۱ گزینه ۳

$$۳x^۲ + (۲m - ۱)x + m + \frac{۴}{۳} = -x \xrightarrow{\text{مماس هستند}} ۳x^۲ + ۲mx + m + \frac{۴}{۳} = ۰$$

حتماً معادلهٔ فوق باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد، پس $\Delta = ۰$ خواهد بود و داریم:

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (۲m)^۲ - ۴(۳)(m + \frac{۴}{۳}) = ۰ \Rightarrow ۴m^۲ - ۴(۳)(m + \frac{۴}{۳}) = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} m^۲ - ۳(m + \frac{۴}{۳}) = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۳m - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ & \times \\ m = ۴ & \checkmark \end{cases}$$

به ازای $m = -۱$، محل برخورد دو تابع در ناحیهٔ دوم قرار نخواهد گرفت و $m = ۴$ قابل‌قبول است.

$$y = ۳x^۲ + ۷x + \frac{۱۶}{۳} \Rightarrow x_{\text{رأس سهمی}} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۷}{۶}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۲

گزینه ۳

اگر قرار باشد عبارت درجه دو به فرم $y = ax^{۲} + bx + c$ همواره بالای محور xها قرار داشته باشد باید دو شرط زیر هم‌زمان برقرار باشد:

$۱)\ \ a > ۰$

$۲)\ \ \Delta < ۰$

مجموعه جواب هر دو نامعادله را تعیین کرده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$f(x) = (a - ۱)x^{۲} + ۲\sqrt{۲}x + a$$

$$۱)\ \ a - ۱ > ۰ \Rightarrow a > ۱ \quad (I)$$

$$۲)\ \ \Delta < ۰ \Rightarrow (۲\sqrt{۲})^{۲} - ۴(a-۱)(a) < ۰ \Rightarrow ۸ - ۴a^{۲} + ۴a < ۰$$

$$\Rightarrow ۴a^{۲} - ۴a - ۸ > ۰ \xrightarrow{\div ۴} a^{۲} - a - ۲ > ۰$$

$$\Rightarrow (a-۲)(a+۱) > ۰ \Rightarrow a < -۱ \text{ یا } a > ۲ \quad (II)$$

اشتراک مجموعه جواب‌های (I) و (II) برابر است با:

$$(I) \cap (II) : a > ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۳

گزینه ۲

پرانتز دوم صورت را با اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{\left(\left(m^{۲}-۱\right)x^{۲}-۴mx+۴\right)\left(\sqrt{x}-۱\right)\left(\sqrt{x}-۲\right)}{۲x-۳}>۰$$

دو عبارت $\sqrt{x}-۱$ و $۲x-۳$، به ازای $x>\frac{۳}{۲}$، مثبت‌اند، پس می‌توانیم حذفشان کنیم:

$$\left(\left(m^{۲}-۱\right)x^{۲}-۴mx+۴\right)\left(\sqrt{x}-۲\right)>۰$$

ریشهٔ پرانتز دوم را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{x}-۲=۰\Rightarrow x=۴$$

جواب نامعادله به صورت $(۲,۴)$ بود، حالا که $x=۴$ ریشهٔ پرانتز دوم است، پس باید ریشهٔ پرانتز اول ۲ باشد:

$$۴\left(m^{۲}-۱\right)-۸m+۴=۰\Rightarrow ۴m^{۲}-۸m=۰\Rightarrow ۴m\left(m-۲\right)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰\\m=۲\end{cases}$$

حالا به ازای هر دو مقدار m، نامعادلهٔ $\left(\left(m^{۲}-۱\right)x^{۲}-۴mx+۴\right)\left(\sqrt{x}-۲\right)>۰$ را می‌نویسیم:

۱) به ازای $m=۰$ نامعادله به شکل $\left(-x^{۲}+۴\right)\left(\sqrt{x}-۲\right)>۰$ در می‌آید.

۲) به ازای $m=۲$ نامعادله به شکل $\left(۳x^{۲}-۸x+۴\right)\left(\sqrt{x}-۲\right)>۰$ در می‌آید.

یک عدد در بازهٔ $(۲,۴)$، مثل $x=۳$ را در نامعادله‌ها چک می‌کنیم. این عدد فقط در نامعادلهٔ (۱)، صدق می‌کند، پس $m=۰$ قابل‌قبول است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۴ گزینه ۴

یک‌بار فرض می‌کنیم $x \geq 0$ باشد و بار دیگر $x < 0$. در هر دو حالت مجموعه‌جواب نامعادله را تعیین کرده و سپس بین آن‌ها اجتماع می‌گیریم.

$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$(x-4)x < 2x-5 \Rightarrow x^2 - 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 5 \quad (\mathrm{I})$$

باتوجه‌به محدودهٔ اولیه $(x \geq 0)$ این جواب قابل‌قبول است.

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$(x-4)(-x) < 2x-5 \Rightarrow -x^2 + 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0$$

x		$1-\sqrt{6}$		$1+\sqrt{6}$	
x^2-2x-5	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x < 1-\sqrt{6} \text{ یا } x > 1+\sqrt{6} \xrightarrow{x<0} x < 1-\sqrt{6} \quad (\mathrm{II})$$

اجتماع دو مجموعه‌جواب (I) و (II) برابر است با:

$$(-\infty, 1-\sqrt{6}) \cup (1, 5)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۵

گزینه ۲

ابتدا معادلهٔ خط را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$۲y + x = ۵ \Rightarrow ۲y = -x + ۵ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲}$$

نمودار تابع $y = ۴ - |x|$ بالای خط $y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲}$ قرار دارد، پس باید نامعادلهٔ $۴ - |x| > -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲}$ برقرار باشد. جواب نامعادله را در دو حالت $x \geq ۰$ و $x < ۰$ تعیین می‌کنیم.

$$x \geq ۰ : |x| = x \Rightarrow ۴ - x > -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}x < ۴ - \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}x < \frac{۳}{۲} \Rightarrow x < ۳ \xrightarrow{x \geq ۰} ۰ \leq x < ۳ \quad (I)$$

$$x < ۰ : |x| = -x \Rightarrow ۴ + x > -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}x > -\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\div \frac{۳}{۲}} x > -۱ \xrightarrow{x<۰} -۱ < x < ۰ \quad (II)$$

مجموعه جواب کل، اجتماع دو بازهٔ (I) و (II) بوده که برابر $(-۱, ۳)$ می‌شود. $b - a$ برابر است با:

$$b - a = ۳ - (-۱) = ۳ + ۱ = ۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۶

گزینه ۲

$$\left|\frac{۲ - x}{۲x - ۳}\right| > ۱ \Rightarrow \left(\frac{۲ - x}{۲x - ۳}\right)^۲ > ۱ \xrightarrow{x \neq \frac{۳}{۲}} x^۲ - ۴x + ۴ > ۴x^۲ - ۱۲x + ۹$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ < ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۶۴ - ۴(۳)(۵) = ۴$$

$$\Rightarrow x_{۱,۲} = \frac{۸ \pm \sqrt{۴}}{۶} \Rightarrow x_{۱,۲} = ۱, \frac{۵}{۳}$$

x		۱		$\frac{۵}{۳}$	
$۳x^۲-۸x+۵$	+	۰	−	۰	+

مقدار $x = \frac{۳}{۲}$ که در این بازه قرار دارد، غیرقابل‌قبول است (ریشهٔ مخرج است)، پس مجموعه جواب صحیح این نامعادله به صورت زیر است:

$$x \in (۱, \frac{۵}{۳}) - \{\frac{۳}{۲}\}$$

نکته: گزینه‌های ۱ و ۳ را نیز می‌توان به عنوان جواب‌های درست در نظر گرفت ولی باتوجه‌به گزینه‌های موجود کامل‌ترین جواب گزینهٔ ۲ است. در غیر این صورت گزینه‌های ۱ و ۳ هم صحیح خواهند بود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

گام اول

می‌خواهیم نامعادلهٔ $x^۲ - ax + a - ۲ > ۰$ به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد. ضریب $x^۲$ که مثبت است، تنها این نکته باقی می‌ماند که عبارت درجه دو موردنظر ریشه نداشته و $\Delta < ۰$ باشد.

گام دوم

$$y = x^۲ - ax + a - ۲ > ۰ \Rightarrow \Delta < ۰$$
$$\Rightarrow (-a)^۲ - ۴(۱)(a - ۲) < ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۸ < ۰$$
$$\Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ + ۴ < ۰ \Rightarrow (a - ۲)^۲ + ۴ < ۰$$

به یک عبارت همواره نادرست رسیدیم، زیرا $(a - ۲)^۲$ عبارتی نامنفی است، اگر با ۴ هم جمع شود نمی‌تواند منفی باشد. پس هیچ مقداری برای a وجود نداشته و مجموعه جواب برابر $\varnothing$ می‌شود.

۸ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) باتوجه‌به ریشه‌های قدر مطلق $|۲x|$ و $|x - ۱|$، عبارت درون قدرمطلق‌ها را در سه محدودهٔ $x < ۰$، $۰ \leq x \leq ۱$ و $x > ۱$ تعیین علامت می‌کنیم.

ب) جواب سؤال بازه‌ای است که روی آن $f(x) > g(x)$ باشد که در هریک از سه محدودهٔ مشخص‌شده به‌صورت جداگانه تعیین می‌شود.

ج) اجتماع بازه‌های به‌دست‌آمده جواب سؤال خواهد بود.

گام دوم

$$۱)\ \ x < ۰ \Rightarrow |۲x| = -۲x \text{ و } |x - ۱| = -(x - ۱) = ۱ - x$$
$$f(x) > g(x) \Rightarrow ۵ - |x - ۱| > |۲x| \Rightarrow ۵ - (۱ - x) > -۲x \Rightarrow x + ۴ > -۲x \Rightarrow ۳x > -۴$$
$$\Rightarrow x > -\frac{۴}{۳} \xrightarrow{x<۰} x \in (-\frac{۴}{۳}\,,\,۰)$$

$$۲)\ \ ۰ \leq x \leq ۱ \Rightarrow |۲x| = ۲x \text{ و } |x - ۱| = -(x - ۱) = ۱ - x$$
$$f(x) > g(x) \Rightarrow ۵ - |x - ۱| > |۲x| \Rightarrow ۵ - (۱ - x) > ۲x \Rightarrow x + ۴ > ۲x \Rightarrow x < ۴ \xrightarrow{۰\leq x\leq ۱} x \in [۰\,,\,۱]$$

$$۳)\ \ x > ۱ \Rightarrow |۲x| = ۲x \text{ و } |x - ۱| = x - ۱$$
$$f(x) > g(x) \Rightarrow ۵ - |x - ۱| > ۲x \Rightarrow ۵ - (x - ۱) > ۲x \Rightarrow ۵ - x + ۱ > ۲x \Rightarrow ۳x < ۶$$
$$\Rightarrow x < ۲ \xrightarrow{x>۱} x \in (۱\,,\,۲)$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله به صورت $(-\frac{۴}{۳}\,,\,۲)$ درمی‌آید.

۹

گزینه ۲

عرض مستطیل را x فرض می‌کنیم؛ پس طول آن برابر $\frac{۳}{۲}x - ۲$ است. داریم:

$$\text{مساحت مستطیل} = ۱۹۲ \Rightarrow x(\frac{۳}{۲}x - ۲) = ۱۹۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x^۲ - ۲x = ۱۹۲$$
$$\xrightarrow{\times ۲} ۳x^۲ - ۴x - ۳۸۴ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ + ۴ \times ۳ \times ۳۸۴ = ۱۶ + ۱۶ \times ۲۸۸ = ۱۶ \times ۲۸۹$$
$$\xrightarrow{x>۰} x = \frac{۴ + \sqrt{۱۶ \times ۲۸۹}}{۶} = \frac{۴ + ۴ \times ۱۷}{۶} = \frac{۲ + ۳۴}{۳} = ۱۲ \quad (*)$$
$$\Rightarrow \text{محیط مستطیل} = ۲((\frac{۳}{۲}x - ۲) + x) \xrightarrow{(*)} \text{محیط مستطیل} = ۲((۱۸ - ۲) + ۱۲) = ۵۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰

گزینه ۲

عبارت درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ در صورتی به ازای هر مقدار دلخواه x مثبت است که دو شرط $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ همزمان برقرار باشد. مجموعه جواب این دو شرط را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$۱)\ \ a > ۰ \Rightarrow m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱ \quad (I)$$

$$f(x) = (m-۱)x^۲ + ۶x + ۲m + ۱$$

$$۲)\ \ \Delta < ۰ \Rightarrow ۶^۲ - ۴(m-۱)(۲m+۱) < ۰$$

$$\Rightarrow ۳۶ - ۴(m-۱)(۲m+۱) < ۰ \quad \xrightarrow{\div ۴} \quad ۹ - (m-۱)(۲m+۱) < ۰$$

$$\Rightarrow ۹ - ۲m^۲ + m + ۱ < ۰ \Rightarrow -۲m^۲ + m + ۱۰ < ۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - m - ۱۰ > ۰ \Rightarrow (۲m - ۵)(m + ۲) > ۰$$

$$\Rightarrow m > \frac{۵}{۲} \text{ یا } m < -۲ \quad (II)$$

بین دو مجموعه جواب (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \ \cap \ (II) : m > \frac{۵}{۲} \Rightarrow m > ۲/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۱

گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) نمودار تابع $f(x)=\frac{3x^2-2x}{x^2+4}$ در صورتی پایین خط $y=2$ قرار می گیرد که نامعادلهٔ $\frac{3x^2-2x}{x^2+4}<2$ برقرار باشد.

ب) با تعیین علامت، محدودهٔ جواب نامعادله را تعیین کرده، آن را با بازهٔ (a,b) مطابقت داده و مقدار $b-a$ را محاسبه می کنیم.

گام دوم

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4}<2 \Rightarrow \frac{3x^2-2x}{x^2+4}-2<0 \Rightarrow \frac{3x^2-2x-2x^2-8}{x^2+4}<0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-8}{x^2+4}<0$$
$$\xrightarrow{x^2+4>0} x^2-2x-8<0 \Rightarrow (x-4)(x+2)<0 \Rightarrow -2<x<4 \Rightarrow x\in(-2\,,\,4)$$

بنابراین بازهٔ $(a\,,\,b)$ به صورت $(-2\,,\,4)$ در آمده و حاصل $b-a$ برابر است با:

$$b-a=4-(-2)=4+2=6$$

۱۲

گزینه ۲

اگر قدرنسبت این دنباله را q درنظر بگیریم، می‌توانیم سه جملهٔ متوالی آن را $\frac{a}{q}$، a و aq درنظر بگیریم. طبق فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} \frac{a}{q}+a+aq=19 \quad (*) \\ (\frac{a}{q})(a)(aq)=216 \Rightarrow a^3=216 \Rightarrow a^3=6^3 \Rightarrow a=6 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*),(**) \Rightarrow \frac{6}{q}+6+6q=19 \xrightarrow{\times q} 6+6q+6q^2=19q$$

$$\Rightarrow 6q^2-13q+6=0 \Rightarrow q=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4(6)(6)}}{2(6)}=\frac{13\pm5}{12} \Rightarrow \begin{cases} q=\frac{3}{2} \\ q=\frac{2}{3} \end{cases}$$

در حالتی که $q=\frac{3}{2}$، ازآنجاکه $a=6$، جمله‌ها به‌صورت $6(\frac{3}{2})=9$ ، 6 و $\frac{6}{\frac{3}{2}}=4$ درمی‌آیند.

درحالتی که $q=\frac{2}{3}$، ازآنجاکه $a=6$، جمله‌ها به‌صورت $6(\frac{2}{3})=4$ ، 6 و $\frac{6}{\frac{2}{3}}=9$ درمی‌آیند.

پس در هر دو حالت، تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد برابر است با: $9-4=5$.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۳ گزینه ۴

داریم:

$$|a| < k \Rightarrow -k < a < k$$

نامعادله را در دو مرحله $(-k < a$ و $a < k)$ حل کرده و بین مجموعه‌جواب‌های به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم.

$$|x^۲ - ۲x| < x \Rightarrow -x < x^۲ - ۲x < x$$

$$۱)\ \ x^۲ - ۲x > -x \Rightarrow x^۲ - x > ۰ \Rightarrow x(x-۱) > ۰ \Rightarrow x > ۱ \text{ یا } x < ۰ \quad (I)$$

$$۲)\ \ x^۲ - ۲x < x \Rightarrow x^۲ - ۳x < ۰ \Rightarrow x(x-۳) < ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۳ \quad (II)$$

نامعادله‌های ۱ و ۲ باید هم‌زمان برقرار باشند، پس بین دو مجموعه‌جواب به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II)\ :\ ۱ < x < ۳ \Rightarrow x \in (۱,\ ۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۴ گزینه ۱

سه نقطهٔ داده‌شده را در معادلهٔ سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} (۰,۵)\ :\ c = ۵ \\ (-۲,۵)\ :\ ۴a - ۲b + ۵ = ۵ \Rightarrow ۴a - ۲b = ۰ \Rightarrow ۲a - b = ۰ \\ (۱,۱۱)\ :\ a + b + ۵ = ۱۱ \Rightarrow a + b = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a - b = ۰ \\ a + b = ۶ \end{cases} \Rightarrow a = ۲, b = ۴$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ۲x^۲ + ۴x + ۵$ است. هرکدام از گزینه‌ها که در معادلهٔ سهمی صدق کند جواب مسئله است:

$$\text{گزینهٔ ۱}\ :\ (-۱,۳) \Rightarrow ۲(-۱)^۲ + ۴(-۱) + ۵ = ۳ \quad \checkmark$$

$$\text{گزینهٔ ۲}\ :\ (-۱,۴) \Rightarrow ۲(-۱)^۲ + ۴(-۱) + ۵ \neq ۴ \quad \times$$

$$\text{گزینهٔ ۳}\ :\ (۲,۹) \Rightarrow ۲(۲)^۲ + ۴(۲) + ۵ \neq ۹ \quad \times$$

$$\text{گزینهٔ ۴}\ :\ (۲,۱۵) \Rightarrow ۲(۲)^۲ + ۴(۲) + ۵ \neq ۱۵ \quad \times$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۵

گزینه ۳

پول علی و اکرم را به‌ترتیب x و y در نظر می‌گیریم:

$$x + y = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۰۰ - y$$
$$(x - ۱۰)(y + ۱۰) = ۴۷۵ \xrightarrow{x=۱۰۰-y} (۱۰۰ - y - ۱۰)(y + ۱۰) = ۴۷۵$$
$$\Rightarrow y^۲ - ۸۰y - ۴۲۵ = ۰ \Rightarrow (y - ۸۵)(y + ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۸۵ \\ y = -۵ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶

گزینه ۱

نمودار $y = \left|۲x^۲ - ۴\right|$ در زیر خط $y = ۲x$ قرار دارد، بنابراین:

$$\left|۲x^۲ - ۴\right| < ۲x$$

$$\Rightarrow -۲x < ۲x^۲ - ۴ < ۲x \xrightarrow{\div ۲} -x < x^۲ - ۲ < x$$

سپس هرکدام از نامعادلات $-x < x^۲ - ۲$ و $x^۲ - ۲ < x$ را جداگانه حل می‌کنیم:

$$x^۲ - ۲ > -x \Rightarrow \underbrace{x^۲ + x - ۲}_{p(x)} > ۰$$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
p(x)		+ ج	۰	−	۰	+ ج	

$$\Rightarrow x < -۲ \text{ یا } x > ۱ \quad (۱)$$

$$x^۲ - ۲ < x \Rightarrow \underbrace{x^۲ - x - ۲}_{q(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
q(x)		+	۰	− ج	۰	+	

$$\Rightarrow -۱ < x < ۲ \quad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) \Rightarrow ۱ < x < ۲ \Rightarrow (a, b) = (۱, ۲)$$

بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$۲ - ۱ = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۷

گزینه ۲

نمودار $y=(x-۱)^۲$ بالاتر از نمودار $y=۴x^۴$ قرار دارد، پس:

$$(x-۱)^۲ > ۴x^۴ \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} |x-۱| > ۲x^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱)\ x-۱ > ۲x^۲ \\ \text{یا} \\ ۲)x-۱ < -۲x^۲ \end{cases}$$

دو نامعادلهٔ فوق را حل می‌کنیم:

$$۱)\ x-۱ > ۲x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - x + ۱ < ۰ \xrightarrow{a>۰,\Delta<۰} \text{غ‌ق‌ق}$$

$$۲)x-۱ < -۲x^۲ \Rightarrow \underbrace{۲x^۲+x-۱}_{p(x)} < ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ \Rightarrow x = -۱\ ,\ \frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$		-۱		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
p(x)		+	۰	− ج	۰	+	

$$\Rightarrow x \in (-۱,\ \frac{۱}{۲})$$

برای اینکه $b-a$ بیشترین مقدار باشد باید $(a,b) = \left(-۱,\ \frac{۱}{۲}\right)$، درنتیجه:

$$b-a = \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۸

گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\text{رأس سهمی} : A(-۱,۹) \Rightarrow x_s = \frac{-b}{۲a} = -۱ \Rightarrow b = ۲a \quad (*)$$

حال نقاط $A(-۱,۹)$ و $(۳,۱)$ را در معادلهٔ سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} A(-۱,۹) : a - b + c = ۹ \xrightarrow{(*)} a - ۲a + c = ۹ \Rightarrow -a + c = ۹ \\ (۳,۱) : ۹a + ۳b + c = ۱ \xrightarrow{(*)} ۹a + ۶a + c = ۱ \Rightarrow ۱۵a + c = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + c = ۹ \\ ۱۵a + c = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱۶a = -۸ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(*)} b = -۱$$

$$a - b + c = ۹ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} + ۱ + c = ۹ \Rightarrow c = \frac{۱۷}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$y = -\frac{۱}{۲}x^۲ - x + \frac{۱۷}{۲}$$

هرکدام از گزینه‌ها که در معادلهٔ سهمی صدق کند، جواب مسئله است:

گزینه ۱:

$$(۵,-۷) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(۲۵) - ۵ + \frac{۱۷}{۲} \neq -۷ \quad \times$$

گزینه ۲:

$$(۵,-۹) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(۲۵) - ۵ + \frac{۱۷}{۲} = -۹ \quad \checkmark$$

گزینه ۳:

$$(۲,۵) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(۴) - ۲ + \frac{۱۷}{۲} \neq ۵ \quad \times$$

گزینه ۴:

$$(۱,۵) \Rightarrow -\frac{۱}{۲} - ۱ + \frac{۱۷}{۲} \neq ۵ \quad \times$$

راه‌حل دوم: حالت کلی معادلهٔ سهمی به رأس (α,β) به‌صورت زیر است:

$$y = k(x-\alpha)^۲ + \beta$$

بنابراین داریم:

$$\text{رأس سهمی} : A(-۱,۹) \Rightarrow y = k(x+۱)^۲ + ۹$$

اکنون نقطهٔ $(۳,۱)$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$k(۳+۱)^۲ + ۹ = ۱ \Rightarrow k = -\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}(x+۱)^۲ + ۹$$

با جایگذاری گزینه‌ها در معادلهٔ سهمی، فقط نقطهٔ گزینهٔ (۲) در معادله صدق می‌کند.

$$y(۵) = -۹$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۹

گزینه ۴

نکته: مختصات رأس سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ به‌صورت $(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$ است.

باتوجه‌به اینکه سهمی و خط در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۸ متقاطع‌اند، بنابراین این دو نقطه در معادلهٔ خط و سهمی صدق می‌کنند. ابتدا با استفاده از معادلهٔ خط مقدار y هر دو نقطه را به دست آورده، سپس با جایگذاری در معادلهٔ سهمی مقادیر a و b را به دست می‌آوریم.
بنابراین داریم:

$$y = ۱۳ - x$$

$$x = ۲ \Rightarrow y = ۱۳ - ۲ = ۱۱ \Rightarrow (۲, ۱۱)$$

$$x = ۸ \Rightarrow y = ۱۳ - ۸ = ۵ \Rightarrow (۸, ۵)$$

این دو نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند:

$$y = -\frac{۱}{۲}x^۲ + ax + b$$

$$(۲, ۱۱) : ۱۱ = -\frac{۱}{۲}(۲)^۲ + a(۲) + b \Rightarrow ۲a + b = ۱۳ \quad (*)$$

$$(۸, ۵) : ۵ = -\frac{۱}{۲}(۸)^۲ + a(۸) + b \Rightarrow ۸a + b = ۳۷ \quad (**)$$

دو معادله و دو مجهول داریم؛ پس مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲a + b = ۱۳ \\ ۸a + b = ۳۷ \end{cases} \xrightarrow{-} ۶a = ۲۴ \Rightarrow a = ۴ \quad (۱)$$

$$a = ۴ \Rightarrow ۲(۴) + b = ۱۳ \Rightarrow b = ۱۳ - ۸ = ۵ \Rightarrow b = ۵ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} y = -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۴x + ۵ \Rightarrow x_s = \frac{-۴}{۲(-\frac{۱}{۲})} = \frac{-۴}{-۱} = ۴$$

برای محاسبهٔ y_s هم می‌توان از فرمول نکته استفاده کرد و هم در معادلهٔ سهمی جایگذاری کرد:

$$y_s = -\frac{۱}{۲}(۴)^۲ + ۴(۴) + ۵ = -۸ + ۱۶ + ۵ = ۱۳$$

بنابراین نقطهٔ $(۴, ۱۳)$ رأس سهمی است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۲۰

گزینه ۲

نکته: برای اینکه نمودار تابع درجه‌دو همواره بالای محور xها قرار گیرد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) $\Delta < 0$

۲) ضریب x^2 بیشتر از صفر باشد.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \text{ضریب } x^2 > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 + 4a(1-a) < 0 \Rightarrow 24 + 4a - 4a^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow (a+2)(a-3) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3 \quad (2)$$

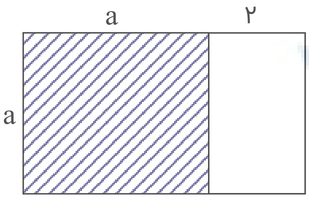
$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} a < -2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۱

گزینه ۳

طول ضلع مربع را a در نظر می‌گیریم. بنابراین رابطهٔ زیر بین مساحت مربع و مستطیل برقرار است:



$$\text{مساحت مربع} = \frac{3}{4}(\text{مساحت مستطیل}) + 18$$

ضلع مربع به‌علاوهٔ ۲ برابر با طول مستطیل است $(a+2)$:

$$\Rightarrow a^2 = \frac{3}{4}(a(a+2)) + 18 \xrightarrow{\times 4} 4a^2 = 3(a^2 + 2a) + 72$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 3a^2 - 6a - 72 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a - 72 = 0 \Rightarrow (a+6)(a-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \text{ ق ق} \\ a = -6 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین طول ضلع مربع برابر با ۱۲ است. باتوجه‌به شکل طول و عرض مستطیل بزرگ‌تر برابر با $a + 2 = 14$ و $a = 12$ می‌باشد. بنابراین محیط مستطیل بزرگ‌تر برابر است با:

$$\text{محیط مستطیل بزرگ} = 2\,(a + (a+2)) = 2(12 + 14) = 2(26) = 52$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۲

گزینه ۲

اگر سهمی پایین محور xها باشد، باید $\Delta < ۰$ و $a < ۰$ باشد. پس:

$$y = (۱ - m)x^۲ + ۲(m - ۳)x - ۱$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۴(m - ۳)^۲ + ۴(۱ - m) = ۴(m^۲ - ۶m + ۹) + ۴ - ۴m < ۰$$
$$\xrightarrow{\div ۴} m^۲ - ۶m + ۹ + ۱ - m < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۷m + ۱۰ < ۰$$
$$\Rightarrow (m - ۲)(m - ۵) < ۰ \Rightarrow ۲ < m < ۵ \quad (۱)$$
$$a = ۱ - m < ۰ \Rightarrow m > ۱ \quad (۲)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر بازهٔ $(۲, ۵)$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۳

گزینه ۳

راه‌حل تستی:

$$x = ۳ \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} \frac{۱۳}{۴} > ۳ \quad \checkmark$$

$x = ۳$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های ۱ و ۴ حذف می‌شوند.

$$x = ۰ \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} ۴ > ۰ \Rightarrow \text{گزینهٔ ۲ هم حذف می‌شود}$$

راه‌حل تشریحی:

$$\frac{۷x - ۸}{(x - ۲)(x + ۱)} - \frac{x}{x - ۲} > ۰ \Rightarrow \frac{(۷x - ۸) - x(x + ۱)}{(x - ۲)(x + ۱)} > ۰$$
$$\Rightarrow \frac{-x^۲ + ۶x - ۸}{(x - ۲)(x + ۱)} = \frac{-(x - ۲)(x - ۴)}{(x - ۲)(x + ۱)} = -\frac{x - ۴}{x + ۱} > ۰$$

x		-۱		۲		۴	
$-\frac{x-۴}{x+۱}$	$-$	|	$+$	||	$+$	|	$-$

$$\Rightarrow x \in (-۱, ۲) \cup (۲, ۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۴

گزینه ۱

راه‌حل اول:

با عددگذاری داریم:

$$x = ۱ \xrightarrow[\text{در نامعادله}]{\text{با جایگذاری}} -۱ < \frac{۳(۱)+۱}{(۱)-۳} < ۳ \Rightarrow -۱ < -۲ < ۳ \quad \times$$

بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

راه‌حل دوم:

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

نامعادله را به نامعادله‌ای به فرم $-a < u < a$ تبدیل می‌کنیم تا از ویژگی‌های نامعادلات قدر مطلقی استفاده کنیم.

گام دوم

$$-۱ < \frac{۳x+۱}{x-۳} < ۳ \xrightarrow{-۱} -۲ < \frac{۳x+۱-x+۳}{x-۳} < ۲ \Rightarrow -۲ < \frac{۲x+۴}{x-۳} < ۲$$

$$\Rightarrow \left|\frac{۲(x+۲)}{x-۳}\right| < ۲ \xrightarrow{\div ۲} \left|\frac{x+۲}{x-۳}\right| < ۱ \Rightarrow |x+۲| < |x-۳|$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x^۲ + ۴x + ۴ < x^۲ - ۶x + ۹ \Rightarrow ۱۰x < ۵ \xrightarrow{\div ۱۰} x < \frac{۱}{۲}$$

۲۵

گزینه ۱

با فرض $x \neq -\frac{۱}{۲}$ طرفین نامعادله را در $|۲x+۱|$ ضرب کرده و آن را از حالت کسری خارج می‌کنیم. وقتی دو طرف نامعادله مثبت باشند، می‌توان با خیال راحت دو طرف را به توان دو رساند تا از شر قدرمطلق راحت شده و مجموعه جواب نامعادله را به راحتی تعیین کنیم.

$$\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right| > ۱ \Rightarrow \frac{|x-۲|}{|۲x+۱|} > ۱ \xrightarrow{x \neq -\frac{۱}{۲}} |x-۲| > |۲x+۱| \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} (x-۲)^۲ > (۲x+۱)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ > ۴x^۲ + ۴x + ۱ \Rightarrow ۳x^۲ + ۸x - ۳ < ۰ \Rightarrow (x+۳)(۳x-۱) < ۰ \Rightarrow -۳ < x < \frac{۱}{۳}$$

با توجه به شرط $x = -\frac{۱}{۲}$ در ابتدای حل تست، باید این مقدار x را از مجموعه جواب به‌دست‌آمده خارج کنیم:

$$\text{مجموعه جواب نامعادله} = (-۳\,,\ \frac{۱}{۳}) - \left\{-\frac{۱}{۲}\right\} = (-۳\,,\ -\frac{۱}{۲}) \cup (-\frac{۱}{۲}\,,\ \frac{۱}{۳})$$

دقت کنید که گزینه‌های ۳ و ۴ نیز شامل بخشی از جواب هستند، اما کامل‌ترین گزینه، گزینهٔ ۱ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۶

گزینه ۱

محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کرده است پس $f(۱) = ۰$ است. محور عرض‌ها را در -۶ قطع کرده است پس $f(۰) = -۶$ و از نقطهٔ $(-۲, -۶)$ عبور کرده است پس $f(-۲) = -۶$، حال داریم:

$$f(۰) = -۶ \Rightarrow ۰ + ۰ + c = -۶ \Rightarrow c = -۶$$
$$f(۱) = ۰ \Rightarrow a + b - ۶ = ۰ \Rightarrow a + b = ۶ \quad (۱)$$
$$f(-۲) = -۶ \Rightarrow ۴a - ۲b + c = -۶ \xrightarrow{c=-۶} ۴a - ۲b = ۰ \xrightarrow{\div ۲} ۲a = b$$
$$\xrightarrow{(۱)} a + ۲a = ۶ \Rightarrow ۳a = ۶$$
$$\Rightarrow a = ۲, b = ۴ \Rightarrow f(x) = ۲x^۲ + ۴x - ۶ \Rightarrow f(-۱) = ۲ - ۴ - ۶ = ۲ - ۱۰ = -۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۲۷

گزینه ۲

محور تقارن $y = ax^۲ + bx + c$ به‌صورت $x = \frac{-b}{۲a}$ است:

$$y = ax^۲ + ۳x + c \Rightarrow \text{محور تقارن} = x = \frac{-۳}{۲a} = -۱ \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

عرض رأس سهمی $y = ۱$ است؛ پس $S(-۱, ۱)$ در تابع صدق می‌کند:

$$y = \frac{۳}{۲}x^۲ + ۳x + c \xrightarrow{S(-۱,۱)} ۱ = \frac{۳}{۲} - ۳ + c \Rightarrow c = \frac{۵}{۲}$$
$$ac = \frac{۳}{۲} \times \frac{۵}{۲} = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۸

گزینه ۱

روش اول:

ابتدا با استفاده از تعریف نامعادلهٔ قدرمطلقی $|u| < a$، دامنهٔ تعریف تابع را به طور دقیق مشخص می‌کنیم:

$$|u| < a \Rightarrow -a < u < a$$

سپس مشخص می‌کنیم در محدودهٔ به‌دست‌آمده، تابع $f(x)$ چه وضعیتی دارد.

$$|x-۱| < ۲ \Rightarrow -۲ < x-۱ < ۲ \xrightarrow{+۱} -۱ < x < ۳ \Rightarrow D_f = (-۱, ۳)$$

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = x^۲ - ۲x + ۱ - ۴ = (x-۱)^۲ - ۴$$

در محدودهٔ $(-۱, ۳)$، وضعیت $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

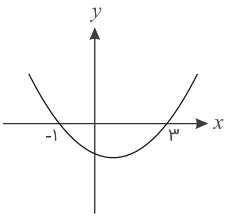
$$-۱ < x < ۳ \Rightarrow -۲ < x-۱ < ۲ \Rightarrow (x-۱)^۲ < ۴ \Rightarrow (x-۱)^۲ - ۴ < ۰ \Rightarrow f(x) < ۰$$

پس در دامنهٔ مشخص‌شده تابع $f(x)$ همواره منفی است.

روش دوم:

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = (x-۳)(x+۱)$$

با رسم نمودار تابع $f(x)$ وضعیت آن را در بازهٔ داده‌شده بررسی می‌کنیم.



در بازهٔ $(-۱, ۳)$ نمودار $f(x)$ همواره زیر محور xها قرار دارد پس مقدار آن همواره منفی است.

روش سوم:

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = (x-۳)(x+۱)$$

$$|x-۱| < ۲ \Rightarrow -۲ < x-۱ < ۲ \xrightarrow{+۱} -۱ < x < ۳ \Rightarrow D_f = (-۱, ۳)$$

تابع $f(x)$ را تعیین علامت کرده و وضعیت آن را روی دامنهٔ تعریف‌شده یعنی بازهٔ $(-۱, ۳)$ مشخص می‌کنیم:
تابع $f(x)$ روی دامنهٔ تعریف‌شده در صورت تست همواره منفی است.

x		-۱		۳	
$f(x)$	+	۰	−	۰	+

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۹

گزینه ۱

چون تابع مینیمم دارد، سهمی رو به بالا بوده و $m > ۰$ است.
مینیمم سهمی در رأس آن اتفاق می‌افتد:

$$\text{رأس سهمی} = (\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$$

$$y_{\min} = \frac{-\Delta}{۴a} = ۲ \Rightarrow \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۴(m(۵m-۱)) - ۱۴۴}{۴m} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۵m^۲ - m - ۳۶}{m} = ۲ \Rightarrow ۵m^۲ - ۳m - ۳۶ = ۰$$

$$\Rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ - ۴(۵)(-۳۶)}}{۱۰} = \frac{۳ \pm ۲۷}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۳ & \text{ق ق} \\ m = \frac{-۱۲}{۵} < ۰ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پس $m = ۳$ قابل قبول و معادله به شکل زیر است:

$$y = ۳x^۲ - ۱۲x + ۱۴$$

محور تقارن سهمی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۱۲}{۲ \times ۳} = ۲ \Rightarrow x = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۳۰

گزینه ۴

$$۱ < \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ \dfrac{x+۱}{۲x-۱} > ۱ \\ ۲)\ \dfrac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \end{cases}$$

ابتدا هردو نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$۱)\ \frac{x+۱}{۲x-۱} > ۱ \Rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{x+۱-۲x+۱}{۲x-۱} = \underbrace{\frac{-x+۲}{۲x-۱}}_{p(x)} > ۰$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۲		$+\infty$
p(x)		−	ت.ن	+ ج	۰	−	

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} < x < ۲ \quad (I)$$

$$۲)\ \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \Rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱} - ۳ < ۰ \Rightarrow \frac{x+۱-۶x+۳}{۲x-۱} = \underbrace{\frac{-۵x+۴}{۲x-۱}}_{q(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۴}{۵}$		$+\infty$
q(x)		− ج	ت.ن	+	۰	− ج	

$$\Rightarrow x < \frac{۱}{۲} \text{ یا } x > \frac{۴}{۵} \quad (II)$$

حال اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} \frac{۴}{۵} < x < ۲ \Rightarrow x \in (۰/۸, ۲)$$

راه تستی (عددگذاری):

حذف گزینهٔ "۳":

$$x = ۱ \Rightarrow ۱ < \frac{۲}{۱} < ۳$$

حذف گزینهٔ "۱" و "۲":

$$x = ۱/۵ \Rightarrow ۱ < \frac{۲/۵}{۲} < ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۱

گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

گام اول

مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $f(x) > \frac{۷}{۲}$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$f(x) > \frac{۷}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x + ۶ > \frac{۷}{۲} \xrightarrow{\times ۲} -x^۲ + ۴x + ۱۲ > ۷$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x - ۵ < ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۵ \Rightarrow x \in (-۱, ۵)$$

بنابراین بازهٔ (a, b) به‌صورت $(-۱, ۵)$ درآمده و بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$b - a = ۵ - (-۱) = ۵ + ۱ = ۶$$

۳۲

گزینه ۲

رأس سهمی $y = -ax^۲ + ax + ۲$ برابر است با:

$$x_S = \frac{-a}{-۲a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۲ + \frac{a}{۴}$$

رأس سهمی $y = ۲bx^۲ - bx - ۱$ برابر است با:

$$x_S = \frac{b}{۴b} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow y = -۱ - \frac{b}{۸}$$

$(\frac{۱}{۲}, ۲ + \frac{a}{۴})$ را در تابع دیگر صدق می‌دهیم:

$$(\frac{۱}{۲}, ۲ + \frac{a}{۴}) \Rightarrow ۲ + \frac{a}{۴} = \frac{b}{۲} - \frac{b}{۲} - ۱ \Rightarrow a = -۱۲$$

$(\frac{۱}{۴}, -۱ - \frac{b}{۸})$ را در تابع دیگر صدق می‌دهیم:

$$(۱۲) \times \frac{۱}{۱۶} + (-۱۲)(\frac{۱}{۴}) + ۲ = -۱ - \frac{b}{۸} \Rightarrow b = -۶$$

$$b - a = -۶ - (-۱۲) = ۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۳ گزینه ۳

$$-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}>2x+|x| \xrightarrow{\times 2} -2x^2-x+9>4x+2|x|$$

$$\Rightarrow 2x^2+5x+2|x|-9<0$$

$$1)\ x\geq 0 \Rightarrow 2x^2+7x-9<0 \Rightarrow (2x+9)(x-1)<0$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{2}<x<1 \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0\leq x<1$$

$$2)\ x<0 \Rightarrow 2x^2+3x-9<0 \Rightarrow (2x-3)(x+3)<0$$

$$\Rightarrow -3<x<\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -3<x<0$$

اجتماع جواب‌ها : $-3<x<1 \xrightarrow{\text{وسط بازه}} \frac{-3+1}{2}=-1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۳۴ گزینه ۳

عبارت درجهٔ دو در صورتی به ازای هر مقدار x منفی است که اولاً ضریب x^2 منفی باشد، ثانیاً معادله ریشه نداشته و $\Delta<0$ باشد. مجموعه‌جواب نامعادله‌های گفته‌شده را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$f(x)=(a-1)x^2+(a-1)x+1$$

$$1)\ \ a-1<0 \Rightarrow a<1 \quad (I)$$

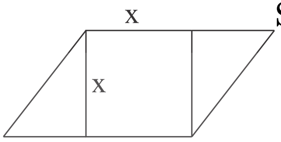
$$2)\ \ \Delta<0 \Rightarrow (a-1)^2-4(a-1)(1)<0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a-1-4)<0 \Rightarrow (a-1)(a-5)<0 \Rightarrow 1<a<5 \quad (II)$$

بین دو مجموعه‌جواب (I) و (II) هیچ اشتراکی وجود ندارد، بنابراین مجموعه‌جواب قابل‌قبول برای a مجموعهٔ $\varnothing$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۳۵ گزینه ۳



$$S_{\text{مربع}} = \frac{۳}{۴}S_{\text{مثلث}} + \frac{۲۷}{۳۲} \Rightarrow x^{۲} = \frac{۳}{۴}\left(\frac{x}{۲}\right) + \frac{۲۷}{۳۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۳۲} ۳۲x^{۲} = ۱۲x + ۲۷ \Rightarrow ۳۲x^{۲} - ۱۲x - ۲۷ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۱۴۴ + ۴(۳۲)(۲۷) = ۳۶۰۰ \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۲ \pm ۶۰}{۶۴} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۹}{۸} \\ x = \frac{۱۲ - ۶۰}{۶۴} < ۰ \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\text{اندازهٔ قاعده} = x + ۱ = \frac{۹}{۸} + ۱ = \frac{۱۷}{۸}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۶ گزینه ۱

دو طرف نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\frac{۲x - ۳}{x + ۱} < ۳ \Rightarrow \frac{۲x - ۳}{x + ۱} - ۳ < ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{-x - ۶}{x + ۱}}_{p(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		-۶		-۱		$+\infty$
$p(x)$		$-$	۰	$+$	ت.ن	$-$	

$p(x) < ۰ \Rightarrow x < -۶$ یا $x > -۱$ (۱)

$$\frac{۲x - ۳}{x + ۱} > ۱ \Rightarrow \frac{۲x - ۳}{x + ۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{x - ۴}{x + ۱}}_{q(x)} > ۰$$

x	$-\infty$		-۱		۴		$+\infty$
$q(x)$		$+$	ت.ن	$-$	۰	$+$	

$q(x) > ۰ \Rightarrow x < -۱$ یا $x > ۴$ (۲)

اشتراک (۱) و (۲) جواب مسئله است که اجتماع دو بازهٔ $(-\infty, -۶)$ و $(۴, +\infty)$ می‌باشد که به‌صورت $\mathbb{R} - [-۶, ۴]$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۷

گزینه ۳

مسئله را با این شرط که ضریب x^2 مخالف صفر است، حل می‌کنیم. ($2m-1\neq 0$)
شرط اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد این است که $\Delta > 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(2m-1)(m-2) > 0$$
$$\xrightarrow{\div 4} 9 - \left(2m^2 - 4m - m + 2\right) > 0 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 < 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2m-7)(m+1)}_{P(m)} < 0 \Rightarrow m = -1,\ \frac{7}{2}$$

m		-1		$\frac{7}{2}$	
P(m)	+	0	−	0	+

$$P(m) < 0 \Rightarrow -1 < m < \frac{7}{2}$$

از طرفی $m\neq\frac{1}{2}$، پس: $\{-1 < m < 3/5\} - \{\frac{1}{2}\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۸

گزینه ۳

$$-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \begin{cases} 1)\ -1 < \dfrac{2x-1}{x+1} \\ 2)\ \dfrac{2x-1}{x+1} < 3 \end{cases}$$

هر دو معادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$1)\frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{3x}{x+1}}_{p(x)} > 0$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
p(x)		+ ج	ت ن	−	0	+ ج	

$$\Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \quad (I)$$

$$2)\frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{-x-4}{x+1}}_{q(x)} < 0$$

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
q(x)		− ج	0	+	ت ن	− ج	

$$\Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

حال اشتراک دو جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} x < -4 \text{ یا } x > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-4, 0]$$

راه‌حل تستی: (عددگذاری)

حذف گزینهٔ "۴":

$$x = 0 \Rightarrow -1 < \frac{-1}{1} < 3 \quad \times$$

حذف گزینه‌های "۱" و "۲":

$$x = -5 \Rightarrow -1 < \frac{-11}{-4} < 3 \Rightarrow -1 < \frac{11}{4} < 3 \quad \checkmark$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۹

گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

گام دوم

عبارت x^2+1 همواره مثبت است؛ بنابراین:

$$|x^2+1| = x^2+1$$

نامعادلهٔ داده‌شده به‌صورت زیر می‌شود:

$$2x+1-|x-2| > x^2+1$$

نامعادله را در دو حالت $x \geq 2$ و $x < 2$ حل می‌کنیم:

$$\text{(I)}\quad x \geq 2 \;\Rightarrow\; x-2 \geq 0 \;\Rightarrow\; |x-2| = x-2$$
$$2x+1-(x-2) > x^2+1 \;\Rightarrow\; 2x+1-x+2 > x^2+1$$
$$\Rightarrow x^2-x-2 < 0 \Rightarrow\; (x-2)(x+1) < 0$$
$$\Rightarrow\; -1 < x < 2 \xrightarrow{x \geq 2} \text{x هیچ مقداری نمی تواند داشته باشد}$$

$$\text{(II)}\quad x < 2 \;\Rightarrow\; x-2 < 0 \;\Rightarrow\; |x-2| = -(x-2)$$
$$2x+1+x-2 > x^2+1 \;\Rightarrow\; x^2-3x+2 < 0$$
$$\Rightarrow\; (x-2)(x-1) < 0 \;\Rightarrow\; 1 < x < 2 \xrightarrow{x<2} 1 < x < 2$$

اجتماع دو مجموعه جواب به‌دست‌آمده؛ یعنی بازهٔ $(1,2)$، مجموعه جواب نامعادلهٔ $2x+1-|x-2| > |x^2+1|$ می‌شود.

۴۰ گزینه ۳

روش اول:
این نامعادله را در دو حالت حل می‌کنیم. یک بار $x \geq ۰$ و بار دیگر $x < ۰$ فرض می‌شود. مجموعه جواب نامعادله را در هریک از حالت ها به دست آورده و چون هردوی آن‌ها برای ما قابل‌قبول است بین آن‌ها اجتماع می‌گیریم.

$$۱)\ \ x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x : x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳ \xrightarrow{|x|=x} x + x \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$$
$$\Rightarrow ۲x \leq \frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x \leq ۳ \Rightarrow x \leq ۲ \xrightarrow{x \geq ۰} ۰ \leq x \leq ۲$$

$$۲)\ \ x < ۰ \Rightarrow |x| = -x : x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳ \xrightarrow{|x|=-x} x - x \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}x + ۳ \geq ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x \geq -۳ \Rightarrow x \geq -۶ \xrightarrow{x<۰} -۶ \leq x < ۰$$

مجموعه جواب نامعادله $= [-۶\,,\,۰) \cup [۰\,,\,۲] = [-۶\,,\,۲]$

روش دوم:
اگر $|x| \leq a$ و $a \geq ۰$، آنگاه $-a \leq x \leq a$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$$
$$|x| \leq -\frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow -(-\frac{۱}{۲}x + ۳) \leq x \leq -\frac{۱}{۲}x + ۳$$
$$x \leq -\frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x \leq ۳ \Rightarrow x \leq ۲$$
$$x \geq -(-\frac{۱}{۲}x + ۳) \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۲}x - ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x \geq -۳ \Rightarrow x \geq -۶$$

بنابراین $-۶ \leq x \leq ۲$ است.
ازطرفی:

$$-\frac{۱}{۲}x + ۳ \geq ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x \geq -۳ \Rightarrow x \leq ۶$$

پس مجموعه جواب نامعادله به صورت $[-۶\,,\,۲]$ به دست می‌آید.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۴۱

گزینه ۲

روش اول: با امتحان‌کردن گزینه‌ها به عدد $\frac{۱}{۳}$ می‌رسیم:

$$m = \frac{۱}{۳} \Rightarrow p(x) = \frac{-۴(x+۳)(۲x-۳)^۲}{۹(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)}$$

x	۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
p(x)		−	ت ن	+	۰	+	ت ن	−	

روش دوم: عبارت موردنظر را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{((m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰$$

حال بدون درنظرگرفتن عبارت $(m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴$ تعیین علامت می‌کنیم:

x	۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
p(x)		−	ت ن	+	۰	−	ت ن	+	

اگر به‌ازای مقادیر گفته‌شده برای m تعیین علامت انجام دهیم، فقط برای $m = \frac{۱}{۳}$ مجموعه جواب نامعادله به‌صورت بازهٔ $(۱, ۴)$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۲

گزینه ۱

برای به دست آوردن محدودهٔ x، موانعی که در اطراف آن وجود دارد را مرحله‌به‌مرحله حذف می‌کنیم تا جواب نامعادله به دست آید:

$$-۱ \leq ۳x-۲ \leq ۱ \xrightarrow{+۲} ۱ \leq ۳x \leq ۳ \xrightarrow{\div ۳} \frac{۱}{۳} \leq x \leq ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۴۳

گزینه ۱

با ایجاد تغییراتی در نامعادله سعی می‌کنیم به نامعادله‌ای به‌صورت $Q(x) > 0$ برسیم. سپس نامعادله را حل کنیم.

$$\frac{x-1}{x+1} > 2x \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2x > 0 \Rightarrow \frac{x-1-2x(x+1)}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-1-2x^2-2x}{x+1} > 0$$
$$\Rightarrow \frac{-2x^2-x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-(2x^2+x+1)}{x+1} > 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{2x^2+x+1}{x+1} < 0$$

عبارت $2x^2+x+1$ همواره مثبت است. چون در این عبارت درجهٔ دو، مقدار $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت است، پس مخرج باید منفی باشد. داریم:

$$x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow \{x : x < -1\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

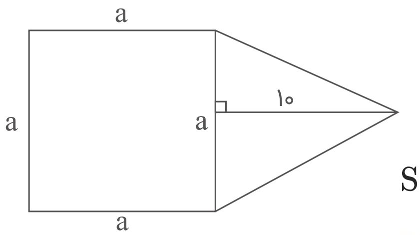
۴۴

گزینه ۳

باتوجه‌به اطلاعات داده‌شده در صورت تست؛ رابطهٔ زیر بین مساحت مربع و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برقرار است:

$$\text{مساحت مثلث}\ (S_{\triangle}) = \frac{2}{3}\left((S_{\square})\ \text{مساحت مربع}\right) - \frac{8}{3} \quad (*)$$

می‌دانیم:



$$S_{\square} = a^2$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times 10 \times a = 5a$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(*)} 5a = \frac{2}{3}(a^2) - \frac{8}{3}$$

طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$15a = 2a^2 - 8 \Rightarrow 2a^2 - 15a - 8 = 0$$

$$\Delta = (15)^2 - 4(2)(-8) = 225 + 64 = 289$$

$$\Rightarrow a = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{15 \pm 17}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{32}{4} = 8 \\ a = \frac{-2}{4} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین $a = 8$ می‌باشد، پس قاعدهٔ مثلث برابر ۸ است. مساحت مثلث را به دست می‌آوریم:

$$S_{\Delta} = 5a = 5(8) = 40$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹