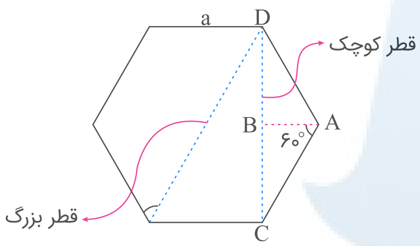
۱ گزینه ۲

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^۲$$

$$S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^۲ = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۶ \Rightarrow a = \sqrt{۶}$$



با استفاده از تقارن داریم:

$$DC = ۲BC = ۲AC \sin ۶۰^\circ = ۲\sqrt{۶} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a داریم:

الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{۳}$ است.

ب) طول قطر بزرگ آن $۲a$ است.

پ) مساحت آن $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^۲$ است.

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲

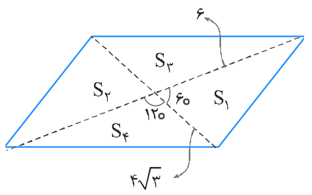
گزینه ۴

نکته: در مثلث ABC با اضلاع a، b و c، اگر زاویهٔ بین اضلاع a و b برابر با α باشد، مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \sin\alpha$$

بااستفاده از نکتهٔ بالا داریم:

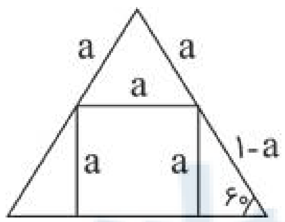
$$S_{۱} = S_{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin ۶۰^\circ = ۱۸$$
$$S_{۳} = S_{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin(۱۲۰^\circ) = ۱۸$$
$$S_{۱} + S_{۲} + S_{۳} + S_{۴} = ۴ \times ۱۸ = ۷۲$$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۳

گزینه ۱



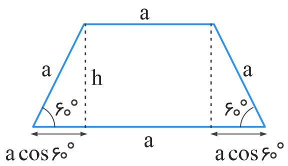
$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۱ - a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲a = \sqrt{۳} - \sqrt{۳}a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۲ + \sqrt{۳}} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} - ۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴
گزینه ۲

$$\text{(محیط)}\ P = 3a + 2a\cos 60^\circ + a \Rightarrow 30 = 5a \Rightarrow a = 6$$

$$S = \frac{(a+2a)h}{2} = \frac{3a \times a\sin 60^\circ}{2} \xrightarrow{a=6} S = \frac{3\sqrt{3}\times 6^2}{4} = 27\sqrt{3}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

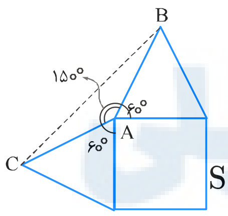
۵
گزینه ۴

$$\sin C = \frac{5}{13} \xrightarrow{\cos C>0} \cos C = \sqrt{1-\sin^2 C} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\begin{cases} \tan C = \dfrac{\sin C}{\cos C} = \dfrac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \dfrac{5}{12} \\ \tan C = \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{AH}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{AH}{9} \Rightarrow AH = \frac{45}{12} = \frac{15}{4} = 3/75$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۶
گزینه ۳



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 150^\circ = \frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\times 2\times 2\times \frac{1}{2} = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۷ گزینه ۳

$$2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{4}{3}\Rightarrow \sin^2 x+\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}=\frac{4}{3}$$

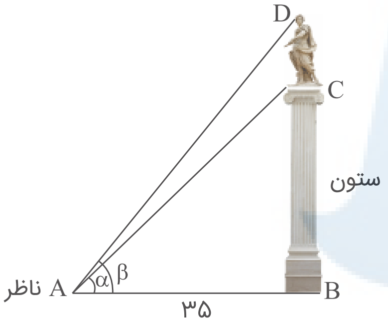
$$\Rightarrow \sin^2 x+1=\frac{4}{3}\Rightarrow \sin^2 x=\frac{1}{3}\Rightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\tan^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ گزینه ۲

ابتدا مسئله را به مدل هندسی تبدیل می‌کنیم:



$$\alpha=40^\circ \quad , \quad \beta=45^\circ$$

$$\tan\beta=\frac{BD}{35}\xrightarrow{\beta=45^\circ} BD=35\times\tan 45^\circ=35$$

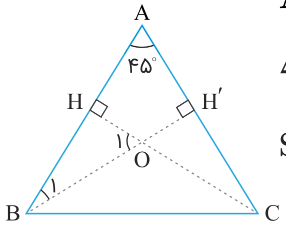
$$\tan\alpha=\frac{BC}{35}\xrightarrow{\alpha=40^\circ} BC=35\times\tan 40^\circ=\frac{8}{10}\times 35=28$$

بنابراین:

ارتفاع مجسمه : $CD=BD-BC=35-28=7$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۵
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۹ گزینه ۴



$$\hat{A} = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{B}_۱ = ۴۵$$

$$\Delta AHC : AH = \frac{AC}{\sqrt{۲}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow HB = HO = ۸ - ۴\sqrt{۲}$$

$$S_{OHB} = \frac{۱}{۲}(۸ - ۴\sqrt{۲})^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۶(۲ - \sqrt{۲})^۲ = ۸(۶ - ۴\sqrt{۲}) = ۱۶(۳ - ۲\sqrt{۲}) = \frac{۱۶}{۳ + ۲\sqrt{۲}}$$

.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰ گزینه ۳

داریم:

$$۱ + \cot^۲ C = ۱ + \frac{\cos^۲ C}{\sin^۲ C} = \frac{\sin^۲ C + \cos^۲ C}{\sin^۲ C} = \frac{۱}{\sin^۲ C} \Rightarrow ۱ + (\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲ = \frac{۱}{\sin^۲ C}$$

$$\Rightarrow \sin^۲ C = \frac{۴}{۹} \xrightarrow{C<۹۰^\circ} \sin C = \frac{۲}{۳}$$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{AH}{۹۶} \Rightarrow AH = \frac{۹۶ \times ۲}{۳} = ۶۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ گزینه ۲

$$\tan(\frac{۱۷\pi}{۶}) = \tan(\frac{۱۸\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶}) = \tan(-\frac{\pi}{۶}) = -\tan\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sin(\frac{۱۱\pi}{۳}) = \sin(\frac{۱۲\pi}{۳} - \frac{\pi}{۳}) = \sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(\frac{۱۰\pi}{۳}) = \cos(۳\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

حاصل عبارت برابر است با:

$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶} - \frac{۱}{۲} = ۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۴

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌نویسیم. می‌دانیم:

$$\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right)=\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

$$\sin(۳\pi+\theta)=\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

$$\frac{\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta-(-\cos\theta)}{\sin\theta-(-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$

باتوجه‌به اینکه مقدار $\tan\theta$ در صورت سؤال داده شده است، صورت و مخرج کسر را بر $\cos\theta$ تقسیم می‌کنیم تا کسر داده‌شده برحسب $\tan\theta$ به دست آید.

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{۲\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\tan\theta+۱}{۲\tan\theta}=\frac{۰/۲+۱}{۲(۰/۲)}=\frac{۱/۲}{۰/۴}=۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۳ گزینه ۱

$$\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}\left(\frac{۱}{\sin x}-\sin x\right)=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}}\left(\frac{۱-\sin^۲ x}{\sin x}\right)$$

$$=\frac{\tan x}{\frac{۱}{\frac{۱}{|\cos x|}}}\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x}\times|\cos x|\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}$$

اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ باشد آنگاه $\cos x<۰$ است، پس $|\cos x|=-\cos x$ است. بنابراین:

$$\frac{\sin x}{\cos x}\times(-\cos x)\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=-\cos^۲ x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۴ گزینه ۲

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}=\tan(\frac{۱۲\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=\tan(-\frac{\pi}{۴})=-۱$$
$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=\sin(\frac{۱۶\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin(-\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\cos(\frac{۱۲\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos(\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$A=\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=-۱+(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})=-۱+\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۵ گزینه ۳

در فرض تست مقدار $\tan ۲۰^\circ$ به ما داده شده است، پس ابتدا تمامی زوایا را به‌صورت جمع یا تفاضل کمان‌های معروف و زاویهٔ ۲۰° می‌نویسیم. عبارت نهایی را برحسب $\tan ۲۰^\circ$ به دست آورده و حاصل عددی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\frac{\sin ۲۵۰^\circ+\sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ-\cos ۱۱۰^\circ}=\frac{\sin(۲۷۰-۲۰^\circ)+\sin(۷۲۰^\circ-۲۰^\circ)}{\cos(۵۴۰^\circ+۲۰^\circ)-\cos(۹۰^\circ+۲۰^\circ)}$$
$$=\frac{-\cos ۲۰^\circ+\sin(-۲۰^\circ)}{\cos(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)-(-\sin ۲۰^\circ)}=\frac{-\cos ۲۰^\circ-\sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}$$
$$\xrightarrow{\div\cos ۲۰^\circ} A=\frac{\frac{-\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}-\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}{\frac{-\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}+\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}=\frac{-۱-\tan ۲۰^\circ}{-۱+\tan ۲۰^\circ}=\frac{-۱-۰/۴}{-۱+۰/۴}=\frac{-۱/۴}{-۰/۶}=\frac{۷}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۶ گزینه ۴

$$A=\sqrt{۱+\tan^۲x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\sin^۲x)=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲x}}\left(۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-\sin^۲x\right)$$
$$=\frac{۱}{|\cos x|}(۲\times\frac{۱}{۲}-\sin^۲x)=\frac{۱-\sin^۲x}{|\cos x|}=\frac{\cos^۲x}{|\cos x|}$$

چون $\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}$ است، یعنی x در ناحیهٔ سوم قرار دارد و درنتیجه $|\cos x|=-\cos x$ است. پس:

$$A=\frac{\cos^۲x}{-\cos x}=-\cos x$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

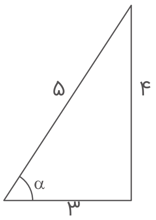
۱۷ گزینه ۳

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})=-\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cot\alpha$$

اگر $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$ باشد، با رسم مثلث سایر نسبت‌های مثلثاتی α را پیدا می‌کنیم:



$$\tan\alpha=\frac{۴}{۳}\ ,\cot\alpha=\frac{۳}{۴}$$

$$\sin\alpha=-\frac{۴}{۵}\ ,\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

حاصل $:\cos\alpha(-\sin\alpha)-(-\cot\alpha)=-\frac{۳}{۵}(\frac{۴}{۵})+\frac{۳}{۴}$

$$=-\frac{۱۲}{۲۵}+\frac{۳}{۴}=\frac{-۴۸+۷۵}{۱۰۰}=\frac{۲۷}{۱۰۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۸ گزینه ۱

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

گام اول

با توجه به اینکه در صورت سؤال مقدار $\tan ۱۵^\circ$ داده شده است، سعی می کنیم تمام زوایا را بر حسب زاویهٔ ۱۵° به دست آوریم.

گام دوم

$$A=\frac{\cos ۲۸۵^\circ-\sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ-\sin ۱۰۵^\circ}=\frac{\cos(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)-\sin(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)}{\sin(۵۴۰^\circ-۱۵)-\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)}$$
$$=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۱۵^\circ)-\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۱۵^\circ)}{\sin(۳\pi-۱۵^\circ)-\sin(\frac{\pi}{۲}+۱۵^\circ)}=\frac{\sin ۱۵^\circ-(-\cos ۱۵^\circ)}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}=\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}$$

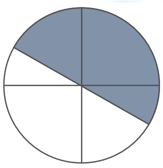
برای این که در کسر داده شده $\tan ۱۵^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۱۵^\circ$ تقسیم می کنیم. بنابراین داریم:

$$A=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}+\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}-\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}$$
$$=\frac{\tan ۱۵^\circ+۱}{\tan ۱۵^\circ-۱}=\frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱}=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲}=-\frac{۱۲۸}{۷۲}=-\frac{۱۶}{۹}$$

۱۹ گزینه ۲

$$-\frac{\pi}{۱۲}<x<\frac{۵\pi}{۱۲}\Rightarrow\frac{-\pi}{۶}<۲x<\frac{۵\pi}{۶}$$

حداقل مقدار سینوس در این بازه $-\frac{۱}{۲}$ و حداکثر آن ۱ است.



$$-\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۴}\leq ۱\xrightarrow{\times ۴}-۲<m-۱\leq +۴\Rightarrow -۱<m\leq ۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۰ گزینه ۳

$$\sin\frac{17\pi}{3}=\sin(\frac{18\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\sin(6\pi-\frac{\pi}{3})=\sin(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{17\pi}{6})=\cos(\frac{17\pi}{6})=\cos(\frac{18\pi}{6}-\frac{\pi}{6})=\cos(3\pi-\frac{\pi}{6})$$

$$=\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\frac{19\pi}{4})=\tan(\frac{20\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=\tan(-\frac{\pi}{4})=-1$$

$$\sin(-\frac{11\pi}{6})=-\sin\frac{11\pi}{6}=-\sin(\frac{12\pi}{6}-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$(-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-1)(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۱ گزینه ۴

$$\tan(285^\circ)=\tan(270^\circ+15^\circ)=-\cot(15^\circ)$$

$$\tan(-165^\circ)=-\tan(165^\circ)=-\tan(180^\circ-15^\circ)=\tan(15^\circ)$$

$$\sin(1095^\circ)=\sin(1080^\circ+15^\circ)=\sin 15^\circ$$

$$\cos(255^\circ)=\cos(270^\circ-15^\circ)=-\sin(15^\circ)$$

$$\tan(285^\circ)\tan(-165^\circ)-\sin(1095^\circ)\cos(255^\circ)=-\cot(15^\circ)\tan(15^\circ)+\sin^2(15^\circ)$$

$$=-1+\sin^2(15^\circ)=-\cos^2(15^\circ)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۲

گزینه ۱

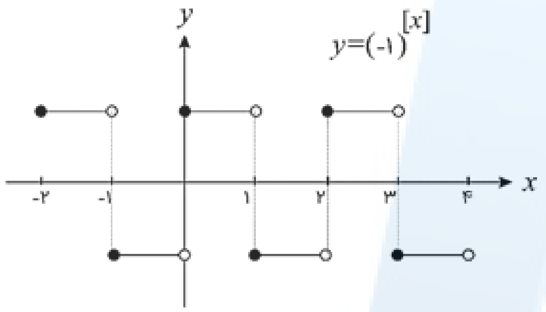
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) می‌دانیم به ازای هر x دلخواه $|f(x)| \geq ۰$ است.
ب) $xy \geq ۰$ همواره برقرار است هرگاه، x و y در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشد.

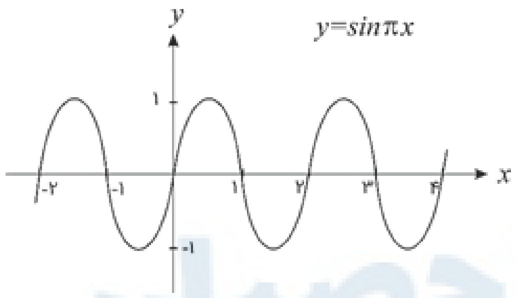
گام دوم

باتوجه‌به گام اول، نامساوی $(-۱)^{[x]}f(x) \geq ۰$ زمانی برقرار است که دو تابع $y = (-۱)^{[x]}$ و $y = f(x)$ در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشند. ابتدا نمودار تابع $y = (-۱)^{[x]}$ را رسم می‌کنیم:



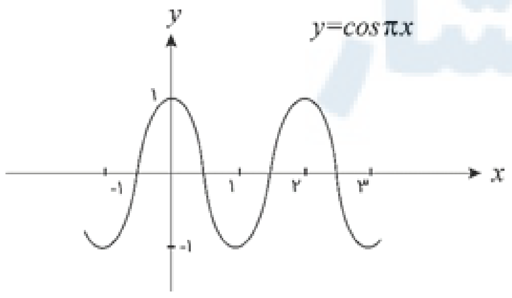
اکنون با رسم نمودار هریک از گزینه‌ها، بررسی می‌کنیم کدام‌یک از آن‌ها در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-۱)^{[x]}$ هم‌علامت است.

گزینهٔ ۱:



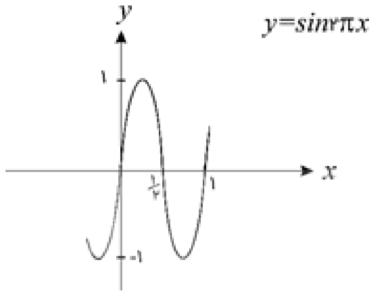
همان‌طور که مشاهده می‌شود، این تابع در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-۱)^{[x]}$ هم‌علامت است، پس این گزینه جواب سؤال خواهد بود.

گزینهٔ ۲:



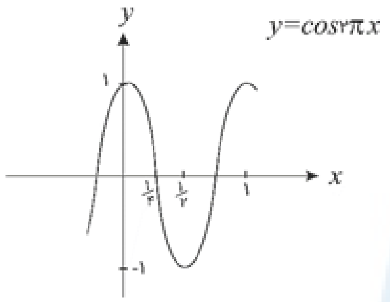
باتوجه‌به نمودار فوق، این تابع در بازه‌های زیادی ازجمله در بازهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ با تابع $y = (-۱)^{[x]}$ هم‌علامت نیست.

گزینهٔ ۳:



مقدار تابع در بازهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ منفی است درحالی‌که تابع $y=(-۱)^{[x]}$ در این بازه دارای علامت مثبت است.

گزینهٔ ۴:



با مقایسهٔ نمودار بالا با نمودار تابع $y=(-۱)^{[x]}$، این گزینه هم جواب سؤال نیست.

۲۳ گزینه ۳

$\cos\alpha=\frac{۲}{۳}$ و α در ناحیهٔ چهارم است:

$$\sin\alpha=-\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}}=-\frac{\sqrt{۵}}{۳}\quad,\quad \tan^{۲}\alpha=\frac{\sin^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}=\frac{\frac{۵}{۹}}{\frac{۴}{۹}}=\frac{۵}{۴}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})-\sin(\alpha-\pi)}{|\tan^{۲}\alpha-۱|}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\frac{۵}{۴}-۱}=\frac{\frac{۲-\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۴ گزینه ۲

$$\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰)+\tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$$
$$=\tan(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)+\tan(۳۶۰^\circ+۱۲۰^\circ)\sin(۷۲۰^\circ+۱۲۰^\circ)$$
$$=\tan(-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)+\tan(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)$$
$$=(-\tan(۶۰^\circ))(-\cos(۳۰^\circ))+(-\tan(۶۰^\circ))\sin(۶۰^\circ)$$
$$=(-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۲۵ گزینه ۱

طرفین تابع را در $\sin^۲x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲x=۳۲\sin^۲x\cos^۲x\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$=۸\sin^۲(۲x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$=۲\sin^۲(۴x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$=\frac{۱}{۳۲}\sin^۲(۳۲x)\Rightarrow f(x)=\frac{\sin^۲(۳۲x)}{۳۲\sin^۲x}$$

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\sin^۲\frac{۳۲\pi}{۱۲}}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\sin^۲(\frac{\pi}{۳})}{۳۲\sin^۲(\frac{\pi}{۱۲})}$$
$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\frac{۳}{۴}}{۳۲\times\frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}$$
$$=\frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۳}{۳۲(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۳۲}=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۶ گزینه ۱

$$۲\sin^۲x+۳\cos x=۰\xrightarrow{\sin^۲x=۱-\cos^۲x}۲-۲\cos^۲x+۳\cos x=۰\Rightarrow ۲\cos^۲x-۳\cos x-۲=۰$$
$$\Rightarrow\cos x=\frac{۳\pm\sqrt{۹+۱۶}}{۴}=\begin{cases}۲ & \text{غ‌ق‌ق}\\ -\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow\cos x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۷ گزینه ۴

$$\begin{cases} y_{max} = |a| + c = \frac{۵}{۲} \\ y_{min} = -|a| + c = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \quad |a| = \frac{۳}{۲} \;,\; c = ۱$$

$$\Rightarrow y = ۱ + a\cos bx \;;\; y(۰) = ۱ + a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

پس تابع به صورت $y = ۱ - \frac{۳}{۲}\cos bx$ می‌باشد و حاصل ac برابر است با:

$$ac = \frac{-۳}{۲} \times ۱ = \frac{-۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۸ گزینه ۴

در این گونه سؤال ها ابتدا تمام نسبت های مثلثاتی را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با توجه به رابطهٔ $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$ ، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ مرتب می کنیم.

$$۲\sin^۲ x = ۳\cos x \Rightarrow ۲(۱-\cos^۲ x) = ۳\cos x$$
$$\Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x = ۳\cos x \Rightarrow ۲\cos^۲ x + ۳\cos x - ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (۲\cos x - ۱)(\cos x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \\ \cos x = -۲ \text{ غ.ق.} \end{cases}$$

معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ دارای جواب $x = ۲k\pi \pm \alpha$ است. هم چنین توجه کنید که معادلهٔ $\cos x = A$ به ازای $A > ۱$ و $A < -۱$ فاقد جواب است.

پس جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = \frac{۱}{۲}$ برابر است با:

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۲۹ گزینه ۱

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha) = -\sin ۲\alpha$$
$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha - ۲\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$$
$$\xrightarrow[۲\sin\alpha\cos\alpha = \sin ۲\alpha]{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱} -\sin ۲\alpha = -\frac{۳}{۴} \xrightarrow{\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha) = -\sin ۲\alpha} \cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha) = -\frac{۳}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۰ گزینه ۲

$$y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = a + b\sin x$$

مقدار تابع در $-\frac{۵\pi}{۶}$ صفر است. پس:

$$y(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b\sin(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b(-\frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow b = ۲a$$

بنابراین: $y = a + ۲a\sin x$. به‌علاوه باتوجه‌به اینکه $y(۰) > ۰$ می‌باشد، پس $a > ۰$ است و ماکزیمم تابع زمانی رخ می‌دهد که $\sin x = ۱$ باشد.

$$\max = ۳ \Rightarrow a + ۲a = ۳ \Rightarrow a = ۱$$
$$\Rightarrow y = ۱ + ۲\sin x$$
$$y(\frac{\pi}{۶}) = ۱ + ۲(\frac{۱}{۲}) = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۱ گزینه ۳

ظاهر سؤال ممکن است کمی سخت به نظر برسد، ولی با انجام تغییرات زیر حل آن بسیار ساده می شود:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \cos(\frac{\pi}{۲} + x) = -\sin x, \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{۲} + x) - ۲\sin(\pi - x) + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - ۲\sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x - ۲\sin x + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (\sin x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۳۲ گزینه ۱

اختلاف max و min تابع ۱۰ واحد است. پس $|a| = ۵$ خواهد بود. حال چون تابع از $x = ۰$ نزولی شده، پس $a = ۵$ است. همچنین تابع دو واحد پایین آمده است، پس $b = -۲$ است.

$$f(x) = ۵\cos x - ۲ \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۳}} f(\frac{\pi}{۳}) = ۵\cos\frac{\pi}{۳} - ۲ = ۵(\frac{۱}{۲}) - ۲ = \frac{۵}{۲} - ۲ = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۳

گزینه ۱

به فرمول های ۲α توجه کنید:

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha, \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$$
$$۲\cos^۲ x + ۲\sin x\cos x = ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ = -۲\sin x\cos x \Rightarrow \cos ۲x = -\sin ۲x$$
$$\xrightarrow[\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)]{-\sin\alpha=\sin(-\alpha)} \sin(\frac{\pi}{۲} - ۲x) = \sin(-۲x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{۲} - ۲x = ۲k\pi - ۲x \Rightarrow \frac{\pi}{۲} = ۲k\pi \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ \frac{\pi}{۲} - ۲x = ۲k\pi + \pi - (-۲x) \Rightarrow -۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\div(-۴)} x = \frac{-k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته: چون $k \in \mathbb{Z}$ است پس k- را همان k در نظر می‌گیریم. بنابراین گزینهٔ "۱" صحیح است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳۴

گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

می‌دانیم: $\tan\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\alpha}{۲}\right) = -\cot\frac{\alpha}{۲}$

گام دوم

با استفاده از فرمول‌های کمان ۲α، رابطهٔ $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha} = \frac{۱}{۲}$ را ساده کرده و مقدار خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha} = \frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۱+۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲} - ۱} = \frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}} = \tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow \cot\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{\tan\frac{\alpha}{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲ \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\alpha}{۲}\right) = -\cot\frac{\alpha}{۲} = -۲$$

۳۵ گزینه ۴

طرفین رابطه را در $\sin^۲ ۳x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲ ۳x = ۱۶ \sin^۲ ۳x \cos^۲ ۳x \cos^۲ ۶x \cos^۲ ۱۲x \cos^۲ ۲۴x$$
$$\Rightarrow f(x) \sin^۲ ۳x = ۴ \sin^۲ ۶x \cos^۲ ۶x \cos^۲ ۱۲x \cos^۲ ۲۴x$$
$$= \sin^۲ ۱۲x \cos^۲ ۱۲x \cos^۲ ۲۴x$$
$$= \frac{۱}{۴} \sin^۲ ۲۴x \cos^۲ ۲۴x = \frac{۱}{۱۶} \sin^۲ ۴۸x$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin^۲ ۴۸x}{۱۶\sin^۲ ۳x}$$

$$f(\frac{\pi}{۳۶}) = \frac{\sin^۲ \frac{۴۸\pi}{۳۶}}{۱۶ \sin^۲ \frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\sin^۲(\frac{\pi}{۳})}{۱۶\sin^۲ \frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۱ - \cos \frac{\pi}{۶})}$$
$$= \frac{۳}{۴ \times ۸ \times (۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲})} = \frac{۳}{۱۶(۲ - \sqrt{۳})} = \frac{۳(۲ + \sqrt{۳})}{۱۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۶ گزینه ۱

داریم:

$$\tan\alpha - \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^۲\alpha - \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{-\cos ۲\alpha}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha} = -۲\cot ۲\alpha$$

بنابراین $\tan\alpha - \cot\alpha = -۲\cot ۲\alpha$، پس:

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -۲\cot(۲\pi x)$$

دورهٔ تناوب تابع $\tan(ax)$ و $\cot(ax)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ برابر $\frac{\pi}{|۲\pi|}$ است، یعنی $\frac{۱}{۲}$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۷ گزینه ۲

$$۲\cos(۳x) = -۲ - ۵\sin^۲ x$$

اگر برد دو طرف تساوی را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$-۲ \leq ۲\cos(۳x) \leq ۲ \quad , \quad -۷ \leq -۲ - ۵\sin^۲ x \leq -۲$$

پس دو طرف تساوی فقط به ازای ۲− برقرار خواهد بود.

$$\begin{cases} ۲\cos(۳x) = -۲ \Rightarrow \cos(۳x) = -۱ \Rightarrow ۳x = (۲k-۱)\pi \Rightarrow x = (۲k-۱)\dfrac{\pi}{۳} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ -۲ - ۵\sin^۲ x = -۲ \Rightarrow \sin^۲ x = ۰ \Rightarrow x = k'\pi \quad , \ k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های مشترک دو معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\{-\pi , \frac{-\pi}{۳} , \frac{\pi}{۳} , \pi\} \cap \{-\pi , ۰ , \pi\} = \{-\pi , \pi\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۸ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$ را به معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x = -\cos x$ تبدیل می‌کنیم.
ب) به‌جای $-\cos x$ عبارت $\cos(\pi - x)$ را قرار داده و جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos ۳x = \cos(\pi - x) \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{۲} + \dfrac{\pi}{۴} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \dfrac{\pi}{۲} \end{cases}$$

جواب کلی $x = \dfrac{k\pi}{۲} + \dfrac{\pi}{۴}$ هر دو جواب به‌دست‌آمده را شامل می‌شود.

۳۹ گزینه ۲

$$\frac{\sin 3x+\sin 2x}{1+\cos x}=0$$

برای آنکه کسر صفر شود باید صورت آن صفر باشد.

$$\sin 3x+\sin 2x=0\Rightarrow \sin 3x=-\sin 2x\Rightarrow \sin 3x=\sin(-2x)$$

$$\begin{cases}3x=2k\pi-2x\Rightarrow 5x=2k\pi\Rightarrow x=\dfrac{2k\pi}{5} & \checkmark\\ 3x=2k\pi+\pi-(-2x)\Rightarrow x=2k\pi+\pi & \times\end{cases}$$

توجه کنید که به ازای $x=2k\pi+\pi$ مخرج یعنی $1+\cos x$ صفر می‌شود؛ بنابراین جواب کلی همان $x=\dfrac{2k\pi}{5}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

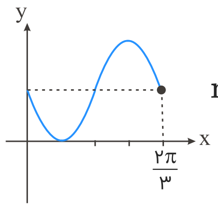
۴۰ گزینه ۴

طبق نمودار : $T=\dfrac{2\pi}{3}$

از روی ضابطه : $T=\dfrac{2\pi}{|m|}$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{|m|}\Rightarrow |m|=3\Rightarrow m=\pm 3$$

چون باتوجه‌به نمودار تابع باید ابتدا min و سپس max داشته باشد، بنابراین:



$$m=3\Rightarrow y=1-\sin 3x\xrightarrow{x=\frac{7\pi}{6}} y\left(\frac{7\pi}{6}\right)=1-\sin\left(3\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$=1-\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)=1-(-1)=2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۱ گزینه ۲

$$2\sin x\cos 2x+\sin x=1\Rightarrow 2\sin x(1-2\sin^2 x)+\sin x=1$$

$$\Rightarrow 3\sin x-4\sin^3 x=1\Rightarrow \sin 3x=1\Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{9\pi}{6}\right\}$$

مجموع جواب‌ها $\dfrac{15\pi}{6}$ یعنی $\dfrac{5\pi}{2}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۲

گزینه ۱

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} T = \frac{۵\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶} = \frac{۴\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳} \\ T = \frac{۲\pi}{|b|} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۳ \Rightarrow b = \pm ۳$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = ۱ \\ \min : -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -۳,\ c = -۱ \\ b = ۳,\ c = -۱ \end{cases}$$

فقط حالت $b = ۳, c = -۱$ را در گزینه‌ها داریم، پس گزینهٔ ۱ صحیح است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴۳

گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، معادله را برحسب $\sin x$ نوشته و حل می‌کنیم. جواب معادله را با $x = ۲k\pi + \frac{i\pi}{۶}$ مطابقت داده و مقادیر i را مشخص می‌کنیم.

$$\cos ۲x = \sin x \Rightarrow ۱ - ۲\sin^۲ x = \sin x$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow (۲\sin x - ۱)(\sin x + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \\ \sin x = -۱ \Rightarrow \sin x = \sin \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{۹\pi}{۶} \end{cases}$$

باتوجه‌به جواب‌های به‌دست‌آمده مقادیر i برابر است با:

$$i = \{۱, ۵, ۹\}$$

۴۴

گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار $f(\pi) = -\frac{۳}{۲}$ است، پس:

$$-\frac{۳}{۲} = a + b\sin(\pi + \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow a + b(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = -\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \quad (۱)$$

باتوجه‌به نمودار تابع $b > ۰$ است و همچنین چون ماکزیمم تابع $\sqrt{۳}$ است، پس:

$$a + |b| = \sqrt{۳} \xrightarrow{b>۰} a + b = \sqrt{۳} \quad (۲)$$

با حل دستگاه داریم:

$$-۲\begin{cases} a + b = \sqrt{۳} \\ ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a - ۲b = -۲\sqrt{۳} \\ ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} -b(۲ + \sqrt{۳}) = -(۳ + ۲\sqrt{۳}) \Rightarrow b = \frac{\sqrt{۳}(۲ + \sqrt{۳})}{۲ + \sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴۵

گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) با در نظر گرفتن $\cot\frac{x}{2} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}$ معادله را برحسب $\tan\frac{x}{2}$ به دست می‌آوریم. معادله به یک معادلهٔ درجه‌دو برحسب $\tan\frac{x}{2}$ تبدیل و با حل معادلهٔ درجه‌دو، حاصل $\tan\frac{x}{2}$ را تعیین می‌کنیم.

ب) با استفاده از فرمول کمان $\tan 2x$، ابتدا $\tan x$ و سپس $\tan 2x$ را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \tan\frac{x}{2} - \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^2\frac{x}{2} - 1}{\tan\frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \tan^2\frac{x}{2} - 1 = \tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

محاسبهٔ $\tan x$:

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2(1\pm\sqrt{5})^2}{1-(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})^2} = -2$$

محاسبهٔ $\tan 2x$:

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1-(-2)^2} = \frac{-4}{1-4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

۴۶

گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

می‌دانیم:

$$\sin\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۱}{۲},\ \sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x,\ \sin(\pi+x)=-\sin x$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، معادله را ساده کرده سپس حل می‌کنیم:

$$\sin\frac{۵\pi}{۶}+\sin(\frac{\pi}{۲}+x)\sin(\pi+x)=\frac{۱}{۲}-\cos x\sin x=۰$$

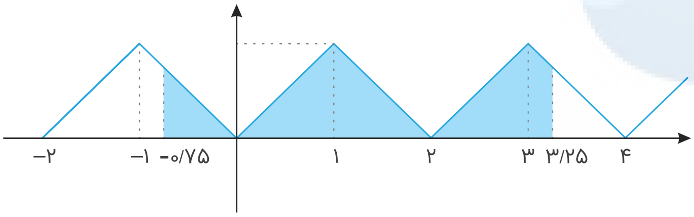
$$\Rightarrow \cos x\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲\cos x\sin x=۱\Rightarrow \sin ۲x=۱\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

۴۷

گزینه ۱

نمودار تابع به‌صورت زیر خواهد بود:



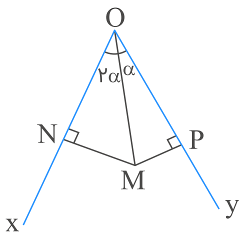
$$S=۲\times\frac{۱\times ۲}{۲}=۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۸

گزینه ۴

فرض کنیم $M\hat{O}y = \alpha$. پس $x\hat{O}M = ۲\alpha$ و داریم:



$$\left.\begin{array}{l} O\overset{\Delta}{N}M : \sin ۲\alpha = \dfrac{MN}{OM} \\ O\overset{\Delta}{P}M : \sin\alpha = \dfrac{MP}{OM} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{رابطهٔ اول را بر رابطهٔ دوم تقسیم می‌کنیم}} \frac{\sin ۲\alpha}{\sin\alpha} = \frac{MN}{MP}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = ۲\cos\alpha = ۲\left(\frac{OP}{OM}\right) = \frac{۲OP}{OM}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۴۹

گزینه ۲

می‌دانیم $\tan\frac{۲\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$ و $\sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = -\cos x$ است. از رابطهٔ داده‌شده مقدار $\cos x$ را حساب کرده و با استفاده از فرمول $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$، حاصل $\cos ۲x$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}\sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱ \Rightarrow (-\sqrt{۳})(-\cos x) = ۱ \Rightarrow \sqrt{۳}\cos x = ۱ \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

حالا حاصل $\cos ۲x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱ = ۲(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲ - ۱ = ۲(\frac{۱}{۳}) - ۱ = \frac{۲}{۳} - ۱ = -\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۵۰

گزینه ۲

در $x = ۰$، مقدار تابع برابر است با $y = ۳$؛ لذا با جایگذاری در تابع خواهیم داشت $a = ۳$. به‌سادگی نتیجه می‌شود که به ازای $x = \frac{۲۵}{۳}$، مقدار تابع برابر است با $y = ۲/۵$.

$$T = \frac{۲\pi}{|\pi b|} = ۴ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = -\frac{۱}{۲} \checkmark \ , \ b = \frac{۱}{۲} \times \ , \ y = ۳ + \sin(\frac{-\pi}{۲}x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۲۵}{۳}} y = ۳ + \sin(\frac{-۲۵}{۶}\pi) \Rightarrow y = ۳ + \sin(-۴\pi - \frac{\pi}{۶}) \Rightarrow y = ۳ - \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۵۱

گزینه ۳

برای حل معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر کمک می گیریم:

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲} - x) = \cot x$$

$$\cos\frac{۴\pi}{۳} = \cos(\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

$$(\sin x - \tan x)\tan(\frac{۳\pi}{۲} - x) = \cos\frac{۴\pi}{۳}$$

$$(\sin x - \tan x)\cot x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x \cot x - \tan x \cot x = -\frac{۱}{۲}$$

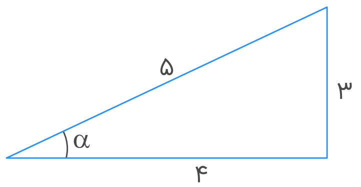
$$\Rightarrow \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} - ۱ = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

جواب های معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ از رابطهٔ $x = ۲k\pi \pm \alpha$ به دست می آید.

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۵۲ گزینه ۲



$$\tan\alpha = \frac{3}{4} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{4}{3} \quad , \quad \sin\alpha = -\frac{3}{5} \quad , \quad \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha - \cos\alpha}{\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha}{\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5}}{\frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{2}} = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{6}{5} + 1\right)}{\frac{16 - 9}{24}} = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{11}{5}\right)}{\frac{7}{24}} = \frac{4(11)(24)}{5(5)(7)} = \frac{1056}{175}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵۳

گزینه ۴

$$۴\sin x \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱ \Rightarrow ۴\sin x(-\cos x) = ۱$$

$$\Rightarrow -۴ \times \frac{۱}{۲}\sin ۲x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = -\frac{۱}{۲} = \sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} & (۱) \\ x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲} & (۲) \end{cases}$$

تعداد جواب‌ها را در دسته‌های مختلف به دست می‌آوریم:

(۱)

k	۱	۲
x	$\pi - \frac{\pi}{۱۲}$	$۲\pi - \frac{\pi}{۱۲}$

(۲)

k	۰	۱
x	$\frac{۷\pi}{۱۲}$	$\pi + \frac{۷\pi}{۱۲}$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\pi - \frac{\pi}{۱۲} + ۲\pi - \frac{\pi}{۱۲} + \frac{۷\pi}{۱۲} + \pi + \frac{۷\pi}{۱۲} = ۴\pi + \pi = ۵\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۴

گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

تابع $\sqrt{\sin \pi x - ۱}$ در صورتی تعریف شده است که $\sin \pi x - ۱ \geq ۰$ باشد و چون همواره $\sin \pi x \leq ۱$ برقرار است پس باید $\sin \pi x = ۱$ باشد. در این حالت $x = ۲k + \frac{۱}{۲}$ می شود که یک عدد غیر صحیح است، بنابراین حاصل $[x] + [-x]$ برابر عدد ۱- می شود.

گام دوم

حالا سراغ محاسبهٔ مقدار $f(x)$ و هم چنین مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(x))$ می رویم:

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - ۱} = -۱ + ۰ = -۱$$

$$f(-\frac{۱}{۲}f(x)) = f(-\frac{۱}{۲}(-۱)) = f(\frac{۱}{۲}) = [\frac{۱}{۲}] + [-\frac{۱}{۲}] + \sqrt{\sin\frac{\pi}{۲} - ۱}$$

$$= ۰ - ۱ + \sqrt{۱ - ۱} = -۱ + ۰ = -۱$$

۵۵ گزینه ۴

در هر سه پرانتز از اتحاد $1+\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)(1+\cos 8\alpha)=\frac{1}{8}\Rightarrow(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)=\frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow \cos^2\alpha\cos^2 2\alpha\cos^2 4\alpha=\frac{1}{64}\Rightarrow|\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha|=\frac{1}{8}$$

دو طرف معادلهٔ بالا را در $|\sin\alpha|$ ضرب می‌کنیم:

$$|\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha|=\frac{1}{8}|\sin\alpha|$$

حالا از اتحاد $\sin A\cos A=\frac{1}{2}\sin 2A$ سه بار استفاده می‌کنیم:

$$|\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\cos 2\alpha}_{\frac{1}{4}\sin 4\alpha}\cos 4\alpha}_{\frac{1}{8}\sin 8\alpha}|=\frac{1}{8}|\sin\alpha|\Rightarrow|\sin 8\alpha|=|\sin\alpha|\Rightarrow\begin{cases}\sin 8\alpha=\sin\alpha\\ \sin 8\alpha=\sin(-\alpha)\end{cases}$$

هر دو معادله را حل می‌کنیم و بزرگ‌ترین جواب هرکدام در بازهٔ $[0,\pi]$ را می‌نویسیم:

$$1)\ \sin 8\alpha=\sin\alpha\Rightarrow\begin{cases}8\alpha=2k\pi+\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{2k\pi}{7}\Rightarrow\alpha_{max}=\frac{6\pi}{7}\\ 8\alpha=2k\pi+\pi-\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{2k\pi+\pi}{9}\Rightarrow\alpha_{max}=\frac{7\pi}{9}\end{cases}$$
$$2)\ \sin 8\alpha=\sin(-\alpha)\Rightarrow\begin{cases}8\alpha=2k\pi-\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{2k\pi}{9}\Rightarrow\alpha_{max}=\frac{8\pi}{9}\\ 8\alpha=2k\pi+\pi+\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{2k\pi+\pi}{7}\Rightarrow\alpha_{max}=\frac{5\pi}{7}\end{cases}$$

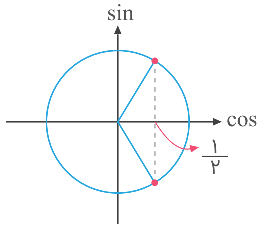
تذکر: در جواب‌ها $\alpha=\pi$ را به خاطر ضرب طرفین در $\sin\alpha$ در نظر نگرفتیم. بنابراین بزرگ‌ترین جواب، $\frac{8\pi}{9}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۵۶ گزینه ۴

$$۸\cos x - \tan^۲ x = ۱ \Rightarrow ۸\cos x = ۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$$

$$\Rightarrow \cos^۳ x = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲}$$



$x \in [۰, ۲\pi] \Rightarrow$ دو جواب دارد

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵۷ گزینه ۴

$$\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰ \Rightarrow ۲\sin x \cos x + \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\cos x + ۱) = ۰$$

$$\sin x = ۰ \Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi$$

$$۲\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}, x = \pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{۴\pi}{۳}$$

$$\pi + ۲\pi + \frac{۲\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} = ۵\pi$$

در اینجا نیازی به محاسبهٔ جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی نیست، فقط کافی است جواب‌ها را در فاصلهٔ داده‌شده، مشخص کنیم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۸ گزینه ۳

$$(۱ - \cos^۲ x) + \sin^۲ x \cos ۳x = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x(۱ + \cos ۳x) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \cos ۳x = -۱ \Rightarrow ۳x = (۲k+۱)\pi \Rightarrow x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

جواب‌های بازه $[۰, ۲\pi]$ برابر $\{۰, \pi, ۲\pi, \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}\}$ است که تعداد آن‌ها ۵ تا است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵۹ گزینه ۳

$$\begin{cases} \max = |a| + c = ۵ \\ \min = -|a| + c = ۱ \end{cases} \Rightarrow c = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶۰ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

گام اول

مجموعه جواب‌های معادلهٔ $\cos x = \cos \alpha$ به‌صورت $x = ۲k\pi \pm \alpha$ است.

گام دوم

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ به دست می‌آوریم:

$$۲\cos^۲ x + \cos x = ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + \cos x - ۱ = ۰$$

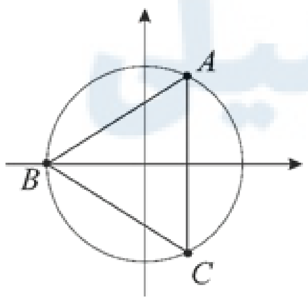
$$\Rightarrow (۲\cos x - ۱)(\cos x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \\ \cos x = -۱ \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{x \in [۰, ۲\pi]} x_۱ = \frac{\pi}{۳}, x_۲ = \frac{۵\pi}{۳}$$

$$\cos x = -۱ \Rightarrow \cos x = \cos x\pi \xrightarrow{x \in [۰, ۲\pi]} x_۳ = \pi$$

جواب‌ها را بر روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$$



بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است.

۶۱ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) دورهٔ تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|a|}$ به دست می‌آید.

ب) به ازای هر مقدار دلخواه x و a همواره داریم: $-۱ \leq \sin ax \leq ۱$

گام دوم

تابع $y = a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $[۰, ۳]$، سه نوسان کامل انجام داده است؛ بنابراین طول این بازه سه برابر دورهٔ تناوب تابع است، پس:

$$۳T = ۳ - ۰ \Rightarrow ۳T = ۳ \Rightarrow T = ۱$$

بنابراین طبق قسمت (الف) از گام اول، داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲\pi}{|b|\pi} = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow ۱ = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، داریم:

$$-۱ \leq \sin(b\pi x) \leq ۱ \Rightarrow -a \leq a\sin(b\pi x) \leq a \Rightarrow -a \leq y \leq a$$

طبق نمودار تابع $y_{max} = ۳$ و $y_{min} = -۳$ و نمودار تابع ابتدا نزولی و سپس صعودی است بنابراین $a = -۳$ خواهد بود.
ازطرفی، به ازای مقادیر کوچک بزرگ‌تر از صفر، حاصل تابع باید منفی شود و چون $a = -۳$ شد پس مقدار $\sin b\pi x$ باید مثبت باشد؛ بنابراین داریم: $b = ۲$
درنتیجه:

$$ab = (-۳) \times ۲ = -۶$$

۶۲ گزینه ۱

ماکزیمم برابر ۴ است.

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow a + b = ۰ \ , \ \ f(۲) = ۴ \Rightarrow a + b\cos\pi = ۴ \Rightarrow a - b = ۴$$

$$\begin{cases} a + b = ۰ \\ a - b = ۴ \end{cases} \Rightarrow a = ۲ \ , \ b = -۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۶۳

گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) با استفاده از اتحاد مزدوج سمت چپ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\sin^۴ x - \cos^۴ x = (\sin^۲ x - \cos^۲ x)\underbrace{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)}_{۱} = \sin^۲ x - \cos^۲ x$$

ب) با دانستن رابطهٔ $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$ و $\sin\frac{۵\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، معادله را حل کرده و جواب کلی آن را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\sin^۲ x - \cos^۲ x = -(\cos^۲ x - \sin^۲ x) = -\cos ۲x$$

$$\sin^۴ x - \cos^۴ x = -\cos ۲x = \sin^۲\frac{۵\pi}{۴} \xrightarrow{\sin\frac{۵\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}} -\cos ۲x = (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ \Rightarrow -\cos ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos ۲x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\div ۲} x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

۶۴

گزینه ۳

برای ساده تر شدن معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\frac{۳\pi}{۲} + x) = \sin x, \sin(\pi + x) = -\sin x$$

اگر در حل معادلهٔ مثلثاتی دو نسبت مثلثاتی متفاوت داشتیم، آن ها را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با استفاده از رابطهٔ $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ بازنویسی می کنیم.

$$۲\sin(\pi - x)\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x) + ۳\cot x \sin(\pi + x) = ۰$$
$$\Rightarrow ۲\sin x \sin x + ۳\cot x(-\sin x) = ۰$$
$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x - ۳\cos x = ۰ \xrightarrow{\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x} ۲(۱ - \cos^۲ x) - ۳\cos x = ۰$$
$$\Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x - ۳\cos x = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + ۳\cos x - ۲ = ۰ \Rightarrow (۲\cos x - ۱)(\cos x + ۲) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ \cos x = -۲ \quad \text{غ.ق.} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۶۵ گزینه ۳

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۶۶ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

با استفاده از فرمول $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ عبارت داده‌شده را ساده کرده و معادله را حل می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۶۷ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$2\cos 2x = \cot x(4\sin x + \tan x) \Rightarrow 2(2\cos^2 x - 1) = 4\cot x\sin x + \cot x\tan x$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x - 2 = 4\cos x + 1 \Rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4+\sqrt{64}}{8} = \frac{4+8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{2} \quad \text{غ.ق ق} \\ \cos x = \frac{4-\sqrt{64}}{8} = \frac{4-8}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۸ گزینه ۲

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=۱\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۶})\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۳}-x))=۱$$

$$\sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۶})=۱\Rightarrow\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}\\ \sin(x+\frac{\pi}{۶})=-۱\Rightarrow x=\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

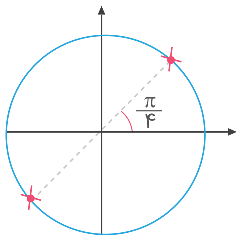
۶۹ گزینه ۲

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴}).\cos(\frac{\pi}{۴}-x)=۱\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}).\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۴}-x))=۱$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}).\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow \sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۴})=۱$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \text{جواب‌ها}:\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}\xrightarrow{\text{مجموع}}\frac{۶\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۲}$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۷۰

گزینه ۱

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1$$

باتوجه‌به اینکه $\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ است، داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=\cos(\frac{3\pi}{8}-x)+\cos(x-\frac{3\pi}{8})$$
$$=2\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1\Rightarrow\cos(x-\frac{3\pi}{8})=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow x-\frac{3\pi}{8}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3}$$
$$\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x\in\left\{\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۱

گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) وقتی تعداد نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها خواسته شده است، درواقع باید تعداد ریشه‌های معادلهٔ $y=0$ را تعیین کنیم. پس باید تعداد ریشه‌های معادلهٔ $y=0$ را در بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ به دست آوریم.

ب) معادلهٔ $\sin\alpha=0$ یک معادلهٔ خاص بوده و در آن $\alpha=k\pi$ است.

ج) مقادیر k را به نحوی تعیین می‌کنیم که ریشه‌های معادله حتماً در بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ قرار بگیرند.

گام دوم

$$y=0\Rightarrow 3\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0\Rightarrow\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0\xrightarrow[\alpha=k\pi]{\sin\alpha=0}\frac{\pi}{4}-2x=k\pi$$
$$\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{4}-k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}-\frac{k\pi}{2}\quad(k\in\mathbb{Z})$$
$$k=-2\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{9\pi}{8}$$
$$k=-1\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{8}$$
$$k=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}$$
$$k=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{8}$$
$$k=2\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}-\pi=-\frac{7\pi}{8}$$

توجه داشته باشید که به ازای $k\geq 3$ یا $k\leq -3$ مقادیری که برای x به دست می‌آید در بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ نیست. پس پنج مقدار برای x به دست آمده و نمودار تابع در پنج نقطه محور xها را قطع می‌کند.

۷۲ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\sin ۲x \sin ۴x + \sin^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x \sin ۴x = ۱ - \sin^۲ x$$
$$\Rightarrow (۲\sin x \cos x)(۲\sin ۲x \cos ۲x) = \cos^۲ x$$
$$\Rightarrow (۲\sin x \cos x)(۴\sin x \cos x \cos ۲x) = \cos^۲ x$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(۸\sin^۲ x \cos ۲x - ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(۸\sin^۲ x(۱ - ۲\sin^۲ x) - ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(-۱۶\sin^۴ x + ۸\sin^۲ x - ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(-(۴\sin^۲ x - ۱)^۲) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad (۱) \\ ۴\sin^۲ x - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \quad (۲) \end{cases}$$
$$\xrightarrow{(۱)\cup(۲)} x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۶}$$

راه‌حل دوم:

$$\sin ۲x \sin ۴x = ۱ - \sin^۲ x \Rightarrow \frac{۱}{۲}(\cos(-۲x) - \cos ۶x) = \cos^۲ x$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\cos ۲x - \frac{۱}{۲}\cos ۶x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲} \Rightarrow \cos ۶x = -۱$$
$$\Rightarrow ۶x = (۲k+۱)\pi \Rightarrow x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۶}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۷۳ گزینه ۴

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{۹\pi}{۲} - (-\frac{۳\pi}{۲}) = \frac{۱۲\pi}{۲} = ۶\pi$$
$$\Rightarrow T = ۶\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۳}$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = ۱ \\ \min : -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲$$

طبق نمودار، تابع در حوالی $x = ۰$ نزولی است، بنابراین $ab < ۰$، پس داریم:

$$\begin{cases} a = -۲ \\ b = \frac{۱}{۳} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = ۲ \\ b = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۷۴

گزینه ۴

راه‌حل اول:

ابتدا حاصل $۱+\cot^۲\theta$ و $۱+\tan^۲\theta$ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به دست می‌آوریم:

$$۱+\tan^۲\theta=۱+\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{\cos^۲\theta+\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

$$۱+\cot^۲\theta=۱+\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\frac{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

می‌دانیم $۱-\sin^۲\theta=\cos^۲\theta$ و $۱-\cos^۲\theta=\sin^۲\theta$ است پس:

$$\frac{(۱+\tan^۲\theta)(۱+\cot^۲\theta)}{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\cos^۲\theta}\times\frac{۱}{\sin^۲\theta}}{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}}{\cos^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}=\frac{\frac{۱}{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}}{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}$$

$$=\frac{۱}{\cos^۴\theta\sin^۴\theta}=\frac{۱}{(\cos\theta\sin\theta)^۴}$$

می‌دانیم:

$$\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{(\cos\theta\sin\theta)^۴}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)^۴}=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}\sin^۴ ۲\theta}=۱۶\sin^{-۴}۲\theta$$

راه‌حل دوم: (عددگذاری)

در صورتی که $\theta=\frac{\pi}{۴}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{(۱+\tan^۲\theta)(۱+\cot^۲\theta)}{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{(۱+(\tan\frac{\pi}{۴})^۲)(۱+(\cot\frac{\pi}{۴})^۲)}{۱-\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\cos^۴\frac{\pi}{۴}}=\frac{(۱+۱)(۱+۱)}{۱-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۴}=۱۶$$

با جایگذاری $\theta=\frac{\pi}{۴}$ در گزینه‌ها، نتیجه می‌گیریم که تنها در گزینهٔ "۴" صدق می‌کند:

$$۱۶\sin^{-۴}۲\theta=۱۶(\sin(۲\times\frac{\pi}{۴}))^{-۴}=۱۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۷۵ گزینه ۴

با استفاده از رابطهٔ $\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x$ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می‌کنیم و جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را به دست می‌آوریم.

$$\cos^{۲}x+۳\sin(\frac{\pi}{۲}+x)+۲=۰\Rightarrow \cos^{۲}x+۳\cos x+۲=۰$$

$$\Rightarrow (\cos x+۱)(\cos x+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}\cos x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi+\pi=(۲k+۱)\pi\\ \cos x=-۲ \quad \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۷۶ گزینه ۳

$$\sin x+\cos x=\frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x=\frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow ۱+\sin ۲x=\frac{۹}{۵}\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۴}{۵}$$

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}\Rightarrow \frac{۴}{۵}=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}$$

$$\Rightarrow ۴+۴\tan^{۲}x=۱۰\tan x\Rightarrow ۴(۱+\tan^{۲}x)=۱۰\tan x$$

$$\Rightarrow ۱+\tan^{۲}x=\frac{۵}{۲}\tan x\xrightarrow{\times ۲}۲\tan^{۲}-۵\tan x+۲=۰\xrightarrow{\Delta=۹}\begin{cases}\tan x=۲\\ \tan x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷۷ گزینه ۳

دورهٔ تناوب تابع برابر π و ماکزیمم مقدار آن ۱/۵ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \quad (I)$$

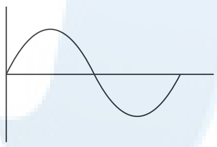
$$\text{ماکزیمم تابع} = 1 + |a| = 1/5 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2} \; (II)$$

از طرفی عرض نقطهٔ تماس نمودار با محور yها بزرگ‌تر از یک است.

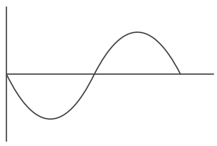
$$x = 0 : y = 1 + a\sin(\frac{-\pi}{6}) = 1 - \frac{a}{2} > 1 \Rightarrow \frac{a}{2} < 0 \Rightarrow a < 0 \xrightarrow{(II)} a = \frac{-1}{2}$$

باتوجه‌به اینکه ضریب sin در تابع منفی است و باتوجه‌به شکل زیر، نتیجه می‌گیریم باید b (ضریب x) مثبت باشد (حالت اول)؛ یعنی $b = 2$ قابل‌قبول است.

$$a + b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



نمودار $y=-\sin(-x)$



نمودار $y=-\sin x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۸ گزینه ۴

می‌دانیم:

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$\Rightarrow 1 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$
$$\Rightarrow \sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

حال از رابطهٔ $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ کمک می‌گیریم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1$$
$$\Rightarrow \sin 2x = \pm 1 \Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$$

جواب‌های موجود در بازهٔ $[0, 2\pi]$ برابر $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها 4π است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۹ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی را به حالت استاندارد $f(x)=0$ تبدیل و جواب‌ها را در بازهٔ $[0,2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=(1-\cos x)(1+\cos x)$$

$$\Rightarrow \sin x\cos x=1-\cos^2 x=\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x\cos x-\sin^2 x=0\Rightarrow \sin x(\cos x-\sin x)=0\Rightarrow \begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=\sin x\end{cases}$$

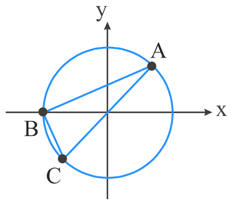
$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi$$

$$\sin x=\cos x\Rightarrow \tan x=1\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{5\pi}{4}$$

به ازای $x=0$ و $x=2\pi$ عبارت $1-\cos x$ برابر صفر است پس کسر تعریف‌نشده خواهد بود.

مجموعه جواب‌های $x=\pi,\ x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{5\pi}{4}$ را بر روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\overset{\frown}{AC}=\pi\Rightarrow \hat{B}=90^\circ$$



بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۸۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = f(x_\circ)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱-\tan^۲ x}{\cos ۲x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\cos ۲x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{\frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\cos^۲ x - \sin^۲ x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} a\cos ۳x = a\cos\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

$$f(\frac{\pi}{۴}) = a\cos\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

با بررسی شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{۴}$، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = f(\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}a = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲}a = -۴ \Rightarrow a = -\frac{۴}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a = -۲\sqrt{۲}$$

۸۱ گزینه ۴

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\cos(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow \sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۴}))$$

$$\Rightarrow \sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۴}-x)$$

حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}-x\Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶} \\ ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}+x\Rightarrow x=۲k\pi+\pi\ \ (x\neq k\pi\ \text{غیرقابل‌قبول زیرا}) \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸۲ گزینه ۳

اگر $x\in[-۱,۱]$، آنگاه:

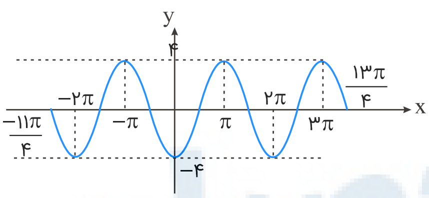
$$-۱\leq x\leq ۱\Rightarrow -۳\pi\leq -۳\pi x\leq ۳\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۴}-۳\pi\leq\frac{\pi}{۴}-۳\pi x\leq\frac{\pi}{۴}+۳\pi\Rightarrow \frac{-۱۱\pi}{۴}\leq\frac{\pi}{۴}-۳\pi x\leq\frac{۱۳\pi}{۴}$$

حال با در نظر گرفتن $\theta=\frac{\pi}{۴}-۳\pi x$، ضابطهٔ تابع مفروض سؤال، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y=-۴\cos\theta\ ;\ \ \frac{-۱۱\pi}{۴}\leq\theta\leq\frac{۱۳\pi}{۴}$$

که شکل آن به‌صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که این تابع در سه نقطه با طول‌های $\theta=-\pi$، $\theta=\pi$ و $\theta=۳\pi$، بیشترین مقدار خود را دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۸۳ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

باتوجه‌به نمودار رسم‌شده مشخص است دورهٔ تناوب تابع برابر با ۴π است. دورهٔ تناوب تابع $y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos mx$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|m|}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$\frac{۲\pi}{|m|} = ۴\pi \Rightarrow |m| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m = \pm\frac{۱}{۲}$$

با فرض $m = \frac{۱}{۲}$ تست را حل می‌کنیم (اگر $m = -\frac{۱}{۲}$ هم فرض شود تأثیری در جواب تست ندارد).

$$m = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{x}{۲} \Rightarrow f(\frac{۱۶\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۸\pi}{۳}$$

$$= \frac{۱}{۲} + ۲\cos(۲\pi + \frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} + ۲(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

۸۴ گزینه ۴

نکته:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)} = ۱ \xrightarrow{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)=\sin x} \frac{\sin ۳x}{\sin x} = ۱$$

$$\Rightarrow \sin ۳x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \text{ غ‌ق‌ق} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

چون $\sin x \neq ۰$، بنابراین جواب $x = k\pi$ غیرقابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۵ گزینه ۳

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\sin^۴ x - \cos^۴ x = \left(\sin^۲ x - \cos^۲ x\right)\underbrace{\left(\sin^۲ x + \cos^۲ x\right)}_{۱}$$

$$= \sin^۲ x - \cos^۲ x = -\left(\cos^۲ x - \sin^۲ x\right) = -\cos ۲x$$

همچنین با استفاده از فرمول کمان‌های ۲α داریم:

$$\sin ۴x = ۲\sin ۲x \cos ۲x$$

بنابراین معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$۲\sin ۲x\cos ۲x = -\cos ۲x \quad \Rightarrow \quad ۲\sin ۲x\cos ۲x + \cos ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow \quad \cos ۲x\left(۲\sin ۲x + ۱\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۲x = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ \sin ۲x = -\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \quad \Rightarrow \quad x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲} \\ ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \quad \Rightarrow \quad x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \end{cases} \end{cases}$$

حالا جواب‌های معادله را در بازهٔ $[۰, \pi]$ به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{۴} \\ k = ۱ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

$$x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=۰} x = \frac{۷\pi}{۱۲}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=۱} x = \pi - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

بنابراین مجموع تمام جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰, \pi]$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{۴} + \frac{۳\pi}{۴} + \frac{۷\pi}{۱۲} + \frac{۱۱\pi}{۱۲} = \pi + \frac{۱۸\pi}{۱۲} = ۲\pi + \frac{۶\pi}{۱۲} = ۲\pi + \frac{\pi}{۲} = \frac{۵\pi}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۸۶

گزینه ۴

به‌کمک رابطهٔ $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ معادله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$64\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha = 1$$

حال طرفین رابطه را در $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$64\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$16\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2 4\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 4\alpha = k\pi \pm \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{2k\pi}{7}\\ \alpha = \frac{2k\pi}{9}\end{cases}$$

فقط توجه داشته باشید که $k\pi$ ها قابل قبول نیستند.

در بازهٔ $[0, 2\pi]$ تعداد جواب‌های $\alpha = \frac{2k\pi}{7}$ برابر ۶ تا و تعداد جواب‌های $\alpha = \frac{2k\pi}{9}$ برابر ۸ است. معادله مجموعاً ۱۴ ریشه دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۸۷

گزینه ۳

کمترین مقدار تابع ۱- است؛ پس:

$$1-|a| = -1 \Rightarrow |a| = 2$$

تابع در دو دورهٔ تناوب رسم شده است، پس:

$$2T = \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{2}{3}$$
$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

باتوجه‌به نمودار a و b هم‌علامت است؛ پس:

$a + b = 5$ یا -5

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۸۸ گزینه ۱

تابع را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = a\sin(\frac{\pi}{۲} + b\pi x) = a\cos b\pi x$$

ماکزیمم تابع برابر با ۲ است؛ بنابراین: $|a| = ۲$
ازطرفی $y(۰) = ۲$، پس:

$$y(۰) = a \times \cos ۰ = a \Rightarrow a = ۲$$

همچنین نمودار تابع در بازهٔ $[-۲/۵, ۳/۵]$ سه بار تکرار شده است، درنتیجه:

$$۳T = ۳/۵ - (-۲/۵) = ۶ \Rightarrow T = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۲ \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱$$

که هر دو مقدار قابل‌قبول است. باتوجه‌به گزینه‌ها، $a.b = ۲$ است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۸۹ گزینه ۲

برای حل سؤال به دو رابطهٔ زیر توجه کنید:

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲} + x) = -\cos x \;,\; \cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$$

$$\sin^۲ x - \cos^۲ x = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x) \Rightarrow -\cos ۲x = -\cos x \Rightarrow \cos ۲x = \cos x$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = ۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi - x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$$

جواب کلی که هر دو جواب $x = ۲k\pi$ و $x = \frac{۲k\pi}{۳}$ را شامل شود به صورت $x = \frac{۲k\pi}{۳}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۹۰ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

با استفاده از رابطهٔ $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$ معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را به یک معادلهٔ مثلثاتی برحسب $\sin x$ تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$۳\sin^۲ x - ۴\sin^۴ x = \cos ۲x \Rightarrow ۳\sin^۲ x - ۴\sin^۴ x = ۱ - ۲\sin^۲ x$$

$$\Rightarrow ۴\sin^۴ x - ۵\sin^۲ x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\sin^۲ x = t} ۴t^۲ - ۵t + ۱ = ۰$$

$$t = ۱ \Rightarrow \sin^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin x = \pm ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \qquad (۱)$$

$$t = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \qquad (۲)$$

$$(۱) \cup (۲) : x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

۹۱ گزینه ۱

برای یافتن ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یا همان $f(g(x))$، کافی است در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار دهیم.

$$fog(x) = f(g(x)) = g(x) - \sqrt{g(x)} = \sin^۴ x - \sqrt{\sin^۴ x} = \sin^۴ x - \sin^۲ x$$
$$= \sin^۲ x(\sin^۲ x - ۱) = \sin^۲ x(-\cos^۲ x) = -\sin^۲ x\cos^۲ x$$

با توجه به فرمول $\sin ۲x$، داریم:

$$\sin x \cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

پس ضابطهٔ تابع fog به صورت زیر درمی‌آید:

$$fog(x) = -(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲ = -\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۹۲

گزینه ۳

دورهٔ تناوب تابع به معادلهٔ $y = a\sin(bx) + c$ برابر است با $\frac{۲\pi}{|b|}$، پس:

$$y = a\sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{|b|} \quad (*)$$

همچنین باتوجه‌به نمودار $T = ۶$ است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۲}{|b|} = ۶ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \quad (۱)$$

با فرض $b = \frac{۱}{۳}$ و اگر a عددی مثبت باشد، آنگاه بیشترین مقدار تابع به معادلهٔ $y = a\sin(bx) + c$، برابر با $a + c$ است، پس:

$$y = a\sin(b\pi x) \Rightarrow Max(y) = a \quad (**)$$

همچنین باتوجه‌به نمودار $Max(y) = ۲$، پس:

$$\xrightarrow{(**)} a = ۲ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow a + b = ۲ + \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

توجه: مقادیر a و b می‌توانند هر دو منفی باشند و جواب $a + b = -\frac{۷}{۳}$ نیز قابل‌قبول است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۹۳

گزینه ۳

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = \frac{۳}{۲} \xrightarrow[b<۰]{\text{باتوجه‌به نمودار}} a - b = \frac{۳}{۲}$$

$$\left(\frac{\pi}{۲}, ۰\right) : f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow a + b\cos(\frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{۲}b = ۰$$

$$\Rightarrow ۲a + b = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{۳}{۲} \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۳a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹۴ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

گام اول

داریم: $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$

گام دوم

با استفاده از رابطهٔ گام اول، معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را برحسب $\cos x$ مرتب می‌کنیم:

$$۲\sin^۲ x - \cos x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x} ۲ - ۲\cos^۲ x - \cos x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + \cos x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (۲\cos x - ۱)(\cos x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \\ \cos x = -۱ \end{cases}$$

چون $-۱ \leq \cos x \leq ۱$ است پس هر دو مقدار به‌دست‌آمده، قابل‌قبول است. باتوجه‌به آن‌ها جواب‌های معادله را در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{x \in [\pi, ۲\pi]} x_۱ = ۲\pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۳}$$

$$\cos x = -۱ \Rightarrow \cos x = \cos\pi \Rightarrow x_۲ = \pi$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$x_۱ + x_۲ = \frac{۵\pi}{۳} + \pi = \frac{۸\pi}{۳}$$

۹۵ گزینه ۲

$$\cos ۳x + \cos x = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = -\cos x \Rightarrow \cos ۳x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq ۰} x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۹۶

گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) تابع در بازهٔ بین $\frac{\pi}{۱۸}$ و $\frac{۱۳\pi}{۱۸}$ یک دوره تناوب کامل را طی می‌کند.

ب) دوره تناوب تابع $y = a - ۲\cos\left(bx + \frac{\pi}{۲}\right)$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.

ج) داریم:

$$y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲}) = a + ۲\sin bx$$

باتوجه‌به نمودار b باید مثبت باشد زیرا در غیر این صورت نمودار تابع قرینهٔ نمودار رسم شده خواهد بود.

د) نقطه به مختصات $\left(\frac{\pi}{۱۸}, ۰\right)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{۱۳\pi}{۱۸} - \frac{\pi}{۱۸} = \frac{۱۲\pi}{۱۸} = \frac{۲\pi}{۳}$$

همچنین باتوجه‌به قسمت ب و ج از گام اول می‌توان نوشت:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} \quad \Rightarrow \quad |b| = ۳ \quad \xrightarrow{b>۰} \quad b = ۳$$

اکنون با توجه به اینکه $f\left(\frac{\pi}{۱۸}\right) = ۰$ است، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$۰ = a - ۲\cos\left(۳ \times \frac{\pi}{۱۸} + \frac{\pi}{۲}\right) = a - ۲\cos\left(\frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۲}\right) = a + ۲\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = a + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a + ۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad a = -۱$$

پس حاصل $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -۱ + ۳ = ۲$$

۹۷

گزینه ۱

ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی عبارت داده شده را خلاصه کرده و سپس با استفاده از فرمول کمان های ۲α، حاصل تست را به دست می آوریم.

$$\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha)\sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha)\cos(-\alpha) = \cos\alpha(-\sin\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha =$$
$$-\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = -۲\sin\alpha\cos\alpha = -\sin۲\alpha$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۹۸

گزینه ۲

با توجه به رابطهٔ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ معادله را ساده می کنیم. هم چنین می دانیم $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ است.

$$۲\tan x\cos^۲ x = ۱ \Rightarrow ۲\frac{\sin x}{\cos x}\times\cos^۲ x = ۱ \xrightarrow{\cos x\neq ۰} ۲\sin x\cos x = ۱$$

$$\Rightarrow \sin ۲x = ۱ \xrightarrow{\sin\alpha=۱\Rightarrow\alpha=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\div ۲} x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۹۹

گزینه ۳

تابع را کمی ساده می‌کنیم. از رابطهٔ $\sin ۲\alpha \frac{۱}{۲} = \sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$y = ۱ + a\sin bx\cos bx = ۱ + \frac{a}{۲}\sin ۲bx$$

باتوجه‌به نمودار داده‌شده، ماکزیمم تابع $\frac{۳}{۲}$، مینیمم تابع $\frac{۱}{۲}$ و دورهٔ تناوب $\pi = \frac{۳\pi}{۴} - (-\frac{\pi}{۴})$ است. پس:

$$\begin{cases} ۱ + \left|\frac{a}{۲}\right| = \frac{۳}{۲} \\ ۱ - \left|\frac{a}{۲}\right| = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{|a|}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow |a| = ۱$$

$$\frac{۲\pi}{|۲b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۱$$

باتوجه‌به اینکه تابع داده‌شده در سمت راست محور y صعودی است، پس $\frac{a}{۲}$ و $۲b$ باید هم‌علامت باشند. پس مسئله دو دسته جواب $\begin{cases} a = ۱ \\ b = ۱ \end{cases}$ یا $\begin{cases} a = -۱ \\ b = -۱ \end{cases}$ دارد، درنتیجه $a + b = ۲$ یا $a + b = -۲$ صحیح است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۰۰

گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

گام اول

می‌دانیم: $\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)=\sin\theta$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و باتوجه‌به اینکه $\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$ است عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$۸\cos a\cos b\cos\left(\frac{\pi}{۲}-a\right)\cos\left(\frac{\pi}{۲}-b\right)=۸\cos a\cos b\sin a\sin b$$

$$=۲(۲\sin a\cos a)(۲\sin b\cos b)=۲\sin ۲a\sin ۲b$$

داریم:

$$a+b=\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{\times ۲}۲a+۲b=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۲b=\frac{\pi}{۲}-۲a$$

بنابراین:

$$\sin ۲b=\sin\left(\frac{\pi}{۲}-۲a\right)=\cos ۲a$$

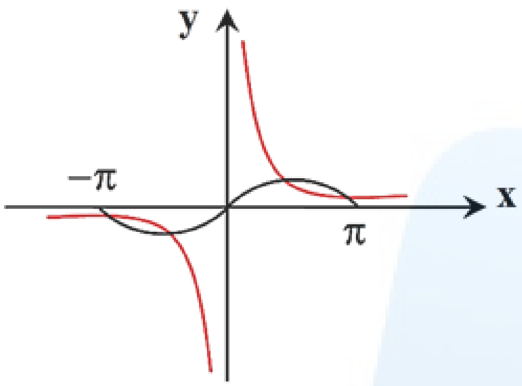
پس می‌توان نوشت:

$$۲\sin ۲a\sin ۲b=۲\sin ۲a\cos ۲a=\sin ۲(۲a)=\sin ۴a$$

۱۰۱ گزینه ۲

$$x\sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow x\sin x = ۱ \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{x}$$

کافی است تعداد نقاط تلاقی نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \frac{۱}{x}$ را در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ به دست بیاوریم. برای این منظور هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



باتوجه‌به شکل، واضح است که معادلهٔ داده‌شده در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۰۲ گزینه ۴

$$y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x) = a + b\cos x$$

باتوجه‌به نمودار ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = ۳ \xrightarrow[b<۰]{\text{باتوجه‌به نمودار}} a - b = ۳ \quad (۱)$$

$$(\frac{۷\pi}{۳}, ۰) : ۰ = a + b\cos(\frac{۷\pi}{۳}) = a + b\cos(۲\pi + \frac{\pi}{۳}) = a + b(\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow a + \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} a - b = ۳ \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۳a = ۳ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۰۳ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱ \Rightarrow ۲\sin(۳x)\cos(۳x)=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(۶x)=\frac{۱}{۲}=\sin(\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} k=۰ \Rightarrow x=\frac{\pi}{۳۶} \\ k=۱ \Rightarrow x=\frac{۱۳\pi}{۳۶} \end{cases} \\ ۶x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} k=۰ \Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۳۶} \\ k=۱ \Rightarrow x=\frac{۱۷\pi}{۳۶} \end{cases} \end{cases}$$

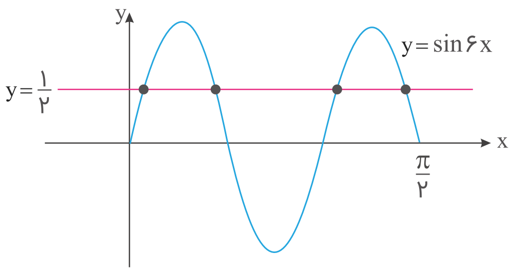
بنابراین معادله چهار جواب دارد.

راه‌حل دوم:

$$۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱ \Rightarrow \sin(۶x)=\frac{۱}{۲}$$

$$۰ \leq x \leq \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰ \leq ۶x \leq ۳\pi$$

باتوجه‌به شکل معادله چهار جواب دارد:



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰۴ گزینه ۱

$$-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow -\frac{\pi}{۴} < -x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۰ < \frac{\pi}{۴} - x < \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{۴} - x) > ۰ \Rightarrow \frac{۱ - m}{۲ + m} > ۰$$

m		-۲		۱	
$۱ - m$	+		+	۰	−
$۲ + m$	−	۰	+		+
$\frac{۱ - m}{۲ + m}$	−	ت ن	+	۰	−

$$\Rightarrow -۲ < m < ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۰۵ گزینه ۴

اگر تابعی نسبت به خط $x = x_۰$ متقارن باشد، آنگاه: $f(x) = f(۲x_۰ - x)$

$$f(x) = f(۲ - x)$$

$$f(x) = f(۶ - x) \xrightarrow{x = x + ۴} f(x + ۴) = f(۶ - (x + ۴)) = f(۲ - x)$$

پس $f(x) = f(۴ + x)$، پس f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰