۱

گزینه ۲

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدودهٔ تغییر مقادیر $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن است. مقادیر $f(x)$ میان ماکسیمم و مینیمم مطلق این تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}} \quad : \quad \frac{۲-x}{x} \geq ۰ \Rightarrow ۰ < x \leq ۲ \Rightarrow D_f = (۰, ۲]$$

به ازای $۰ < x \leq ۲$، $|x| = x$ است پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ را می‌توان چنین ساده کرد:

$$f(x) = (x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}} = (x+x)\sqrt{\frac{۲-x}{x}} = ۲x\sqrt{\frac{۲-x}{x}} \overset{(*)}{=} ۲\sqrt{\frac{x^۲(۲-x)}{x}} = ۲\sqrt{۲x-x^۲}$$

(*) چون $x > ۰$ است پس می‌توان توان دوم آن را زیر رادیکال برد.

تابع $f(x)$ بر روی دامنه‌اش پیوسته است. برای یافتن ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x)$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع $f'(x)$ و ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = ۲\sqrt{۲x-x^۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲-۲x}{\sqrt{۲x-x^۲}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲-۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

$$f(۱) = ۲\sqrt{۲-۱} = ۲$$

$$f(۲) = ۲\sqrt{۴-۴} = ۰$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ بازهٔ $[۰, ۲]$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۲

گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد؛ همچنین فرض کنیم f بر بازهٔ I شامل c پیوسته و بر این بازه به‌جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است، هرگاه $f'(x)$ قبل و بعد از c تغییر علامت داده باشد.

ب) نقطهٔ $c \in D_f$، نقطهٔ بحرانی تابع f است؛ هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$f(x) = \frac{x^۲ - ۲x}{x + a} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-a\}$$

$$f'(x) = \frac{(۲x - ۲)(x + a) - (x^۲ - ۲x)}{(x + a)^۲} = \frac{x^۲ + ۲ax - ۲a}{(x + a)^۲}$$

بررسی می‌کنیم به‌ازای چه مقادیری از a، معادلهٔ $f'(x) = ۰$ دارای ریشهٔ ساده است.

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \frac{x^۲ + ۲ax - ۲a}{(x + a)^۲} = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۲ax - ۲a = ۰$$

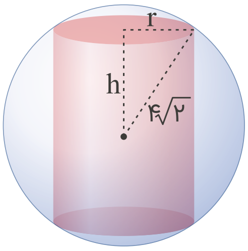
این معادلهٔ درجه‌دو ریشهٔ ساده خواهد داشت هرگاه $\Delta > ۰$ باشد، پس داریم:

$$(۲a)^۲ - ۴(۱)(-۲a) > ۰ \Rightarrow ۴a^۲ + ۸a = ۴a(a + ۲) > ۰$$

a		-۲		۰	
$۴a(a+۲)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

بنابراین به‌ازای $a < -۲$ یا $a > ۰$، تابع f دارای اکسترمم نسبی است.

۳ گزینه ۲



$$h^۲ + r^۲ = ۳۲ \Rightarrow h = \sqrt{۳۲ - r^۲}$$

مساحت جانبی : $f = ۲\pi r \times ۲h = ۴\pi r\sqrt{۳۲ - r^۲} = ۴\pi\sqrt{۳۲r^۲ - r^۴}$

$$f' = ۴\pi \times \frac{۶۴r - ۴r^۳}{۲\sqrt{۳۲r^۲ - r^۴}} = ۰ \begin{cases} r = ۰ & \text{غلط} \\ r = ۴ & \text{درست} \end{cases}$$

اگر $r = ۴$ باشد $h = ۴$ است.

$$\max(S) = ۴\pi(۴)(۴) = ۶۴\pi$$

.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴ گزینه ۱

اگر $x \geq ۰$ باشد:

$$f(x) = ۳\sqrt[۳]{x} + x \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x = ۰ \quad (۱)$$

اگر $x < ۰$ باشد:

$$f(x) = ۳\sqrt[۳]{x} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} - ۱ \geq ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} \geq ۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲} \leq ۱$$

$$\Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \xrightarrow{\cap(x<۰)} -۱ \leq x < ۰ \quad (۲)$$

اجتماع جواب‌های به‌دست‌آمده $(۰, +\infty) \cup [-۱, ۰)$ است، اما جواب درست $[-۱, +\infty)$ است، زیرا $x = ۰$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۵

گزینه ۳

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow -۳x^{۲} \leq ۰ \Rightarrow x^{۳} - ۳x^{۲} \leq x^{۳} \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} \sqrt[۳]{x^{۳} - ۳x^{۲}} \leq \sqrt[۳]{x^{۳}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^{۳} - ۳x^{۲}} \leq x \Rightarrow x - \sqrt[۳]{x^{۳} - ۳x^{۲}} \geq ۰$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۶

گزینه ۳

چون دامنهٔ تابع $[-۱, ۳]$ است، پس $x_۱ = ۳$ و $x_۲ = -۱$ ریشه‌های معادلهٔ $-x^{۲} + ax + b = ۰$ هستند.

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-a}{-۱} \Rightarrow -۱ + ۳ = a \Rightarrow a = ۲$$

$$x_۱ x_۲ = \frac{b}{-۱} \Rightarrow -۱ \times ۳ = -b \Rightarrow b = ۳$$

طبق نمودار، مشاهده می‌کنید که مشتق تابع در ماکزیممش صفر است.

$$f'(x) = ۱ + \frac{-۲x + ۲}{۲\sqrt{-x^{۲} + ۲x + ۳}} = ۰ \Rightarrow \frac{x - ۱}{\sqrt{-x^{۲} + ۲x + ۳}} = ۱$$

$$\Rightarrow -x^{۲} + ۲x + ۳ = (x - ۱)^{۲} \Rightarrow -x^{۲} + ۲x + ۳ = x^{۲} - ۲x + ۱$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} - ۴x - ۲ = ۰ \Rightarrow x^{۲} - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۲}$$

$x = ۱ + \sqrt{۲}$ قابل‌قبول است.

$$f(۱ + \sqrt{۲}) = ۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{-(۱ + \sqrt{۲})^{۲} + ۲(۱ + \sqrt{۲}) + ۳}$$

$$= ۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{-۱ - ۲ - ۲\sqrt{۲} + ۲ + ۲\sqrt{۲} + ۳} = ۱ + ۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۷

گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه تابع f در نقطهٔ $x = c$ مشتق راست دارد پس حتماً در همسایگی راست این نقطه تعریف شده است. نقطهٔ $x = c$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین به ازای هر x عضو همسایگی راست این نقطه داریم:

$$\begin{cases} x > c \\ f(x) \geq f(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - c > ۰ \\ f(x) - f(c) \geq ۰ \end{cases} \qquad (*)$$

طبق تعریف مشتق راست در نقطهٔ $x = c$ داریم:

$$f'_{+}(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \xrightarrow{(*)} f'_{+}(c) \geq ۰$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x = c$ الزاماً نامنفی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۸

گزینه ۲

$$f(۰) = ۴ \Rightarrow c = ۴$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(۰) = ۰ \Rightarrow b = ۰ \\ f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲ax = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{۲a}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

$$f(-\frac{۲a}{۳}) = ۰ \Rightarrow (-\frac{۲a}{۳})^۳ + a(-\frac{۲a}{۳})^۲ + ۴ = ۰$$

$$-\frac{۸a^۳}{۲۷} + \frac{۴a^۳}{۹} + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{۴a^۳}{۲۷} = -۴ \Rightarrow a^۳ = -۲۷$$

$$\Rightarrow a = -۳ \Rightarrow x_{min} = -\frac{۲a}{۳} = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۹ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۲-۲)-۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(۲x^۴-۴x^۲-x^۴+۳)}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۴-۴x^۲+۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

x $\quad -۲ \quad -\sqrt{۳} \quad -\sqrt{۲} \quad -۱ \quad ۰ \quad ۱ \quad \sqrt{۲} \quad \sqrt{۳} \quad ۲$

f' $\quad - \quad ۰ \quad + \quad$ ت‌ن $\quad + \quad ۰ \quad - \quad ۰ \quad + \quad ۰ \quad - \quad$ ت‌ن $\quad - \quad ۰ \quad +$

در چهار بازه، تابع اکیداً نزولی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰ گزینه ۱

نقطهٔ $B(x,\sqrt{۲x+۷})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۰)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x-۵)^۲+(\sqrt{۲x+۷}-۰)^۲}$$
$$=\sqrt{x^۲-۱۰x+۲۵+۲x+۷}=\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}$$

برای به دست آوردن کمترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)'=\frac{۲x-۸}{۲\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}}=\frac{x-۴}{\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}}$$

$$(AB)'=۰\Rightarrow x=۴\Rightarrow B(۴,\sqrt{۱۵})$$

کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. درنتیجه داریم:

$$A(۵,۰),B(۴,\sqrt{۱۵})\Rightarrow AB=\sqrt{(۵-۴)^۲+(۰-\sqrt{۱۵})^۲}=۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱

گزینه ۳

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف‌نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلقی $|x^۲ + x - ۲|$، ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = (x-۱)|x^۲ + x - ۲| = (x-۱)|(x+۲)(x-۱)|$$

$x = -۲$ و $x = ۱$ ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق هستند پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} (x-۱)^۲(x+۲) & ; x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۲ \\ -(x-۱)^۲(x+۲) & ; -۲ < x < ۱ \end{cases}$$

تابع در نقاط $x = -۲$ و $x = ۱$ پیوسته است پس ضابطهٔ $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} (x-۱)(۳x+۳) & ; x > ۱ \text{ یا } x < -۲ \\ -(x-۱)(۳x+۳) & ; -۲ < x < ۱ \end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را به دست می‌آوریم:

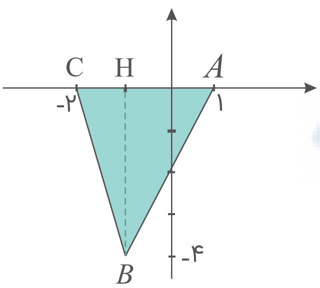
$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > ۱,\ x < -۲ \ :\ (x-۱)(۳x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \text{ غ ق ق} \\ -۲ < x < ۱ \ :\ -(x-۱)(۳x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \end{cases}$$

باتوجه‌به اینکه $f'_{-}(۱) = f'_{+}(۱) = ۰$ است پس $x = ۱$ نیز نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ است. بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف‌نشده است. داریم:

$$\left.\begin{matrix} f'_{+}(-۲) = -(-۲-۱)(-۳) = -۹ \\ f'_{-}(-۲) = (-۲-۱)(-۳) = ۹ \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'_{+}(-۲) \neq f'_{-}(-۲) \Rightarrow f'(-۲) \text{ وجود ندارد}$$

بنابراین تابع $f(x)$ دارای سه نقطهٔ بحرانی $A(۱, ۰)$، $B(-۱, -۴)$ و $C(-۲, ۰)$ است. مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} BH \times AC = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۳ = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۲ گزینه ۴

گام اول:
برد تابع $f(x)$ همان محدودهٔ تغییرات مقادیر $f(x)$ بر روی بازهٔ مشخص‌شده است. مقادیر $f(x)$ بر روی یک بازه بین ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:
برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع پیوستهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $[-۳,۱]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را بر روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین نقاط ابتدایی و انتهایی بازه می‌یابیم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی است که $f'(x)=۰$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد؛ بنابراین داریم:

$$f(x)=x^۳-۱۲x+۸ \Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۱۲=۳(x^۲-۴)=۰$$

$$\Rightarrow x=۲\,,\ x=-۲ \xrightarrow{x\in[-۳,۱]} x=-۲$$

$$f(-۳)=(-۳)^۳-۱۲(-۳)+۸=-۲۷+۳۶+۸=۱۷$$

$$f(-۲)=(-۲)^۳-۱۲(-۲)+۸=-۸+۲۴+۸=۲۴ \Rightarrow \text{مطلق max}$$

$$f(۱)=۱^۳-۱۲(۱)+۸=۱-۱۲+۸=-۳ \Rightarrow \text{مطلق min}$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ به‌صورت $[-۳,۲۴]$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۱۳ گزینه ۴

$$f(x)=\frac{x^۴}{x^۳-۸} \Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۳-۸)-۳x^۲x^۴}{(x^۳-۸)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^۳(۴x^۳-۳۲-۳x^۳)}{(x^۳-۸)^۲}=\frac{x^۳(x^۳-۳۲)}{(x^۳-۸)^۲}$$

x	$-\infty$		۰		۲		$\sqrt[۳]{۳۲}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	ن ت	−	۰	+	

تابع در بازه‌های $[۰,۲)$ و $(۲,\sqrt[۳]{۳۲}]$ نزولی اکید است. طول بازه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$۲-۰=۲$$
$$\sqrt[۳]{۳۲}-۲=\sqrt[۳]{۸\times۴}-۲=۲(\sqrt[۳]{۴}-۱)\simeq ۱/۱۷$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۴

گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع $f(x) = x|۳ - x^۲|$ را حساب می‌کنیم:

$$۳ - x^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۳} \in D \\ x = -\sqrt{۳} \notin D \end{cases}$$

$$(x(۳ - x^۲))' = ۰ \Rightarrow (۳x - x^۳)' = ۰ \Rightarrow ۳ - ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \in D \\ x = -۱ \in D \end{cases}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{-۱, ۱, \sqrt{۳}, -۱/۵\}$ خواهد بود.

$$f(۱) = ۲ \ , \ f(-۱) = -۲ \ , \ f(\sqrt{۳}) = ۰$$

$$f(-۱/۵) = f(-\frac{۳}{۲}) = -\frac{۳}{۲}|۳ - \frac{۹}{۴}| = \frac{-۳}{۲} \times \frac{۳}{۴} = \frac{-۹}{۸}$$

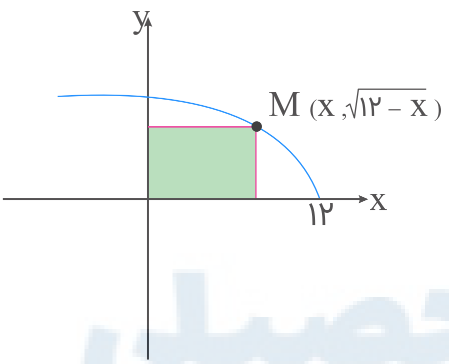
کمترین مقدار تابع -۲ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۵

گزینه ۳

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مساحت مستطیل ساخته‌شده برابر $S(x) = x\sqrt{۱۲ - x}$ است.

$$S' = \sqrt{۱۲ - x} - \frac{x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۲(۱۲ - x) - x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰$$

$$۲۴ - ۲x - x = ۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow S_{max} = ۸\sqrt{۱۲ - ۸} = ۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶

گزینه ۴

تابع چندجمله‌ای $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ و ازجمله روی بازهٔ $(۱,۴)$ پیوسته است. برای یافتن طول نقاط اکسترمم این تابع، کافی است معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل کنیم.

همچنین می‌دانیم در معادلهٔ $f'(x)=۳x^۲+۲ax-۸=۰$ حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر است با: $\frac{c}{a}=\frac{-۸}{۳}<۰$، پس یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. درنتیجه جواب مثبت در بازهٔ $(۱,۴)$ قرار دارد. حال داریم:

$$f'(x)=۳x^۲+۲ax-۸=۰\Rightarrow x=\frac{-a\pm\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}$$

$x=\frac{-a+\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}$ مثبت است، پس در بازهٔ $(۱,۴)$ قرار دارد:

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}\Rightarrow ۱<\frac{-a+\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}<۴$$

$$۱)\ ۱<\frac{-a+\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}\Rightarrow -a+\sqrt{a^۲+۲۴}>۳\Rightarrow\sqrt{a^۲+۲۴}>۳+a$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲+۲۴>a^۲+۶a+۹\Rightarrow ۶a<۱۵\Rightarrow a<۲/۵\quad (\mathrm{I})$$

$$۲)\ \frac{-a+\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}<۴\Rightarrow -a+\sqrt{a^۲+۲۴}<۱۲\Rightarrow\sqrt{a^۲+۲۴}<۱۲+a$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲+۲۴<a^۲+۲۴a+۱۴۴\Rightarrow ۲۴a>-۱۲۰\Rightarrow a>-۵\quad (\mathrm{II})$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I})\cap(\mathrm{II})} -۵<a<۲/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۷

گزینه ۱

برای تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ و نوع آن‌ها از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.
ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و با حل معادلهٔ $f'(x)=۰$، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=x^{۴}-۶x^{۲}+۸x \Rightarrow f'(x)=۴x^{۳}-۱۲x+۸$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۴(x^{۳}-۳x+۲)=۰ \Rightarrow ۴(x-۱)(x^{۲}+x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow ۴(x-۱)(x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow ۴(x-۱)^{۲}(x+۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

اکنون با تعیین علامت $f'(x)$، اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	

باتوجه‌به جدول فوق، تابع $f(x)$ فقط دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در نقطهٔ $x=-۲$ می‌باشد زیرا علامت $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه عوض شده است. دقت کنید که $x=۱$ ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=۰$ است اما چون $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه تغییر علامت نداده پس این نقطه اکسترمم نسبی تابع محسوب نمی‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۸

گزینه ۲

برای یافتن بیشترین و کمترین مقدار تابع پیوستهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $[۱,۳]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی است که $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد. داریم:

$$f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+k \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۶x=۳x(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۰, x=۲$$

چون $۰ \notin [۱,۳]$ پس تنها نقطهٔ $x=۲$ قابل‌قبول است؛ همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازه هم بحرانی‌اند. بنابراین داریم:

$$f(۱)=۱-۳+k=k-۲$$

$$f(۲)=۸-۱۲+k=k-۴$$

$$f(۳)=۲۷-۲۷+k=k$$

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر k و کمترین مقدار آن برابر $k-۴$ است. این دو مقدار قرینهٔ یکدیگرند؛ پس:

$$k=-(k-۴) \Rightarrow k=-k+۴ \Rightarrow ۲k=۴ \Rightarrow k=۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۱۹

گزینه ۱

$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow (۲x+۲)\left(x^۲+۱\right)-۲x(x^۲+۲x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \cancel{۲x^۳}+۲x+۲x^۲+۲-\cancel{۲x^۳}-۴x^۲+۶x=۰$$

$$\Rightarrow -۲x^۲+۸x+۲=۰\Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۲۰\Rightarrow x=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۵}}{۲}=۲\pm\sqrt{۵}$$

x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
f'		−		+		−	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	$-۱+\sqrt{۵}$ max	$\searrow$	

$$f(۲+\sqrt{۵})=\frac{(۲+\sqrt{۵})^۲+۴+۲\sqrt{۵}-۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲+۱}$$

$$=\frac{۹+۴\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}+۱}{۹+۴\sqrt{۵}+۱}=\frac{۱۰+۶\sqrt{۵}}{۱۰+۴\sqrt{۵}}=\frac{۵+۳\sqrt{۵}}{۵+۲\sqrt{۵}}\times\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۵-۲\sqrt{۵}}=-۱+\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۰

گزینه ۲

$$f\left(x\right)=۲\sqrt{x}-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$$

تابع f در $x=۱$ مجانب قائم دارد. پس نمی‌تواند در فاصلهٔ $(۱,+\infty)\cup(۰,۱)$ اکیداً صعودی باشد و گزینهٔ ۱ حذف می‌شود.

برای $x>۱$ یا $۰<x<۱$، $x^۲-۱$ صعودی، درنتیجه $۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}$ هم صعودی و مثبت است. $\frac{۳}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$ نزولی و درنتیجه $\frac{-۳}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$ صعودی است. $۲\sqrt{x}$ هم که صعودی است، پس $۲\sqrt{x}-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$ هم صعودی می‌شود و گزینهٔ ۳ و ۴ حذف می‌شوند.

راه‌حل دوم:

$$f'\left(x\right)=\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}}$$

اگر $x>۰$ باشد، $f'\left(x\right)$ همواره مثبت است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۲۱ گزینه ۲

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن می‌یابیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

چون $3 \notin [-2, 2]$، پس مقدار تابع را به‌ازای $x = -1, -2, 2$ محاسبه و باهم مقایسه می‌کنیم.

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

$$f(2) = 8 - 12 - 18 + 5 = -17$$

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$$

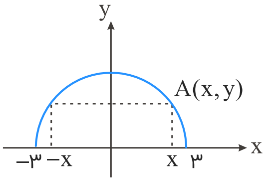
باتوجه‌به مقادیر به‌دست آمده، بیشترین مقدار تابع $y = 10$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۲

گزینه ۱

نقطهٔ A را بر روی نیم‌بیضی $y = \frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^۲}$ در نظر می‌گیریم.



این نقطه دارای مختصات $A(x, \frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^۲})$ است. فرض می‌کنیم طول مستطیل ۲x و عرض آن y باشد پس داریم:

$$S = ۲xy = ۲x(\frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^۲}) = \frac{۴}{۳}x\sqrt{۹ - x^۲} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۹x^۲ - x^۴}\ ,\ -۳ < x < ۳$$

برای یافتن بیشترین مساحت، ابتدا معادلهٔ $S'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'(x) = \frac{۴}{۳}(\frac{۱۸x - ۴x^۳}{۲\sqrt{۹x^۲ - x^۴}})$$

$$S'(x) = ۰ \Rightarrow ۱۸x - ۴x^۳ = ۰ \Rightarrow ۲x(۹ - ۲x^۲) = ۰$$

$$\xrightarrow{x \neq ۰} ۲x^۲ = ۹ \Rightarrow x^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow x = \pm\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین داریم:

$$S_{max} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۹x^۲ - x^۴} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۹(\frac{۹}{۲}) - \frac{۸۱}{۴}} = \frac{۴}{۳}\sqrt{\frac{۸۱}{۲} - \frac{۸۱}{۴}} = \frac{۴}{۳}\sqrt{\frac{۸۱}{۴}}$$

$$= \frac{۴}{۳} \times \frac{۹}{۲} = \frac{۳۶}{۶} = ۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۲۳

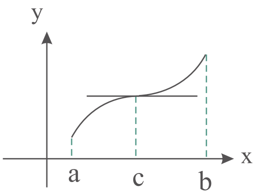
گزینه ۳

با بررسی گزینه‌ها، جواب سؤال را مشخص می‌کنیم.

گزینۀ اول: اگر c نقطۀ اکسترمم نسبی f و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه تابع f در این نقطه پیوسته و خط مماس موجود است بنابراین قطعاً خط مماس در این نقطه افقی است.

گزینۀ دوم: می‌دانیم هر نقطۀ اکسترمم نسبی، بحرانی می‌باشد، پس این گزینه درست است.

گزینۀ سوم: فرض می‌کنیم c نقطۀ بحرانی تابع f باشد، باتوجه‌به نمودار زیر درستی این گزینه را رد می‌کنیم:



گزینۀ چهارم: باتوجه‌به اینکه c یک نقطه درون بازه است، پس اگر c نقطۀ اکسترمم مطلق تابع f باشد، قطعاً اکسترمم نسبی تابع نیز می‌باشد؛ بنابراین بر اساس دلیل درستی گزینۀ دوم، این نقطه یک نقطۀ بحرانی تابع f است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۴

گزینه ۲

ابتدا با مشتق‌گیری از تابع $g(x)$، وضعیت یکنوایی این تابع را تعیین می‌کنیم:

$$g(x) = x^{۳} + x \Rightarrow g'(x) = ۳x^{۲} + ۱ > ۰$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین بیشترین مقدار تابع gof به ازای بیشترین مقدار تابع f به دست می‌آید. با تعیین علامت تابع $f(x)$، تغییرات آن را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^{۳} - ۳x \; ; x \leq ۱ \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} - ۳$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^{۲} = ۳ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ با شرط $x \leq ۱$، در نقطهٔ $x = -۱$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$f(-۱) = (-۱)^{۳} - ۳(-۱) = -۱ + ۳ = ۲$$

بنابراین با شرط $x \leq ۱$ داریم: $f(x) \leq ۲$

به این ترتیب بیشترین مقدار تابع gof برابر است با:

$$(gof)_{max} = g(۲) = ۲^{۳} + ۲ = ۸ + ۲ = ۱۰$$

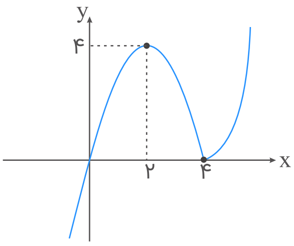
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۵

گزینه ۴

$$f(x) = x|x-۴| = \begin{cases} x^۲ - ۴x & ; x \geq ۴ \\ ۴x - x^۲ & ; x < ۴ \end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:



این تابع در $(۴,۰)$ مینیمم نسبی و در $(۲,۴)$ ماکزیمم نسبی دارد. فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(۲-۴)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۶

گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه تابع روی این بازه پیوسته و $f'(x) > ۰$ باشد.

گام دوم

$$۱ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ به جز دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = -۱$ تعریف شده است. داریم:

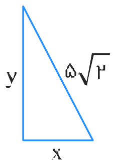
$$y = \frac{x}{۱-x^۲} \Rightarrow y' = \frac{(۱-x^۲) - (-۲x)x}{(۱-x^۲)^۲} = \frac{x^۲+۱}{(۱-x^۲)^۲}$$

تابع y' به‌ازای تمام نقاط عضو دامنهٔ تعریف تابع y، مثبت است؛ بنابراین کافی است بازه‌ای را انتخاب کنیم که هیچ‌کدام از دو مقدار $x = \pm ۱$ درون بازه نباشد، باتوجه‌به گزینه‌ها، نمودار تابع روی بازهٔ $(-\infty, -۲)$ صعودی است.

۲۷

گزینه ۱

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم x و y، به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم. طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$x^۲ + y^۲ = (۵\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۵۰$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۵۰ - x^۲ \Rightarrow y = \sqrt{۵۰ - x^۲}$$

$$\Rightarrow f = ۳x + ۴y = ۳x + ۴\sqrt{۵۰ - x^۲}$$

برای یافتن ماکزیمم مقدار تابع $f(x) = ۳x + ۴\sqrt{۵۰ - x^۲}$، مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = ۳ + ۴(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۵۰ - x^۲}}) = ۳ - \frac{۴x}{\sqrt{۵۰ - x^۲}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳ = \frac{۴x}{\sqrt{۵۰ - x^۲}} \Rightarrow ۳\sqrt{۵۰ - x^۲} = ۴x \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x>۰} ۹(۵۰ - x^۲) = ۱۶x^۲$$

$$\Rightarrow ۴۵۰ - ۹x^۲ = ۱۶x^۲ \Rightarrow ۲۵x^۲ = ۴۵۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = \sqrt{۱۸}$$

$$y = \sqrt{۵۰ - x^۲} = \sqrt{۵۰ - ۱۸} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

بنابراین:

$$f_{\max} = ۳x + ۴y = ۳(۳\sqrt{۲}) + ۴(۴\sqrt{۲}) = ۹\sqrt{۲} + ۱۶\sqrt{۲} = ۲۵\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۸ گزینه ۴

ابتدا وضعیت یکنوایی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را روی دامنهٔ تعریف آن‌ها بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^۲ - ۲x + ۴ \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = ۲x - ۲ \ , \ f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

$$f(۱) = ۱^۲ - ۲(۱) + ۴ = ۱ - ۲ + ۴ = ۳ \Rightarrow f(x) \geq ۳$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

$$g(x) = x^۳ + x \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = ۳x^۲ + ۱ > ۰$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین کمترین مقدار تابع gof به ازای کمترین مقدار تابع $f(x)$ به دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$f(x) \geq ۳ \Rightarrow g(f(x)) \geq g(۳)$$

$$\Rightarrow (gof)_{min} = g(۳) = ۳^۳ + ۳ = ۲۷ + ۳ = ۳۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۲۹

گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

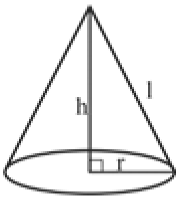
گام اول

الف) حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ب) مقدار جنس مصرفی برای ساخت یک مخروط معادل مساحت جانبی آن است.
ج) مساحت جانبی مخروطی به شکل زیر برابر است با:

$$S = \pi r l$$



گام دوم

برای اینکه در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت کمترین مقدار جنس مصرف شود باید مساحت جانبی آن را مینیمم کنیم. باتوجه‌به اینکه حجم مخروط برابر $\frac{\pi}{3}$ است، رابطه‌ای بین شعاع قاعدهٔ مخروط و ارتفاع مخروط به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r^2 h = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{h} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (\mathrm{I})$$

برای محاسبهٔ مساحت جانبی مخروط ابتدا لازم است اندازهٔ l را به دست آوریم. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2} \quad (\mathrm{II})$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ مساحت جانبی و با جایگذاری دو رابطهٔ (I) و (II) در آن داریم:

$$S = \pi r l \xrightarrow{(\mathrm{II})} S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} \xrightarrow{(\mathrm{I})} S = \pi \times \frac{1}{\sqrt{h}} \times \sqrt{\frac{1}{h} + h^2} = \frac{\pi\sqrt{h^3 + 1}}{h}$$

برای مینیمم کردن مساحت جانبی، از S نسبت به h مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \pi \times \frac{\frac{3h^2}{2\sqrt{h^3 + 1}} \times h - \sqrt{h^3 + 1}}{h^2} = \frac{\pi}{h^2}\left(\frac{3h^3 - 2h^3 - 2}{2\sqrt{h^3 + 1}}\right) = \frac{\pi}{h^2}\left(\frac{h^3 - 2}{2\sqrt{h^3 + 1}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow h^3 - 2 = 0 \Rightarrow h^3 = 2 \Rightarrow h = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین به ازای ارتفاع $h = \sqrt[3]{2}$ در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت $\frac{\pi}{3}$، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود.

۳۰ گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع را در فاصلهٔ $[-۴,۳]$ به دست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x \Rightarrow f'(x)=x^{۲}-۲x-۱۵$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x^{۲}-۲x-۱۵=(x-۵)(x+۳)=۰$$

x		-۳		۵	
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
	↗	max	↘	min	↗

$[-۴,۳]$ نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $=-۳,-۴,۳$

$$\left.\begin{aligned} f(-۴)&=-\frac{۶۴}{۳}-۱۶+۶۰=\frac{۶۸}{۳}\\ f(-۳)&=\frac{(-۳)^{۳}}{۳}-۹+۴۵=۲۷\\ f(۳)&=\frac{۳^{۳}}{۳}-۹-۴۵=-۴۵\end{aligned}\right\}\xrightarrow{x\in[-۴,۳]}\begin{cases} y_{min}=-۴۵\\ y_{max}=۲۷\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۱ گزینه ۴

هرگاه $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه نقاط بحرانی تابع $y=|f(x)|$، ریشه‌های سادهٔ دو معادلهٔ $f(x)=۰$ و $f'(x)=۰$ خواهد بود.

$$f(x)=|x^{۳}-x|$$

$$x^{۳}-x=۰ \Rightarrow x(x^{۲}-۱)=۰ \Rightarrow x=۰, x=۱, x=-۱$$

$$(x^{۳}-x)'=۰ \Rightarrow ۳x^{۲}-۱=۰ \Rightarrow ۳x^{۲}=۱$$

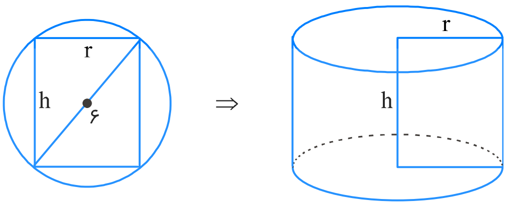
$$\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}, x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

همچنین تابع در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۱,۲]$ نیز بحرانی است، بنابراین تابع $f(x)=|x^{۳}-x|$ روی بازهٔ $[-۱,۲]$ دارای شش نقطهٔ بحرانی $x=۰$، $x=۱$، $x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ، $x=-۱$ و $x=۲$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۳۲

گزینه ۲



می‌دانیم قطر مستطیل محاط درون دایره، برابر با قطر دایره است پس طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$h^2 + r^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 + r^2 = 36 \Rightarrow r = \sqrt{36 - h^2}$$

حجم استوانهٔ حاصل از دوران مستطیل برابر است با:

$$V = \pi r^2 h = \pi(36 - h^2)h = 36\pi h - \pi h^3$$

می‌خواهیم حجم استوانه بیشترین مقدار باشد پس ابتدا معادلهٔ $V'_h = 0$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = 36\pi - 3\pi h^2$$
$$V'_h = 0 \Rightarrow 36\pi - 3\pi h^2 = 0$$
$$\Rightarrow 3\pi h^2 = 36\pi \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۳۳

گزینه ۴

در توابع چندجمله‌ای نقاط بحرانی از حل معادلهٔ $y' = 0$ به دست می‌آید، لذا:

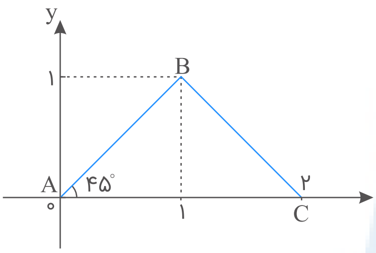
$$f(x) = x^2(x-2)^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(x-2)^2 + 2(x-2)(x^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(x-2)(x-2+x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 1, 2$$

$$A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \quad , \quad B\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right. \quad , \quad C\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$$



$$\Rightarrow AB = BC$$

باتوجه‌به شکل و اینکه $AB = BC$، مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۸

۳۴

گزینه ۱

$$A(-1, 1) : 1 = (-1)^2|-1| + 3a(-1)^2 + b$$

$$\Rightarrow 1 + 3a + b = 1 \Rightarrow 3a + b = 0 \quad (*)$$

$$\left.\begin{matrix} f'(-1) = 0 \\ x = -1 < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = -x^3 + 3ax^2 + b$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6ax \xrightarrow{x=-1} f'(-1) = -3 - 6a = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$\xrightarrow{*} 3(\frac{-1}{2}) + b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = -3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۳۵ گزینه ۲

$$y' = ۰ \Rightarrow ۳ax^۲ + ۲bx + c = ۰$$

ریشه‌های این معادله ۰ و ۱ هستند، پس $c = ۰$ است. داریم:

$$۳ax^۲ + ۲bx = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۳a + ۲b = ۰$$

ازطرفی چون $(۰, ۰)$ در تابع صدق می‌کند، پس $d = ۰$ است.

$$y = ax^۳ + bx^۲ \xrightarrow{(۱,۱)} ۱ = a + b$$

$$\begin{cases} a + b = ۱ \\ ۳a + ۲b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۳ \end{cases} \Rightarrow ab = -۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۶ گزینه ۲

کمترین مقدار تابع، همان مینیمم مطلق تابع است. برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن، می‌یابیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

ضابطهٔ $f(x)$ یک عبارت چندجمله‌ای و $D_f \in \mathbb{R}$ است. کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را یافته و مینیمم مقدار تابع را به‌ازای آن‌ها مشخص کنیم.

$$y = \frac{۱}{۴}x^۴ - x^۳ - ۲x^۲ \Rightarrow y' = x^۳ - ۳x^۲ - ۴x = x(x-۴)(x+۱)$$

$$y' = ۰ \Rightarrow x(x-۴)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(۰) = ۰ \\ y(۴) = -۳۲ \\ y(-۱) = -\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده، $y = -۳۲$ کمترین مقدار تابع است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۷

گزینه ۴

نقطهٔ $M(\alpha, \sqrt{۲\alpha+۹})$ را بر روی منحنی $y=\sqrt{۲x+۹}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ میان دو نقطهٔ A و M برابر است با:

$$MA=\sqrt{(\alpha-۴)^{۲}+(\sqrt{۲\alpha+۹}-۰)^{۲}}=\sqrt{\alpha^{۲}-۸\alpha+۱۶+۲\alpha+۹}=\sqrt{\alpha^{۲}-۶\alpha+۲۵}$$

برای یافتن کمترین فاصله، ابتدا معادلهٔ $(MA)'_{\alpha}=۰$ را حل می‌کنیم:

$$(MA)'_{\alpha}=\frac{۲\alpha-۶}{۲\sqrt{\alpha^{۲}-۶\alpha+۲۵}}$$

$$(MA)'_{\alpha}=۰ \Rightarrow ۲\alpha-۶=۰ \Rightarrow \alpha=۳$$

بنابراین کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی $y=\sqrt{۲x+۹}$ برابر است با:

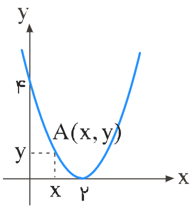
$$(MA)_{\min}=\sqrt{۹-۶(۳)+۲۵}=\sqrt{۱۶}=۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۸

گزینه ۳

نقطهٔ $A(x,y)$ روی منحنی $y=(x-۲)^۲$ را رأس چهارم مستطیل در نظر می‌گیریم، پس این رأس دارای مختصات $A(x,(x-۲)^۲)$ است. با رسم شکلی ساده، مستطیل ایجادشده را مشخص می‌کنیم.



مساحت این مستطیل برابر است با:

$$S=xy \xrightarrow{y_A=(x-۲)^۲} S=x(x-۲)^۲ \quad ; \quad ۰<x<۲$$

$$S'_x=(x-۲)^۲+۲x(x-۲)=(x-۲)(x-۲+۲x)=(x-۲)(۳x-۲)$$

$$S'_x=۰ \Rightarrow (x-۲)(۳x-۲)=۰ \xrightarrow{x\neq۲} ۳x-۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل به ازای $x=\frac{۲}{۳}$ به دست می‌آید:

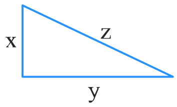
$$S_{max}=x(x-۲)^۲=(\frac{۲}{۳})(\frac{۲}{۳}-۲)^۲=\frac{۲}{۳}(-\frac{۴}{۳})^۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۶}{۹}=\frac{۳۲}{۲۷}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۳۹

گزینه ۲

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع x، y و z به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.



بر اساس اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$x+z=۶ \Rightarrow z=۶-x$$

ازطرفی طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^۲+y^۲=z^۲ \xrightarrow{z=۶-x} x^۲+y^۲=(۶-x)^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲=x^۲-۱۲x+۳۶$$

$$\Rightarrow y^۲=۳۶-۱۲x \Rightarrow y=\sqrt{۳۶-۱۲x} \Rightarrow y=۲\sqrt{۹-۳x}$$

اکنون مساحت مثلث را به‌صورت تابعی برحسب x می‌نویسیم:

$$S=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}x(۲\sqrt{۹-۳x})=x\sqrt{۹-۳x}$$

برای بهینه کردن مساحت، معادلهٔ $S'_x=۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x=\sqrt{۹-۳x}-\frac{۳x}{۲\sqrt{۹-۳x}}=\frac{۲(۹-۳x)-۳x}{۲\sqrt{۹-۳x}}=\frac{۱۸-۹x}{۲\sqrt{۹-۳x}}$$

$$S'_x=۰ \Rightarrow ۱۸-۹x=۰ \Rightarrow x=۲$$

$$\xrightarrow{y=۲\sqrt{۹-۳x}} y=۲\sqrt{۹-۶}=۲\sqrt{۳}$$

بنابراین بیشترین مساحت مثلث قائم‌الزاویه با مشخصات داده‌شده برابر است با:

$$S_{max}=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۴۰

گزینه ۱

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x)=0$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\Rightarrow\begin{cases}1+x^2\geq 0\Rightarrow x^2\geq -1\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

حال ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2}=-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

معادلهٔ $f'(x)=0$ جواب ندارد. همچنین $f'(x)$ فقط به ازای $x=0$ تعریف‌نشده است اما $x=0$ عضو دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ نیست پس نقطهٔ بحرانی محسوب نمی‌شود، بنابراین تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۱

گزینه ۱

می‌دانیم به ازای $-1\leq x\leq 1$ همواره $\cos x>0$ است؛ ازطرفی به ازای هر x، $|x|\geq 0$ است بنابراین به ازای $x\in[-1,1]$ نامساوی $-|x|\cos x\leq 0$ برقرار است.

می‌دانیم بیشترین مقدار یک عبارت نامثبت برابر صفر است، بنابراین در بازهٔ $[-1,1]$ به ازای $x=0$، ماکزیمم مقدار تابع $f(x)$ برابر صفر خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۴۲

گزینه ۴

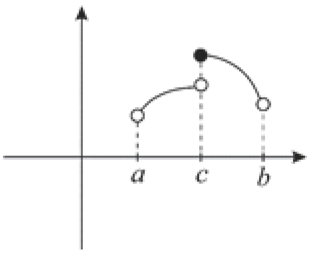
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) نقطه‌ای از دامنهٔ تعریف تابع f که به ازای آن تابع بیشترین (کمترین) مقدارش را می‌پذیرد، اکسترمم مطلق این تابع نامیده می‌شود.
ب) وقتی تابع f در همسایگی یک نقطه از دامنه تعریف شود آنگاه آن نقطه، یک نقطهٔ درونی دامنه است.

گام دوم

باتوجه‌به نمودار زیر، نقطهٔ $x = c$ اکسترمم مطلق تابع f است و تابع در همسایگی این نقطه تعریف شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تابع f در این نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است، همچنین مماس افقی ندارد.



بنابراین نقطهٔ $x = c$ تنها می‌تواند یک نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f باشد.

۴۳

گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. همچنین فرض کنیم f بر بازهٔ I شامل c پیوسته و بر این بازه به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است هرگاه $f'(x)$ قبل از c مثبت و بعد از c منفی باشد.

ب) نقطهٔ $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f گوییم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$y = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

ابتدا با حل معادلهٔ $y' = 0$ طول نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

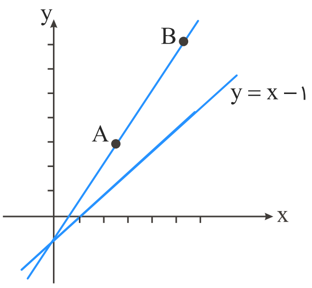
$$y' = 4x^3 + 4x^2 - 8x \xrightarrow{y'=0} 4x(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

بنابراین طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع برابر صفر است.

۴۴ گزینه ۲

دو نقطهٔ A و B و خط داده‌شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط $y = x - ۱$ قرار دارند؛ بنابراین نقطه‌ای از این خط که تفاضل فاصله‌اش از A و B بیشترین مقدار را دارد، همان محل برخورد خط $y = x - ۱$ و خط گذرنده از نقاط A و B است. ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

$$y - ۳ = \frac{۷ - ۳}{۴ - ۲}(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲x - ۴ \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

با مساوی قرار دادن معادلهٔ دو خط، نقطهٔ برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$۲x - ۱ = x - ۱ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow M(۰, -۱)$$

بنابراین طول نقطهٔ M برابر با صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۵

گزینه ۴

راه‌حل اول: برای یافتن مینیمم مقدار y، ابتدا معادلهٔ $y'=0$ را حل می‌کنیم:

$$y=\frac{3a+x}{\sqrt[4]{a^3x}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\,\frac{3a+x}{\sqrt[4]{x}}$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\times\frac{\sqrt[4]{x}-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}(3a+x)}{\sqrt[4]{x^2}}=\frac{4x-(3a+x)}{4\sqrt[4]{x^5}}=\frac{3x-3a}{4\sqrt[4]{x^5}}$$

$$\Rightarrow y'=0\Rightarrow 3x-3a=0\Rightarrow x=a$$

چون a مقداری مثبت است، جدول تعیین علامت y' به‌صورت زیر می‌باشد:

		a	
y'	$-$	0	$+$
	↘		↗

بنابراین y در نقطهٔ $x=a$ مینیمم است، درنتیجه داریم:

$$y(a)=\frac{3a+a}{\sqrt[4]{a^3a}}=\frac{4a}{a}=4$$

راه‌حل دوم: a مقداری ثابت است پس به ازای تمام مقادیر x، a فقط یک مقدار می‌پذیرد. برای سادگی حل a را مقداری انتخاب می‌کنیم که به ازای آن، گزینه‌ها یکسان نشوند. با انتخاب $a=2$، چهار گزینه مقدار متفاوتی خواهند داشت و همچنین داریم:

$$y=\frac{6+x}{\sqrt[4]{8x}}$$

برای یافتن مینیمم مقدار y ابتدا معادلهٔ $y'=0$ را حل می‌کنیم:

$$y=\frac{6+x}{\sqrt[4]{8x}}=(6+x)(8x)^{-\frac{1}{4}}$$

$$y'=(8x)^{-\frac{1}{4}}-2(6+x)(8x)^{-\frac{5}{4}}=(8x)^{-\frac{5}{4}}(8x-12-2x)=\frac{6x-12}{\sqrt[4]{(8x)^5}}$$

$$y'=0\xrightarrow{x\neq 0}6x-12=0\Rightarrow x=2$$

مینیمم مقدار تابع برابر با $y(2)$ است و داریم:

$$y(2)=\frac{6+2}{\sqrt[4]{8(2)}}=\frac{8}{\sqrt[4]{16}}=\frac{8}{\sqrt[4]{2^4}}=\frac{8}{2}=4$$

راه‌حل سوم:

نکته: به ازای n عدد $x_1,x_2,\dots,x_n>0$ داریم:

$$x_1+x_2+\dots+x_n\geq n\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$$

باتوجه‌به نکته داریم:

$$f(x) = \underbrace{\frac{a}{\sqrt[4]{a^3x}}}_{x_1} + \underbrace{\frac{a}{\sqrt[4]{a^3x}}}_{x_2} + \underbrace{\frac{a}{\sqrt[4]{a^3x}}}_{x_3} + \underbrace{\frac{x}{\sqrt[4]{a^3x}}}_{x_4}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۴۶

گزینه ۱

ریشه‌های مشتق تابع باید ۲- و صفر باشد.

$$y' = 3x^2 + 2ax - 2b$$

پس:

$$\xrightarrow{(0,0)} b = 0$$

$$\xrightarrow{(-2,0)} 3(-2)^2 + 2a(-2) = 0 \Rightarrow 12 - 4a = 0 \Rightarrow a = 3$$

حال ریشه‌های مشتق را در تابع اصلی جاگذاری می‌کنیم:

$$y = x^3 + 3x^2 - 4$$

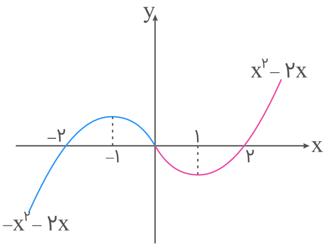
$$\begin{cases} \xrightarrow{x=0} (0, -4) \\ \xrightarrow{x=-2} (-2, 0) \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله}} \sqrt{(-2-0)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴۷ گزینه ۱

$$f(x) = x|x| - ۲x = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ; x \geq ۰ \\ -x^۲ - ۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x \geq ۰ : f'(x) = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x < ۰ : f'(x) = -۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

باتوجه‌به شکل، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب برابر $(-۱, ۱)$ و $(۱, -۱)$ است، پس فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با:

فاصله : $\sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۱+۱)^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۸

گزینه ۳

برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن یافته و کمترین آن‌ها را مشخص می‌کنیم.
نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.
چون دامنهٔ تابع چندجمله‌ای $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = 0$ را به دست آوریم:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

هر سه مقدار فوق عضو بازهٔ $[-1, 3]$ هستند. کمترین مقدار تابع را به‌ازای چهار مقدار $x = 0, 2, -1, 3$ به دست می‌آوریم:

$$f(-1) = \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 = -\frac{5}{12}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - 2^2 = -\frac{8}{3}$$

$$f(3) = \frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 3^2 = \frac{9}{4}$$

کمترین مقدار تابع روی بازهٔ $[-1, 3]$ برابر $y = -\frac{8}{3}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۴۹

گزینه ۴

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x^۲-۱|$ روی بازهٔ $[-۲,۲]$، ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم. برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x)$، کافی است نقاطی که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف‌نشده باشد را بیابیم.

$$\begin{cases} x^۲-۱\geq ۰ \Rightarrow x^۲\geq ۱ \Rightarrow |x|\geq ۱ \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۱ \\ x\leq -۱ \end{cases} \\ x^۲-۱<۰ \Rightarrow x^۲<۱ \Rightarrow |x|<۱ \Rightarrow -۱<x<۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x(x^۲-۱) & ; x\geq ۱, x\leq -۱ \\ -x(x^۲-۱) & ; -۱<x<۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۳-x & ; x\geq ۱, x\leq -۱ \\ -x^۳+x & ; -۱<x<۱ \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در دو نقطهٔ $x=۱$ و $x=-۱$ پیوسته است، پس ضابطهٔ $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۱ & ; x>۱, x<-۱ \\ -۳x^۲+۱ & ; -۱<x<۱ \end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x>۱, x<-۱ : ۳x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \text{ غ.ق.ق} \\ -۱<x<۱ : -۳x^۲+۱=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

(دقت کنید که در ضابطهٔ اول، چون ریشه‌های به‌دست‌آمده در محدودهٔ تعریف‌شده برای x قرار نمی‌گیرند پس قابل‌قبول نیستند.)

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف‌نشده است:

$$x=۱ : f'_+(۱)=۳-۱=۲ \ , \ f'_-(۱)=-۳+۱=-۲ \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

$$x=-۱ : f'_+(-۱)=-۳+۱=-۲ \ , \ f'_-(-۱)=۳-۱=۲ \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

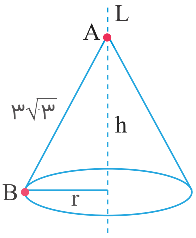
همچنین تابع در نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۲,۲]$ بحرانی است.

بنابراین تابع $f(x)$ دارای ۶ نقطهٔ بحرانی $x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $x=۱$، $x=-۱$، $x=۲$ و $x=-۲$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۰

گزینه ۲



$$r^۲ + h^۲ = (۳\sqrt{۳})^۲ = ۲۷ \Rightarrow r^۲ = ۲۷ - h^۲$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{\pi}{۳}(۲۷ - h^۲)h = \frac{\pi}{۳}(۲۷h - h^۳)$$

$$V' = ۰ \Rightarrow ۲۷ - ۳h^۲ = ۰ \Rightarrow h^۲ = ۹ \Rightarrow h = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵۱

گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

نقطهٔ $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، نقاطی از دامنهٔ تابع f که در معادلهٔ $f'(x) = ۰$ صدق می‌کند یا به‌ازای آن‌ها $f'(x)$ تعریف‌نشده است را می‌یابیم.

$$f(x) = (x^۲ - ۲۸)\sqrt[۳]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = ۲x\sqrt[۳]{x} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(x^۲ - ۲۸) = \frac{۶x^۲ + x^۲ - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{۷x^۲ - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ - ۲۸ = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ = ۲۸ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

به‌ازای $x = ۰$، مخرج تابع $f'(x)$ برابر صفر و درنتیجه این تابع تعریف‌نشده است؛ بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-۲, ۰, ۲\}$ است.

۵۲

گزینه ۲

نقطهٔ $(1,-2)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع $f(x)$ صدق می‌کند:

$$f(x)=\frac{a}{x}+bx^2 \xrightarrow{x=1\ ,y=-2} -2=a+b \quad (I)$$

می‌دانیم هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، یک نقطهٔ بحرانی تابع است بنابراین $x=1$ در معادلهٔ $f'(x)=0$ صدق می‌کند یعنی $f'(1)=0$ است:

$$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+2bx \xrightarrow{f'(1)=0} -a+2b=0 \Rightarrow a=2b \quad (II)$$

با جایگذاری رابطهٔ (II) در رابطهٔ (I) داریم:

$$a+b=-2 \xrightarrow{a=2b} 2b+b=-2 \Rightarrow 3b=-2 \Rightarrow b=\frac{-2}{3}$$

$$\xrightarrow{a=2b} a=-\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{4}{3x}-\frac{2}{3}x^2 \quad , \quad f'(x)=\frac{4}{3x^2}-\frac{4}{3}x$$

اکنون با تعیین علامت تابع $f'(x)$، نوع اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

x		۱	
$f'(x)$	+	۰	-
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

بنابراین به ازای $a=-\frac{4}{3}$، نقطهٔ $(1,-2)$ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۵۳

گزینه ۱

$$f'(x) = ۱ + \frac{۴ - ۲x}{۲\sqrt{۴x - x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۲ - x}{\sqrt{۴x - x^۲}} = ۱ \Rightarrow \sqrt{۴x - x^۲} = x - ۲ \quad (*)$$

باتوجه‌به معادله باید $x - ۲ \geq ۰$ باشد، یعنی: $x \geq ۲$

حال معادلهٔ (*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۴x - x^۲ = x^۲ - ۴x + ۴ \Rightarrow ۲x^۲ - ۸x + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۸ = ۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{۴ + ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲ + \sqrt{۲} & \text{قابل‌قبول} \\ x = \dfrac{۴ - ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲ - \sqrt{۲} & (x \geq ۲ \text{ غیرقابل‌قبول زیرا}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(۲ + \sqrt{۲}) = ۲ + \sqrt{۲} + \sqrt{۴(۲ + \sqrt{۲}) - (۲ + \sqrt{۲})^۲}$$

$$= ۲ + \sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۲ + ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow A(۲ + \sqrt{۲}, ۲ + ۲\sqrt{۲}) \quad \text{ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نیمساز ناحیهٔ اول یعنی $y = x$ به دست می‌آوریم:

$$x - y = ۰$$

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۲ + \sqrt{۲} - ۲ - ۲\sqrt{۲}|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵۴

گزینه ۲

نقطهٔ A را $A(x, \sqrt[۳]{-x})$ با فرض $x \in [۰,۱]$ در نظر می‌گیریم، دراین‌صورت $A'(\sqrt[۳]{x}, -x)$ خواهد بود.

$$AA' = \sqrt{(x-\sqrt[۳]{x})^۲ \times ۲} = \sqrt{۲}|\underbrace{x-\sqrt[۳]{x}}_{g(x)}|$$

$$g(x) = x - \sqrt[۳]{x}\ ,\ \ x \in [۰,۱]$$

حال بیشترین مقدار $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$g'(x) = ۱ - \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} = ۰ \Rightarrow ۳\sqrt[۳]{x^۲} = ۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۲۷} \Rightarrow x = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

$$g(۰) = g(۱) = ۰\ ,\ \ g(\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}) = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}} - \sqrt[۳]{\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}} = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}} - \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{-۲}{۳\sqrt{۳}}$$

$$\max(AA') = \sqrt{۲}|\frac{-۲}{۳\sqrt{۳}}| = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵۵

گزینه ۳

عبارت $x^۲ - ۳$ روی بازهٔ $[-۱,۱]$ همواره منفی است بنابراین داریم:

$$x \in [-۱,۱] :\ |x^۲ - ۳| = -(x^۲ - ۳) = ۳ - x^۲$$

$$\Rightarrow f(x) = x\,|x^۲ - ۳| = x(۳ - x^۲) = ۳x - x^۳$$

حال معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = ۳ - ۳x^۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳ - ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

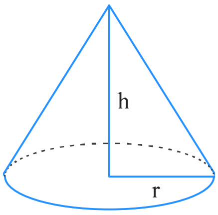
تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ صعودی و پیوسته است؛ بنابراین $f(-۱) = -۲$ مینیمم مطلق تابع و $f(۱) = ۲$ ماکزیمم مطلق تابع روی این بازه است. نقاط $x = +۱$ و $x = -۱$ چون نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ محسوب نمی‌شوند پس گزینهٔ سوم نادرست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۵۶

گزینه ۱

مخروطی به شعاع r و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. داریم:



$$r + h = 1 \Rightarrow r = 1 - h$$

حجم این مخروط برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \xrightarrow{r=1-h} V = \frac{1}{3}\pi(1-h)^2 h = \frac{1}{3}\pi(h^3 - 2h^2 + h)$$

برای ماکسیمم کردن حجم مخروط، ابتدا معادلهٔ $V'_h = 0$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = \frac{1}{3}\pi(3h^2 - 4h + 1)$$

$$V'_h = 0 \Rightarrow 3h^2 - 4h + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 1 & \text{غ ق ق } (r + h = 1 \text{ زیرا}) \\ h_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین به ازای $h = \frac{1}{3}$، بزرگ‌ترین حجم مخروط به دست می‌آید:

$$V_{max} = \frac{1}{3}\pi\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{81}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۵۷ گزینه ۳

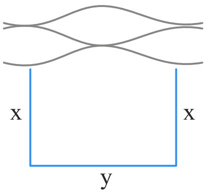
$$A \text{ نقطه} : (a, a^۲)$$
$$A' \text{ نقطه} : (a^۲, a)$$
$$y = x \text{ با } f \text{ تقاطع} \Rightarrow x^۲ = x \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases} \Rightarrow a \in (۰, ۱)$$
$$AA' = \sqrt{(a^۲ - a)^۲ + (a - a^۲)^۲} = \sqrt{۲}\,|a^۲ - a|$$
$$\xrightarrow{a \in (۰,۱)} \sqrt{۲}\,(a - a^۲) = -\sqrt{۲}a^۲ + \sqrt{۲}a$$
$$\xrightarrow{\max} \frac{-\Delta}{۴a} = -\frac{\sqrt{۲}^۲ - ۰}{۴\left(-\sqrt{۲}\right)} = \frac{۲}{-۴\sqrt{۲}} = -\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

چون طول پاره‌خط مدنظر است، پس مثبت درنظر می‌گیریم.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵۸ گزینه ۲

اگر طول و عرض زمین را به ترتیب y و x بنامیم آنگاه داریم:



$$y + ۲x = ۸۸ \Rightarrow y = ۸۸ - ۲x$$

مساحت مستطیل برابر با حاصل‌ضرب طول در عرض آن است پس تعریف می‌کنیم:

$$S = xy = x(۸۸ - ۲x) = ۸۸x - ۲x^۲$$

برای محاسبهٔ بیشترین مساحت، معادلهٔ $S'_x = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x = ۸۸ - ۴x \Rightarrow S'_x = ۰ \Rightarrow ۴x = ۸۸ \Rightarrow x = ۲۲ \;,\; y = ۸۸ - ۴۴ = ۴۴$$

بنابراین:

$$S_{max} = xy = ۲۲ \times ۴۴ = ۹۶۸$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۵۹

گزینه ۳

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱\Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=۶\left(x^۲-x-۲\right)=۶(x-۲)(x+۱)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\x=۲\end{cases}$$

اکسترمم‌های تابع در $x=-۱$ و $x=۲$ رخ می‌دهند.

$$f(-۱)=۸\Rightarrow \max:(-۱,۸)\qquad f(۲)=-۱۹\Rightarrow \min:(۲,-۱۹)$$

$$\text{شیب } AB:\ \frac{۸-(-۱۹)}{-۱-۲}=\frac{۲۷}{-۳}=-۹$$

مشتق را برابر ۹− قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=-۹\Rightarrow ۶x^۲-۶x-۳=۰\Rightarrow\Delta>۰$$

۲ نقطه با این ویژگی وجود دارد.

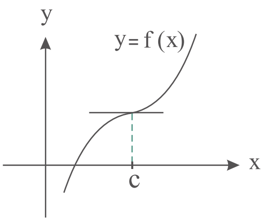
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۶۰

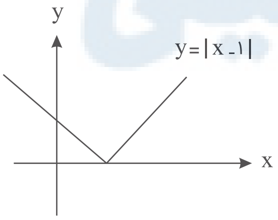
گزینه ۲

با آوردن مثال نقض، گزینه‌های نادرست را رد می‌کنیم.

گزینهٔ اول: نقطهٔ $x=c$ در نمودار زیر، یک نقطهٔ بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست.



گزینهٔ سوم: نقطهٔ $x=۱$ در تابع $y=|x-۱|$ یک نقطهٔ بحرانی است اما مشتق تابع در این نقطه تعریف‌نشده است.



گزینهٔ چهارم: نقطهٔ $x=۱$ اکسترمم نسبی تابع $y=|x-۱|$ است اما مشتق تابع در این نقطه برابر با صفر نیست.

بنابراین هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، قطعاً یک نقطهٔ بحرانی تابع است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۶۱

گزینه ۱

گام اول:
نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x)=0$ یا $f'(x)$ تعریف‌نشده باشد.
گام دوم:
ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلقی $|x-۲|$، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم. $x=۲$ ریشهٔ عبارت درون قدر مطلق است پس داریم:

$$f(x)=\begin{cases}(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲}\ ;\ x\geq ۲\\ -(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲}\ ;\ x<۲\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x-۲)x^{\frac{۲}{۳}}\ ;\ x\geq ۲\\ -(x-۲)x^{\frac{۲}{۳}}\ ;\ x<۲\end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x=۲$ پیوسته است پس ضابطهٔ تابع $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x^۲}+\dfrac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}}\ ;\ x>۲\\ -\sqrt[۳]{x^۲}-\dfrac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}}\ ;\ x<۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۵x-۴}{۳\sqrt[۳]{x}}\ ;\ x>۲\\ \dfrac{-۵x+۴}{۳\sqrt[۳]{x}}\ ;\ x<۲\end{cases}$$

ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=0$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x>۲\ :\ ۵x-۴=0\Rightarrow x=\dfrac{۴}{۵}\ \text{غ.ق.ق}\\ x<۲\ :\ -۵x+۴=0\Rightarrow x=\dfrac{۴}{۵}\end{cases}$$

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی موجود نیست. $x=0$ ریشهٔ مخرج $f'(x)$ است پس در این نقطه تعریف‌نشده است؛ ازطرفی به ازای $x=۲$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}f'_+(۲)=\dfrac{۱0-۴}{۳\sqrt[۳]{۲}}=\dfrac{۲}{\sqrt[۳]{۲}}=\sqrt[۳]{۴}\\ f'_-(۲)=\dfrac{-۱0+۴}{۳\sqrt[۳]{۲}}=\dfrac{-۲}{\sqrt[۳]{۲}}=-\sqrt[۳]{۴}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(۲)\ \text{موجود نیست}$$

بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{0,\frac{۴}{۵},۲\}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۶۲ گزینه ۲

برای تعیین ماکزیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی می‌یابیم. بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود. نقاط بحرانی، نقاطی از دامنهٔ تعریف تابع هستند که به‌ازای آن‌ها $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$f(x)=\frac{۱}{x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵}\Rightarrow f'(x)=\frac{۰-(۴x^۳-۱۲x^۲+۸x)}{(x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵)^۲}=\frac{-۴x(x-۲)(x-۱)}{(x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow -۴x(x-۲)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

هیچ‌یک از سه مقدار به‌دست‌آمده مخرج تابع $f'(x)$ را صفر نمی‌کنند، بنابراین هر سه طول نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ هستند. همچنین ابتدا و انتهای بازه هم نقاط بحرانی محسوب می‌شوند، پس داریم:

$$f(۰)=\frac{۱}{۰+۵}=\frac{۱}{۵}$$

$$f(۱)=\frac{۱}{۱-۴+۴+۵}=\frac{۱}{۶}$$

$$f(۲)=\frac{۱}{۱۶-۳۲+۱۶+۵}=\frac{۱}{۵}$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ برابر $\frac{۱}{۵}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۶۳

گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) باتوجه‌به خواص تابع جزء صحیح می‌دانیم: $0 \leq x - [x] < 1$

ب) هرگاه f تابعی اکیداً صعودی باشد، به ازای هر $x < y$ داریم: $f(x) < f(y)$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت "الف" از گام اول می‌توان نوشت:

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow -1 < f(x) \leq 0$$

$$gof(x) = g(f(x)) = 2^{[x]-x}$$

چون g تابعی اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$-1 < f(x) \leq 0 \xrightarrow{\text{g اکیداً صعودی}} g(-1) < g(f(x)) \leq g(0)$$

$$\Rightarrow 2^{-1} < 2^{[x]-x} \leq 2^{0} \Rightarrow \frac{1}{2} < 2^{[x]-x} \leq 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{2} < gof \leq 1$$

بنابراین تابع gof دارای ماکزیمم و فاقد مینیمم است.

۶۴

گزینه ۲

طول ضلع قاعده را a و ارتفاع را h می‌نامیم، داریم:

$$V = a^2h = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{a^2}$$

مقدار حلب برابر $4ah + a^2$ است:

$$S = 4ah + a^2 = \frac{16}{a} + a^2$$

مشتق می‌گیریم و برابر صفر می‌گذاریم:

$$S = \frac{16}{a} + a^2 \Rightarrow S' = \frac{-16}{a^2} + 2a = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow h = 1$$

$$S = 8 + 4 = 12$$

پس مقدار حلب برابر ۱۲ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶۵

گزینهٔ ۱

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow -x^{۲} \leq ۰ \Rightarrow x^{۳} - x^{۲} \leq x^{۳} \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} \sqrt[۳]{x^{۳} - x^{۲}} \leq \sqrt[۳]{x^{۳}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^{۳} - x^{۲}} \leq x \Rightarrow -x + \sqrt[۳]{x^{۳} - x^{۲}} \leq ۰$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $y = -x + \sqrt[۳]{x^{۳} - x^{۲}}$ روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۶۶

گزینهٔ ۱

برای تعیین وضعیت یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) تابع در اطراف نقطهٔ $x = ۰$، تابع y' را قبل و بعد از این نقطه تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x^{۲} + ۱}{x^{۳} + ۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲x(x^{۳} + ۱) - ۳x^{۲}(x^{۲} + ۱)}{(x^{۳} + ۱)^{۲}} = \frac{-x^{۴} - ۳x^{۲} + ۲x}{(x^{۳} + ۱)^{۲}}$$

باتوجه‌به اینکه $f'(۰) = ۰$ است پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ دارای مماس افقی است. داریم:

x		۰	
$f'(x)$	-	۰	+
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

نقطهٔ $x = ۰$ مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است پس گزینهٔ ۱ صحیح می‌باشد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۶۷

گزینهٔ ۱

یکی از اعداد را x و دیگری را y می‌نامیم. داریم: $y = ۲x - ۶$
می‌خواهیم $x.y$ مینیمم شود پس این حاصل‌ضرب را به‌صورت تابعی برحسب x نوشته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x) = x.y = x(۲x - ۶) = ۲x^{۲} - ۶x$$

$$\Rightarrow f'_{x} = ۴x - ۶ = ۰ \Rightarrow ۴x = ۶ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{y=۲x-۶} y = ۲(\frac{۳}{۲}) - ۶ = ۳ - ۶ = -۳$$

مجموع دو عدد برابر است با:

$$x + y = \frac{۳}{۲} - ۳ = -\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۶۸

گزینه ۳

نقطهٔ $A(\alpha, \frac{2}{\alpha^2})$ را بر روی منحنی $y = \frac{2}{x^2}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقطهٔ A برابر است با:

$$OA = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\frac{2}{\alpha^2} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^4}}$$

برای مینیمم کردن فاصلهٔ OA، ابتدا معادلهٔ $(OA)'_\alpha = 0$ را حل می‌کنیم:

$$(OA)'_\alpha = \frac{2\alpha - \frac{16\alpha^3}{\alpha^8}}{2\sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^4}}}$$

$$(OA)'_\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha - \frac{16}{\alpha^5} = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{16}{\alpha^5} \Rightarrow \alpha^6 = 8 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$$

بنابراین کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از منحنی $y = \frac{2}{x^2}$، به ازای $\alpha = \sqrt{2}$ به دست می‌آید:

$$(OA)_{min} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^4}} = \sqrt{2 + \frac{4}{4}} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۶۹

گزینه ۱

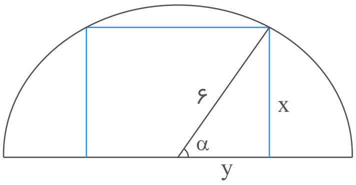
تابع $y = x + \sqrt{x}$ یک‌به‌یک است زیرا صعودی اکید است.

$$y = x + \sqrt{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۷۰ گزینه ۴

راه‌حل اول:

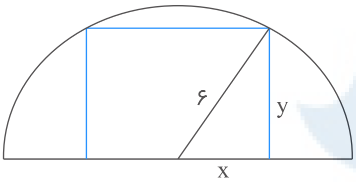


$$\sin\alpha = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۶\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{y}{۶} \Rightarrow y = ۶\cos\alpha$$

مساحت مستطیل : $S = x(۲y) = ۲(۳۶)\sin\alpha\cos\alpha = ۳۶\sin ۲\alpha$

مساحت وقتی ماکزیمم است که $\sin ۲\alpha = ۱$ باشد. بنابراین: $S_{max} = ۳۶$

راه‌حل دوم:



$$x^۲ + y^۲ = ۳۶ \Rightarrow y = \sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S = ۲xy = ۲x\sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S' = ۲\sqrt{۳۶ - x^۲} + \frac{-۴x^۲}{۲\sqrt{۳۶ - x^۲}} = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ = ۳۶ - x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۳\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$
$$S_{max} = ۲ \times ۳\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۳۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۱

گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

گام اول

فاصلهٔ میان دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

گام دوم

نقطهٔ موردنظر را $M(\alpha, 0)$ در نظر می‌گیریم. باتوجه‌به گام اول، فواصل MA و MB را محاسبه می‌کنیم.

$$|MA| = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(1-\alpha)^2 + 25}$$

$$|MB| = \sqrt{(7-\alpha)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(7-\alpha)^2 + 4}$$

تفاضل این دو فاصله، عبارتی برحسب α است که برای یافتن ماکسیمم مقدارش، کافی است ریشهٔ مشتق این عبارت را به دست آوریم.

$$d(\alpha) = |MA| - |MB| = \sqrt{(1-\alpha)^2 + 25} - \sqrt{(7-\alpha)^2 + 4}$$

$$d'(\alpha) = \frac{-2(1-\alpha)}{2\sqrt{(1-\alpha)^2 + 25}} - \frac{-2(7-\alpha)}{2\sqrt{(7-\alpha)^2 + 4}} = \frac{(7-\alpha)}{\sqrt{(7-\alpha)^2 + 4}} - \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 25}}$$

$$d'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{(7-\alpha)}{\sqrt{(7-\alpha)^2 + 4}} = \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 25}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{(7-\alpha)^2}{(7-\alpha)^2 + 4} = \frac{(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2 + 25}$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)^2((7-\alpha)^2 + 4) = (7-\alpha)^2((1-\alpha)^2 + 25)$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)^2(7-\alpha)^2 + 4(1-\alpha)^2 = (7-\alpha)^2(1-\alpha)^2 + 25(7-\alpha)^2$$

$$\Rightarrow 4(1-\alpha)^2 = 25(7-\alpha)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2(1-\alpha) = \pm 5(7-\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - 2\alpha = 35 - 5\alpha \Rightarrow 3\alpha = 33 \Rightarrow \alpha = 11 \\ 2 - 2\alpha = -35 + 5\alpha \Rightarrow 7\alpha = 37 \Rightarrow \alpha = \frac{37}{7} \end{cases}$$

باتوجه‌به گزینه‌ها، $\alpha = 11$ قابل‌قبول است.

۷۲ گزینه ۱

$$y=(x-۱)^۲\sqrt[۳]{x^۲}\Rightarrow y'=۲(x-۱)(x^{\frac{۲}{۳}})+(x-۱)^۲\left(\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\right)\Rightarrow y'=\frac{۶(x-۱)x+۲(x-۱)^۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$\text{صورت}=۰\Rightarrow ۲(x-۱)(۳x+(x-۱))=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ ۴x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow ۳\sqrt[۳]{x}=۰\Rightarrow x=۰$$

باتوجه‌به گزینه‌ها $x=\frac{۱}{۴}$ جواب مسئله است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۳ گزینه ۱

نقطهٔ $M(\alpha,\alpha\sqrt{\alpha})$ را بر روی منحنی $y=x\sqrt{x}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ میان دو نقطهٔ A و M برابر است با:

$$MA=\sqrt{(\alpha-۸)^۲+(\alpha\sqrt{\alpha}-۰)^۲}=\sqrt{\alpha^۲-۱۶\alpha+۶۴+\alpha^۳}=\sqrt{\alpha^۳+\alpha^۲-۱۶\alpha+۶۴}$$

برای مینیمم کردن فاصلهٔ MA، ابتدا معادلهٔ $(MA)'_\alpha=۰$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$(MA)'_\alpha=\frac{۳\alpha^۲+۲\alpha-۱۶}{۲\sqrt{\alpha^۳+\alpha^۲-۱۶\alpha+۶۴}}$$

$$(MA)'_\alpha=۰\Rightarrow ۳\alpha^۲+۲\alpha-۱۶=۰\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۲\\ \alpha=-\frac{۱۶}{۶}\quad (*)\text{غ ق}\end{cases}$$

* دامنهٔ تابع $y=x\sqrt{x}$ به‌صورت بازهٔ $[۰,+\infty)$ است.
بنابراین کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی $y=x\sqrt{x}$ برابر است با:

$$(MA)_{min}=\sqrt{(۲-۸)^۲+(۲\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۳۶+۸}=\sqrt{۴۴}=۲\sqrt{۱۱}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۷۴

گزینه ۳

ازآنجایی‌که $\sin^{۲}x = ۱ - \cos^{۲}x$ است، پس:

$$f(x) = \sin^{۲}x - \sin x$$

با فرض $\sin x = t$، داریم $-۱ \leq t \leq ۱$ و درنتیجه:

$$y = t^{۲} - t \quad , \quad -۱ \leq t \leq ۱$$

$$y' = ۲t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۲}$$

$$y(۱) = ۰ \quad , \quad y(-۱) = ۲ \quad , \quad y(\frac{۱}{۲}) = \frac{-۱}{۴}$$

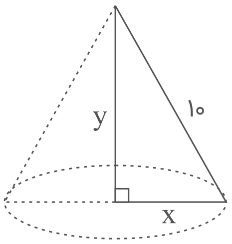
بنابراین کمترین مقدار تابع $\frac{-۱}{۴}$ است.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۷

۷۵

گزینه ۴

در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^۲+y^۲=۱۰۰\Rightarrow x^۲=۱۰۰-y^۲\quad(*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi x^۲y\xrightarrow{(*)}V=\frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰-y^۲)y=\frac{\pi}{۳}(۱۰۰y-y^۳)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V'=\frac{\pi}{۳}(۱۰۰-۳y^۲)\Rightarrow\frac{\pi}{۳}(۱۰۰-۳y^۲)=۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۰-۳y^۲=۰\Rightarrow y^۲=\frac{۱۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow x^۲=۱۰۰-y^۲\Rightarrow x^۲=۱۰۰-\frac{۱۰۰}{۳}=\frac{۳۰۰-۱۰۰}{۳}=\frac{۲۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{x^۲}{y^۲}=\frac{\frac{۲۰۰}{۳}}{\frac{۱۰۰}{۳}}=۲\Rightarrow\frac{x}{y}=\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۷۶

گزینه ۴

به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم:

$$x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲-x^۳\geq -x^۳\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}}\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}\geq\sqrt[۳]{-x^۳}$$

$$\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}\geq -x\Rightarrow x+\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}\geq ۰$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۷۷ گزینه ۲

$$g(x)=\frac{x^{2}(x^{2}-4)}{x^{2}-1}=\frac{x^{4}-4x^{2}}{x^{2}-1}$$

$$g'(x)=\frac{(4x^{3}-8x)(x^{2}-1)-2x(x^{4}-4x^{2})}{(x^{2}-1)^{2}}$$

$$=\frac{2x[(2x^{2}-4)(x^{2}-1)-x^{4}+4x^{2}]}{(x^{2}-1)^{2}}=\frac{2x(x^{4}-2x^{2}+4)}{(x^{2}-1)^{2}}$$

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & ;|x|\geq 2\\ -g(x) & ;|x|<2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & ;|x|>2\\ -g'(x) & ;|x|<2\end{cases}$$

تابع f' در سه نقطهٔ $x=2$ و $x=-2$ و $x=0$ تغییر علامت می‌دهد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۷۸

گزینه ۳

ابتدا عبارت درون قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳}$$

x		$-\sqrt{۳}$		$\sqrt{۳}$	
$x^۲-۳$	+	۰	-	۰	+

$$\Rightarrow |x^۲ - ۳| = \begin{cases} x^۲ - ۳ & ; x \geq \sqrt{۳} \text{ یا } x \leq -\sqrt{۳} \\ -x^۲ + ۳ & ; -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۳x & ; x \geq \sqrt{۳} \text{ یا } x \leq -\sqrt{۳} \\ -x^۳ + ۳x & ; -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} \end{cases}$$

برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی تابع، نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم؛ بنابراین مشتق تابع را محاسبه و معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم.

$$f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۳ & ; x > \sqrt{۳} \text{ یا } x < -\sqrt{۳} \\ -۳x^۲ + ۳ & ; -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{۳} \text{ یا } x < -\sqrt{۳} : \ ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \quad \text{غ.ق.ق} \\ -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} : \ -۳x^۲ + ۳ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \end{cases}$$

حال مشتق‌پذیری تابع را در دو نقطهٔ $x = \sqrt{۳}$ و $x = -\sqrt{۳}$ نیز بررسی می‌کنیم:

$$f'_+(\sqrt{۳}) = ۶ \quad , \quad f'_-(\sqrt{۳}) = -۶ \Rightarrow f'_+(\sqrt{۳}) \neq f'_-(\sqrt{۳})$$

$$f'_+(-\sqrt{۳}) = -۶ \quad , \quad f'_-(-\sqrt{۳}) = ۶ \Rightarrow f'_+(-\sqrt{۳}) \neq f'_-(-\sqrt{۳})$$

تابع $f(x)$ در دو نقطهٔ $x = \sqrt{۳}$ و $x = -\sqrt{۳}$ مشتق‌پذیر نیست. داریم:

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+		-		+	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

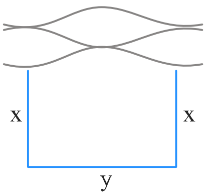
بنابراین مجموعهٔ نقاط ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-\sqrt{۳}, ۱\}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۷۹

گزینه ۴

طول و عرض زمین را به ترتیب y و x و طول طناب را l می‌نامیم، در این صورت داریم:



$$l = ۲x + y \Rightarrow y = l - ۲x$$

بیشترین مساحت این زمین مستطیلی‌شکل ۶۴۸ متر مربع است پس:

$$S_{max} = xy = ۶۴۸ \xrightarrow{y=l-۲x} S = x(l - ۲x) = xl - ۲x^۲$$

$$\Rightarrow S'_x = l - ۴x \Rightarrow S'_x = ۰ \Rightarrow l - ۴x = ۰ \Rightarrow x = \frac{l}{۴}$$

$$S_{max} = x(l - ۲x) = \frac{l}{۴}(l - \frac{l}{۲}) = ۶۴۸ \Rightarrow \frac{l^۲}{۸} = ۶۴۸ \Rightarrow l^۲ = ۵۱۸۴ \Rightarrow l = ۷۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۸۰

گزینه ۴

باتوجه‌به وجود عبارت $[x]$ در ضابطهٔ تابع $f(x)$، ابتدا بازهٔ $[-۱, ۲]$ را به زیربازه‌های کوچک‌تر تقسیم کرده و ضابطهٔ تابع را روی هر زیربازه مشخص می‌کنیم.

$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow f(x) = -\sin \pi x$$

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow f(x) = ۰$$

$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow f(x) = \sin \pi x$$

$$x = ۲ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲ \sin \pi x$$

باتوجه‌به اینکه ضابطهٔ تابع $f(x)$ در بازهٔ $[۰, ۱]$ به‌صورت خط افقی $y = ۰$ است پس هر $x \in [۰, ۱]$ می‌تواند یک نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ باشد، همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۱, ۲]$ یعنی $x = -۱, ۲$ نیز بحرانی هستند. بنابراین تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-۱, ۲]$ دارای بی‌شمار نقطهٔ بحرانی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵