیل نشده و داریم:

$$\text{fog}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x} & ; x < 0 \\ 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{fog}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{fog}(x) = 0$$

بنابراین تابع fog در $x = 0$ ناپیوسته است.

ابتدا ضابطه تابع gof را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از آن برد تابع gof را تعیین می‌کنیم.

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = 2^{-x+[x]}$$

می‌دانیم به ازای هر x ، $0 \leq x - [x] < 1$ است، بنابراین:

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < -x + [x] \leq 0$$

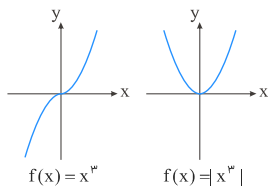
برد تابع gof برابر است با:

$$-x + [x] = -1 \Rightarrow 2^{-x+[x]} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$-x + [x] = 0 \Rightarrow 2^{-x+[x]} = 2^0 = 1 \Rightarrow R_{\text{gof}} = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

با رسم نمودار تابع $f(x) = |x^3|$ به سؤال پاسخ می‌دهیم. ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم و آن قسمت از منحنی که در پایین محور x ها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.



با توجه به نمودار رسم‌شده، این تابع نه صعودی است و نه نزولی. این تابع یک‌به‌یک هم نیست، در نتیجه وارون‌ناپذیر می‌شود؛ بنابراین فقط گزینه ۳ می‌تواند درست باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$$

حال $g^{-1} \circ f$ را حساب می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g^{-1}} 4 \\ 2 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g^{-1}} x \\ 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g^{-1}} x \\ 4 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{g^{-1}} 5 \end{array} \right\} \Rightarrow g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

فرض می‌کنیم که $h = g^{-1} \circ f$ باشد. خواسته مسئله $h - f$ است که باید در دامنه مشترک، عرض‌ها را از هم کم کنیم.

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \{1, 4\}$$

$$h - f = \{(1, 4 - 2), (4, 5 - 6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

پس برد تابع $h - f$ برابر $\{2, -1\}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

روش اول:

با استفاده از تغییر متغیر $x - 3 = t$, x را برحسب t به دست آورده و ضابطه $f(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم.

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x-3=t} f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5 \\ = t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$$

ضابطه $f(x)$ به صورت مستقل تعیین شد. حالا ضابطه $f(1-x)$ را مشخص می کنیم:

$$f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2 = 1 - 2x + x^2 + 2 - 2x + 2 \\ = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(1-x) = x^2 - 4x + 5$$

روش دوم: روش دیگر برای به دست آوردن $f(1-x)$ از روی ضابطه $f(x-3)$ این است که به جای x متغیر $4-x$ را جای گذاری کنیم.

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x \rightarrow 4-x} f(4-x-3) = (4-x)^2 - 4(4-x) + 5 \\ \Rightarrow f(1-x) = 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 5 = x^2 - 4x + 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{واحد در جهت مثبت محور } x} y = \sqrt{x-12} \xrightarrow{\text{واحد در جهت مثبت محور } y} y = \sqrt{x-12} + 2$$

حال منحنی حاصل را با $f(x) = \sqrt{x}$ برابر قرار می دهیم تا محل برخورد به دست آید.

$$\sqrt{x-12} + 2 = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x-12} = \sqrt{x} - 2 \\ \xrightarrow{\text{توان } 2} x - 12 = x + 4 - 4\sqrt{x} \Rightarrow 4\sqrt{x} = 16 \Rightarrow x = 16$$

 $x = 16$ را در $f(x) = \sqrt{x}$ جایگذاری می کنیم تا عرض محل برخورد نیز به دست آید:

$$f(16) = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow A(16, 4)$$

فاصله نقطه A از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16(16+1)} = 4\sqrt{17}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

اگر نمودار $y = x^2 - x - 3$ را 2 واحد به طرف x های منفی انتقال دهیم، $f(x) = (x+2)^2 - (x+2) - 3$ به دست می آید. حال $f(x)$ را 9 واحد به طرف y های منفی منتقل می کنیم، $g(x) = f(x) - 9$ به دست می آید.

$$g(x) = x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 3 - 9 = x^2 + 3x - 10$$

حال $g(x)$ را کوچکتر از صفر قرار می دهیم.

$$x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

باتوجه به اینکه $f^{-1}(g(2a)) = 6$ است، می‌توان نتیجه گرفت: $g(2a) = f(6)$

گام دوم

$$g(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow g(2a) = \frac{2a}{2a-1} = f(6) = 3$$

$$\Rightarrow 2a = 3(2a-1) \Rightarrow 2a = 6a-3 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x(x-15) > 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0) \cup (15, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{ x \mid \underbrace{x \in (-\infty, 0) \cup (15, +\infty)}_{(*)}, \log(x^2 - 15x) \leq 2 \right\}$$

$$\log(x^2 - 15x) \leq \log_{10}^{100} \Rightarrow x^2 - 15x \leq 100 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-20)(x+5) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, 20] \quad (**)$$

باید از (*) و (**) اشتراک گرفت؛ بنابراین مجموعهٔ جواب برابر است با:

$$\xrightarrow{(**), (*)} x \in [-5, 0) \cup (15, 20]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(-x) = \frac{1}{y} \left(-x + \sqrt{x^2 + 4} \right)$$

حاصل ضرب دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ برابر است با:

$$f(x)f(-x) = \frac{1}{y} \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right) \frac{1}{y} \left(-x + \sqrt{x^2 + 4} \right) = \frac{1}{y} (x^2 + 4 - x^2) = \frac{1}{y} \times 4 = 1$$

$$\Rightarrow f(x)f(-x) = 1$$

بنابراین اگر فرض کنیم $f(x) = \alpha$ باشد آنگاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) = \alpha &\Rightarrow f^{-1}(\alpha) = x \\ f(-x) = \frac{1}{\alpha} &\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -x \end{aligned} \right\} \Rightarrow f^{-1}(\alpha) + f^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = x - x = 0$$

روش دوم: با استفاده از به دست آوردن ضابطه تابع وارون نیز می‌توان به جواب رسید.
ابتدا $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{1}{y} (x + \sqrt{x^2 + 4}) \Rightarrow y^2 = x + \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow y^2 - x = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} y^2 - x^2 = x^2 + 4 \Rightarrow y^2 - x^2 = x^2 + 4 \Rightarrow y^2 = 2x^2 + 4$$

$$\Rightarrow xy = y^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{y} = y - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x}$$

همچنین داریم:

$$f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} - x$$

بنابراین:

$$f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - x = 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = y \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = y + 4$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = y + 4 \xrightarrow{\text{جذر}} |x-1| = \sqrt{y+4}$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = \sqrt{y+4} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$$

حال f^{-1} را با g قطع می‌دهیم:

$$\sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{y} \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = x-11 \quad (1)$$

با امتحان کردن گزینه‌ها به راحتی معلوم می‌شود که $x = 21$ در معادله (۱) صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

ضابطه تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = x + 4 \Rightarrow yx - x = 2y + 4$$

$$\Rightarrow x(y-1) = 2y+4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1} \Rightarrow y^{-1} = \frac{2x+4}{x-1}$$

با مساوی قرار دادن ضابطه تابع با وارون آن نقطه تقاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 + 4x - 4 - 2x - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +4 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

ضابطه $f(x)$ و $f(g(x))$ برای ما مشخص شده است. ابتدا با توجه به این دو ضابطه، ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین می‌کنیم، سپس ضابطه تابع $(f+g)(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = x^2 - x - 2, \quad f(g(x)) = x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 - g(x) - 2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow (g(x))^2 - g(x) = x^2 + x$$

برای این که بتوانیم راحت تر ضابطه $g(x)$ را تعیین کنیم، سعی می‌کنیم دو طرف را به دو عبارت مربع کامل تبدیل کنیم:

$$(g(x))^2 - g(x) = x^2 + x \xrightarrow{\text{به دو طرف } \frac{1}{4} \text{ اضافه می‌کنیم}} (g(x))^2 - g(x) + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (g(x) - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow g(x) - \frac{1}{2} = \pm(x + \frac{1}{2})$$

پس برای ضابطه $g(x)$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

$$۱) \quad g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + x + 1 = x^2 - 1$$

$$۲) \quad g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2$$

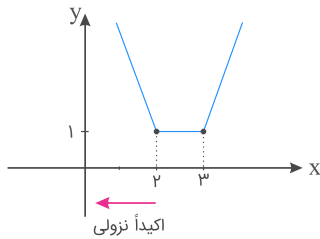
با توجه به گزینه‌های موجود، گزینه ۱ قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

$$x \leq 2 \Rightarrow f(x) = -(x-2) - (x-3) = -2x + 5$$

$$2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = (x-2) - (x-3) = 1$$

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x) = x-2 + x-3 = 2x-5$$



بنابراین:

$$x \leq 2 \Rightarrow -2x + 5 = 2x^2 - x - 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$(2x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 & \checkmark \\ x = \frac{5}{2} & \times \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

در تابع f و g به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به ما داده شده و تابع $g \circ f^{-1}$ را می‌خواهند، پس ابتدا باید تابع f^{-1} را با زوج مرتب‌هایش تشکیل دهیم. برای این کار کافی است در تمامی زوج مرتب‌های تابع f ، جای مؤلفه‌های اول و دوم را باهم عوض کنیم. پس با توجه به دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ و زوج مرتب‌های تابع $g(x)$ تابع $g \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

برای حل تست اول باید f^{-1} را مشخص کنیم:

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 0), (-1, 4)\} \\ \Rightarrow D_{f^{-1}} = \{2, 5, 3, -1\}$$

حالا بررسی می‌کنیم برای هریک از اعضای $D_{f^{-1}}$ ، تابع $g \circ f^{-1}$ تعریف می‌شود یا خیر:

$$x = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow g(f^{-1}(2)) = g(1) \rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

$$x = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 2 \Rightarrow g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \Rightarrow (5, 3) \in g \circ f^{-1}$$

$$x = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 0 \Rightarrow g(f^{-1}(3)) = g(0) \rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

$$x = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = 4 \Rightarrow g(f^{-1}(-1)) = g(4) = 1 \Rightarrow (-1, 1) \in g \circ f^{-1}$$

بنابراین تابع $g \circ f^{-1}$ به صورت $\{(5, 3), (-1, 1)\}$ درمی‌آید.

اصلاً نیازی به تعیین ضابطه $g(x)$ نداریم. با داشتن ضابطه دو تابع $f(x)$ و $f(g(x))$ ، ضابطه تابع $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ تشکیل می دهیم. سپس x را برابر ۱ قرار داده و مقدار $g(1)$ را محاسبه می کنیم.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad f(g(x)) = f(g(x)) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{1+2}{1+1} \Rightarrow \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2g(1)+2 = 3g(1)-3$$

$$\Rightarrow g(1) = 3+2 = 5 \Rightarrow g(1) = 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

برای حل این تست از دو روش استفاده می کنیم. روش اول حل معمولی تست است، یعنی ابتدا ضابطه تابع اصلی را ساده کرده، سپس با استفاده از آن ضابطه تابع معکوس را به دست می آوریم. روش دوم یک روش بسیار ساده و در عین حال کوتاه برای حل این مدل تست ها است. اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع اصلی صدق کند، در این صورت نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه تابع وارون یا معکوس صدق خواهد کرد. با انتخاب یک نقطه مناسب که متعلق به تابع $f(x)$ باشد، بررسی می کنیم آیا با جابه جایی مؤلفه های اول و دوم، نقطه جدید در ضابطه تابع معکوس صدق می کند یا خیر. روش اول:

$$y = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y < 1 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \Rightarrow -1 < y < 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow x(1-y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow x(1+y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

بنابراین ضابطه تابع معکوس به صورت $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ ، $|x| < 1$ ، درمی آید

روش دوم:

نقطه $(0, 0)$ در ضابطه تابع اصلی صدق می کند. از بین گزینه ها تنها معادله ای که $x = 0$ عضو دامنه تعریفش باشد و نقطه $(0, 0)$ هم در ضابطه آن صدق کند، ضابطه $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ است، به همین راحتی.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

راه حل اول:

$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$$

$$x = 1 : f(-1) = 4 - 14 + 13 = 3$$

فقط در گزینه "۴"، $f(-1) = 3$ است.

راه حل دوم:

$$2x-3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13$$

$$= t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

تابع f اکیداً نزولی می‌باشد، بنابراین کافی است ضریب x^3 منفی باشد:

$$-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow -3 < k < 3$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, \pm 1, \pm 2 \Rightarrow k = 0 \text{ مجموع مقادیر}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گام اول

برای حل این تست اصلاً نیازی نیست ضابطه تابع $f(x)$ را به صورت مستقل به دست آورده و بعد مقدار $f(3)$ را حساب کنید. (البته این کار را هم انجام دهید درست است ولی زمان حل مسئله طولانی‌تر می‌شود). ضابطه $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. حال ما مقدار $f(3)$ را می‌خواهیم. کافی است $g(x)$ را برابر ۳ قرار داده و معادله را حل کنیم. به ازای x به دست آمده، مقدار $f(3)$ محاسبه می‌شود.

گام دوم

$$g(x) = 2x - 1, \quad f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \Rightarrow f(2x-1) = \frac{x}{x-3}$$

$$2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{x=2} f(3) = \frac{2}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2$$

روش اول:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. سپس باتوجه به محدوده قابل قبول برای x ، بازه‌ای که در آن تابع $f(3-x)$ تعریف شده است را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

پس باید داشته باشیم: $0 \leq 3-x \leq 2$ ، بنابراین:

$$0 \leq 3-x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3]$$

روش دوم:

ابتدا ضابطه $f(3-x)$ را تعیین کرده و از روی آن دامنه تعریف را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow f(3-x) = \sqrt{2(3-x) - (3-x)^2}$$

$$= \sqrt{6 - 2x - 9 + 6x - x^2} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 \geq 0$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3]$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲



راه‌های ارتباطی مرکز مشاوره

تلگرام

اینستاگرام

وبسایت



AlirezaAfsharOfficial




AlirezaAfsharOriginal



www.AlirezaAfshar.org

رزور مشاوره خصوصی علیرضا افشار

برای رزرو مشاوره خصوصی تک جلسه و ماهانه
به شماره ۰۹۳۵۸۹۶۰۵۰۳ در واتساپ  پیام دهید

Afshar.xyz

آدرس تمام رسانه ها :