۱ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.
ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > ۱$ و $x < ۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنیم. با بررسی این دو شرط، مقادیر a و b را می‌یابیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۲\sqrt{x}}{x} = \dfrac{۲\times ۱}{۱} = ۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ax^۲ + bx = a + b\\ f(۱) = \dfrac{۲\times ۱}{۱} = ۲\end{array}\right\} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} a + b = ۲ \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^{-\frac{۳}{۲}} & ; x > ۱\\ ۲ax + b & ; x < ۱\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(۱) = -(۱)^{-\frac{۳}{۲}} = -۱\\ f'_-(۱) = ۲a + b\end{array}\right\} \xrightarrow{f'_+(۱) = f'_-(۱)} ۲a + b = -۱ \quad (II)$$

دو رابطهٔ I و II را به‌صورت یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + b = ۲\\ ۲a + b = -۱\end{cases} \xrightarrow{(-)} -a = ۳ \Rightarrow a = -۳ \xrightarrow{(I)} -۳ + b = ۲ \Rightarrow b = ۵$$

۲

گزینه ۳

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۶x}}{ax-۲}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۲x-|x|}{ax}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۲x+x}{ax}=\frac{۳x}{ax}=\frac{۳}{a}$$

$$\frac{۳}{a}=۳\Rightarrow a=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۶x}}{x-۲}=\frac{۰}{۰}$$

$$\overset{hop}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}}{۱}=\frac{۲-\frac{۱۰}{۲\times ۴}}{۱}=۲-\frac{۵}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۳

گزینه ۴

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}\Rightarrow g'(x)=\frac{۰-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲-۱}}}{x^۲-۱}=\frac{-x}{(x^۲-۱)\sqrt{x^۲-۱}}$$

$$g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{\frac{-\sqrt{۵}}{۲}}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}}=-۴\sqrt{۵}$$

در حالتی که f' وجود داشته باشد، داریم:

$$f(x)=(x[x])^۳\Rightarrow f'(x)=۳(x[x])^۲[x]$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ داریم:

$$x\to(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۵}{۴}^- -۱}}=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۱}{۴})^-}}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^-}=۲^+$$

$$y=(fog)(x)\Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ داریم:

$$y'((\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-)=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-)=(-۴\sqrt{۵})f'(۲^+)=(-۴\sqrt{۵})\times ۳(۴)^۲\times ۲=(-۴۸\sqrt{۵})(۸)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴ گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x+1+(g(x))^5 \Rightarrow f'(x)=1+5g'(x)(g(x))^4$$

$$\Rightarrow f'(0)=1+5g'(0)(g(0))^4$$

باتوجه‌به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f'(0)=g(0)=1} 1=1+5g'(0)(1)^4 \Rightarrow 5g'(0)=0 \Rightarrow g'(0)=0$$

در محاسبهٔ ضابطهٔ تابع $f''(x)$ با عبارت $g'(x)(g(x))^4$ روبه‌رو هستیم. چون $g'(0)=0$ است پس عبارت $g'(x)$ عامل صفرشوندهٔ تابع $f'(x)$ در نقطهٔ $x=0$ می‌شود و داریم:

$$\Rightarrow f''(0)=0+5g''(0)(g(0))^4$$

$$\xrightarrow[g(0)=1]{x=0} f''(0)=5g''(0)(1)^4=5g''(0)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۵ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{|x|\left|x^2-2\right|}{x}$$

دامنهٔ تابع f، $\mathbb{R}-\{0\}$ است. تابع f در ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق یعنی $\pm\sqrt{2}$ مشتق ندارد. همچنین در ریشهٔ مخرج یعنی $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

دقت کنید که تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری روی دامنه دو نقطه و روی $\mathbb{R}$ سه نقطه است. منظور سؤال بررسی مشتق‌ناپذیری روی $\mathbb{R}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۶

گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$f'_-(۳) = \lim_{h\to ۰^-} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$$

تابع f در $x=۳$ پیوستگی چپ ندارد و درنتیجه $\lim_{h\to ۰^-} \frac{f\,(۳+h)-f\,(۳)}{h}$ وجود ندارد.

راه‌حل دوم:

بدون توجه به تعریف مشتق، حد خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰^-} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = \lim_{h\to ۰^-} \frac{\frac{(۳+h)^۲}{|۱-(۳+h)|}[۳+h] - \frac{۲۷}{۲}}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰^-} \frac{\frac{(۳+h)^۲}{|-۲-h|}\times ۲ - \frac{۲۷}{۲}}{h} = \frac{\frac{۹}{۲}\times ۲ - \frac{۲۷}{۲}}{۰^-} = \frac{-\frac{۹}{۲}}{۰^-} = +\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۷

گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ موجود است هرگاه:

اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد.

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در این نقطه موجود و برابر باشند.

گام دوم

بررسی شرط پیوستگی در نقطهٔ $x = ۱$:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow \sqrt[۳]{(۲+۶)^۲} = a+b \Rightarrow \sqrt[۳]{۸^۲} = a+b \Rightarrow a+b = ۴ \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x = ۱$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲} & ; x > ۱ \\ ax+b & ; x \le ۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (۲x+۶)^{\frac{۲}{۳}} & ; x > ۱ \\ ax+b & ; x \le ۱ \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ \times \frac{۲}{۳} \times (۲x+۶)^{-\frac{۱}{۳}} & ; x > ۱ \\ a & ; x < ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲x+۶}} & ; x > ۱ \\ a & ; x < ۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \Rightarrow \frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲+۶}} = a \Rightarrow a = \frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۳}$$

با جایگذاری در رابطهٔ (I) داریم:

$$a+b = ۴ \xrightarrow{a=\frac{۲}{۳}} \frac{۲}{۳} + b = ۴ \Rightarrow b = ۴ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

۸ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع موجود و برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

گام دوم

تابع $f(x)$ در نقاط درونی هریک از زیربازه‌ها، پیوسته و مشتق‌پذیر است بنابراین کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در سه نقطهٔ مرزی $x=0$، $x=1$ و $x=2$ بررسی شود.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 1=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x+1=0+1=1\\ f(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases}0 & ;x<0\\ 1 & ;x>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'_-(0)\neq f'_+(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x+1=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+2=4\\ f(x)=2(1)+2=4\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 2x+2=4+2=6\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^2+2=4+2=6\\ f(2)=2^2+2=4+2=6\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases}2 & ;x<2\\ 2x & ;x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'_-(2)=2\\ f'_+(2)=4\end{array}\right\}\Rightarrow f'_-(2)\neq f'_+(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

بنابراین تابع $f(x)$ در یک نقطه ناپیوسته و در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۹

گزینه ۲

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [۰,۴] = \frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰} = \frac{(\sqrt{۹}+\frac{۱}{۵})-(\sqrt{۱}+\frac{۱}{۱})}{۴-۰} = \frac{\frac{۶}{۵}}{۴} = \frac{۳}{۱۰} = ۰/۳$$

$$f'(x) = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۱}} - \frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در } x=\frac{۳}{۲} = f'(\frac{۳}{۲}) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{(\frac{۵}{۲})^۲} = \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{۲۵} = ۰/۵ - ۰/۱۶ = ۰/۳۴$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} - \text{آهنگ تغییر متوسط} = ۰/۳۴ - ۰/۳ = ۰/۰۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۰

گزینه ۲

برای اینکه تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد باید ابتدا در آن نقطه پیوسته باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{matrix} \lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x) = ۴a-۲b+۴ \\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x) = -۸+۲ = -۶ \end{matrix} \Rightarrow ۴a-۲b=-۱۰ \Rightarrow ۲a-b=-۵$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ax+b & ; x>-۲ \,,\, f'_+(-۲) = -۴a+b \\ ۳x^۲-۱ & ; x<-۲ \,,\, f'_-(-۲) = ۱۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -۴a+b=۱۱ \\ ۲a-b=-۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} -۲a=۶ \Rightarrow a=-۳ \,,\; b=-۱$$

$$f(x) = \begin{cases} -۳x^۲-x+۴ & ; x\geq -۲ \\ x^۳-x & ; x<-۲ \end{cases}$$

$$f(۱) = -۳-۱+۴ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۱

گزینه ۱

برای آنکه نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶$ بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس باشد، باید معادلهٔ تقاطع تابع را با خط $y = x$ نوشته و Δ را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} y = x \\ y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ \Rightarrow ۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۸(m+۶) = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۸m - ۴۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۱۲)(m+۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱۲ \\ m = -۴ \end{cases}$$

شیب نمودار در نقطهٔ برخورد برابر ۱ است. از معادلهٔ کلی، مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y' = ۴x + m + ۱ \xrightarrow{y'=۱} ۱ = ۴x + m + ۱ \Rightarrow x = -\frac{m}{۴}$$

چون نمودار بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس می‌باشد، بنابراین $x > ۰$ لذا $m = -۴$ قابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۲

گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + bx + a - b & ; x \geq k \\ ۲ax + b & ; x < k \end{cases}$$

$$\lim_{x \to k} f(x) = f(k) \Rightarrow ak^۲ + bk + a - b = ۲ak + b$$

$$\Rightarrow ak^۲ + (b - ۲a)k + a - ۲b = ۰ \quad (۱)$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ax + b & ; x \geq k \\ ۲a & ; x < k \end{cases}$$

$$f'_+(k) = f'_-(k) \Rightarrow ۲ak + b = ۲a \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) : ak^۲ + (۲a - ۲ak - ۲a)k + a - ۲(۲a - ۲ak) = ۰$$

$$\Rightarrow ak^۲ - ۲ak^۲ + a - ۴a + ۴ak = ۰$$

$$\Rightarrow -ak^۲ + ۴ak - ۳a = ۰ \Rightarrow -k^۲ + ۴k - ۳ = ۰ \Rightarrow k = ۱, ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۳ گزینه ۴

$$f(x) = -\frac{۱}{۳}x^۳ + ۲x^۲ - x \Rightarrow f'(x) = -x^۲ + ۴x - ۱$$

بیشترین شیب مماس، ماکزیمم مقدار مشتق است که در رأس سهمی $-x^۲ + ۴x - ۱$ اتفاق می‌افتد.

$$x_{max} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۱)} = ۲ \quad , \quad f(۲) = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow A\left(۲, \frac{۱۰}{۳}\right)$$

شیب خط مماس : $m = f'(۲) = -۴ + ۸ - ۱ = ۳$

معادلهٔ خط مماس : $y - \frac{۱۰}{۳} = ۳\,(x - ۲) \xrightarrow{x=۰} y = \frac{۱۰}{۳} - ۶ = \frac{-۸}{۳}$ عرض از مبدأ

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۴ گزینه ۳

تابع P به‌صورت زیر است:

$$P\,(x) = ax^۲ + bx + c$$

P' به‌صورت زیر است:

$$P'(x) = ۲ax + b$$

سؤال گفته اگر P را بر P' تقسیم کنیم، خارج‌قسمت $\frac{x}{۲} + ۱$ و باقی‌مانده -۲ است. اتحاد تقسیم را می‌نویسیم:

$$P\,(x) = P'(x)\,.\left(\frac{x}{۲} + ۱\right) + (-۲) \Rightarrow ax^۲ + bx + c = (۲ax + b)\left(\frac{x}{۲} + ۱\right) - ۲$$

$$\Rightarrow ax^۲ + bx + c = ax^۲ + \left(۲a + \frac{b}{۲}\right)x + (b - ۲)$$

ضرایب عبارات هم‌درجه را برابر قرار می‌دهیم:

ضرایب $x^۲ \Rightarrow a = a$

ضرایب $x \Rightarrow b = ۲a + \frac{b}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲b = ۴a + b \Rightarrow b = ۴a$

جملات درجه صفر $\Rightarrow c = b - ۲$

a، b و c، سه عدد طبیعی‌اند. چون می‌خواهیم کمترین مقدار $a + b + c$ را حساب کنیم، پس باید در رابطهٔ $b = ۴a$، $a = ۱$ و $b = ۴$ باشد، پس:

$$c = b - ۲ = ۴ - ۲ = ۲$$

$$\Rightarrow \min\,(a + b + c) = ۱ + ۴ + ۲ = ۷$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۵

گزینه ۳

$x = ۱$، عرض دو تابع را مقدار یکسانی قرار می‌دهد:

$$۲ + b = \frac{۱ + a}{a + ۱} = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

پس توابع به صورت $y = ۲x - ۱$ و $y = \frac{x + a}{ax + ۱}$ هستند و در $x = ۱$ مشتق یکسانی دارند.

$$y' = ۲$$

$$y' = \frac{۱ - a^۲}{(ax + ۱)^۲} \xrightarrow{x=۱} \frac{۱ - a^۲}{(a + ۱)^۲}$$

حال داریم:

$$\frac{۱ - a^۲}{(a + ۱)^۲} = ۲ \Rightarrow \frac{۱ - a}{(a + ۱)} = ۲$$

$$\Rightarrow ۲a + ۲ = ۱ - a \Rightarrow ۳a = -۱ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۳}$$

$$a - b = -\frac{۱}{۳} + ۱ = \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) خط در نقطهٔ $x = 3$ بر منحنی مماس است بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط و منحنی صدق می‌کند.

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $A(1,2)$ و $B(-1,3)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{-1-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

طبق قسمت ج از گام اول داریم:

$$f(3) = y(3) = -\frac{1}{2}(3) + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow f(3) = 1$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول $f'(3) = \frac{-1}{2}$ است. اکنون با دو روش حاصل حد داده‌شده را به دست می‌آوریم.

روش اول:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \lim_{x\to 3} -\frac{(f(x)+5)(f(x)-1)}{x-3} = \lim_{x\to 3} -(f(x)+5)\frac{(f(x)-f(3))}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3} -(f(x)+5)(f'(3)) = -(f(3)+5)f'(3) = -6\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \frac{f^2(3) + 4f(3) - 5}{3-3} = \frac{1+4-5}{3-3} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \lim_{x\to 3} \frac{2f'(x)f(x) + 4f'(x)}{-1} = \frac{2f'(3)f(3) + 4f'(3)}{-1}$$

$$= \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)(1) + 4\left(-\frac{1}{2}\right)}{-1} = \frac{-1-2}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

۱۷ گزینه ۲

$$g(x) = f(۴ - x^۲) \Rightarrow g'(x) = -۲xf'(۴ - x^۲)$$

$$\Rightarrow g''(x) = -۲(f'(۴ - x^۲) + x(-۲x)f''(۴ - x^۲))$$

$$\Rightarrow g''(\sqrt{۳}) = -۲(f'(۱) - ۶f''(۱)) = -۲(-۵ - ۶ \times (-۱)) = -۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۸ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است؛ هرگاه مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و باهم برابر باشد.
ب) مشتق تابع $gof(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = gof(x) = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

گام دوم

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته‌اند؛ بنابراین مشتق چپ و راست تابع gof را در نقطهٔ $x = ۰$ به‌طور مستقیم تعیین می‌کنیم.

$$x \to ۰^+ \Rightarrow x > ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۴x \Rightarrow f'(x) = ۴ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} + a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_+(۰) = f'_+(۰)g'_+(f(۰)) = ۴(\frac{۳}{۴} + a) = ۳ + ۴a$$

$$x \to ۰^- \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲x \Rightarrow f'(x) = ۲ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} - a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_-(۰) = f'_-(۰)g'_-(f(۰)) = ۲(\frac{۳}{۴} - a) = \frac{۳}{۲} - ۲a$$

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، تابع gof در $x = ۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$(gof)'_+(۰) = (gof)'_-(۰) \Rightarrow ۳ + ۴a = \frac{۳}{۲} - ۲a \Rightarrow ۶a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۱۹ گزینه ۲

$$f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}\Rightarrow f'(x)=\sqrt[۳]{x+۳}+(x-۴)\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}$$

$$f(۵)=۲\quad,\quad f'(۵)=\frac{۲۵}{۱۲}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-۲)}{h(۵-h)}$$

$$\lim_{h\to ۰}(\frac{f(۵-h)-۱}{(۵-h)})\times(\frac{-(f(۵-h)-۲)}{-h})$$

$$=(\frac{f(۵)-۱}{۵})(-f'(۵))=\frac{۱}{۵}\times(-\frac{۲۵}{۱۲})=\frac{-۵}{۱۲}$$

راه حل دوم: از قاعدهٔ هوپیتال نیز می‌توان برای به دست آوردن حد استفاده کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۲۰ گزینه ۳

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=۳\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{ax}{-x}=-a=۳\Rightarrow a=-۳$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{-۳x+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\overset{hop}{=}\lim_{x\to ۳}\frac{-۳}{-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}=\frac{-۳}{-۱+\frac{۱}{۴}}=۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۱ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=۱$ تا $x=۱/۴۴$ را با استفاده از رابطهٔ $\frac{f(۱/۴۴)-f(۱)}{۰/۴۴}$ به دست می‌آوریم.
ب) برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=۱$ باید ضابطهٔ مشتق تابع یا همان $f'(x)$ و سپس $f'(۱)$ را محاسبه کنیم. اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای به‌عنوان جواب تست در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۱/۴۴)-f(۱)}{۰/۴۴} = \frac{\frac{۰/۴۴}{\sqrt{۱/۴۴}}-۰}{۰/۴۴} = \frac{۱}{\sqrt{۱/۴۴}} = \frac{۱}{۱/۲} = \frac{۱}{\frac{۶}{۵}} = \frac{۵}{۶}$$

$$f(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-\frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{x}$$
$$=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\frac{۱}{۲x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$۱-\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

۲۲ گزینه ۴

با اطلاعات مسئله داریم:

$$P(x)=(x^۲+۲x)Q(x)+۳x+۱ \quad (۱)$$

از طرفین رابطهٔ (۱) مشتق می‌گیریم:

$$P'(x)=(۲x+۲)Q(x)+(x^۲+۲x)Q'(x)+۳$$
$$P'(-۲)=-۲Q(-۲)+۳=-۲(۳)+۳=-۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۳

گزینه ۳

باتوجه‌به عبارت $\frac{۳}{۲}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-۹}{h}$، $f(۲)=۹$ و $f'(۲)=\frac{۳}{۲}$ می‌شود.

$$g(x)=x\sqrt{f(x)}\Rightarrow g'(x)=\sqrt{f(x)}+x\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}\Rightarrow g'(۲)=\sqrt{f(۲)}+۲\frac{f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}}$$

$$\Rightarrow g'(۲)=\sqrt{۹}+۲\times\frac{\frac{۳}{۲}}{۲\sqrt{۹}}=۳+\frac{۱}{۲}=۳/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۴

گزینه ۴

چون خط $y=۳x-۵$ در $x=۲$ بر $g(x)$ مماس است، پس $g'(۲)=۳$ و $A(۲,۱)\in g$ خواهد بود.

ازطرفی چون $\frac{۲}{۳}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲(x-۱)}$ است، پس:

$$\frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۴}{۳}$$

$$y=fog(x)\Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))\Rightarrow y'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))$$

$$\Rightarrow y'(۲)=۳f'(۱)=۳\times\frac{۴}{۳}=۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۵

گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

باتوجه‌به تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x=۵ \text{ تا } x=۹=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(۹)-f(۵)}{۹-۵}=\frac{\sqrt{۹^۲+۱۴۴}-\sqrt{۵^۲+۱۴۴}}{۴}$$

$$=\frac{\sqrt{۸۱+۱۴۴}-\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۴}=\frac{\sqrt{۲۲۵}-\sqrt{۱۶۹}}{۴}=\frac{۱۵-۱۳}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۲۶ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m\left(x - x_۱\right)$$

ج) مختصات نقطهٔ تلاقی در هر دو معادله، صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت "الف" و "ب" از گام اول، معادلهٔ خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y = x^۳ - x^۲ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۲x \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'(۱) = ۳ - ۲ = ۱$$
$$x = ۱ \Rightarrow y(۱) = (۱)^۳ - (۱)^۲ = ۱ - ۱ = ۰$$
$$y - y(۱) = y'(۱)(x - ۱) \Rightarrow y - ۰ = x - ۱ \Rightarrow y = x - ۱$$

سپس با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط $y = x - ۱$ و معادلهٔ منحنی، مختصات نقطهٔ تلاقی را محاسبه می‌کنیم:

$$x - ۱ = x^۳ - x^۲ \Rightarrow x - ۱ = x^۲(x - ۱) \Rightarrow (x - ۱)\left(۱ - x^۲\right) = ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۱)(۱ - x)(۱ + x) = ۰ \xrightarrow{x \neq ۱} ۱ + x = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

بنابراین $x_A = -۱$ است و داریم:

$$y_A = (-۱)^۳ - (-۱)^۲ = -۱ - ۱ = -۲$$

۲۷ گزینه ۲

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است اگر اولاً در این نقطه پیوسته باشد $\left(\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱)\right)$، ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در نقطهٔ $x = ۱$ موجود و باهم برابر باشند.

بررسی پیوستگی در نقطهٔ $x = ۱$:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱) \Rightarrow a - a = ۱ - ۱ \Rightarrow ۰ = ۰$$

به یک رابطهٔ همواره درست رسیدیم، پس تابع در $x = ۱$ پیوسته است.

بررسی مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x = ۱$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - a & ; x < ۱ \\ x^۲ - x & ; x \geq ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & ; x < ۱ \\ ۲x - ۱ & ; x > ۱ \end{cases}$$

$$f'_{-}(۱) = f'_{+}(۱) \Rightarrow a = ۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

بنابراین تابع $f(x)$ تنها به ازای $a = ۱$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۲۸ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

$f'_+(۱)$ یعنی مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۱$ و $f'_-(۱)$ یعنی مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۱$.

گام دوم

برای تعیین مشتق راست و چپ تابع در نقطهٔ $x=۱$، ابتدا باید تکلیف قدر مطلق را روشن کنیم. ضابطهٔ تابع و مشتق آن را به ازای $x>۱$ و $x<۱$ تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x>۱ \Rightarrow x-۱>۰ \Rightarrow |x-۱|=x-۱ \\ x<۱ \Rightarrow x-۱<۰ \Rightarrow |x-۱|=-x+۱ \end{cases}$$

می‌دانیم $x\sqrt{x}=x^{\frac{۳}{۲}}$ پس:

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^{\frac{۳}{۲}}+x-۱ & ;x>۱ \\ x^{\frac{۳}{۲}}-x+۱ & ;x<۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \frac{۳}{۲}\sqrt{x}+۱ & ;x>۱ \\ \frac{۳}{۲}\sqrt{x}-۱ & ;x<۱ \end{cases}$$

با جایگذاری $x=۱$ در ضابطه‌های بالا و پایین تابع $f'(x)$، مقدار $f'_+(۱)$ و $f'_-(۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_+(۱)=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱}+۱=\frac{۳}{۲}+۱=\frac{۵}{۲}$$

$$f'_-(۱)=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱}-۱=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$f'_+(۱)+۳f'_-(۱)=\frac{۵}{۲}+\frac{۳}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

۲۹

گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

می‌دانیم: $y=f(u) \quad \Rightarrow \quad y'=u'f'(u)$

گام دوم

با تعریف $u=xf(x)$ و باتوجه‌به گام اول، مشتق $f(xf(x))$ را تعیین و مقدار آن را در $x=۲$ محاسبه می‌کنیم.

$$u=xf(x) \quad \Rightarrow \quad u'=f(x)+xf'(x)$$

$$y=f(xf(x)) \quad \Rightarrow \quad y'=(f(x)+xf'(x))\,f'(xf(x))$$

اکنون ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{۳}{۲}-\sqrt{x+۲} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}$$

بنابراین داریم:

$$y'=\left(\frac{۳}{۲}-\sqrt{x+۲}-\frac{x}{۲\sqrt{x+۲}}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{xf(x)+۲}}\right)$$

$$=\left(\frac{۳}{۲}-\sqrt{x+۲}-\frac{x}{۲\sqrt{x+۲}}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۳}{۲}x-x\sqrt{x+۲}+۲}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y'(۲)=\left(\frac{۳}{۲}-۲-\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{۳-۴+۲}}\right)=(-۱)\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}$$

۳۰

گزینه ۳

روش اول:
حد داده‌شده را ساده کرده و سپس مقدار k را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^{۲}+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=۱۲ \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{۲\left(۴+۴h+h^{۲}\right)+۲k+kh-۲k-۸}{h}=۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{۸+۸h+۲h^{۲}+kh-۸}{h}=۱۲ \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{۲h^{۲}+۸h+kh}{h}=۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰}۲h+۸+k=۱۲ \Rightarrow ۸+k=۱۲ \Rightarrow k=۴$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)
حد داده‌شده را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حل می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^{۲}+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{h\to ۰}\frac{۲\times ۲(۱)(۲+h)+k}{۱}=\lim_{h\to ۰}\frac{۸+۴h+k}{۱}=۱۲ \Rightarrow ۸+k=۱۲ \Rightarrow k=۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۳۱

گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

اگر $y=f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y'=u'f'(u)$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و با فرض اینکه $u=x+\sqrt{۱+x^{۲}}$ است، مشتق تابع $f\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right)$ را به دست می‌آوریم، همچنین داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{x} \Rightarrow f'(u)=\frac{۱}{u}$$

$$y=f\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right) \Rightarrow y'=\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right)'f'\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right)=\left(۱+\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^{۲}}}\right)\left(\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^{۲}}}\right)$$

$$=\left(۱+\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}\right)\left(\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^{۲}}}\right)=\left(\frac{\sqrt{۱+x^{۲}}+x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}\right)\left(\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^{۲}}}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

۳۲

گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) تابع $y=[f(x)]$ به ازای مقادیری که تابع $f(x)$ برابر یک عدد صحیح می‌شود، ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

ب) هرکدام از دو تابع $\left[x+\frac{۱}{۳}\right]$ و $[x]$ روی بازهٔ $(۰,۳)$ مشتق‌ناپذیر شوند، کل تابع $f(x)=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]+[x]$ مشتق‌ناپذیر خواهد شد.

گام دوم

روش اول:

بررسی می‌کنیم در چه نقاطی از بازهٔ $(۰,۳)$، عبارت درون جزء صحیح برابر یک عدد صحیح می‌شود:

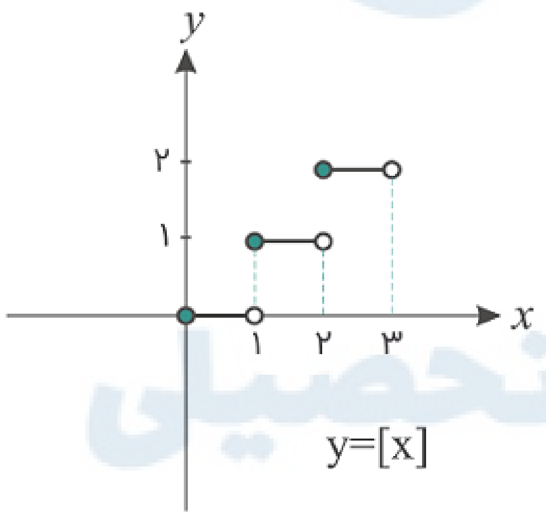
$$۱)\quad y=[x]:\quad x\in\mathbb{Z}\,,\ x\in(۰,۳)\ \Rightarrow\ x=۱\,,\ x=۲$$

$$۲)\quad y=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]:\quad x+\frac{۱}{۳}\in\mathbb{Z}\,,\ x\in(۰,۳)\ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}\,,\ x=\frac{۵}{۳}\,,\ x=\frac{۸}{۳}$$

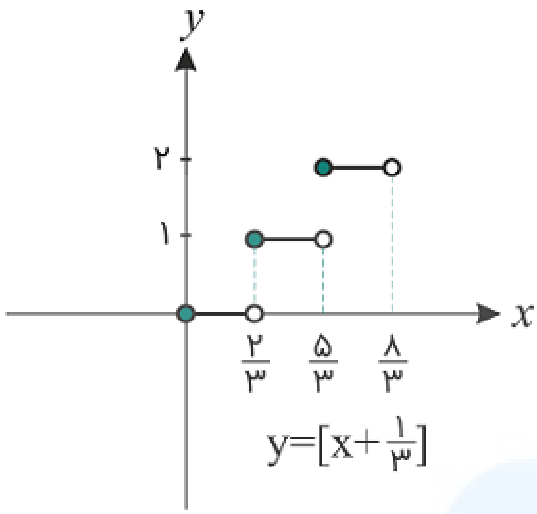
بنابراین تابع $f(x)$ درمجموع در ۵ نقطه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم:

با رسم نمودار توابع $y=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]$ و $y=[x]$، نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



نقاط ناپیوستگی: $x=۱\,,\ x=۲$



نقاط ناپیوستگی: $x=\frac{۸}{۳}$, $x=\frac{۵}{۳}$, $x=\frac{۲}{۳}$

بنابراین تابع $f(x)$ در ۵ نقطه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

۳۳ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+۵x+b & ;x\leq ۲ \\ ۲ax+۵ & ;x>۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲ax+۵ & ;x\leq ۲ \\ ۲a & ;x>۲ \end{cases}$$

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۴a+۵=۲a\Rightarrow a=\frac{-۵}{۲}$$

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲}f(x)\Rightarrow ۴a+۱۰+b=۴a+۵\Rightarrow b=-۵$$

$$a+b=\frac{-۵}{۲}-۵=\frac{-۱۵}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۴ گزینه ۴

آهنگ تغییر متوسط تابع در $[۰,۲]$:

$$\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=\frac{۱۲-۲}{۲}=۵$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع، همان مشتق است:

$$f'(x)=۱\times\sqrt{۴x+۱}+\frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}(x+۲)\xrightarrow{x=\frac{۳}{۴}}f'\left(\frac{۳}{۴}\right)=\frac{۱۹}{۴}$$

تفاضل مقادیر به دست آمده برابر است با:

$$۵-\frac{۱۹}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 به x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

برای محاسبهٔ مقدار a کافی است معادلهٔ $f'(a) = \frac{f(25)-f(4)}{25-4}$ را حل کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۴ به ۲۵} = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{4}}{21} = \frac{5 - 2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } a = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$f'(a) = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \Rightarrow 2\sqrt{a} = 7 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4a = 49 \Rightarrow a = \frac{49}{4} = 12/25$$

۳۶

گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، باید همواره نامنفی باشد.
ب) پیوستگی تابع در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است.
ج) مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰}$$

گام دوم

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$۱ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \Rightarrow D_f = [-۱, ۱]$$

تابع $f(x)$ در $x = ۰$ پیوسته است (باتوجه‌به اینکه گزینهٔ "وجود ندارد" نداریم، پس تابع حتماً در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است و برای یافتن مشتق چپ در این نقطه، نیازی به بررسی پیوستگی نیست). اکنون مشتق چپ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}}}{x} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت زیر رادیکال صورت ضرب می‌کنیم تا عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج حذف شود:

$$f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}}}{x} \times \frac{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}}{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۱ - \left(\sqrt{۱ - x^۲}\right)^۲}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}}$$

$$= \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۱ - ۱ + x^۲}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{x^۲}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{|x|}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}}$$

چون داریم:

$$x \to ۰^- \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow |x| = -x$$

بنابراین:

$$f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-x}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-۱}{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}} = \frac{-۱}{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - ۰}}} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳۷

گزینه ۳

حاصل $f'(\frac{۱}{۴})$ را می‌خواهیم:

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}} \frac{-\frac{۱}{۲}-۱(-\frac{۵}{۴})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۸

گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

ب) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱$ تا $x_۲$ چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$$

گام دوم

آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $a+\frac{h}{۲}$ یعنی محاسبهٔ $f'\left(a+\frac{h}{۲}\right)$، پس ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین و سپس $f'\left(a+\frac{h}{۲}\right)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x)=۳x^۲+۴x-۲ \Rightarrow f'(x)=۶x+۴$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } a+\frac{h}{۲}=f'\left(a+\frac{h}{۲}\right)=۶\left(a+\frac{h}{۲}\right)+۴=۶a+۳h+۴$$

آهنگ متوسط تغییر تابع از a تا $a+h$ برابر است با:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\frac{\left[۳(a+h)^۲+۴(a+h)-۲\right]-(۳a^۲+۴a-۲)}{h}$$

$$=\frac{۳a^۲+۶ah+۳h^۲+۴a+۴h-۲-۳a^۲-۴a+۲}{h}=\frac{۶ah+۳h^۲+۴h}{h}=۶a+۳h+۴$$

مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای در موارد خواسته‌شده برابر شد، پس تفاضل آن‌ها برابر صفر است.

۳۹

گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) دو خط موازی‌اند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها باهم برابر باشد.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

برای یافتن شیب خط، ابتدا معادلهٔ آن را به‌صورت استاندارد بازنویسی می‌کنیم:

$$(m+2)\,y = mx \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{m}{m+2}\right)x$$

شیب این خط برابر $\left(\frac{m}{m+2}\right)$ است. کافی است ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین کنیم و مساوی شیب خط قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x_0) = \frac{m}{m+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = \frac{m}{m+2}$$

می‌دانیم $-1 < \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} < 1$ همواره برقرار است بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{m}{m+2} > -1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{m+m+2}{m+2} > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > -1 \\ \frac{m}{m+2} < 1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{m-m-2}{m+2} < 0 \Rightarrow m > -2 \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های دو معادلهٔ فوق داریم: $m > -1$

۴۰

گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

الف) مشتق تابع $y=\sqrt{u}$ از رابطهٔ $y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$ به دست می‌آید.

ب) مشتق تابع کسری $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^{۲}(x)}$$

گام دوم

با استفاده از روابط گام اول، ابتدا $f'(x)$ و سپس $f'(۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۳(۲x+۱)-۲(۳x-۱)}{(۲x+۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}}=\frac{\frac{۵}{(۲x+۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}}$$

$$\Rightarrow f'(۲)=\frac{\frac{۵}{(۴+۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۶-۱}{۴+۱}}}=\frac{\frac{۵}{۵^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۵}{۵}}}=\frac{\frac{۱}{۵}}{۲}=\frac{۱}{۱۰}$$

۴۱ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) $f'(۱)$ موجود است؛ یعنی در $x=۱$ تابع $f(x)$ هم پیوسته است و هم مشتق‌پذیر.
ب) تابع در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

ج) تابع در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر است هرگاه:

$$f'_+(۱) = f'_-(۱)$$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه $۱ > \sqrt{۲} - ۱$ است، برای محاسبهٔ $f\left(۱-\sqrt{۲}\right)$ باید از ضابطهٔ مربوط به xهای کوچک‌تر از ۱ استفاده کنیم؛ بنابراین لازم است ابتدا با بررسی شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری، مقادیر a و b را بیابیم.
بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+}\left(x-\dfrac{۱}{x}\right) = ۱-۱=۰ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} x^۲+ax+b = a+b+۱ \\ f(۱)=۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} a+b+۱=۰ \Rightarrow a+b=-۱\,(I)$$

برای بررسی شرط مشتق‌پذیری، ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آورده و سپس مشتق چپ و راست را در نقطهٔ $x=۱$ مساوی قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \begin{cases} ۱+\dfrac{۱}{x^۲} & ; x>۱ \\ ۲x+a & ; x<۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \quad \Rightarrow \quad ۱+۱=۲+a \quad \Rightarrow \quad a+۲=۲ \quad \Rightarrow \quad a=۰$$

با جایگذاری در رابطهٔ I مقدار b را محاسبه می‌کنیم:

$$a+b=-۱ \quad \Rightarrow \quad ۰+b=-۱ \quad \Rightarrow \quad b=-۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به ازای $x<۱$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$x<۱ \;:\; f(x) = x^۲-۱$$

$$\Rightarrow \quad f\left(۱-\sqrt{۲}\right) = \left(۱-\sqrt{۲}\right)^۲ - ۱ = ۱-۲\sqrt{۲}+۲-۱ = ۲-۲\sqrt{۲}$$

۴۲ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۶x} & ;۰\le x<۴\\ \left[\frac{x}{۴}\right](x^۲-۹x) & ;۴\le x<۸\end{cases}$$

$$۲<۴\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^۲+۶x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}=\frac{x+۳}{\sqrt{x^۲+۶x}}\quad (I)$$

$$۵>۴\Rightarrow f(x)=\left[\frac{x}{۴}\right](x^۲-۹x)\ ,\ \left[\frac{۵}{۴}\right]=۱\Rightarrow f'(x)=۲x-۹\quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} f'(۲)=\frac{۵}{۴}$$

$$\xrightarrow{(II)} f'(۵)=۱$$

پس $f'(۲)-f'(۵)=\frac{۱}{۴}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴۳ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

می‌دانیم: $f'(x_۰)=\lim\limits_{h\to۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}$ بنابراین حاصل حد $\lim\limits_{h\to۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ برابر $f'(۱)$ است.

گام دوم

کافی است مقدار مشتق تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=۱$ محاسبه کنیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}}\times\frac{۴(x+۳)-(۴x+۵)}{(x+۳)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۴+۵}{۱+۳}}}\times\frac{۴(۱+۳)-(۴+۵)}{(۱+۳)^۲}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۱۶}=\frac{۷}{۴۸}$$

۴۴ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم مشتق تابع $y = u^n$ که u تابعی برحسب x است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y' = nu'u^{n-1}$$

گام دوم

با استفاده از گام اول مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow y' = 2 \times \left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = 2\left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)\left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\xrightarrow{x=-8} y' = 2\left(-\frac{16}{64} - \frac{2}{3 \times (-2)}\right)\left(\frac{16}{-8} - 4\right) = 2\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)(-2-4) = 2\left(\frac{1}{12}\right)(-6) = -\frac{12}{12} = -1$$

۴۵ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که:

اولاً در این نقطه پیوسته باشد یعنی:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی:

$$f'_-(۱) = f'_+(۱)$$

گام دوم

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$x \to ۱^+ \Rightarrow x > ۱ \Rightarrow x - ۱ > ۰ \Rightarrow |x - ۱| = x - ۱$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - ۱)(x - ۱) = (x - ۱)^۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۰$$

$$x \to ۱^- \quad \Rightarrow \quad x < ۱ \quad \Rightarrow \quad x - ۱ < ۰ \quad \Rightarrow \quad |x - ۱| = -(x - ۱)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - ۱)(-(x - ۱)) = -(x - ۱)^۲ \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۰$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱) \quad \Rightarrow \quad a = ۰$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} f'_-(x) &= ۲(x - ۱) \quad \Rightarrow \quad f'_-(۱) = ۰ \\ f'_+(x) &= -۲(x - ۱) \quad \Rightarrow \quad f'_+(۱) = ۰ \end{aligned}$$

بنابراین تابع به ازای $a = ۰$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.

۴۶ گزینه ۲

$$f(۰) = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt[۳]{x + a} - b}{x} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[۳]{۰ + a} - b = ۰ \quad (۱) \\ HOP : \lim_{x\to ۰} \dfrac{\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x + a)^۲}}}{۱} = \dfrac{۱}{۱۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{a^۲}} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow \sqrt[۳]{a} = \pm ۲ \xrightarrow{(۱)} b = \pm ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۷ گزینه ۱

آهنگ متوسط تابع اول : $\dfrac{\sin\frac{\pi}{۲}\cos\frac{۲\pi}{۲}-\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{۲\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}}=\dfrac{-۱-۰}{\frac{\pi}{۴}}=\dfrac{-۴}{\pi}$

آهنگ متوسط تابع دوم : $\dfrac{(\sin^۴\frac{\pi}{۲}-\cos^۴\frac{\pi}{۲})-(\sin^۴\frac{\pi}{۴}-\cos^۴\frac{\pi}{۴})}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}}$

$$=\frac{(۱-۰)-(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴})}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۴}{\pi}$$

از تقسیم دو مقدار حاصل، به ۱- می‌رسیم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۴۸ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱$ تا $x_۲$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع آن نقطه است.

گام دوم

$$f(x)=(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۱}}$$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=۴$ تا $x=۱۲$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(۱۲)-f(۴)}{۱۲-۴}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲۴+۱}}-\frac{۱}{\sqrt{۸+۱}}}{۸}=\frac{\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}}{۸}=-\frac{۱}{۶۰}$$

طبق قسمت ب از گام اول، $f'(x)$ و سپس مقدار $f'(۴)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۰-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}}{۲x+۱}=-\frac{۱}{(۲x+۱)\sqrt{۲x+۱}}$$

$$x=۴ \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } =f'(۴)=-\frac{۱}{(۸+۱)\sqrt{۸+۱}}=-\frac{۱}{۹\times۳}=-\frac{۱}{۲۷}$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}-f'(x)=-\frac{۱}{۶۰}-\left(-\frac{۱}{۲۷}\right)=-\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۲۷}=\frac{-۹+۲۰}{۵۴۰}=\frac{۱۱}{۵۴۰}$$

۴۹

گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) عرض از مبدأ یک خط، به ازای جایگذاری $x = ۰$، در معادلهٔ آن به دست می‌آید.
ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.
ج) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m\left(x - x_۱\right)$$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم. طبق قسمت "ب" از گام اول، شیب این خط برابر است با:

$$y = \sqrt{x^۲ + ۳x} \Rightarrow y' = \frac{۲x + ۳}{۲\sqrt{x^۲ + ۳x}}$$
$$y'\left(۱\right) = \frac{۲ + ۳}{۲\sqrt{۱ + ۳}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۴}} = \frac{۵}{۲ \times ۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{۵}{۴}$$

$$x = ۱ \Rightarrow y = \sqrt{۱ + ۳} = \sqrt{۴} = ۲ \Rightarrow y\left(۱\right) = ۲$$

بنابراین، طبق قسمت "ج" از گام اول، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(۱, ۲)$ برابر است با:

$$y - y\left(۱\right) = y'\left(۱\right)\left(x - ۱\right) \Rightarrow y - ۲ = \frac{۵}{۴}\left(x - ۱\right)$$
$$\Rightarrow y = \frac{۵}{۴}x - \frac{۵}{۴} + ۲ \Rightarrow y = \frac{۵}{۴}x + \frac{۳}{۴}$$

با جایگذاری $x = ۰$ در معادلهٔ خط مماس، داریم:

$$\xrightarrow{x=۰} y = \frac{۵}{۴}\left(۰\right) + \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی، برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

۵۰ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

توابع شامل قدر مطلق در ریشه‌های سادهٔ عبارت درون قدر مطلق مشتق ندارند؛ بنابراین تابع $f(x) = \sqrt{۱ + |x|}$ در $x = ۰$ مشتق ندارد پس $\alpha = ۰$ است.

گام دوم

به ازای $x > ۰$ و $x < ۰$ ضابطهٔ مشتق تابع $f(x)$ و مقادیر $f'_{+}(۰)$ و $f'_{-}(۰)$ را تعیین می‌کنیم سپس حاصل عبارت $f'_{+}(۰) - f'_{-}(۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$x > ۰ \ : \ |x| = x \ \Rightarrow \ f(x) = \sqrt{۱ + x} \ \Rightarrow \ f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{۱ + x}}$$

$$\Rightarrow \ f'_{+}(۰) = \frac{۱}{۲\sqrt{۱ + ۰}} = \frac{۱}{۲ \times ۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$x < ۰ \ : \ |x| = -x \ \Rightarrow \ f(x) = \sqrt{۱ - x} \ \Rightarrow \ f'(x) = \frac{-۱}{۲\sqrt{۱ - x}}$$

$$\Rightarrow \ f'_{-}(۰) = \frac{-۱}{۲\sqrt{۱ - ۰}} = \frac{-۱}{۲ \times ۱} = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$f'_{+}(۰) - f'_{-}(۰) = \frac{۱}{۲} - \left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

۵۱ گزینه ۴

$$y = \sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}$$

آهنگ متوسط در بازهٔ $[۵, ۶]$ برابر است با:

$$\frac{f(۶) - f(۵)}{۶ - ۵} = \frac{\sqrt{۲۱ - ۳۶ + ۲۴} - \sqrt{۲۱ - ۲۵ + ۲۰}}{۱} = \frac{\sqrt{۹} - \sqrt{۱۶}}{۱} = -۱$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

$$y' = \frac{-۲x + ۴}{۲\sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}} = \frac{\cancel{۲}(-x + ۲)}{\cancel{۲}\sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}} = \frac{-x + ۲}{\sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}}$$

با برابر قرار دادن این دو داریم:

$$\frac{-x + ۲}{\sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}} = -۱ \Rightarrow x - ۲ = \sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x} \ \ (*)$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲ - ۴x + ۴ = ۲۱ - x^۲ + ۴x \Rightarrow ۲x^۲ - ۸x - ۱۷ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۸ \pm \sqrt{۲۰۰}}{۴} = ۲ \pm \frac{۵}{۲}\sqrt{۲} \xrightarrow[(*)]{x \geq ۲} x = ۲ + \frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵۲

گزینه ۱

تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر است، پس بایستی در $x = ۲$ پیوسته باشد و همچنین مشتق چپ و راست تابع در $x = ۲$ برابر باشند.

$$f(۲) = \lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۴ + ۲a + b = |۴ - ۴| \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۴ + ۲a + b = ۰$$

$$\Rightarrow ۲a + b = -۲ \quad (۱)$$

تابع f را در همسایگی چپ $x = ۲$ (به دلیل وجود قدرمطلق) تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۲$$

x		۰		۲	
$x^۲ - ۲x$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

بنابراین باتوجه‌به جدول تعیین علامت اگر $۰ < x < ۲$ باشد، $|x^۲ - ۲x| = ۲x - x^۲$ است.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ; x < ۰ \\ -x^۲ + ۲x & ; ۰ \leq x < ۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲ + ax + b & ; x \geq ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۲ & ; x < ۰ \\ -۲x + ۲ & ; ۰ < x < ۲ \\ x + a & ; x \geq ۲ \end{cases}$$

$$f'_+(۲) = f'_-(۲) \Rightarrow ۲ + a = -۲(۲) + ۲ \Rightarrow a = -۴$$

$$(۱) \xrightarrow{a=-۴} -۸ + b = -۲ \Rightarrow b = ۶$$

$$\Rightarrow a + b = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۵۳

گزینه ۳

برای سهولت در مشتق‌گیری به‌جای $\sqrt[۳]{x}$، عبارت $x^{\frac{۱}{۳}}$ را قرار می‌دهیم. ضابطهٔ مشتق دوم یا همان y'' را تعیین کرده و حاصل $y''y^۵$ را به دست می‌آوریم.

$$y = \sqrt[۳]{x} \quad \Rightarrow \quad y = x^{\frac{۱}{۳}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow \quad y'' = \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(-\frac{۲}{۳}\right)x^{-\frac{۵}{۳}} = -\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}} = -\frac{۲}{۹\sqrt[۳]{x^۵}}$$

$$\Rightarrow \quad y''y^۵ = -\frac{۲}{۹\sqrt[۳]{x^۵}}\left(\sqrt[۳]{x}\right)^۵ = -\frac{۲}{۹\sqrt[۳]{x^۵}} \times \sqrt[۳]{x^۵} = -\frac{۲}{۹}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۵۴

گزینه ۳

تابع باید در $x=۲$ پیوسته باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{۸}{ax+b}=\dfrac{۸}{۲a+b}\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(-x^۳+۶x)=-۸+۱۲=۴\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{۸}{۲a+b}=۴\Rightarrow ۲a+b=۲$$

مشتق چپ و راست هم باید در این نقطه برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-۸a}{(ax+b)^۲} & ;x>۲\\ -۳x^۲+۶ & ;x\le ۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_+(۲)=\dfrac{-۸a}{(۲a+b)^۲}=\dfrac{-۸a}{۲^۲}=-۲a\\ f'_-(۲)=-۱۲+۶=-۶\end{cases}\Rightarrow -۲a=-۶\Rightarrow a=۳\quad ,\quad b=-۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۵ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) مشتق اول تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ موجود است درصورتی‌که اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم: $f'_{+}(0)=f'_{-}(0)$.

ب) مشتق دوم تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ موجود است درصورتی‌که اولاً مشتق اول تابع در این نقطه موجود و پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم: $f''_{+}(0)=f''_{-}(0)$.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ معکوس تابع $f(x)$ را برای $x\geq 0$ و $x<0$ تعیین کرده و در ادامه وجود و عدم وجود $(f^{-1})'(x)$ و $(f^{-1})''(x)$ در نقطهٔ $x=0$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & ;x<0\end{cases}$$

$$x\geq 0,\ y\geq 0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow y=\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲(دو طرف مثبت)}} y^2=x \Rightarrow f^{-1}(x)=x^2 \quad ; \quad x\geq 0$$

$$x<0, y<0 \Rightarrow f(x)=-\sqrt{-x} \Rightarrow y=-\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲(دو طرف منفی)}} y^2=-x \Rightarrow x=-y^2 \Rightarrow f^{-1}(x)=-x^2 \quad ; \quad x<0$$

پس ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & ;x\geq 0\\ -x^2 & ;x<0\end{cases}$$

تابع $f^{-1}(x)$ در $x=0$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$$

همچنین داریم:

$$(f^{-1})'(x)=\begin{cases}2x & ;x>0\\ -2x & ;x<0\end{cases} \Rightarrow (f^{-1})'_{+}(0)=(f^{-1})'_{-}(0)=0$$

پس تابع $f^{-1}(x)$ در $x=0$ مشتق اول دارد و مشتق اول در این نقطه پیوسته است.

$$(f^{-1})''(x)=\begin{cases}2 & ;x>0\\ -2 & ;x<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}(f^{-1})''_{+}(0)&=2\\ (f^{-1})''_{-}(0)&=-2\end{aligned}\right\} \Rightarrow (f^{-1})''_{+}(0)\neq(f^{-1})''_{-}(0)$$

بنابراین تابع $f^{-1}(x)$ در $x=0$ مشتق دوم ندارد.

۵۶

گزینه ۳

فرض دوم مسئله، تعریف مشتق تابع $f(x)$ در $x = ۲$ است:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow f'(۲) = \frac{۴}{۳}$$

$$g(۱) = ۱ + \sqrt{۱} = ۲$$

طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$(fog)'(۱) = g'(۱) \times f'(g(۱)) = g'(۱) \times f'(۲) = \frac{۴}{۳} g'(۱)$$

ازطرفی:

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x=۱} g'(۱) = ۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

درنتیجه:

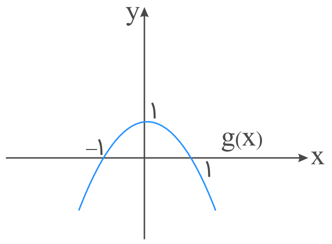
$$(fog)'(۱) = \frac{۴}{۳} g'(۱) = \frac{۴}{۳} \times \frac{۳}{۲} = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

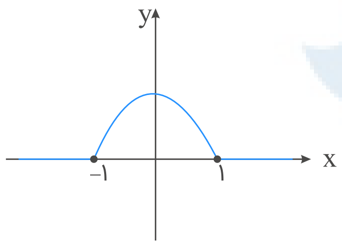
۵۷ گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & ; x \leq -۱ \\ x & ; -۱ \leq x \leq ۱ \\ ۱ & ; x > ۱ \end{cases}$$

$$g(x) = ۱ - x^۲$$



$$gof(x) = \begin{cases} g(-۱) = ۰ & ; x \leq -۱ \\ ۱ - x^۲ & ; -۱ \leq x \leq ۱ \\ g(۱) = ۰ & ; x > ۱ \end{cases}$$

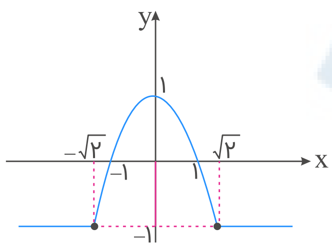


در $x = ۱$ و $x = -۱$ نقطهٔ گوشه‌ای داریم و gof مشتق‌پذیر نیست.

$$fog(x) = \begin{cases} -۱ & ; g(x) \leq -۱ \\ g(x) & ; -۱ \leq g(x) \leq ۱ \\ ۱ & ; g(x) > ۱ \end{cases} = \begin{cases} -۱ & ; x \leq -\sqrt{۲} \text{ یا } x \geq \sqrt{۲} \\ ۱ - x^۲ & ; -\sqrt{۲} \leq x \leq \sqrt{۲} \end{cases}$$

$$g(x) \leq -۱ \Rightarrow ۱ - x^۲ \leq -۱ \Rightarrow x^۲ \geq ۲ \Rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{۲} \\ \text{یا} \\ x \leq -\sqrt{۲} \end{cases}$$

در $x = \pm\sqrt{۲}$ نقطهٔ گوشه‌ای داریم و تابع مشتق‌پذیر نیست!



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۵۸ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

$f'(\alpha)$ و $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ را محاسبه و باهم برابر قرار می‌دهیم، سپس مقدار α را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}= \text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x_1=2 \text{ تا } x_2=5$$

$$=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{\frac{5}{5-1}-\frac{2}{2-1}}{3}=\frac{\frac{5}{4}-2}{3}=\frac{\frac{5-8}{4}}{3}=\frac{-\frac{3}{4}}{3}=\frac{-1}{4}$$

$$f(x)=\frac{x}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$x=\alpha \text{ آهنگ لحظه‌ای در } =f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{\Delta f}{\Delta x}\Rightarrow -\frac{1}{(\alpha-1)^2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow(\alpha-1)^2=4\Rightarrow\begin{cases}\alpha-1=2\Rightarrow\alpha=3\\ \alpha-1=-2\Rightarrow\alpha=-1 \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۵۹ گزینه ۲

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x)=\frac{4}{5}(4x+|x|)-\frac{1}{5}|4x+|x||$$

$$\text{اگر } x\geq 0\Rightarrow(fog)(x)=\frac{4}{5}(5x)-\frac{1}{5}(5x)=4x-x=3x$$

$$\text{اگر } x<0\Rightarrow fog(x)=\frac{4}{5}(4x-x)-\frac{1}{5}\underbrace{|4x-x|}_{3x}$$

$$=\frac{12}{5}x-\frac{1}{5}(-3x)=\frac{15}{5}x=3x$$

بنابراین $(fog)(x)=3x$، پس:

$$(fog)'(x)=3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۶۰

گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

طبق تعریف مشتق، حد خواسته‌شده مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=-1$ است یعنی:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

گام دوم

به ازای $x=-1$ عبارت $\left(x^2-x-2\right)$ برابر صفر می‌شود و تابع $g(x)=\sqrt[3]{x^2-7x}$ نیز در $x=-1$ پیوسته است؛ بنابراین برای محاسبهٔ مشتق در نقطهٔ $x=-1$، کافی است از عامل صفرشونده (عبارت $\left(x^2-x-2\right)$) مشتق گرفته، در تابع $g(x)$ ضرب کنیم و درنهایت مقدار آن را به ازای $x=-1$ به دست آوریم:

$$x=-1\ :\ \ f'(x)=(2x-1)\sqrt[3]{x^2-7x}\Rightarrow f'(-1)=(-2-1)\sqrt[3]{(-1)^2-7(-1)}=(-3)\sqrt[3]{8}=-3\times 2=-6$$

۶۱

گزینه ۳

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'_+(1)$$

تابع در $x=1$ پیوستگی راست دارد. مشتق تابع را در همسایگی راست بررسی می‌کنیم.

$$x>1: f(x)=\sqrt{x^2-1+x}=\sqrt{x^2+x-1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}}\Rightarrow f'_+(1)=\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۶۲ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ آنی یا لحظه‌ای در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ آنی خواسته‌شده را به دست می‌آوریم سپس اختلاف آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۲/۵۶) - f(۲/۲۵)}{۲/۵۶ - ۲/۲۵} = \frac{\sqrt{۲/۵۶} - \sqrt{۲/۲۵}}{۰/۳۱} = \frac{۱/۶ - ۱/۵}{۰/۳۱} = \frac{۰/۱}{۰/۳۱} = \frac{۱۰}{۳۱}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$x = ۲/۲۵ \text{ آهنگ آنی در نقطهٔ } = f'(۲/۲۵) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲/۲۵}} = \frac{۱}{۲ \times ۱/۵} = \frac{۱}{۳}$$

اختلاف آهنگ آنی و آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$f'(۲/۲۵) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱۰}{۳۱} = \frac{۳۱ - ۳۰}{۹۳} = \frac{۱}{۹۳}$$

۶۳ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع دو ضابطه‌ای که روی اعداد گنگ و گویا تعریف‌شده، در نقاطی پیوسته است که ضابطه‌ها باهم برابر باشند و در نقاط پیوسته‌ای که ضابطهٔ مشتق باهم برابرند، مشتق‌پذیر است.

گام دوم

برای یافتن نقاط مشتق‌پذیر تابع $f(x)$ ابتدا دو ضابطهٔ آن را مساوی قرار می‌دهیم تا نقاط پیوسته را به دست آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \text{گویا } x \\ ۰ & ; \text{گنگ } x \end{cases} \Rightarrow x^2 = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

تابع $f(x)$ فقط در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است. بررسی می‌کنیم که آیا در این نقطه مشتق‌پذیر نیز هست یا نه!

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x & ; \text{گویا } x \\ ۰ & ; \text{گنگ } x \end{cases} \Rightarrow ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در نقطهٔ $x = ۰$ مشتق دارد.

۶۴ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad ; \quad 0 \in D_f$$

ج) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد و ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی $f'_-(0) = f'_+(0)$.

گام دوم

چون $x^2 \geq 0$ همواره برقرار است پس $D_f = \mathbb{R}$.

اکنون ضابطهٔ تابع را به ازای $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین می‌کنیم:

$$y = x\sqrt{x^2} = x|x| = \begin{cases} x \geq 0 \ \Rightarrow \ |x| = x \ \Rightarrow \ y = x^2 \\ x < 0 \ \Rightarrow \ |x| = -x \ \Rightarrow \ y = -x^2 \end{cases}$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول، شرط پیوستگی تابع را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^-} -x^2 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع در $x=0$ پیوسته است.

باتوجه‌به قسمت ج از گام اول، شرط مشتق‌پذیری تابع را بررسی می‌کنیم:

$$y' = \begin{cases} 2x & ; \ x > 0 \\ -2x & ; \ x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'_-(0) = y'_+(0) = 0$$

پس تابع در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است.

۶۵

گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

گام اول

تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است پس در نقطه ای به طول $x = ۲$ هم باید پیوسته باشد.

گام دوم

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲) = ۲ - a$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{a(۱ + \sqrt[۳]{۱ - x})}{x^۲ - ۲x} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{a\left(\frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}\right)}{۲x - ۲} = \frac{a(-\frac{۱}{۳})}{۲} = -\frac{a}{۶}$$

تابع در $x = ۲$ باید پیوسته باشد. داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲)$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{۶} = ۲ - a \Rightarrow -a = ۱۲ - ۶a \Rightarrow ۵a = ۱۲ \Rightarrow a = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

۶۶

گزینه ۳

$$g'(x) = f'(x + ۱) + ۳f'(۳x + ۱۰)$$

$$x = -۲ : g'(-۲) = f'(-۲ + ۱) + ۳f'(۳(-۲) + ۱۰)$$

$$= f'(-۱) + ۳f'(۴)$$

تابع f دورهٔ تناوب ۵ دارد، پس $f'(-۱) = f'(۴)$:

$$g'(-۲) = ۴f'(-۱) = ۴ \times \frac{۳}{۲} = ۶$$

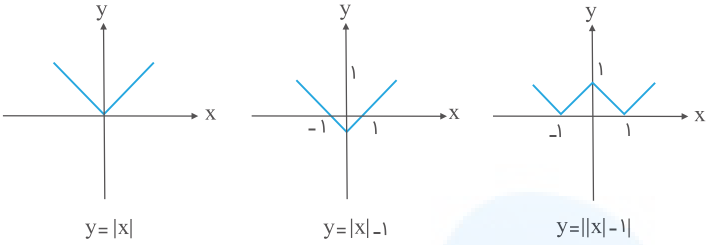
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶۷

گزینه ۴

روش اول: رسم نمودار تابع

یکی از راه‌های تشخیص نقاط مشتق‌ناپذیر، رسم نمودار توابع است. دقت کنید که نقاط زاویه‌دار، بازگشتی، دارای مماس قائم و ... در نمودار تابع، نقاط مشتق‌ناپذیر تابع محسوب می‌شوند.



باتوجه‌به نمودار، سه نقطه به طول‌های $x=-۱, x=۰, x=۱$، نقاط زاویه‌دار بوده و تابع در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم: تعیین ریشه‌های ساده عبارت‌های داخل قدر مطلق

تابع در ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدر مطلق نیز مشتق‌ناپذیر است. این تابع دو عبارت قدر مطلق دارد؛ یکی $|x|$ و دیگری $||x|-۱|$. ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$۱)|x| \quad : \quad x=۰$$

$$۲)||x|-۱| \quad : \quad |x|-۱=۰ \quad \Rightarrow \quad |x|=۱ \quad \Rightarrow \quad x=\pm ۱$$

تابع در سه نقطهٔ $x=-۱, x=۰, x=۱$ مشتق‌ناپذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۶۸

گزینه ۴

$$\text{آهنگ لحظه‌ای در } x=۳ = f'(۳)$$

$$f(x)=x^۳ \Rightarrow f'(x)=۳x^۲ \Rightarrow f'(۳)=۲۷ \quad (۱)$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۳+\Delta x)-f(۳)}{\Delta x} = \frac{f(۳/۱)-f(۳)}{۰/۱} = \frac{(۳/۱)^۳-۳^۳}{۰/۱} = ۲۷/۹۱ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)\ ,\ (۱)} ۲۷/۹۱-۲۷=۰/۹۱$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۶۹ گزینه ۳

برای تعیین ضابطهٔ تابع $f(f(x))$، کافی است در ضابطهٔ $f(x)$ به‌جای متغیر x تابع $f(x)$ را جایگذاری کنیم:

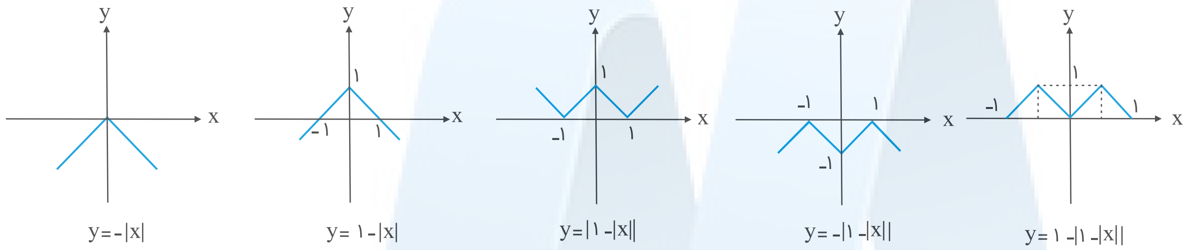
$$f(x) = ۱ - |x| \quad \Rightarrow \quad f(f(x)) = ۱ - |f(x)| = ۱ - |۱ - |x||$$

می‌دانیم تابع در ریشه‌های سادهٔ عبارت درون قدر مطلق مشتق‌ناپذیر است:

$$۱)|x| \ : \quad x = ۰$$

$$۲)|۱ - |x|| \ : \quad ۱ - |x| = ۰ \ \Rightarrow \ |x| = ۱ \ \Rightarrow \ x = \pm ۱$$

علاوه‌برآن، با رسم نمودار تابع نیز می‌توان نقاط مشتق‌ناپذیر را مشخص کرد:



بنابراین تابع $y = |۱ - |x||$، دارای سه نقطهٔ مشتق‌ناپذیر $x = -۱, x = ۱, x = ۰$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۷۰ گزینه ۲

ابتدا از ضوابط داده‌شده مشتق چپ و راست را به دست می‌آوریم:

$$x \to ۱^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{-۳}{x^۲} \Rightarrow f'_+(۱) = -۳$$

$$x \to ۱^- \Rightarrow f'(x) = ۲x + a \Rightarrow f'_-(۱) = ۲ + a$$

$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \Rightarrow -۳ = ۲ + a \Rightarrow a = -۵$$

چون تابع در $x = ۱$ مشتق‌پذیر می‌باشد، بنابراین پیوسته نیز هست.

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow ۳ - ۵ = (۱)^۲ - ۵(۱) + b \Rightarrow b = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۱

گزینه ۳

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

۱) در نقطهٔ $x = a$ پیوسته باشد.

۲) مشتق چپ و راست در نقطهٔ $x = a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \to (-۲)^-} f(x) = \lim_{x \to (-۲)^+} f(x) = f(-۲)$$

$$\lim_{x \to (-۲)^-} \sqrt{۵ - ۲x} = \sqrt{۵ - ۲(-۲)} = ۳$$

$$\lim_{x \to (-۲)^+} (-\frac{۱}{۲}x^۲ + bx + c) = -\frac{۱}{۲}(-۲)^۲ + b(-۲) + c = -۲ - ۲b + c$$

$$f(-۲) = \sqrt{۵ - ۲(-۲)} = ۳$$

$$\Rightarrow -۲ - ۲b + c = ۳ \Rightarrow -۲b + c = ۵ \quad (*)$$

اکنون شرط مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_-(-۲) = f'_+(-۲)$$

$$\begin{cases} f'_-(x) = \dfrac{-۲}{۲\sqrt{۵ - ۲x}} \Rightarrow f'_-(-۲) = \dfrac{-۲}{۲ \times ۳} = -\dfrac{۱}{۳} \\ f'_+(x) = -x + b \Rightarrow f'_+(-۲) = ۲ + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳} = ۲ + b \Rightarrow b = -\frac{۷}{۳} \xrightarrow{(*)} -۲(-\frac{۷}{۳}) + c = ۵$$

$$\Rightarrow c = ۵ - \frac{۱۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۷۲

گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'_{-}(x_\circ) = \lim_{h\to\circ^-} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} \quad , \quad f'_{+}(x_\circ) = \lim_{h\to\circ^+} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

ب) تابع f در نقطهٔ $x_\circ$ مشتق‌پذیر است هرگاه مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و باهم برابر باشد.

گام دوم

وقتی $h\to\circ^-$، حاصل حد داده‌شده $\frac{\circ}{\circ}$ و مبهم می‌شود. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to\circ^-} \frac{f(x_\circ)-f(x_\circ-h)}{h} \overset{H}{=} \lim_{h\to\circ^-} \frac{\circ-(-۱)f'(x_\circ-h)}{۱} = \lim_{h\to\circ^-} f'(x_\circ-h) = f'_{-}(x_\circ)$$

چون تابع در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است، پس داریم:

$$f'_{-}(x_\circ) = f'_{+}(x_\circ) = -۲$$

بنابراین حاصل حد داده‌شده برابر ۲- می‌شود.

۷۳ گزینه ۴

روش اول:

تابع $y = [f(x)]$ به ازای مقادیری که عبارت درون جزء صحیح برابر عدد صحیح شود، ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است؛ بنابراین تابع روی بازه‌ای مشتق‌پذیر است که خروجی آن فقط یک مقدار باشد.

بررسی گزینهٔ اول:

$$x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \in [1, \infty)$$

$x = 0$ ریشهٔ مخرج کسر است. به ازای $0 < x \le 1$، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع در این بازه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی گزینهٔ دوم:

$$x \in (-1, 0) \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in (-\infty, -1)$$

در این بازه، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی گزینهٔ سوم:

$$x \in [1, +\infty) \Rightarrow x \ge 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = \begin{cases} 0 & ; 0 < \frac{1}{x} < 1 \\ 1 & ; \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ در نقطهٔ $x = 1$ ناپیوسته است بنابراین روی بازهٔ $[1, +\infty)$ مشتق‌ناپذیر می‌شود.

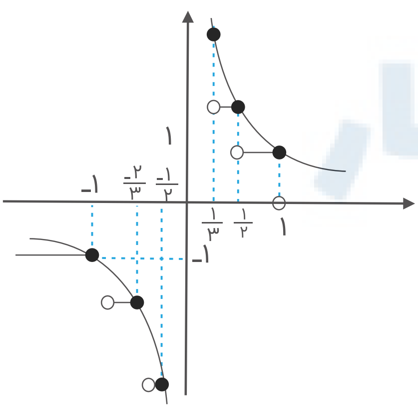
بررسی گزینهٔ چهارم:

$$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow x < -1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -1$$

تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ روی بازهٔ $(-\infty, -1)$، یک تابع ثابت است پس روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

روش دوم:

با رسم نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$، بازهٔ مشتق‌پذیری آن را مشخص می‌کنیم:



همان‌طوری که مشاهده می‌کنید از میان گزینه‌ها، تابع تنها در بازهٔ $(-\infty,-1)$ برابر تابع ثابت $f(x)=-1$ است، درنتیجه روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۷۴ گزینه ۲

درصورتی‌که خط بر منحنی مماس باشد، معادلهٔ تلاقی دو منحنی، ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^{2}+a}{x-2} \\ y=-3x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^{2}+a}{x-2}=-3x+2$$

$$\Rightarrow x^{2}+a=-3x^{2}+8x-4 \Rightarrow 4x^{2}-8x+(a+4)=0$$

برای به دست آوردن ریشهٔ مضاعف، $\Delta=0$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta=0 \Rightarrow (-8)^{2}-4(4)(a+4)=0 \Rightarrow 64-16a-64=0 \Rightarrow a=0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

خط بر یک منحنی مماس است درصورتی‌که معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط و منحنی، معادلهٔ تلاقی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$2x^{2}-x+a=-1 \Rightarrow 2x^{2}-x+a+1=0$$

می‌دانیم معادلهٔ درجه‌دو در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta=0$ شود:

$$\Delta=(-1)^{2}-4(2)(a+1)=0 \Rightarrow 1-8(a+1)=0$$

$$\Rightarrow 8(a+1)=1 \Rightarrow a+1=\frac{1}{8} \Rightarrow a=-\frac{7}{8}$$

۷۶ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ب) می‌دانیم: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه می‌دانیم $(fg)(x) = f(x)g(x)$ است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۲+\Delta x)g(۲+\Delta x) - f(۲)g(۲)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(fg)(۲+\Delta x) - (fg)(۲)}{\Delta x} = (fg)'(۲)$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول داریم:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = (۲x-۱)\sqrt{۲x} + (x^۲ - x)\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(۲) = (۴-۱)\sqrt{۴} + (۲^۲ - ۲)\frac{۱}{\sqrt{۴}} = (۳\times ۲) + \frac{۲}{۲} = ۶ + ۱ = ۷$$

۷۷ گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{۲(\frac{۱}{۲})-۱}{۲(۱-۱)} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۱} \frac{۲f'(x)}{۲} = \lim_{x\to ۱} f'(x)$$

$$f(x) = \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{۲x^۲+x-۱} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}(۲x^۲+x-۱) - (۴x+۱)(x^{\frac{۳}{۲}})}{(۲x^۲+x-۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۱} f'(۱) = \frac{\frac{۳}{۲}(۲+۱-۱) - (۴+۱)(۱)}{(۲+۱-۱)^۲} = \frac{-۲}{۴} = \frac{-۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷۸ گزینه ۴

$$y' = \frac{(۲x+m)(x+۳)-(x^{۲}+mx+۱)}{(x+۳)^{۲}}$$

$$\Rightarrow y'(۱) = \frac{(۲+m)(۴)-(m+۲)}{۱۶} = \frac{۳m+۶}{۱۶} \quad (۱)$$

$$۴y-۳x=n \Rightarrow y=\frac{۳}{۴}x+\frac{n}{۴} \Rightarrow y'(۱)=\frac{۳}{۴} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{۳m+۶}{۱۶}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow ۳m+۶=۱۲ \Rightarrow ۳m=۶ \Rightarrow m=۲$$

$$y(۱)=\frac{m+۲}{۴} \xrightarrow{m=۲} y(۱)=۱$$

$$y-۱=\frac{۳}{۴}(x-۱) \Rightarrow ۴y-۳x=۱ \Rightarrow n=۱$$

$$\Rightarrow m+n=۲+۱=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۷۹ گزینه ۱

به ازای $x=۱$ عبارت $(x-۱)$ برابر صفر می‌شود (عامل صفرشونده)، همچنین تابع $g(x)=\frac{\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^{۴}}$ نیز در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است؛ بنابراین برای به دست آوردن مقدار $f'(۱)$ کافی است مشتق عبارت $(x-۱)$ را در تابع $g(x)$ ضرب و حاصل را به ازای $x=۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x-۱)\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^{۴}} \xrightarrow[\text{در نقطهٔ } x=۱]{\text{عبارت } (x-۱) \text{ عامل صفرشونده}} f'(x)=۱\times\frac{\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^{۴}}$$

$$\Rightarrow \quad f'(۱)=\frac{\sqrt[۵]{۳-۲}}{(۵-۳)^{۴}}=\frac{۱}{۲^{۴}}=\frac{۱}{۱۶} \quad \Rightarrow \quad f'(۱)=\frac{۱}{۱۶}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۸۰

گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

$f'_{+}(\sqrt{۲})$ مشتق راست تابع f در نقطه‌ای به طول $x=\sqrt{۲}$ و $f'_{-}(\sqrt{۲})$ مشتق چپ تابع f در نقطه‌ای به طول $x=\sqrt{۲}$ است.

گام دوم

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطهٔ $\sqrt{۲}$ بررسی می‌کنیم:

$$f(\sqrt{۲}) = (\sqrt{۲})^{۳} - [۲(\sqrt{۲})^{۲}](\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} = -۲\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^{+}} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{۲}^{+}} x^{۳} - [۲x^{۲}]x = (\sqrt{۲})^{۳} - \underbrace{[۲(\sqrt{۲}^{+})^{۲}]}_{۴^{+}}\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} = -۲\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^{-}} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{۲}^{-}} x^{۳} - [۲x^{۲}]x = (\sqrt{۲})^{۳} - \underbrace{[۲(\sqrt{۲}^{-})^{۲}]}_{۴^{-}}\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۲} = -\sqrt{۲}$$

بنابراین تابع از سمت چپ ناپیوسته است، درنتیجه مشتق چپ وجود ندارد. مشتق راست تابع را بدست می‌آوریم:

$$x \to \sqrt{۲}^{+} \Rightarrow x > \sqrt{۲} \Rightarrow x^{۲} > ۲ \Rightarrow ۲x^{۲} > ۴ \Rightarrow [۲x^{۲}] = ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = x^{۳} - ۴x \Rightarrow f'_{+}(x) = ۳x^{۲} - ۴$$

$$\Rightarrow f'_{+}(\sqrt{۲}) = ۳(\sqrt{۲})^{۲} - ۴ = ۳(۲) - ۴ = ۶ - ۴ = ۲$$

۸۱ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

راه‌حل اول:
ابتدا دقت کنید که $\sin(x+a)=\sin a\cos x+\sin x\cos a$ است. حالا صورت سؤال، تعریف مشتق تابع $\sin x$ در نقطهٔ $x=a$ است:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(x+a)-\sin a}{x}=\cos a$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}=\lim_{x\to ۰}\Big(\frac{\sin a\overbrace{(\cos x-۱)}^{-۲\sin^۲\frac{x}{۲}}}{x}+\cos a\underbrace{(\frac{\sin x}{x})}_{\text{حد برابر ۱}}\Big)$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a(-۲\sin\frac{x}{۲})}{x}\times\sin\frac{x}{۲}+\cos a\times ۱$$
$$=۰+\cos a=\cos a$$

نکته: $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۲ گزینه ۴

می‌دانیم: $(fog(x))'=g'(x)\,f'(g(x))$

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}}{\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}=\frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\frac{-۲\times\frac{۳}{\sqrt{۸}}}{۳\sqrt[۳]{(\frac{۹}{۸}-۱)^۴}}=\frac{\frac{-۶}{\sqrt{۸}}}{۳\times\frac{۱}{۱۶}}=\frac{-۶\times ۱۶}{۳\sqrt{۸}}=\frac{-۱۶}{\sqrt{۲}}=-۸\sqrt{۲}$$

$$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}}=۲$$

حال باید $f'(۲)$ را حساب کنیم. در همسایگی $x=۲$ حاصل براکت ۴ می‌شود.

$$f(x)=۱۶x^۲+۱\Rightarrow f'(x)=۳۲x\Rightarrow f'(۲)=۶۴$$
$$(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=-۸\sqrt{۲}\times ۶۴=(-۱۲۸\sqrt{۲})\times ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۸۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x به $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

طبق تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۲ به } ۲+h = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲} = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$$

بنابراین:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۲ به } ۲+h = \frac{\left(۲+h+\frac{۱}{۲+h}\right)-\left(۲+\frac{۱}{۲}\right)}{h} = \frac{h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲}}{h} = \frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲} = \frac{۸}{۹}h \xrightarrow{\times ۹} ۹h+\frac{۹}{۲+h}-\frac{۹}{۲} = ۸h$$

$$\Rightarrow h+\frac{۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h(h+۲)+۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h^۲+۲h+۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲h^۲+۴h+۱۸ = ۹h+۱۸ \Rightarrow ۲h^۲-۵h = ۰ \Rightarrow h(۲h-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h = ۰ & \text{غ ق ق} \\ h = \frac{۵}{۲} = ۲/۵ \end{cases}$$

اگر $h=۰$ باشد، متغیر اصلاً تغییری نکرده و آهنگ متوسط تغییر آن برابر صفر می‌شود.

۸۴ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

می‌دانیم $gof(x) = g(f(x))$ و $(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ است. توجه کنید که دامنهٔ تعریف تابع $gof(x)$ به‌صورت زیر است:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، ابتدا ضابطهٔ $gof(x)$ را تعیین کرده و مشتق آن را به دست می‌آوریم. برای تعیین ضابطهٔ $g(f(x))$ کافی است در ضابطهٔ $g(x)$ به‌جای متغیر x، ضابطهٔ $f(x)$ را قرار دهیم.

$$D_f = (-1,1), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{gof} = (-1,1)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x \quad ; -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow y = gof(x) = x \Rightarrow f'(x)g'(f(x)) = y' = 1 \ ; -1 < x < 1$$

۸۵ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.
ب) مختصات نقطهٔ تماس، هم در معادلهٔ خط مماس و هم در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

شیب خط $y=۳x-۲$ برابر ۳ است؛ بنابراین طبق قسمت الف از گام اول نتیجه می‌گیریم $f'(۲)=۳$ است. با جایگذاری $x=۲$ در معادلهٔ خط، عرض نقطهٔ تماس نیز برابر است با:

$$f(۲)=۳(۲)-۲=۶-۲=۴$$

اکنون با ساده کردن حد داده‌شده حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۲}\frac{f^{۲}(x)-۴f(x)}{x-۲}=\lim_{x\to۲}\frac{f(x)\left(f(x)-۴\right)}{x-۲}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to۲}f(x)}_{f(۲)}\times\underbrace{\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-۴}{x-۲}}_{f'(۲)}=f(۲)\times f'(۲)=۴\times۳=۱۲$$

۸۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، دو مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای را به دست آورده، سپس اختلاف آن‌ها از یکدیگر را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ } [۰,۳]=\frac{f(۳)-f(۰)}{۳-۰}=\frac{\sqrt{۹+۱۶}-\sqrt{۱۶}}{۳}=\frac{\sqrt{۲۵}-\sqrt{۱۶}}{۳}=\frac{۵-۴}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱۶}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۱۶}}=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱۶}}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } x=\sqrt{۲}=f'\left(\sqrt{۲}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\left(\sqrt{۲}\right)^{۲}+۱۶}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲+۱۶}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۸}}=\frac{\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

مقدار آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر شد، پس اختلاف آن‌ها برابر صفر است.

۸۷ گزینه ۴

باتوجه‌به اینکه حد وجود دارد، پس صورت کسر نیز باید به ازای $h = ۰$ صفر باشد، بنابراین داریم:

$$f(-۲+h)+۳=۰ \xrightarrow{h=۰} f(-۲)=-۳$$

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} f(-۲)=-۳ \\ f'(-۲)=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$(x^۲f(x))'=۲xf(x)+x^۲f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-۲} -۴f(-۲)+۴f'(-۲)=-۴(-۳)+۴(\frac{۱}{۲})=۱۲+۲=۱۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۸ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی منحنی، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
ب) مختصات نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس و معادلهٔ منحنی صدق می‌کند.
ج) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

گام دوم

شیب خط $y = ۲x - ۵$ برابر ۲ است؛ بنابراین مشتق تابع به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + ۱$ در نقطهٔ $x = ۱$ نیز برابر ۲ می‌شود:

$$y=ax^۲+bx+۱ \Rightarrow y'=۲ax+b \xrightarrow{x=۱} m_{\text{مماس}}=y'(۱)=۲ \Rightarrow ۲a+b=۲ \quad (I)$$

طبق قسمت ب از گام اول، به ازای $x = ۱$ مقدار به‌دست‌آمده از معادلهٔ خط و منحنی برابر است، پس داریم:

$$y=۲x-۵ \Rightarrow y(۱)=۲-۵=-۳$$
$$y=ax^۲+bx+۱ \Rightarrow y(۱)=a+b+۱=-۳ \Rightarrow a+b=-۴ \quad (II)$$

از دو معادلهٔ (I) و (II)، a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲a+b=۲ \\ a+b=-۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۲ \\ -a-b=۴ \end{cases} \Rightarrow a=۶$$

۸۹

گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

می‌دانیم $f(g(x)) = \text{fog}\,(x)$ و $(\text{fog})'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ است.

گام دوم

با داشتن ضابطه‌های $f\,(x)$ و $g\,(x)$، ابتدا ضابطهٔ $\text{fog}\,(x)$ را تعیین کرده، سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$$f\,(x) = \frac{x^{۳} - ۲}{۱ + x^{۳}} \quad , \quad g\,(x) = \sqrt[۳]{x - ۱}$$

$$\text{fog}\,(x) = f\,(g\,(x)) = \frac{(g\,(x))^{۳} - ۲}{۱ + (g\,(x))^{۳}} = \frac{\left(\sqrt[۳]{x - ۱}\right)^{۳} - ۲}{۱ + \left(\sqrt[۳]{x - ۱}\right)^{۳}} = \frac{x - ۱ - ۲}{۱ + x - ۱} = \frac{x - ۳}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y = \text{fog}\,(x) = \frac{x - ۳}{x}$$

ضابطهٔ y' را به دست می‌آوریم:

$$f'\,(g\,(x)) \cdot g'\,(x) = y' = \frac{x - (x - ۳)}{x^{۲}} = \frac{x - x + ۳}{x^{۲}} = \frac{۳}{x^{۲}}$$

۹۰

گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

گام دوم

فرض می‌کنیم نقطهٔ $A\left(\alpha, \frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱}\right)$ بر روی منحنی قرار داشته باشد. با محاسبهٔ مشتق تابع در این نقطه، معادلهٔ خط مماس را تشکیل می‌دهیم.

$$y' = \frac{۲(x+۱) - (۲x-۱)}{(x+۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{A\left(\alpha, \frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱}\right)} y'_A = \frac{۲(\alpha+۱) - (۲\alpha-۱)}{(\alpha+۱)^۲} = \frac{۲\alpha+۲-۲\alpha+۱}{(\alpha+۱)^۲} = \frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}$$

$$y - y_A = y'_A(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱} = \frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}(x - \alpha)$$

خط مماس از نقطهٔ $(-۱, ۰)$ می‌گذرد و بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-۱, y=۰} ۰ - \frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱} = \frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}(-۱-\alpha)$$

$$\Rightarrow -\frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱} = -\frac{۳(\alpha+۱)}{(\alpha+۱)^۲} \Rightarrow \frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱} = \frac{۳}{\alpha+۱}$$

دقت کنید که نقطهٔ $x = -۱$ عضو دامنهٔ تابع $y = \frac{۲x-۱}{x+۱}$ نیست و تابع در این نقطه تعریف نشده است بنابراین $\alpha = -۱$ است (زیرا نقطه $A\left(\alpha, \frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱}\right)$ روی منحنی تابع قرار دارد) پس می‌توان عبارت $\alpha + ۱$ را در کسر فوق ساده کرد. داریم:

$$۲\alpha - ۱ = ۳ \Rightarrow ۲\alpha = ۴ \Rightarrow \alpha = ۲$$

۹۱ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) $f'_+(\circ)$ بیانگر مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\circ$ و $f'_-(\circ)$ بیانگر مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\circ$ است.

ب) می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ;x \geq \circ \\ -x & ;x < \circ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌ازای $x>\circ$ و $x<\circ$ تعیین و مشتق چپ و راست آن را در نقطهٔ $x=\circ$ محاسبه می‌کنیم.

$$x>\circ: |x|=x \ , \ [x]=\circ \Rightarrow f(x)=x\times\circ=\circ \Rightarrow f'_+(\circ)=\circ$$
$$x<\circ: |x|=-x \ , \ [x]=-۱ \Rightarrow f(x)=(-x)(-۱)=x \Rightarrow f'_-(\circ)=۱$$

بنابراین:

$$f'_-(\circ)-f'_+(\circ)=۱-\circ=۱$$

۹۲ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}}$$

حال $f(۴)$ و $f'(۴)$ را به دست آورده و معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$f(۴)=\frac{۵\times۴-۴}{\sqrt{۴}}=\frac{۱۶}{۲}=۸$$
$$f'(x)=\frac{۵\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵x-۴)}{x} \Rightarrow f'(۴)=\frac{۱۰-\frac{۱}{۴}(۱۶)}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ خط مماس:

$$y-f(۴)=f'(۴)(x-۴) \Rightarrow y-۸=\frac{۳}{۲}(x-۴)$$
$$\xrightarrow[x=\circ]{\text{عرض از مبدأ}} y-۸=\frac{۳}{۲}(-۴) \Rightarrow y-۸=-۶ \Rightarrow y=۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۹۳

گزینه ۲

زمانی تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است که در $x = ۲$ مشتق داشته باشد.
بنابراین باید f در $x = ۲$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$f(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x) \Rightarrow -۴ + ۲a + b = ۱ \Rightarrow ۲a + b = ۵ \quad (۱)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{۱}{(x-۱)^۲} & ; x \geq ۲ \\ -۲x + a & ; x < ۲ \end{cases}$$

$$f'_{-}(۲) = f'_{+}(۲) \Rightarrow -۴ + a = -۱ \Rightarrow a = ۳$$

$$(۱) : ۶ + b = ۵ \Rightarrow b = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۹۴

گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق یک تابع داریم:

$$f'(-۱) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(-۱+\Delta x) - f(-۱)}{\Delta x}$$

ب) هرگاه u و v دو تابع برحسب x باشند و داشته باشیم $f(x) = u \times v$، آنگاه مشتق تابع f چنین تعریف می‌شود:

$$f'(x) = u' \times v + v' \times u$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول ابتدا ضابطهٔ مشتق $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = (x-۲)\sqrt[۳]{x^۲} = (x-۲)\,x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x) = ۱ \times x^{\frac{۲}{۳}} + \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}(x-۲) = \sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

هدف ما محاسبه $f'(-۱)$ است، پس داریم:

$$f'(-۱) = \sqrt[۳]{(-۱)^۲} + \frac{۲(-۱-۲)}{۳\sqrt[۳]{-۱}} = ۱ + \frac{۲(-۳)}{۳(-۱)} = ۱ + ۲ = ۳$$

۹۵ گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط تابع} = \frac{f(۶/۲۵)-f(۴)}{۶/۲۵-۴} = \frac{\sqrt{۶/۲۵}-\sqrt{۴}}{۲/۲۵} = \frac{۲/۵-۲}{۲/۲۵} = \frac{۰/۵}{۲/۲۵} = \frac{۱}{۴/۵}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۲\times ۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} - \text{آهنگ متوسط} = \frac{۱۰}{۴۵} - \frac{۱}{۴} = \frac{۴۰-۴۵}{۱۸۰} = \frac{-۵}{۱۸۰} = \frac{-۱}{۳۶}$$

بنابراین آهنگ متوسط به مقدار $\frac{۱}{۳۶}$ از آهنگ لحظه‌ای کمتر است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۹۶ گزینه ۴

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳ = \frac{x^۲+۲x}{(x^۲-x)^۳}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{(x^۲+۲x)'(x^۲-x)^۳ - ((x^۲-x)^۳)'(x^۲+۲x)}{(x^۲-x)^۶}$$

$$= \frac{(۲x+۲)(x^۲-x)^۳ - (۳(۲x-۱)(x^۲-x)^۲)(x^۲+۲x)}{(x^۲-x)^۶}$$

$$f'(۲) = \frac{۶\times \cancel{۸} - ۳\times ۳\times ۴\times \cancel{۴}}{\underset{۸}{\cancel{۶۴}}} = -\frac{۱۵}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) فاصلهٔ نقطهٔ $M\left(x,y\right)$ از مبدأ مختصات از رابطهٔ $T=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ به دست می‌آید.
ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

در رابطهٔ T از قسمت الف از گام اول، عبارت $y=\sqrt{x+۸}$ را جایگزین می‌کنیم تا T برحسب متغیر x به دست آید.

$$T=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\xrightarrow{y=\sqrt{x+۸}}T=\sqrt{x^{۲}+\left(\sqrt{x+۸}\right)^{۲}}=\sqrt{x^{۲}+x+۸}$$

از T نسبت به x مشتق گرفته و مقدار آن را در $x=۷$ حساب می‌کنیم:

$$T'=\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^{۲}+x+۸}}$$

$$\Rightarrow T'\left(۷\right)=\frac{۲\left(۷\right)+۱}{۲\sqrt{۷^{۲}+۷+۸}}=\frac{۱۴+۱}{۲\sqrt{۴۹+۷+۸}}=\frac{۱۵}{۲\sqrt{۶۴}}=\frac{۱۵}{۲\times ۸}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۹۸

گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷
قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)$$

ب) اگر $y=f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y'=u'f'(u)$$

گام دوم

مشتق تابع $f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)$ در همسایگی نقطهٔ $x=-۱$ محاسبه می‌شود بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{x=-۱}\quad |x|=-x\quad\Rightarrow\quad f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)=f\left(\sqrt{۳-x}\right)$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول می‌توان چنین نوشت:

$$y=f\left(\sqrt{۳-x}\right)\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}f'\left(\sqrt{۳-x}\right)$$

$$\Rightarrow\quad y'(-۱)=\frac{-۱}{۲\sqrt{۳+۱}}f'\left(\sqrt{۳+۱}\right)=\frac{-۱}{۲\times ۲}f'(۲)$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=-\frac{۱}{۳}}\quad y'(-۱)=\left(-\frac{۱}{۴}\right)\left(-\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱}{۱۲}$$

۹۹ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

می‌دانیم $\mathrm{gof}(x)=g(f(x))$ و $(\mathrm{gof})'(x)=g'(f(x))f'(x)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و فرض‌های صورت سؤال، مشتق تابع $y=\mathrm{fogoh}(x)$ را در نقطهٔ $x=\circ$ به دست می‌آوریم:

$$y=\mathrm{fogoh}(x)=f(g(h(x)))$$

$$\Rightarrow y'=(g(h(x)))'\times f'(g(h(x)))=h'(x)\times g'(h(x))\times f'(g(h(x)))$$

$$\xrightarrow{x=\circ} y'(\circ)=h'(\circ)\times g'(h(\circ))\times f'(g(h(\circ)))$$

$$\xrightarrow{h(\circ)=۱\ ,\ ۲h'(\circ)=۱} y'(\circ)=\frac{۱}{۲}\times g'(۱)\,f'(g(۱))$$

$$\xrightarrow{-g(۱)=۱\ ,\ -g'(۱)=۱} y'(\circ)=\frac{۱}{۲}\times(-۱)\,f'(-۱)$$

$$\xrightarrow{f'(-۱)=۱}\quad y'(\circ)=\frac{۱}{۲}(-۱)(۱)=-\frac{۱}{۲}$$

۱۰۰ گزینه ۳

$\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ برابر $f'(۴)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ کافی است $f'(۴)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)+۲(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(۵-۸)+۲(۱+۲)}{(۵-۸)^۲}=\frac{-\frac{۳}{۴}+۶}{۹}=\frac{۲۱}{۳۶}=\frac{۷}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۰۱ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) نکته: در توابع دارای عبارت قدر مطلقی، ریشهٔ سادهٔ عبارت درون قدر مطلق نقطهٔ گوشه‌ای (زاویه‌دار) یا مشتق‌ناپذیر تابع است؛ بنابراین در تابع $f(x) = |x|(x+a)$ نقطهٔ گوشه‌ای (زاویه‌دار) تابع، نقطهٔ $x = ۰$ است.

ب) شیب مماس راست در نقطهٔ $x = ۰$ برابر $f'_+(۰)$ و شیب مماس چپ در نقطهٔ $x = ۰$ برابر $f'_-(۰)$ است.

ج) مماس چپ و راست در نقطهٔ $x = ۰$ بر هم عمودند پس داریم: $f'_-(۰) \cdot f'_+(۰) = -۱$

گام دوم

$$x > ۰ : |x| = x \Rightarrow f(x) = x(x+a) = x^۲ + ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۲x + a \Rightarrow f'_+(۰) = ۲(۰) + a = ۰ + a = a$$

$$x < ۰ : |x| = -x \Rightarrow f(x) = (-x)(x+a) = -x^۲ - ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = -۲x - a \Rightarrow f'_-(۰) = -۲(۰) - a = ۰ - a = -a$$

$$f'_+(۰) f'_-(۰) = -۱ \Rightarrow a(-a) = -۱ \Rightarrow -a^۲ = -۱ \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

۱۰۲ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$$

گام دوم

باتوجه‌به مشخص بودن مقادیر $y'(۱)$، $f(۱)$ و $f'(۱)$، مقدار $g(۱)$ را حساب می‌کنیم (دلیل اینکه مقدار دقیق $g'(۱)$ ذکرنشده صفر بودن $f(۱)$ است).

$$y'(۱) = \frac{f'(۱)g(۱) - g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{(-۴)g(۱) - ۰}{g^۲(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{-۴g(۱)}{g^۲(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{-۴}{g(۱)} \Rightarrow g(۱) = -\frac{۴}{۳}$$

۱۰۳ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک مجموعه مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.
ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x>۱$ و $x<۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x=۱$ بررسی کنیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} ۲\sqrt{۴x-۳} = ۲\sqrt{۴-۳} = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ax^۳ + bx = a+b \\ f(۱) = ۲\sqrt{۴-۳} = ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} a+b=۲ \qquad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} ۳ax^۲ + b & ; \quad x<۱ \\ ۲\times \frac{۴}{۲\sqrt{۴x-۳}} & ; \quad x>۱ \end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که $f'_-(۱)$ و $f'_+(۱)$ موجود و باهم برابر باشند، داریم:

$$f'_-(۱) = f'_+(۱) \quad\Rightarrow\quad ۳a+b = \frac{۴}{\sqrt{۴-۳}} \quad\Rightarrow\quad ۳a+b=۴ \qquad (II)$$

دو معادلهٔ I و II را در یک دستگاه حل کرده و مجهول‌های a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} ۳a+b=۴ \\ a+b=۲ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۲a=۲ \quad\Rightarrow\quad a=۱ \xrightarrow{(I)} ۱+b=۲ \quad\Rightarrow\quad b=۱$$

۱۰۴ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

باتوجه‌به اینکه حد وجود دارد، پس صورت کسر نیز باید به ازای $x = ۴$ صفر باشد، بنابراین داریم:

$$f(x) + ۷ = ۰ \xrightarrow{x=۴} f(۴) = -۷$$

تابع f در $x = ۴$ مشتق‌پذیر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۴} \frac{f(x)+۷}{x-۴} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow f'(۴) = -\frac{۳}{۲} \ , \ f(۴) = -۷$$

گام دوم

$$\left(\frac{f(۲x)}{x}\right)' = \frac{۲f'(۲x)x - f(۲x)}{x^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۲} \frac{۲f'(۴)\times ۲ - f(۴)}{۴} = \frac{۲(-\frac{۳}{۲})(۲) - (-۷)}{۴}$$

$$= \frac{-۶+۷}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

۱۰۵ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲ - \sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲} \frac{۰ - \dfrac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x - ۱۸} = \lim_{x\to ۲} \frac{-۱}{(۱۰x-۱۸)\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}$$

$$= \frac{-۱}{۲\,(۴)} = \frac{-۱}{۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۰۶ گزینه ۴

$$\begin{cases} f(۲) = \dfrac{۲+۲}{۲-۱} = ۴ \\ g(۲) = ۴a + ۲b \end{cases} \xrightarrow{f(۲)=g(۲)} ۴a + ۲b = ۴ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x-۱-(x+۲)}{(x-۱)^۲} = \dfrac{-۳}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f'(۲) = -۳ \\ g'(x) = ۲ax + b \Rightarrow g'(۲) = ۴a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=g'(۲)} ۴a + b = -۳ \quad (۲)$$

باتوجه‌به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} ۴a + ۲b = ۴ \\ ۴a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow b = ۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰۷ گزینه ۲

$$f(x) = x\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۳(x+۲)-(۳x+۱)}{(x+۲)^۲} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۳x+۱}{x+۲})^۲}} \times x$$

$$= \sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}} + \frac{۵x}{۳(x+۲)^۲\sqrt[۳]{(\frac{۳x+۱}{x+۲})^۲}} \xrightarrow{x=-۳} ۲ - \frac{۵}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۰۸ گزینه ۲

خط $y = ۵x + a$ بر نمودار تابع $y = ۲x^۲ - ۳x + ۶$ در نقطه‌ای مماس می‌شود که شیب خط مماس برابر با ۵ باشد.

$$y = ۲x^۲ - ۳x + ۶ \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = \text{مشتق} \Rightarrow ۴x - ۳ = ۵ \Rightarrow x = ۲$$

پس خط در نقطه‌ای به طول ۲ بر تابع مماس است. به‌علاوه خط و تابع در این نقطه برخورد دارند. اگر $x = ۲$ را در تابع قرار دهیم داریم:

$$y(۲) = ۲(۲)^۲ - ۳(۲) + ۶ = ۸ - ۶ + ۶ = ۸ \Rightarrow \text{نقطهٔ تماس } (۲, ۸)$$

نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس باید صدق کند:

$$y = ۵x + a \xrightarrow{(۲,۸)} ۸ = ۵(۲) + a \Rightarrow a = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰۹ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه ضابطهٔ تابع شامل جزء صحیح است، وقتی $x \to (-3)^+$ داریم:

$$x \to (-3)^+ \Rightarrow x > -3 \Rightarrow [x] = -3, |x| = -x$$

$$\Rightarrow f(x) = (-3 + x)\sqrt[3]{9x} = (x - 3)\sqrt[3]{9x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{81x^2}}(x - 3)$$

$$\Rightarrow f'_{+}(-3) = \sqrt[3]{-27} + \frac{9}{3\sqrt[3]{729}}(-6) = -3 + \frac{9}{3 \times 9}(-6) = -3 - 2 = -5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۱۱۰ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است؛ بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱- می‌شود.
۲) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.
ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
د) معادلهٔ خط به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط داده‌شده را به فرم استاندارد نوشته و شیب آن را به دست می‌آوریم.

$$x - 3y = 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

پس طبق قسمت الف از گام اول، شیب خط مماس بر منحنی برابر ۳- است. فرض می‌کنیم خط در نقطهٔ $x = x_0$ بر منحنی مماس شده است بنابراین:

$$y = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 = -3$$

$$\Rightarrow 3{x_0}^2 + 6x_0 + 3 = 0 \xrightarrow{\div 3} x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow (x_0 + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$$

$$y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

پس نقطهٔ تماس دارای مختصات $(-1, 3)$ است. طبق قسمت د از گام اول، معادلهٔ خط مماس برابر است با:

$$y - 3 = -3(x + 1) \Rightarrow y = -3x - 3 + 3 \Rightarrow y = -3x$$

از میان گزینه‌ها، فقط نقطهٔ $(2, -6)$ در معادلهٔ خط صدق می‌کند.

۱۱۱ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(x)=x+\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow f'(۲)=۲+\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

آهنگ تغییر متوسط : $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{(۸-\frac{۱}{۴})-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\frac{\frac{۳۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{۳}=\frac{۱۱}{۴}$

اختلاف : $\frac{۱۱}{۴}-\frac{۹}{۴}=\frac{۲}{۴}=۰/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱۲ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=g'(۲)$$

ب) می‌دانیم:

$$(gof)'(۱)=f'(۱)\,g'(f(۱))$$

گام دوم

با استفاده از ضابطهٔ تابع $f(x)$، مقادیر $f(۱)$ و $f'(۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۵-x^{۲}}\Rightarrow f(۱)=\sqrt{۵-۱}=۲$$

$$f'(x)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۵-x^{۲}}}=\frac{-x}{\sqrt{۵-x^{۲}}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{-۱}{\sqrt{۵-۱}}=\frac{-۱}{\sqrt{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

پس مقدار $(gof)'(۱)$ برابر است با:

$$(gof)'(۱)=f'(۱)\,g'(f(۱))\xrightarrow{f(۱)=۲}(gof)'(۱)=f'(۱)\times g'(۲)=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=-\frac{۳}{۴}$$

۱۱۳ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$$

ب) منظور از نمو متغیر همان Δx است، پس داریم: $\Delta x = ۰/۲۱$

ج) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x=۱$ را به دست می‌آوریم:

$$x_۲=۱/۲۱ \text{ تا } x_۱=۱ \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع از } = \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(۱/۲۱\right)-f\left(۱\right)}{۱/۲۱-۱}$$

$$=\frac{\sqrt{۱/۲۱}-\sqrt{۱}}{۰/۲۱}=\frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱}=\frac{۰/۱}{۰/۲۱}=\frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۲۱}{۱۰۰}}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=۱$، ابتدا باید ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آوریم:

$$f\left(x\right)=\sqrt{x}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

بنابراین:

$$x=۱ \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } = f'\left(۱\right)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}=\frac{۱}{۲}$$

درنهایت، اختلاف آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر است با:

$$f'(۱)-\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱۰}{۲۱}=\frac{۲۱-۲۰}{۴۲}=\frac{۱}{۴۲}$$

۱۱۴ گزینه ۱

$$y=fog(x)\Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=۲} y'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))\Rightarrow ۶=g'(۲)f'(\frac{۴+۱}{۲-۱})\Rightarrow ۶=g'(۲)f'(۵)\quad (۱)$$

$$g(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}\Rightarrow g'(x)=\frac{۲(x-۱)-(۲x+۱)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}$$

$$\Rightarrow g'(۲)=-۳$$

$$(۱): ۶=-۳f'(۵)\Rightarrow f'(۵)=-۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱۵ گزینه ۴

ازآنجاکه این دو نمودار در یک نقطه بر یک خط مماس هستند، پس هم مقادیر و هم مشتق‌هایشان در این نقطه برابر است. داریم:

$$y_1 = x\sqrt{x} \Rightarrow y'_1 = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$
$$y_2 = x^2 + ax + b \Rightarrow y'_2 = 2x + a$$
$$y'_1(4) = y'_2(4) \Rightarrow 2 + \frac{4}{4} = 8 + a \Rightarrow a = -5$$

و نیز داریم:

$$y_1(4) = y_2(4) \Rightarrow 8 = 16 - 5(4) + b \Rightarrow 8 = -4 + b \Rightarrow b = 12$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱۶ گزینه ۴

راه‌حل اول: وارون تابع را حساب می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow y\sqrt{x} - y = \sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x}(y-1) = y+1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y+1}{y-1}$$
$$\Rightarrow x = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = g(x)$$
$$g'(x) = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \times \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(2) = 2 \times 3 \times \frac{-2}{1} = -12$$

راه‌حل دوم: اگر نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر f^{-1} باشد، آنگاه متناظر با آن نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر f خواهد بود.

$$2 = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow 2\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x}+1 \Rightarrow x = 9$$

پس نقطهٔ $A(9,2)$ روی f قرار دارد.

$$f'(x) = \frac{-2}{(\sqrt{x}-1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{-2}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{-1}{12}$$

پس شیب خط مماس بر f^{-1} در نقطهٔ $A'(2,9)$ برابر -12 است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از $x_۱$ تا $x_۲$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱ = ۲$ تا $x_۲ = ۳$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۳) - f(۲)}{۳ - ۲} = \frac{\frac{۳۶}{۹} - \frac{۳۶}{۴}}{۱} = \frac{۳۶}{۹} - \frac{۳۶}{۴} = ۴ - ۹ = -۵$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $x = \sqrt[۳]{۱۲}$، ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۳۶}{x^۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۰ \times x^۲ - ۲x(۳۶)}{x^۴} = -\frac{۷۲x}{x^۴} = -\frac{۷۲}{x^۳}$$

$$x = \sqrt[۳]{۱۲} \text{ آهنگ آنی در } = f'\left(\sqrt[۳]{۱۲}\right) = -\frac{۷۲}{\left(\sqrt[۳]{۱۲}\right)^۳} = -\frac{۷۲}{۱۲} = -۶$$

اختلاف آهنگ متوسط و لحظه‌ای برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'\left(\sqrt[۳]{۱۲}\right) = -۵ - (-۶) = ۱$$

۱۱۸

گزینه ۲

وقتی $x \to ۲$، صورت کسر برابر صفر می‌شود؛ اما حاصل حد وقتی $x \to ۲$، مخالف صفر است بنابراین باید به ازای $x = ۲$ مخرج کسر هم برابر صفر شود؛ یعنی:

$$ax + b = ۰ \xrightarrow{x=۲} ۲a + b = ۰ \qquad (I)$$

اکنون حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال رفع ابهام کرده و مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x - \sqrt{۳x - ۲}}{ax + b} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲} \frac{۱ - \frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}{a} = \frac{۱ - \frac{۳}{۲ \times ۲}}{a} = \frac{۱ - \frac{۳}{۴}}{a} = \frac{۱}{۴a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ (I) مقدار b برابر است با:

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + b = ۰ \Rightarrow b + ۱ = ۰ \Rightarrow b = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۱۹ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) برای این که تابع در $x = ۳$ پیوسته باشد، باید رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} f(x) = f(۳)$$

ب) وقتی $x \to ۳^+$ حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ شده و مبهم است. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حاصل حد راست تابع را در نقطهٔ $x = ۳$ به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} ax - ۳a - \frac{۳}{۸} = ۳a - ۳a - \frac{۳}{۸} = -\frac{۳}{۸}$$

$$f(۳) = ۳a - ۳a - \frac{۳}{۸} = -\frac{۳}{۸}$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱ - \sqrt{x - \sqrt{x+۱}}}{x - ۳} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} \frac{-\frac{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}{۲\sqrt{x - \sqrt{x+۱}}}}{۱} = -\frac{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{۴}}}{۲\sqrt{۳ - ۲}}$$

$$= -\frac{۱ - \frac{۱}{۴}}{۲} = -\frac{\frac{۳}{۴}}{۲} = -\frac{۳}{۸}$$

مشاهده می‌شود فارغ از اینکه مقدار a چند باشد، حاصل حد راست، حد چپ و مقدار تابع در نقطهٔ $x = ۳$ برابر است. پس به ازای هر مقدار a، تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۳$ پیوسته است.

۱۲۰ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

حاصل $\lim_{\Delta x\to ۰^-} \frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}$ بیانگر مقدار مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x = ۲$ یا همان $f'_{-}(۲)$ است.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را وقتی $x < ۲$ است، تعیین می‌کنیم سپس ضابطهٔ $f'(x)$ و مقدار $f'(-۲)$ را به دست می‌آوریم.

$$x < ۲ \Rightarrow x - ۲ < ۰ \Rightarrow |x - ۲| = -(x - ۲) = ۲ - x$$

$$f(x) = ۲ - x + \sqrt{۲x} \Rightarrow f'(x) = -۱ + \frac{۲}{۲\sqrt{۲x}} = \frac{۱}{\sqrt{۲x}} - ۱$$

$$\lim_{\Delta x\to ۰^-} \frac{f(۲+\Delta x) - f(۲)}{\Delta x} = f'_{-}(۲) = \frac{۱}{\sqrt{۲\times ۲}} - ۱ = \frac{۱}{\sqrt{۴}} - ۱ = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

۱۲۱ گزینه ۱

هنگامی‌که $x=۱$ باشد، مخرج کسر صفر می‌شود؛ درنتیجه باید صورت کسر در این حالت صفر شود تا حالت $\frac{۰}{۰}$ ایجاد شود که بعد از رفع ابهام حاصل حد، عددی غیرصفر باشد:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲-۱}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \sqrt{a+b}-۲=۰\Rightarrow a+b=۴$$

در اینجا برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$HOP:\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}}{۲x}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \frac{a}{۴\sqrt{a+b}}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{a+b=۴} a=۱۲\Rightarrow b=-۸$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۲۲ گزینه ۴

$$f(x)=\left(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\right)^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x)=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\right)^{\frac{-۱}{۳}}\left(\frac{(۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲)}{(۳x+۵)^۲}\right)$$

$$\Rightarrow f'(-۲)=\frac{۲}{۳}\left(\frac{-۴-۴}{-۶+۵}\right)^{-\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۶(-۱)-۳(-۴-۴)}{(-۶+۵)^۲}\right)$$

$$=\frac{۲}{۳}(۸)^{\frac{-۱}{۳}}(-۶+۲۴)=\frac{۲\times ۱۸}{۳\sqrt[۳]{۸}}=۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲۳ گزینه ۱

حد داده‌شده برابر مشتق تابع $f(x)$ در $x=۲$ است، بنابراین مشتق تابع را در $x=۲$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)$$

$$f'(x)=۳\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۲\times\left(\frac{-۷}{۲\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}(۲x-۳)^۲}\right)$$

$$\Rightarrow f'(۲)=۱۲\times\frac{-۷}{۲\times\sqrt{\frac{۲+۲}{۴-۳}}(۴-۳)^۲}=-۲۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۲۴ گزینه ۳

شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای بازه را به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{4x-5}{x+1}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=-5\\ f(8)=\frac{27}{9}=3\end{cases}\Rightarrow m=\frac{3-(-5)}{8-0}=1$$

بنابراین شیب خط مماس هم باید ۱ باشد:

$$f'(x)=\frac{4(x+1)-(4x-5)}{(x+1)^2}\Rightarrow\frac{9}{(x+1)^2}=1\Rightarrow(x+1)^2=9$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+1=3\Rightarrow x=2 & \text{ق.ق}\\ x+1=-3\Rightarrow x=-4 & \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

خطی را می‌خواهیم که در $x=2$ بر منحنی مماس است:

$$f(2)=\frac{3}{3}=1\Rightarrow(2,1),\ m=1$$

$$y-1=1(x-2)\xrightarrow{x=0}y=-1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲۵ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

ج) در محل برخورد یک منحنی با محور عرض‌ها، مقدار x برابر صفر است.

گام دوم

$$y = \frac{x^۲}{x - ۱} \xrightarrow{x=۲} y(۲) = \frac{۲^۲}{۲ - ۱} = ۴$$

$$y' = \frac{۲x(x - ۱) - x^۲}{(x - ۱)^۲} = \frac{۲x^۲ - ۲x - x^۲}{(x - ۱)^۲} = \frac{x^۲ - ۲x}{(x - ۱)^۲}$$

$$m_{\text{مماس}} = y'(۲) = \frac{۲^۲ - (۲ \times ۲)}{(۲ - ۱)^۲} = \frac{۴ - ۴}{۱} = ۰$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(۲, ۴)$ به‌صورت زیر است:

$$y - y(۲) = y'(۲)(x - ۲) \xrightarrow[x=۲]{y'(۲)=۰} y - ۴ = ۰ \Rightarrow y = ۴$$

پس محل برخورد خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(۲, ۴)$ یعنی خط $y = ۴$ با محور yها دارای عرض ۴ است.