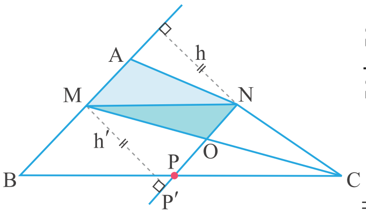
**۱** گزینه ۳

چون $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است، پس دو ضلع $MB$ و $PN$ موازی بوده و فاصله‌شان از هم ثابت است، یعنی $h = h'$.




$$\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\frac{۱}{۲} ON \times h'}{\frac{۱}{۲} AM \times h} = \frac{ON}{AM} \xrightarrow[\triangle AMC]{\text{طبق تعمیم قضیهٔ تالس در}} ON || AM$$

$$\Rightarrow \frac{ON}{AM} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow \frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{NC}{AC} \quad (*)$$

همچنین از $MN || BC$ داریم $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{۳}{۷}$ و از $\frac{AN}{NC} = \frac{۳}{۷}$ داریم:

$$\frac{NC}{AN} = \frac{۷}{۳} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{NC}{AN + NC} = \frac{۷}{۳ + ۷} = \frac{۷}{۱۰} = \frac{NC}{AC}$$

پس طبق $(*)$ نسبت مساحت خواسته‌شده $\frac{۷}{۱۰}$ یا همان ٪۷۰ است.

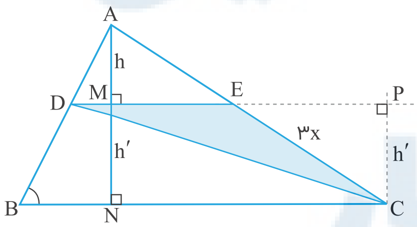
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

**۲** گزینه ۲

$$\frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۷} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{AD}{AB - AD} = \frac{۳}{۷ - ۳}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow[\text{تالس}]{DE || BC} \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD} = \frac{۳}{۴}$$

ازطرفی نتیجه می‌گیریم $\frac{h}{h'} = \frac{AE}{EC}$، یعنی $\frac{h}{h'} = \frac{۳}{۴}$ چون مثلث‌های $AME$ و $ECP$ متشابه‌اند. پس:

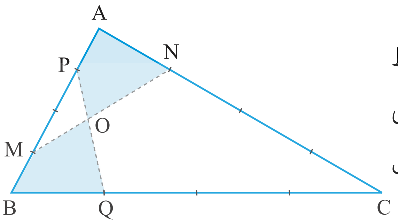



$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{\frac{۱}{۲} DE \times h}{\frac{۱}{۲} DE \times h'} = \frac{h}{h'} = \frac{۳}{۴} = ٪۷۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳

گزینه ۱




چون $\frac{۱}{۴} = \frac{BQ}{BC} = \frac{AN}{AC}$، پس طبق عکس قضیهٔ تالس داریم $QN||AB$. بنابراین فاصلهٔ نقاط N و Q از خط AB یکسان‌اند، یعنی ارتفاع دو مثلث AMN و PQB مساوی است و چون قاعدهٔ این دو مثلث یعنی AM و BP هر دو $\frac{۳}{۴}AB$ هستند، (چون AB به چهار قسمت مساوی تقسیم شده)، پس قاعدهٔ این دو مثلث هم مساوی است و بنابراین:

$$S(\Delta AMN) = S(\Delta PQB)$$

حال اگر از این دو مساحت، مساحت قسمت سفید رنگ یعنی مساحت مثلث MOP را حذف کنیم، مساحت دو قسمت رنگی باهم برابر می‌شوند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۴

گزینه ۳

$$\Delta OCD \sim \Delta OEF \Rightarrow \frac{۳}{OC} = \frac{y}{۴} = \frac{۱}{y} \Rightarrow \begin{cases} y = ۲ \\ OC = ۶ \end{cases}$$

$$\Delta OAB : \frac{y}{۲x} = \frac{۴}{x+۴} \xrightarrow{y=۲} \frac{۲}{۲x} = \frac{۴}{x+۴} \Rightarrow ۴x = x + ۴ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

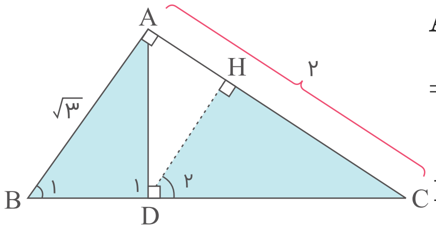
$$\Delta OAB : \frac{y}{۲x} = \frac{OC}{OC+AC} \Rightarrow \frac{۲}{\frac{۸}{۳}} = \frac{۶}{۶+AC} \Rightarrow ۶ + AC = ۸ \Rightarrow AC = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵

گزینه ۳

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:




$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

$$\Rightarrow ۳ + ۴ = BC^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۷}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DH\,,\ \text{مورب } BC \Rightarrow \widehat{D}_۲ = \widehat{B}_۱ \\ \hat{D}_۱ = \widehat{H} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{HCD}$$

طبق روابط طولی در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نتیجه می‌گیریم:

$$AC^۲ = BC \times CD$$

$$\Rightarrow ۴ = \sqrt{۷} \times CD \Rightarrow CD = \frac{۴}{\sqrt{۷}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث ABD و HCD برابر است با:

$$K = \frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۲۱}}$$

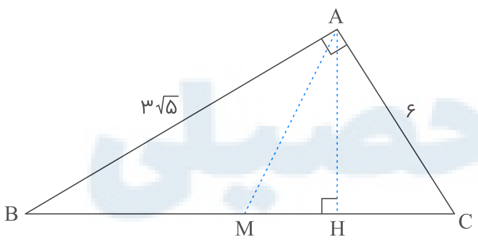
می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{HCD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = K^۲ = \left(\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۲۱}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۶

گزینه ۴




$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۶^۲ + (۳\sqrt{۵})^۲} = ۹ \Rightarrow MC = MB = ۴/۵$$

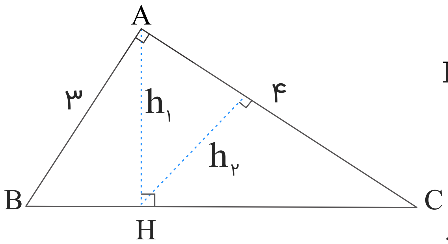
$$\overset{\Delta}{ABC}\ : AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۴۵ = BH \times ۹$$

$$\Rightarrow BH = ۵ \Rightarrow HM = BH - MB = ۵ - ۴/۵ = ۰/۵$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHM}}} = \frac{\frac{AH \times BC}{۲}}{\frac{AH \times HM}{۲}} = \frac{\frac{AH \times ۹}{۲}}{\frac{AH \times \frac{۱}{۲}}{۲}} = ۱۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۷ گزینه ۲




$$BC = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

راه‌حل اول:

$$\begin{cases} \hat{C} \text{ مشترک} \\ A\hat{H}C = \hat{A} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AHC} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{AC}{BC} = \frac{۴}{۵}$$

راه‌حل دوم:

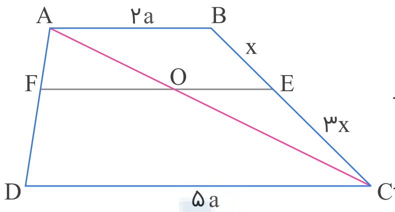
$$\overset{\Delta}{ABC} : \begin{cases} h_۱ \times BC = AB \times AC \Rightarrow ۵h_۱ = ۳ \times ۴ \Rightarrow h_۱ = \frac{۱۲}{۵} \\ AC^۲ = HC \times BC \Rightarrow ۱۶ = ۵HC \Rightarrow HC = \frac{۱۶}{۵} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{AHC} : h_۲ \times AC = h_۱ \times HC \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{۱۶}{۵}}{۴} = \frac{۴}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸ گزینه ۱

رأس $A$ را به $C$ وصل می‌کنیم:




$$\overset{\Delta}{ADC} : \frac{AF}{AD} = \frac{OF}{CD} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{OF}{۵a} \Rightarrow OF = \frac{۵}{۴}a$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : \frac{CE}{CB} = \frac{OE}{۲a} \Rightarrow \frac{۳x}{۴x} = \frac{OE}{۲a} \Rightarrow OE = \frac{۳}{۲}a$$

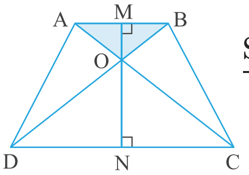
$$EF = OF + OE = \frac{۵}{۴}a + \frac{۳}{۲}a = \frac{۱۱}{۴}a$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{CD} = \frac{\frac{۱۱}{۴}a}{۵a} = \frac{۱۱}{۲۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۹ گزینه ۳

مطابق شکل، $CD=۲AB$ است. همچنین طبق خطوط موازی و مورب می‌دانیم $\overset{\triangle}{OCD}\sim\overset{\triangle}{OAB}$ پس نسبت ارتفاع با نسبت اضلاع نظیرشان برابرند، یعنی $\frac{DC}{AB}=\frac{ON}{OM}=۲$. بنابراین $\frac{ON+OM}{OM}=\frac{۲+۱}{۱}$، یعنی $MN=۳OM$. حال داریم:




$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}=\frac{\frac{AB+CD}{۲}\times MN}{\frac{AB\times OM}{۲}}=\frac{AB+CD}{AB}\times\frac{MN}{OM}=\frac{۳AB}{AB}\times\frac{۳OM}{OM}=۹$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۰ گزینه ۳

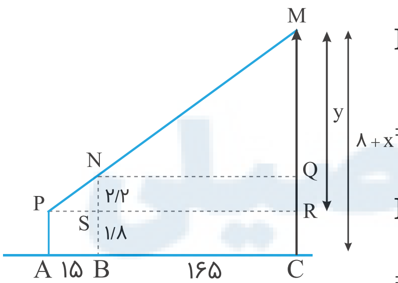
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{BDN}: AM\|DN \Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{MN}{BM}\\ \overset{\triangle}{ACM}: EN\|AM \Rightarrow \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{MN}{CM}\end{array}\right\}\xrightarrow{BM=CM}\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۱ گزینه ۲

ارتفاع برج $x$ در نظر گرفته شده و مطابق شکل $MC=۸+x$ است. از نقطه‌های $P$ و $N$ دو خط به موازات $AC$ رسم می‌کنیم، در این صورت طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث $MPR$، داریم:




$$MR\|NS \Rightarrow \frac{NS}{MR}=\frac{PS}{PR}$$

$$\Rightarrow \frac{NS}{MR}=\frac{AB}{AC}=\frac{۲/۲}{y}=\frac{۱۵}{۱۵+۱۶۵}\Rightarrow y=۲۶/۴$$

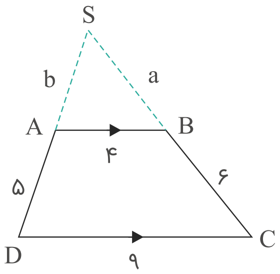
$$MR+RC=MC\Rightarrow MR+PA=MC$$

$$\Rightarrow y+۱/۸=۸+x\xrightarrow{y=۲۶/۴}x=۲۰/۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۱۲ گزینه ۴

مطابق شکل، ساق‌های ذوزنقه $ABCD$ به طول اضلاع $AB = ۴$، $CD = ۹$، $AD = ۵$ و $BC = ۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در $S$ قطع کنند.




$$AB||CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b+۵} = \frac{a}{a+۶} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹b = ۴b + ۲۰ \Rightarrow b = ۴ \\ \frac{a}{a+۶} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹a = ۴a + ۲۴ \Rightarrow a = ۴/۸ \end{cases}$$

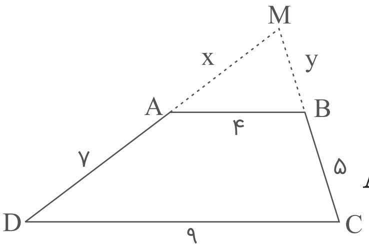
$$\Rightarrow SAB \text{ محیط مثلث} = ۴ + ۴/۸ + ۴ = ۱۲/۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۱۳

گزینه ۲

می‌دانیم در ذوزنقهٔ $ABCD$، دو قاعدهٔ $AB$ و $DC$ باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث $AMB$ و $MDC$ متشابه هستند.




بنابراین داریم:

$$\overset{\triangle}{AMB} \sim \overset{\triangle}{MDC} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۷} = \frac{y}{y+۵} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x = ۴x + ۲۸ \Rightarrow ۵x = ۲۸ \Rightarrow x = \frac{۲۸}{۵} \\ \frac{y}{y+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹y = ۴y + ۲۰ \Rightarrow ۵y = ۲۰ \Rightarrow y = \frac{۲۰}{۵} = ۴ \end{cases}$$

حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط } \overset{\triangle}{AMB} = x + y + ۴ = \frac{۲۸}{۵} + ۴ + ۴ = ۸ + \frac{۲۸}{۵} = \frac{۴۰+۲۸}{۵} = \frac{۶۸}{۵} = ۱۳/۶$$

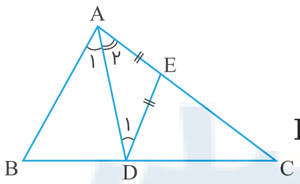
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۴

گزینه ۲

طبق فرض $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب از $DE||AB$ و مورب بودن $AD$، داریم $\hat{A}_۱ = \hat{D}_۱$ و لذا $\hat{A}_۲ = \hat{D}_۱$ و در مثلث متساوی‌الساقین $ADE$ داریم $AE = DE$.

درنهایت با نوشتن تعمیم قضیهٔ تالس برای مثلث $ABC$، داریم:




$$DE||AB \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{DE}{AB} \xrightarrow{DE=AE} \frac{EC}{AC} = \frac{AC-EC}{AB}$$

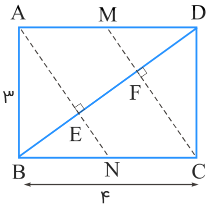
$$\Rightarrow \frac{x}{۲۰} = \frac{۲۰-x}{۱۲} \Rightarrow x = ۱۲/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۱۵

گزینه ۱

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABD$ داریم:




$$\overset{\Delta}{ABD}: BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲}$$
$$\Rightarrow BD^{۲} = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow BD = ۵$$

کاملا واضح است که مثلث‌های $ABN$ و $CDM$ همنهشت‌اند، لذا $DF = EB$. همچنین $ABD$ قائم‌الزاویه است، بنابراین:

$$AB^{۲} = BE \times BD \Rightarrow ۹ = BE \times ۵ \Rightarrow BE = DF = \frac{۹}{۵}$$
$$\Rightarrow EF = ۵ - ۲ \times \frac{۹}{۵} = \frac{۷}{۵}$$

همچنین در مثلث $BFC$ داریم:

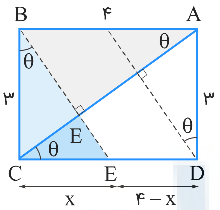
$$EN \parallel CF \xrightarrow{\text{قضیهٔ تعمیم تالس}} \frac{BE}{BF} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{۹}{۵}}{\frac{۹}{۵} + \frac{۷}{۵}} = \frac{BN}{۴} \Rightarrow BN = \frac{۳۶}{۱۶} = \frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow NC = ۴ - \frac{۹}{۴} = \frac{۷}{۴}$$

$$S_{ANCM} = AB \times NC = ۳ \times \frac{۷}{۴} = \frac{۲۱}{۴} = ۵/۲۵$$

راه‌حل دوم:

در شکل زیر تمام زوایای مشخص‌شده با یکدیگر برابرند که آن‌ها را $\theta$ می‌نامیم.




در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم $\tan\theta = \frac{۳}{۴}$ و همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE داریم $\tan\theta = \frac{x}{۳}$، درنتیجه:

$$\Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

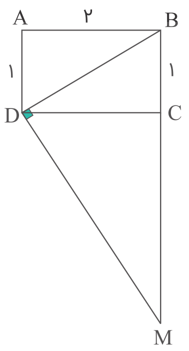
$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = (۴ - x) \times ۳ = (۴ - ۲/۲۵) \times ۳$$
$$= ۱/۷۵ \times ۳ = ۵/۲۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۱۶

گزینه ۳

راه‌حل اول: باتوجه‌به توضیحات صورت سؤال، شکلی ساده و دقیق رسم می‌کنیم:



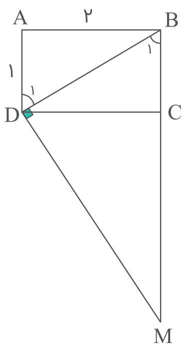

هدف محاسبهٔ $MB$ است. $BD$ قطر مستطیل است، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BD^{۲}=AB^{۲}+AD^{۲}=۲^{۲}+۱^{۲}=۴+۱=۵\Rightarrow BD=\sqrt{۵}$$

با استفاده از رابطه طولی در مثلث $BDM$ داریم:

$$BD^{۲}=MB.BC\Rightarrow(\sqrt{۵})^{۲}=MB\times ۱\Rightarrow MB=۵$$

راه‌حل دوم:




هدف محاسبهٔ $MB$ است. $BD$ قطر مستطیل است، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BD^{۲}=AB^{۲}+AD^{۲}=۲^{۲}+۱^{۲}=۴+۱=۵\Rightarrow BD=\sqrt{۵}$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $B\overset{\triangle}{A}D$ و $B\overset{\triangle}{D}M$ متشابه هستند، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=B\hat{D}M=۹۰^\circ\\ \left.\begin{array}{l}AD||BC\\ \text{مورب}\,BD\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{D}_{۱}=\hat{B}_{۱}\end{array}\right\}\Rightarrow B\overset{\triangle}{A}D\sim B\overset{\triangle}{D}M$$

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است بنابراین:

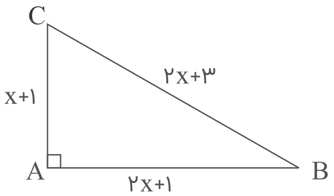
$$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{MB}\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{MB}\Rightarrow MB=(\sqrt{۵})^{۲}=۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۷

گزینه ۱

چون ضلع به طول $۲x + ۳$ بزرگ‌ترین ضلع مثلث است، وتر مثلث می‌باشد؛ بنابراین طبق قضیهٔ فیثاغورس، داریم:




$$(۲x+۳)^۲ = (x+۱)^۲ + (۲x+۱)^۲$$
$$\Rightarrow ۴x^۲ + ۱۲x + ۹ = x^۲ + ۲x + ۱ + ۴x^۲ + ۴x + ۱ \Rightarrow x^۲ - ۶x - ۷ = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۱ & \text{غ.ق.ق} \\ \text{یا} \\ x = ۷ & \text{ق.ق} \end{cases} \Rightarrow x = ۷ \Rightarrow AB = ۱۵\,,\; AC = ۸$$
$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}(۱۵)(۸) = ۶۰$$

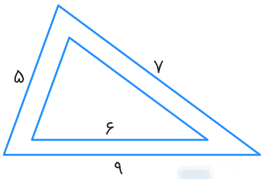
تذکر: $x = -۱$ غیرقابل‌قبول است؛ زیرا به ازای آن طول ضلع AC برابر با صفر می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۸

گزینه ۳

طبق توضیحات صورت سؤال، شکلی به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:




چون اضلاع دو مثلث موازی یکدیگرند، پس دو مثلث متشابه هستند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن‌ها است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ تر}}{\text{مساحت مثلث کوچک تر}} = \frac{S}{S'} = \left(\frac{۹}{۶}\right)^۲ = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ = \frac{۹}{۴}$$

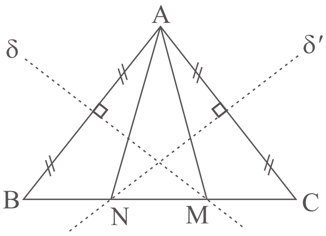
نسبت مساحت محدود به این دو مثلث به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S - S'}{S'} = \frac{S}{S'} - \frac{S'}{S'} = \frac{S}{S'} - ۱ = \frac{۹}{۴} - ۱ = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۹ گزینه ۲

$$\hat{A} = ۸۰°, AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰° - \hat{A}}{۲} = ۵۰°$$




هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

$$\begin{cases} M \in \delta \Rightarrow MA = MB \Rightarrow B\hat{A}M = \hat{B} = ۵۰° \Rightarrow A\hat{M}B = ۸۰° \\ N \in \delta' \Rightarrow NA = NC \Rightarrow C\hat{A}N = \hat{C} = ۵۰° \Rightarrow A\hat{N}C = ۸۰° \end{cases}$$
$$\Rightarrow M\hat{A}N = ۱۸۰° - (A\hat{M}B + A\hat{N}C) = ۲۰°$$

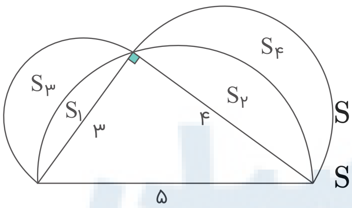
بنابراین، کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث $AMN$، زاویهٔ $M\hat{A}N = ۲۰°$ است.

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۰ گزینه ۲

مساحت قسمت‌های مختلف شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم. هدف ما محاسبهٔ $S_۳ + S_۴$ است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس طول وتر مثلث برابر است با:

$$\text{وتر مثلث} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$




داریم:

$$S_۱ + S_۲ = \text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۵} - \text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه}$$

$$S_۳ + S_۴ = (\text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۳} + \text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۴}) - (S_۱ + S_۲)$$

بنابراین:

$$S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times \pi \times (\frac{۵}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ = \frac{\pi}{۲}(\frac{۲۵}{۴}) - ۶ = \frac{۲۵\pi}{۸} - ۶$$

$$S_۳ + S_۴ = \frac{۱}{۲} \times \pi(\frac{۳}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲} \times \pi(\frac{۴}{۲})^۲ - (\frac{۲۵\pi}{۸} - ۶)$$
$$= \frac{\pi}{۲}(\frac{۹}{۴}) + \frac{\pi}{۲}(۴) - \frac{۲۵\pi}{۸} + ۶ = \frac{۲۵\pi}{۸} - \frac{۲۵\pi}{۸} + ۶ = ۶$$

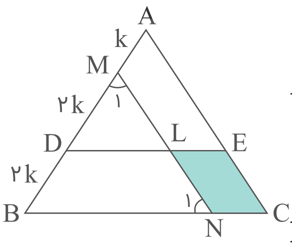
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۱

گزینه ۱

شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است؛ بنابراین:




$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ$$

چون $NLEC$ متوازی‌الاضلاع است، داریم:

$$MN||AC \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{A}=۶۰^\circ\ ,\ \hat{N}_۱=\hat{C}=۶۰^\circ \Rightarrow \text{متساوی الاضلاع است } \overset{\triangle}{MBN} \Rightarrow BN=۴k$$

هردو مثلث $\overset{\triangle}{MBN}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع هستند درنتیجه باهم متشابه‌اند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است؛ بنابراین:

$$\overset{\triangle}{MBN}\sim\overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MBN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\left(\frac{۴k}{۵k}\right)^۲=\left(\frac{۴}{۵}\right)^۲=\frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MBN}}=\frac{۱۶}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

همچنین

$$DL||BN \Rightarrow \hat{D}=\hat{B}=۶۰^\circ\ ,\ \hat{L}=\hat{N}_۱=۶۰^\circ \Rightarrow \text{متساوی الاضلاع است } \overset{\triangle}{MDL} \Rightarrow ML=۲k$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که $\overset{\triangle}{ADE}$ نیز متساوی‌الاضلاع و $AE=۳k$ است؛ بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{MDL}$ و $\overset{\triangle}{MBN}$ و دو مثلث $\overset{\triangle}{MDL}$ و $\overset{\triangle}{ADE}$ باهم متشابه‌اند و داریم:

$$\overset{\triangle}{MDL}\sim\overset{\triangle}{MBN} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MDL}}}{S_{\overset{\triangle}{MBN}}}=\left(\frac{۲k}{۴k}\right)^۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MDL}}=\frac{۱}{۴}S_{\overset{\triangle}{MBN}}=\frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$\overset{\triangle}{MDL}\sim\overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MDL}}}{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}=\left(\frac{۲k}{۳k}\right)^۲=\frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADE}}=\frac{۹}{۴}S_{\overset{\triangle}{MDL}}=\frac{۹}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

با استفاده از نسبت‌های بالا، نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{AMLE}=S_{\overset{\triangle}{ADE}}-S_{\overset{\triangle}{MDL}}=\frac{۹}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}-\frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۵}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$S_{LECN}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-(S_{\overset{\triangle}{BMN}}+S_{AMLE})=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-\left(\frac{۱۶}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}+\frac{۵}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}\right)=\frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\%۱۶S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع هاشورزده ۱۶ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

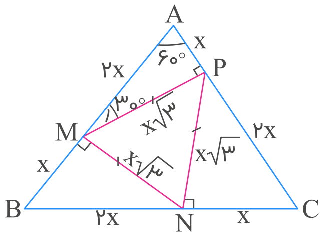
۲۲

گزینه ۱

مطابق شکل، در مثلث قائم الزاویهٔ $AMP$ داریم:

$$\hat{M}_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow AP = \frac{۱}{۲}AM \Rightarrow AP = x,\ AM = ۲x$$
$$\hat{A} = ۶۰^\circ \Rightarrow MP = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AM = x\sqrt{۳}$$

باتوجه‌به اینکه سه مثلث کناری، همنشهت‌اند، این روابط برای دو مثلث دیگر هم برقرار است.



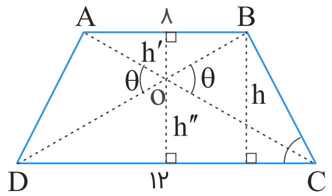

حال چون دو مثلث $ABC$ و $MNP$ با نسبت $\sqrt{۳} = \frac{۳}{\sqrt{۳}}$ متشابه‌اند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با $۳ = (\sqrt{۳})^۲$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۳

گزینه ۳

دو مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{OCD}$ باهم متشابه‌اند.




$$\frac{h'}{h''}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{h'}{h''}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow h''=\frac{۳}{۲}h'$$
$$h'+h''=۱۰\Rightarrow h'+\frac{۳}{۲}h'=۱۰\Rightarrow h'=۴\Rightarrow h''=۶$$
$$\overset{\triangle}{OAB}\sim\overset{\triangle}{OCD}\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}\Rightarrow OB\times OC=OA\times OD\ (*)$$

مساحت دو مثلث $\overset{\triangle}{OBC}$ و $\overset{\triangle}{OAD}$ باهم برابرند زیرا:

$$\begin{cases}S_{\overset{\triangle}{OBC}}=\frac{۱}{۲}OB\times OC\times\sin\theta\\ S_{\overset{\triangle}{OAD}}=\frac{۱}{۲}OA\times OD\times\sin\theta\end{cases}\xrightarrow{(*)}S_{\overset{\triangle}{OBC}}=S_{\overset{\triangle}{OAD}}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABCD}}=S_{\overset{\triangle}{ODC}}+S_{\overset{\triangle}{OBC}}+S_{\overset{\triangle}{OAB}}+S_{\overset{\triangle}{OAD}}$$
$$\Rightarrow\frac{(۸+۱۲)\times۱۰}{۲}=\frac{۶\times۱۲}{۲}+\frac{۴\times۸}{۲}+۲S_{\overset{\triangle}{OBC}}$$
$$\Rightarrow۱۰۰=۳۶+۱۶+۲S_{\overset{\triangle}{OBC}}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OBC}}=\frac{۴۸}{۲}=۲۴$$

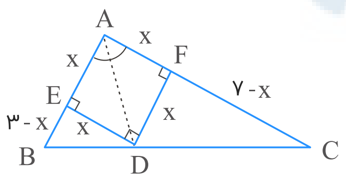
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۴

گزینه ۴

نقطهٔ $D$ روی نیمساز قرار دارد، بنابراین از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس: $DE=DF$
$\hat{A}=۹۰^\circ$ و $DE=DF$، بنابراین چهار ضلعی $AEDF$ مربع است. پس: $AE||FD$
طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث $ABC$، داریم:

$$\frac{FD}{AB}=\frac{FC}{AC}\Rightarrow\frac{x}{۳}=\frac{۷-x}{۷}\Rightarrow۷x=۲۱-۳x\Rightarrow۱۰x=۲۱\Rightarrow x=۲/۱$$
$$\Rightarrow AD=\sqrt{۲}x=۲/۱\sqrt{۲}$$

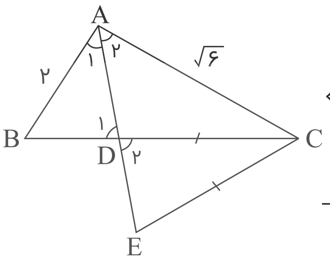



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۵

گزینه ۲

طبق شکل داریم:




$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ & \text{نیمساز } AD \\ \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ & \text{متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow{DC=CE} \hat{D}_۱ = \hat{E}$$

$$\xrightarrow{\text{زز}} A\overset{\Delta}{B}D \sim A\overset{\Delta}{E}C \qquad (k = \frac{AB}{AC} = \frac{۲}{\sqrt{۶}})$$

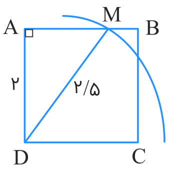
$$\Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{B}D}}{S_{A\overset{\Delta}{C}E}} = k^۲ = \left(\frac{۲}{\sqrt{۶}}\right)^۲ = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۶

گزینه ۲

مربع $ABCD$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز $D$ و شعاع ۲/۵ واحد رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع $AB$ و $BC$ را قطع می‌کند.




با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $D\overset{\Delta}{A}M$، فاصلهٔ نقطهٔ $M$ را از دو رأس $A$ و $B$ محاسبه می‌کنیم:

$$AM^۲ + ۲^۲ = (۲/۵)^۲ \quad \Rightarrow \quad AM^۲ + ۴ = ۶/۲۵ \quad \Rightarrow \quad AM^۲ = ۲/۲۵$$

$$\Rightarrow \quad AM = \sqrt{۲/۲۵} = ۱/۵ \quad , \quad MB = ۲ - ۱/۵ = ۰/۵$$

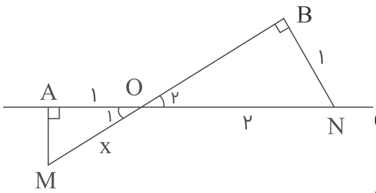
بنابراین فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقاط تقاطع برابر $\frac{۱}{۲} = ۰/۵$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۲۷

گزینه ۲

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $OBN$ داریم:




$$OB = \sqrt{ON^۲ - BN^۲} = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$

دو مثلث $OAM$ و $OBN$ به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند $(\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲, \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ)$. داریم:

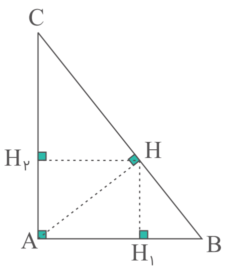
$$\frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow x = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۸

گزینه ۱

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC$، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند؛ یعنی مثلث‌های $ABH$ و $ACH$ باهم متشابه‌اند.



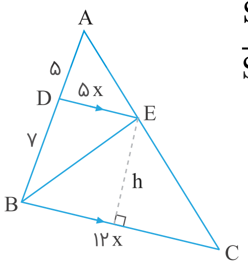

$$\frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ABC})} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ABC}) - S(\overset{\Delta}{ABH})} = \frac{۱}{۵ - ۱} \Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ACH})} = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۱}{۴}$ و نسبت تشابه دو مثلث $\frac{۱}{۲}$ است. در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها همان نسبت تشابه است. درنتیجه داریم: $\frac{HH_۱}{HH_۲} = \frac{۱}{۲}$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۹ گزینه ۴

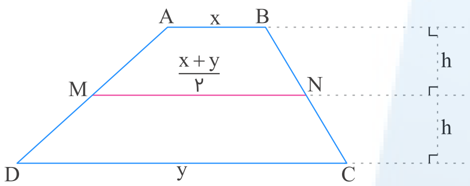



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BCE}}}{S_{\overset{\Delta}{BDE}}}=\frac{\cancel{\frac{1}{۲}}\times\cancel{h}\times BC}{\cancel{\frac{1}{۲}}\times\cancel{h}\times DE}=\frac{BC}{DE}=\frac{۱۲x}{۵x}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۰ گزینه ۲

می‌دانیم در ذوزنقه طول خط واصل وسط‌های دو ساق، میانگین دو قاعده است.
باتوجه‌به شکل و فرض سؤال، داریم:

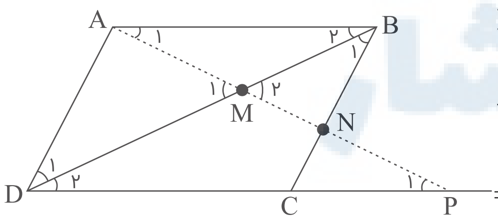



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}(x+\frac{x+y}{۲})(h)}{\frac{۱}{۲}(\frac{x+y}{۲}+y)(h)}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{\frac{۳x+y}{۲}}{\frac{x+۳y}{۲}}=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow\frac{۳x+y}{x+۳y}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow ۱۵x+۵y=۳x+۹y\Rightarrow ۱۲x=۴y\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۱}{۳}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۱ گزینه ۴




$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}_۱=\hat{B}_۱\,,\,\hat{M}_۱=\hat{M}_۲\Rightarrow \overset{\Delta}{AMD}\sim\overset{\Delta}{MBN}\Rightarrow\frac{MD}{MB}=\frac{AM}{MN}\\ \hat{A}_۱=\hat{P}_۱,\hat{B}_۲=\hat{D}_۲\Rightarrow\overset{\Delta}{AMB}\sim\overset{\Delta}{MDP}\Rightarrow\frac{MD}{MB}=\frac{MP}{AM}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{AM}{MN}=\frac{MP}{AM}\Rightarrow MN\times MP=AM^۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۲

گزینه ۳

چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین $MN||PB$ است. با استفاده از قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:

$$MN||BP \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۳}{۱۰} \Rightarrow \frac{NC}{AC}=\frac{۷}{۱۰}$$

همچنین $NO||AM$ است پس دو مثلث $\overset{\triangle}{NOC}$ و $\overset{\triangle}{AMC}$ نیز متشابه می‌شود. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{NOC}}}{S_{\overset{\triangle}{AMC}}}=\frac{۴۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{NOC}}=\frac{۴۹}{۱۰۰}S_{\overset{\triangle}{AMC}} \qquad (I)$$

مساحت دو مثلث $\overset{\triangle}{AMC}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ را می‌توان چنین نوشت:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\cdot AC\cdot \sin\hat{A}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AMC}}=\frac{۱}{۲}AM\cdot AC\cdot \sin\hat{A}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۱۰} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMC}}=\frac{۳}{۱۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}} \qquad (II)$$

با استفاده از دو رابطهٔ $(I)$ و $(II)$ داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{NOC}}=\frac{۴۹}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱۴۷}{۱۰۰۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}} \qquad (III)$$

از طرفی چون $MN||BP$ است پس دو مثلث $\overset{\triangle}{AMN}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه می‌شود و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲}=\frac{۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}}=\frac{۹}{۱۰۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}} \qquad (IV)$$

اکنون با استفاده از روابط $(II)$ و $(III)$ و $(IV)$ داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}=\frac{S_{\overset{\triangle}{AMC}}-S_{\overset{\triangle}{AMN}}-S_{\overset{\triangle}{NOC}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}=\frac{\left(\frac{۳}{۱۰}-\frac{۹}{۱۰۰}-\frac{۱۴۷}{۱۰۰۰}\right)S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{\frac{۹}{۱۰۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{\frac{۶۳}{۱۰۰۰}}{\frac{۹}{۱۰۰}}=\frac{۶۳}{۹۰}=\frac{۷}{۱۰}$$

پس مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OMN}$، ۷۰ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{AMN}$ است.

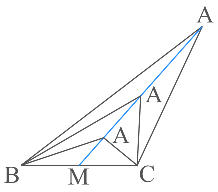
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۳۳

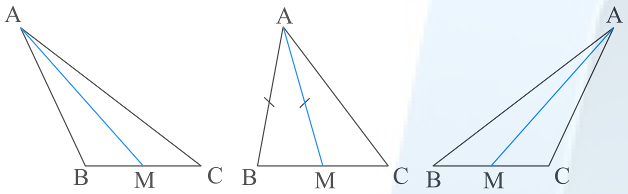
گزینه ۴

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

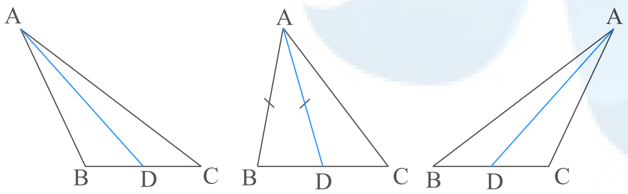
۱) مطابق شکل میانهٔ $AM$ می‌تواند کوچک‌تر، بزرگ‌تر و یا برابر با ضلع مقابلش $(AC)$ باشد. (رد گزینهٔ ۱)



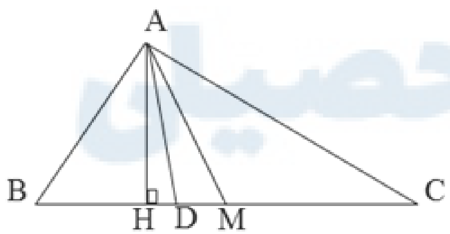

۲) مطابق شکل میانهٔ $AM$ می‌تواند کوچک‌تر، بزرگ‌تر و یا برابر با ضلع مجاورش $(AB)$ باشد. (رد گزینهٔ ۲)




۳) مطابق شکل نیمساز $AD$ می‌تواند کوچک‌تر، بزرگ‌تر و یا برابر با ضلع مجاورش $(AB)$ باشد. (رد گزینهٔ ۳)




مثلث $ABC$ با اضلاع نابرابر را با میانهٔ $AM$ و نیمساز داخلی $AD$ رسم می‌کنیم:



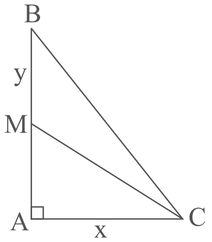

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{AHD}$ و $\overset{\triangle}{AHM}$ را در نظر می‌گیریم. $AD$ وتر مثلث اول و $AM$ وتر مثلث دوم است. باتوجه‌به ابعاد اضلاع قائمهٔ این دو مثلث، راجع به اندازهٔ وتر آن‌ها قضاوت می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AH \text{ در هر دو ثابت و } HD < HM \\ AM^2 = AH^2 + HM^2 \\ AD^2 = AH^2 + HD^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AM^2 > AD^2 \Rightarrow AM > AD$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۳۴ گزینه ۱

مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ را با فرض اینکه طول اضلاع قائمه‌اش x و y $(x < y)$ باشد، رسم می‌کنیم. AB ضلع متوسط این مثلث و CM میانهٔ وارد بر آن است. هدف محاسبهٔ نسبت $\frac{CM}{AB}$ است.




مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر مساحت مربعی به طول ضلع x است؛ بنابراین:

$$\frac{xy}{۲} = x^۲ \Rightarrow xy = ۲x^۲ \xrightarrow{x,y>۰} y = ۲x \Rightarrow AB = ۲x$$

$$AM = \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}(۲x) = x$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{AMC}$، اندازهٔ CM را به دست می‌آوریم:

$$CM^۲ = AM^۲ + AC^۲ \Rightarrow CM^۲ = x^۲ + x^۲ = ۲x^۲ \Rightarrow CM = \sqrt{۲}x$$

پس نسبت $\frac{CM}{AB}$ برابر است با:

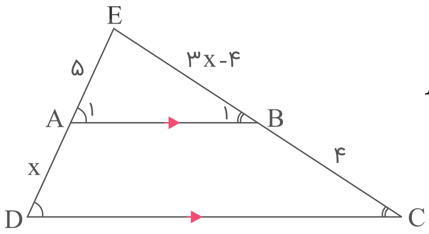
$$\frac{CM}{AB} = \frac{\sqrt{۲}x}{۲x} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}AB$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۵

گزینه ۲

طبق فرض، داریم:




$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{۵}{x} = \frac{۳x-۴}{۴}$$

$$\Rightarrow ۳x^{۲} - ۴x - ۲۰ = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = \frac{۱۰}{۳} \quad (*)$$

$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D}\ ,\ \hat{B}_۱ = \hat{C} \Rightarrow E\overset{\Delta}{A}B \sim E\overset{\Delta}{D}C$$

$$\Rightarrow \frac{S_{E\overset{\Delta}{A}B}}{S_{E\overset{\Delta}{D}C}} = (\frac{EA}{ED})^{۲} \underset{(*)}{\underset{\downarrow}{=}} (\frac{۵}{۵+\frac{۱۰}{۳}})^{۲} = (\frac{۱۵}{۲۵})^{۲} = (\frac{۳}{۵})^{۲} = \frac{۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow S_{E\overset{\Delta}{A}B} = ۹S\ ,\ S_{E\overset{\Delta}{D}C} = ۲۵S \Rightarrow S_{ABCD} = ۲۵S - ۹S = ۱۶S$$

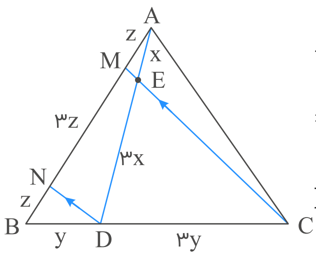
$$\Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{E\overset{\Delta}{A}B}} = \frac{۱۶S}{۹S} = \frac{۱۶}{۹}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۶

گزینه ۳

فرض کنیم $AE = x$، $ED = ۳x$، $BD = y$ و $DC = ۳y$. داریم:




$$A\overset{\Delta}{N}D\ : ME \| DN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{ED} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow AM = z \text{ و } MN = ۳z$$

$$B\overset{\Delta}{C}M\ : DN \| CM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NM} = \frac{BD}{DC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{BN}{۳z} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow BN = z$$

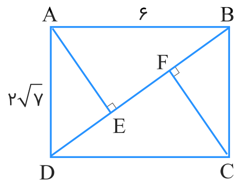
$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{z+۳z+z}{z} = \frac{۵z}{z} = ۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۷

گزینه ۱

از دو رأس A و C، دو عمود AE و CF را بر قطر BD رسم می‌کنیم.




$$\overset{\Delta}{ABD} : BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} = ۳۶ + ۲۸ = ۶۴ \Rightarrow BD = ۸$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\overset{\Delta}{ABD} : AD^{۲} = DE.BD \Rightarrow ۲۸ = DE \times ۸ \Rightarrow DE = \frac{۲۸}{۸} = ۳/۵$$

به طور مشابه $BF = ۳/۵$ است و داریم:

$$EF = BD - (DE + BF) = ۸ - ۷ = ۱$$

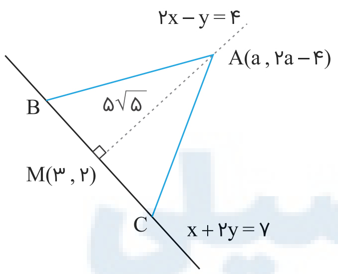
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۸

گزینه ۲

معادلهٔ خط عمود بر BC و گذرا از M را می‌نویسیم:

$$m_{AM} = \frac{-۱}{m_{BC}} = ۲$$
$$AM : y - ۲ = ۲(x - ۳) \Rightarrow y = ۲x - ۴$$

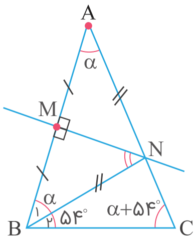



$$|AM| = ۵\sqrt{۵} \Rightarrow AM^{۲} = ۱۲۵$$
$$(a - ۳)^{۲} + (۲a - ۶)^{۲} = ۱۲۵ \Rightarrow ۵(a - ۳)^{۲} = ۱۲۵$$
$$(a - ۳)^{۲} = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} a = ۸ \\ a = -۲ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۹ گزینه ۳

می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط، به یک فاصله است.




پس $NA = NB$ و مثلث $NAB$ متساوی‌الساقین است. درنتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{A} = \alpha$، از طرف دیگر، مثلث $ABC$ هم متساوی‌الساقین است $(AC = AB)$، درنتیجه $\hat{C} = \hat{B} = \alpha + ۵۴^\circ$ و داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + (\alpha + ۵۴^\circ) + (\alpha + ۵۴^\circ) = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۳\alpha = ۷۲^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۴^\circ$$
$$\overset{\Delta}{MNB} : \hat{M} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{N}_۱ = ۹۰^\circ - \alpha = ۹۰^\circ - ۲۴^\circ = ۶۶^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

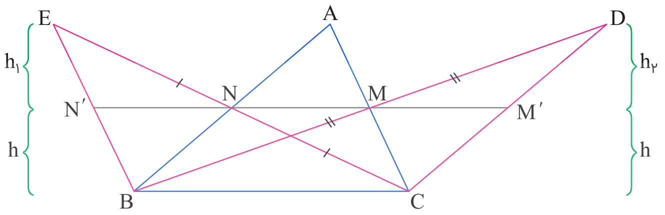
۴۰ گزینه ۲

طبق قضیهٔ تالس می‌توان نوشت $(ME = x)$:

$$\left.\begin{aligned} BE||AC \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ AB||DC \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{x+۳}{۷} \Rightarrow x = ۲/۲۵$$
$$\Rightarrow MD = ME + AE + AD = ۲/۲۵ + ۳ + ۷ = ۱۲/۲۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۴۱ گزینه ۳




مثلث‌های $DBC$ و $EBC$ دارای قاعده‌های یکسان $BC$ هستند.پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت ارتفاع‌ها است. پاره‌خط $NM$ را از طرفین امتداد می‌دهیم تا ضلع‌های $DC$ و $EB$ را قطع کند.

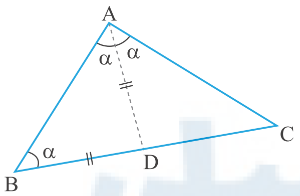
$$\overset{\Delta}{EBC}:\frac{EN}{EC}=\frac{NN'}{BC}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{h_1}{h+h_1}\Rightarrow 2h_1=h+h_1\Rightarrow h_1=h$$
$$\overset{\Delta}{DBC}:\frac{DM}{DB}=\frac{MM'}{BC}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{h_2}{h+h_2}\Rightarrow 2h_2=h+h_2\Rightarrow h_2=h$$
$$\Rightarrow h_1=h_2$$

پس این دو مثلث ارتفاع‌های برابری دارند و مساحت آن‌ها باهم برابر است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۲ گزینه ۳

مطابق شکل فرض می‌کنیم $\hat{B}=\alpha$ باشد، در این صورت $\hat{A}=2\alpha$، پس با رسم نیمساز زاویهٔ $A$، این زاویه به دو قسمت تبدیل می‌شود که هرکدام با $\alpha$ برابر است. پس دو مثلث $ABC$ و $ADC$ به حالت تساوی دو زاویه $(D\hat{A}C=\hat{B}=\alpha\,,\ \hat{C}=\hat{C})$ باهم متشابه‌اند. با نوشتن نسبت تشابه داریم: (چون مثلث $ABD$ متساوی‌الساقین است، پس $AD=BD$)

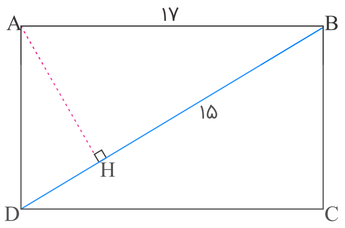



$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{AC}\xrightarrow[AD=BD]{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}}\frac{BC}{AC}=\frac{AB+AC}{BD+DC}$$
$$\xrightarrow{BD+DC=BC}\frac{a}{b}=\frac{c+b}{a}\Rightarrow a^2=bc+b^2$$
$$\Rightarrow a^2-b^2=bc$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۴۳

گزینه ۱




$$AB^2 = BH \times BD$$

$$17^2 = 15 \times BD \Rightarrow BD = \frac{17^2}{15}$$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

$$\frac{17^2}{15} - 19 = \frac{17^2 - 15 \times 19}{15} = \frac{289 - 285}{15} = \frac{4}{15}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۴

گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) مثلث $\overset{\triangle}{MNC}$ متساوی‌الساقین است، پس $N\hat{M}C = M\hat{N}C$.

ب) مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ متساوی‌الساقین است، پس $A\hat{M}B = B\hat{A}M$.

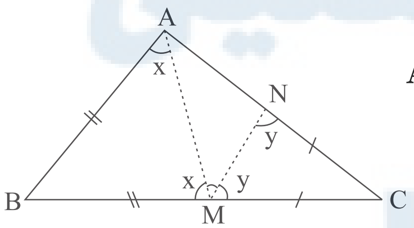
ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث $180^\circ$ است.

گام دوم

با توجه به گام اول، شکل را تکمیل می‌کنیم:

می‌دانیم $\hat{M}$ یک زاویهٔ نیم‌صفحه است، داریم:

$$A\hat{M}B + A\hat{M}N + N\hat{M}C = x + 43^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ \quad (I)$$




ازطرفی:

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\triangle}{ABM} : & \hat{B} + 2x = 180^\circ \\ \overset{\triangle}{CNM} : & \hat{C} + 2y = 180^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \hat{B} + 2x + \hat{C} + 2y = \hat{B} + \hat{C} + 2(x+y) = 360^\circ$$

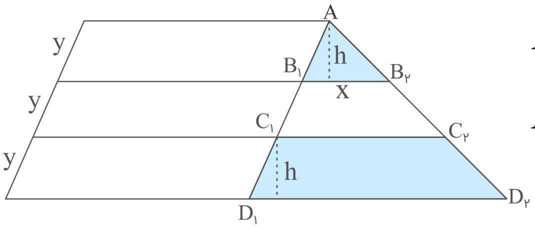
$$\xrightarrow{(I)} \hat{B} + \hat{C} + 274^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ - 274^\circ = 86^\circ$$

همچنین در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} + B\hat{A}C = 180^\circ \Rightarrow 86^\circ + B\hat{A}C = 180^\circ \Rightarrow B\hat{A}C = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$

۴۵ گزینه ۲

فرض کنید $B_۱B_۲ = x$ باشد. در این صورت داریم:




$$\overset{\Delta}{AC_۱C_۲} : \frac{AB_۱}{AC_۱} = \frac{x}{C_۱C_۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{x}{C_۱C_۲} \Rightarrow C_۱C_۲ = ۲x$$

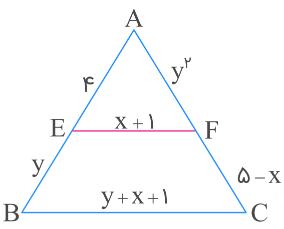
$$\overset{\Delta}{AD_۱D_۲} : \frac{AB_۱}{AD_۱} = \frac{x}{D_۱D_۲} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{x}{D_۱D_۲} \Rightarrow D_۱D_۲ = ۳x$$

$$\frac{S_{AB_۱B_۲}}{S_{C_۱C_۲D_۲D_۱}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times x \times h}{\frac{۱}{۲}(۲x + ۳x)h} = \frac{۱}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۶ گزینه ۱

چون $BC \parallel EF$، طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:




$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{x+۱}{y+x+۱} = \frac{۴}{y+۴} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x+۱}{y} = \frac{۴}{y} \Rightarrow x+۱ = ۴ \Rightarrow x = ۳ \quad (*)$$

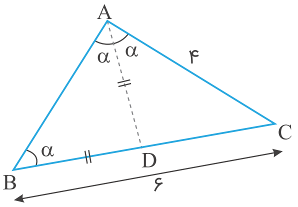
$$\text{تالس} : \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \xrightarrow{(*)} \frac{۴}{y} = \frac{y^۲}{۲} \Rightarrow y^۳ = ۸ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow y - ۲x = ۲ - ۶ = -۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴۷

گزینه ۲

مطابق شکل با فرض $\hat{B} = \alpha$ داریم $\hat{A} = ۲\hat{B} = ۲\alpha$. پس با رسم نیمساز زاویهٔ $A$، این زاویه به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود که هرکدام $\alpha$ است و داریم $AD = BD$. حال در دو مثلث $ADC$ و $ABC$ داریم:




$$\begin{cases} D\hat{A}C = \hat{B} = \alpha \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow A\hat{D}C = \hat{A} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC} \xrightarrow{AD=BD} \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$$

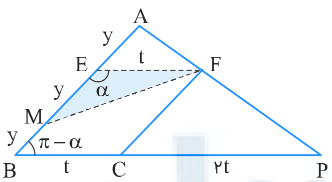
$$\frac{۴}{DC} = \frac{۶}{۴} \Rightarrow DC = \frac{۱۶}{۶} = \frac{۸}{۳} \Rightarrow BD = ۶ - \frac{۸}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

حال طبق $\frac{AC}{DC} = \frac{AB}{BD}$ داریم $\frac{۴}{\frac{۸}{۳}} = \frac{AB}{\frac{۱۰}{۳}}$، پس $AB = ۵$.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۸

گزینه ۲




$$PC = \frac{۲}{۳}PB \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{۲}{۳} = \frac{۲t}{۳t} \Rightarrow \begin{cases} PC = ۲t \\ BC = t \end{cases}$$

$$EF \parallel BP \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BP} = \frac{t}{۳t} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{y}{۳y} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AE = y \\ AB = ۳y \end{cases} \Rightarrow EB = ۲y \Rightarrow EM = MB = y$$

نسبت مساحت دو مثلث را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{S_{EFM}}{S_{ABP}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times EF \times EM \times \sin\alpha}{\frac{۱}{۲} \times AB \times BP \times \sin(\pi - \alpha)} = \frac{EF \times EM}{AB \times BP} = \frac{t \times y}{۳t \times ۳y} = \frac{۱}{۹}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۴۹

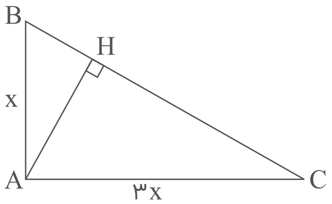
گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) طول اضلاع قائمهٔ مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را $x$ و $3x$ در نظر می‌گیریم.

ب) می‌دانیم: "ارتفاع × قاعده × $\frac{1}{2}$ = مساحت مثلث"




گام دوم

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ $BC$ را محاسبه می‌کنیم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 10x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{10}x$$

با توجه به اینکه مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر ۶۰ واحد مربع است، مقدار $x$ را تعیین می‌کنیم.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{1}{2}x(3x) = 60 \Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

می‌توان مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را با تعریف $BC$ و $AH$ به ترتیب به‌عنوان قاعده و ارتفاع آن چنین نوشت:

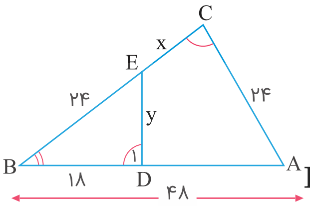
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}AH \times BC = 60$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2}AH \times \sqrt{10}(2\sqrt{10}) = 60 \Rightarrow 10AH = 60 \Rightarrow AH = 6$$

۵۰ گزینه ۱

مطابق شکل، داریم:




$$\hat{B} = \hat{B}\,,\ \hat{D}_۱ = \hat{C} \Rightarrow \overset{\Delta}{BDE} \sim \overset{\Delta}{BCA} \Rightarrow \frac{DE}{CA} = \frac{DB}{BC} = \frac{BE}{BA}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{۲۴} = \frac{۱۸}{۲۴+x} = \frac{۲۴}{۴۸} \Rightarrow \frac{y}{۲۴} = \frac{۱۸}{۲۴+x} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲y = ۲۴\,,\ ۲۴+x = ۳۶ \Rightarrow y = ۱۲\,,\ x = ۱۲ \Rightarrow \frac{x}{y} = ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

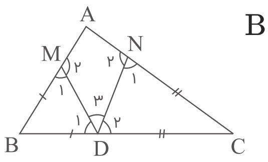
۵۱

گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) شکل را با جزئیات بیشتر رسم می‌کنیم:




$$BM = BD \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{M}_۱ = \alpha,\ CN = CD \Rightarrow \hat{D}_۲ = \hat{N}_۱ = \beta$$

ب) $\hat{A} = ۵۸^\circ$ است، بنابراین در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}\ : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=۵۸} ۵۸ + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ - ۵۸ = ۱۲۲^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۲۲^\circ \qquad (I)$$

گام دوم

دو مثلث $\overset{\Delta}{CND}$ و $\overset{\Delta}{BMD}$ را در نظر گرفته و مجموع زوایای این دو مثلث را به دست می‌آوریم. مجموع زوایای این دو مثلث باید $۳۶۰^\circ$ باشد. با تعیین $\alpha + \beta$ اندازهٔ $\hat{D}_۳$ یا همان $M\hat{D}N$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{CND}\ : \hat{C} + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{BMD}\ : B + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)} \hat{B} + \hat{C} + ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ$$

$$\xrightarrow{(I)} ۱۲۲^\circ + ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ - ۱۲۲^\circ$$
$$\Rightarrow ۲(\alpha + \beta) = ۲۳۸^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۲۳۸^\circ}{۲} = ۱۱۹^\circ \qquad (II)$$

ازطرفی:

$$\hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ + \hat{D}_۳ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + M\hat{D}N = ۱۸۰^\circ$$
$$\xrightarrow{(II)} ۱۱۹^\circ + M\hat{D}N = ۱۸۰^\circ \Rightarrow M\hat{D}N = ۶۱^\circ$$



۵۲

گزینه ۱

در شکل داده‌شده دو زاویهٔ متقابل به رأس و درنتیجه مساوی داریم، پس اگر دو مثلث متشابه باشند، باید اضلاع این زاویه‌های مساوی هم متناسب باشند. حال چون $۱۲ < ۹$ و $x - ۲ < x$، پس اضلاع کوچک‌تر بر هم و اضلاع بزرگ‌تر نیز بر یکدیگر تقسیم می‌شوند.

$$\frac{۹}{x-۲} = \frac{۱۲}{x} \Rightarrow ۹x = ۱۲x - ۲۴ \Rightarrow x = ۸$$

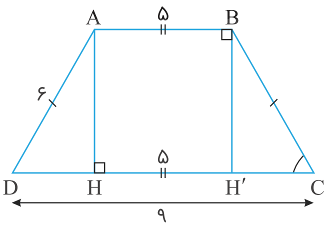
$$\Rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها} = k^۲ = \left(\frac{x-۲}{۹}\right)^۲ \underset{x=۸}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{۴}{۹}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۵۳

گزینه ۴

مطابق شکل نصف تفاضل دو قاعده در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین عبارت است از قاعده‌های دو مثلث قائم‌الزاویه.




$$DH = \frac{۹ - ۵}{۲} = ۲ \Rightarrow \overset{\triangle}{ADH} : AH = \sqrt{۶^۲ - ۲^۲} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow S = \frac{AB + CD}{۲} \times AH = \frac{۵ + ۹}{۲} \times ۴\sqrt{۲} = ۲۸\sqrt{۲}$$

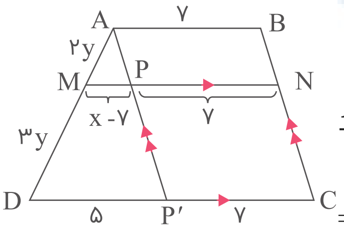
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۵۴

گزینه ۳

در ذوزنقهٔ $ABCD$ از نقطهٔ $A$ خطی موازی با خط $BC$ رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با $MN$ و $DC$ به ترتیب $P$ و $P'$ می‌نامیم.

با استفاده از تعمیم تالس در مثلث $ADP'$ داریم:




$$\frac{AM}{AD} = \frac{MP}{DP'}$$

$$\Rightarrow \frac{۲y}{۲y + ۳y} = \frac{x - ۷}{۵} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{x - ۷}{۵} \Rightarrow x = ۹ = MN$$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۵

گزینه ۳

$$\text{نسبت مساحت‌ها کوچک به بزرگ} = k^۲ = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow k = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}}$$

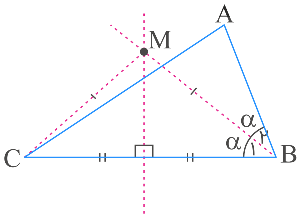
$$\Rightarrow \frac{\text{ضلع مثلث کوچک‌تر}}{\text{ضلع مثلث بزرگ‌تر}} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{۲۱}{x} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow x = ۲۴\sqrt{۲}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۵۶ گزینه ۳

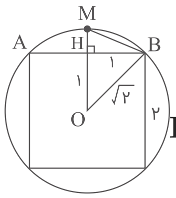
نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، پس مثلث $MBC$ متساوی‌الساقین است و داریم:




$$M\hat{C}B = M\hat{B}C = \frac{۱}{۲}\hat{B} \xrightarrow{M\hat{C}B > A\hat{C}B} \frac{۱}{۲}\hat{B} > A\hat{C}B \Rightarrow \hat{B} > ۲A\hat{C}B$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۵۷ گزینه ۲




هدف محاسبهٔ اندازهٔ $MB$ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $M\overset{\triangle}{H}B$ داریم:

$$HB = ۱\,,\quad MH = OM - OH$$

برای محاسبهٔ $MH$، ابتدا لازم است با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس شعاع دایره را به‌دست آوریم:

$$OB = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad OM = OB = \sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad MH = \sqrt{۲} - ۱$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ $MB$ را محاسبه می‌کنیم:

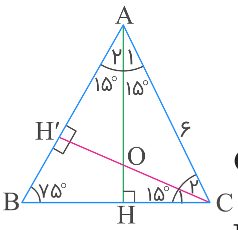
$$MB^۲ = MH^۲ + HB^۲ \quad \Rightarrow \quad MB^۲ = (\sqrt{۲} - ۱)^۲ + ۱^۲ = ۲ - ۲\sqrt{۲} + ۱ + ۱ = ۴ - ۲\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow MB = \sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

**۵۸** گزینه ۳

راه‌حل اول:

چون مثلث $ABC$ متساوی‌الساقین است، پس $AB = AC$ و داریم:




$$\hat{C} = \hat{B} = 75^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 15^\circ$$

$$\overset{\triangle}{BH'C} = \hat{B} = 75^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 15^\circ \Rightarrow \overset{\triangle}{OHC} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{OHC}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} = \left(\frac{HC}{AH}\right)^2 = \tan^2 15^\circ$$

$$= \left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 7-4\sqrt{3} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OHC}} = \left(7-4\sqrt{3}\right) S_{\overset{\triangle}{AHC}} \quad (*)$$

$$S_{\overset{\triangle}{AHC}} = \frac{1}{2} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\underbrace{AB}_{6}\right)\left(\underbrace{AC}_{6}\right)\left(\underbrace{\sin\hat{A}}_{\frac{1}{2}}\right)\right) = \frac{9}{2}$$

$$(*) \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OHC}} = \left(7-4\sqrt{3}\right) \times \frac{9}{2} = \frac{9\left(7-4\sqrt{3}\right)}{2}$$

تذکر: برای یافتن مقدار تانژانت می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد:

$$1)\ \tan 15^\circ = \tan\left(60^\circ - 45^\circ\right) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

$$2)\ \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad (\cos 2x = 2\cos^2 x - 1)$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (\sin 2x = 2\sin x.\cos x)$$

$$\Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}$$

راه‌حل دوم:

$$\cos\hat{C} = \frac{HC}{6} \Rightarrow HC = 6\cos 75^\circ$$

$$\tan 15^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = 6\cos 75^\circ \tan 15^\circ$$

$$S_{OHC} = \frac{1}{2} \times (6\cos 75^\circ)(6\cos 75^\circ \tan 15^\circ) = 18\cos^2 75^\circ(2-\sqrt{3})$$

$$= 18 \times \frac{1+\cos 150^\circ}{2}(2-\sqrt{3}) = 9(1-\frac{\sqrt{3}}{2})(2-\sqrt{3})$$

$$= \frac{9}{2}(2-\sqrt{3})^2 = \frac{9}{2}(7-4\sqrt{3}) = \frac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵۹

گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) دو مثلث قابل‌انطباق نیستند یعنی دو مثلث باهم برابر یا همنهشت نیستند؛ بنابراین حق نداریم کوچک‌ترین ضلع مثلث با اضلاع b و a و ۳ را برابر ۳ در نظر بگیریم (اگر کوچک‌ترین ضلع مثلث اول را ۳ در نظر بگیریم، با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند، نسبت تشابه آن‌ها برابر $۱ = \frac{۳}{۳}$ می‌شود و باید مقدار a و b برابر ۴ و ۵ باشد که دراین‌صورت دو مثلث برهم منطبق می‌شوند) پس کوچک‌ترین ضلع این مثلث a یا b است.

ب) می‌دانیم نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است.

گام دوم

محیط مثلث دوم برابر است با:

$$۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$$

نسبت تشابه دو مثلث می‌تواند $\frac{۳}{۴}$ یا $\frac{۳}{۵}$ باشد. اگر نسبت تشابه برابر $\frac{۳}{۴}$ باشد، محیط مثلث اول برابر است با:

$$\text{محیط مثلث اول} = ۱۲ \times \frac{۳}{۴} = ۳ \times ۳ = ۹$$

و اگر نسبت تشابه برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد، داریم:

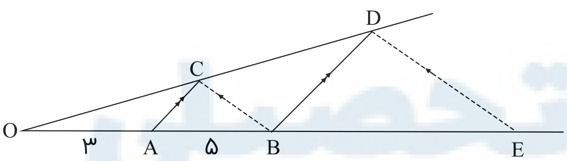
$$\text{محیط مثلث اول} = ۱۲ \times \frac{۳}{۵} = ۷/۲$$

بنابراین بیشترین محیط مثلث اول برابر ۹ است.

۶۰

گزینه ۱

باتوجه‌به شکل و با کمک قضیهٔ تالس داریم:




$$\begin{cases} AC||BD \Rightarrow \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OC}{CD} \\ BC||DE \Rightarrow \dfrac{OB}{BE} = \dfrac{OC}{CD} \end{cases}$$

طرف راست تساوی‌ها باهم برابر است پس طرف چپ آن نیز باهم برابر است.

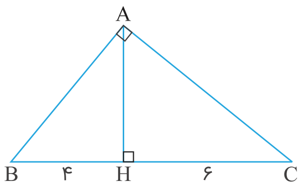
$$\Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۸}{BE} \Rightarrow BE = \frac{۴۰}{۳} = ۱۳\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

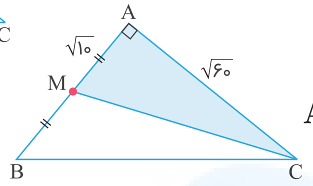
۶۱

گزینه ۱

می‌دانیم در هر مثلث بزرگ‌ترین میانه نظیر کوچک‌ترین ضلع است یعنی از رأس روبروی آن ضلع به وسط آن ضلع می‌رسد.




در شکل فوق AB کوچک‌ترین ضلع مثلث ABC است:




$$AB^۲ = BH \times BC = ۴(۱۰) \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۱۰}$$
$$\Rightarrow AM = BM = \frac{AB}{۲} = \sqrt{۱۰}$$
$$AC^۲ = CH \times BC = ۶(۱۰) \Rightarrow AC = \sqrt{۶۰}$$

$$\overset{\Delta}{AMC} : MC^۲ = AC^۲ + AM^۲ = ۶۰ + ۱۰ \Rightarrow MC = \sqrt{۷۰}$$

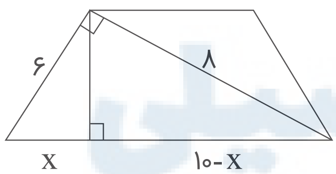
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۶۲

گزینه ۱

در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویهٔ قائمه واسطهٔ هندسی بین وتر و تصویر آن ضلع روی وتر است.

$$۶^۲ = ۱۰x \Rightarrow x = ۳/۶$$
$$\text{طول قاعدهٔ کوچک} = ۱۰ - ۲x = ۱۰ - ۷/۲ = ۲/۸$$




کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

**۶۳** گزینه ۳

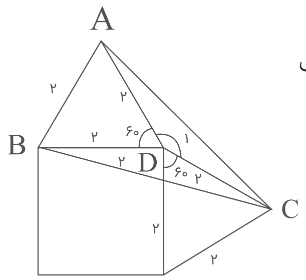
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

### گام اول

الف) زوایای داخلی هر مثلث متساوی‌الاضلاع $۶۰^{\circ}$ است.

ب) مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ یک مثلث متساوی‌الساقین است. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{D}_۱$ برابر است با:

$$\hat{D}_۱ = ۳۶۰ - (۹۰ + ۶۰ + ۶۰) = ۳۶۰ - ۲۱۰ = ۱۵۰^{\circ}$$




ج) برای به دست آوردن مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، مساحت سه مثلث $\overset{\triangle}{ACD}$، $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{BDC}$ را به دست آورده و باهم جمع می‌کنیم.

د) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a از رابطهٔ $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ به دست می آید.

### گام دوم

$$\overset{\triangle}{ADC} \underset{(\text{ض ز ض})}{\cong} \overset{\triangle}{BDC} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADC}} = S_{\overset{\triangle}{BDC}}$$

با استفاده از مبحث کاربرد مثلثات مساحت دو مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ و $\overset{\triangle}{BDC}$ را تعیین می‌کنیم:

$$S_{\overset{\triangle}{ADC}} = S_{\overset{\triangle}{BDC}} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۱۵۰^{\circ} = ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ متساوی الاضلاع است و داریم:

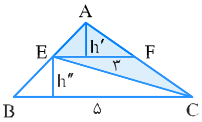
$$S_{\overset{\triangle}{ABD}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲)^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۴ = \sqrt{۳}$$

بنابراین مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر است با:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{BDC}} + S_{\overset{\triangle}{ADC}} + S_{\overset{\triangle}{ABD}} = ۱ + ۱ + \sqrt{۳} = ۲ + \sqrt{۳}$$

۶۴

گزینه ۴




$$\frac{EF}{BC}=\frac{۳}{۵}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BEC}}}{S_{BCFE}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۵\times h''}{\frac{۱}{۲}\times (۳+۵)\times h''}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{BCFE}}=۱-\frac{۵}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

$$\text{نسبت تشابه}: \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{BCFE}}=\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}-S_{\overset{\triangle}{AEF}}}$$

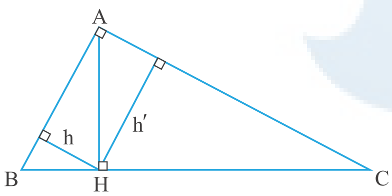
$$=\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{\frac{۲۵}{۹}S_{\overset{\triangle}{AEF}}-S_{\overset{\triangle}{AEF}}}=\frac{۱}{\frac{۲۵}{۹}-۱}=\frac{۱}{\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEC}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}}=\frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}}+\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}}=\frac{۳}{۸}+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۵

گزینه ۲




$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=۶/۷۶S_{\overset{\triangle}{ABH}}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABH}}+S_{\overset{\triangle}{ACH}}=۶/۷۶S_{\overset{\triangle}{ABH}}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ACH}}=۵/۷۶S_{\overset{\triangle}{ABH}}\xrightarrow{\overset{\triangle}{ACH}\sim\overset{\triangle}{ABH}}\text{نسبت مساحت‌ها}=k^{۲}=۵/۷۶\Rightarrow k=۲/۴$$

$$\Rightarrow \frac{h'}{h}=۲/۴=\frac{۱۲}{۵}\Rightarrow \frac{h}{h'}=\frac{۵}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۶۶

گزینه ۴

مطابق شکل داده‌شده در صورت مسئله، ثابت می‌کنیم دو مثلث $EDC$ و $ABC$ متشابه‌اند:

$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{D}_{۱}\\ \hat{C}=\hat{C}\\ \hat{B}=D\hat{E}C\end{cases}$$

$$\text{دو مثلث متشابه‌اند}\Rightarrow \frac{AB}{ED}=\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۴+۲}{۷}=\frac{BD+۷}{۱۴}\Rightarrow BD=۲۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

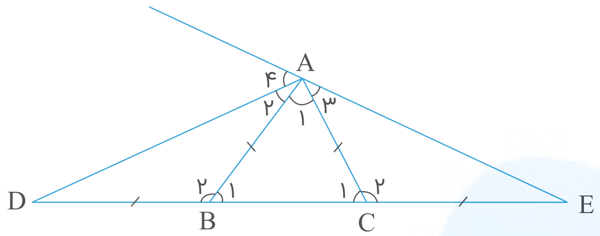
۶۷

گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ را بر اساس توضیحات صورت سؤال رسم می‌کنیم:




ب) $AB = AC = CE = BD$

ج) کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی در هر مثلث، مکمل بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی است.

گام دوم

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $\hat{B}_۱ = \hat{C}_۱$، درنتیجه مکمل آن‌ها نیز برابر است؛ یعنی $\hat{B}_۲ = \hat{C}_۲$ است. ازطرفی طبق قسمت (ب) از گام اول، $CE = BD$ و $AB = AC$ است؛ بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{ACE}$ به حالت (ض‌زض) هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{l} CE = BD \\ \hat{B}_۲ = \hat{C}_۲ \\ AB = AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ACE}$$

درنتیجه زوایای $\hat{D}$ و $\hat{E}$ باهم برابر و هردو زوایای کوچک داخلی مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ محسوب می‌شوند.

$$\text{متساوی الساقین}\ \overset{\triangle}{ABD} \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{D} = \alpha \xrightarrow{\hat{D}=\hat{E}} \hat{D} = \hat{E} = \alpha$$

$\hat{A}_۴$ کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ است پس اندازهٔ آن با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش برابر می‌شود:

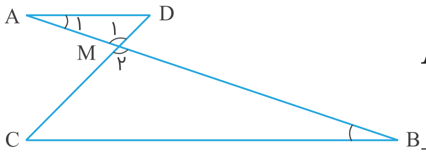
$$\hat{A}_۴ = \hat{D} + \hat{E} = \alpha + \alpha = ۲\alpha$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث، ۲ برابر کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی آن است.

۶۸

گزینه ۲

مطابق شکل، دو مثلث $AMD$ و $MCB$ را از شکل بیرون می‌کشیم و ثابت می‌کنیم متشابه‌اند. توجه کنید که ضلع $AB$ وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC$ است.




$$\overset{\triangle}{AMD}\ ,\ \overset{\triangle}{MCB}\ :\ \begin{cases} AD||BC\ ,\ \text{مورب}\ AB \Rightarrow \hat{A}=\hat{B} \\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲\quad \text{متقابل به رأس} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{D}=\hat{C} \Rightarrow \text{دو مثلث متشابه‌اند}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{MA}{AB-MA}=\frac{۱}{۱+۱+۱}$$

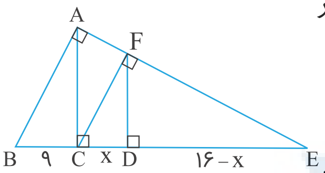
$$\xrightarrow{MA=x} \frac{x}{\sqrt{۱^۲+۳^۲}-x}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۶۹

گزینه ۳

مطابق شکل، از اینکه $AB\perp AE$ و $CF\perp AE$ نتیجه می‌شود $AB||CF$. همچنین روی ضلع $BE$ در بزرگ‌ترین مثلث، چهار نقطه وجود دارد. پس با دو بار نوشتن تعمیم قضیهٔ تالس داریم:




$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ACE}\ :\ FD||AC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \dfrac{EF}{EA}=\dfrac{ED}{EC} \\ \overset{\triangle}{ABE}\ :\ CF||AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \dfrac{EF}{EA}=\dfrac{EC}{EB} \end{cases} \Rightarrow \frac{ED}{EC}=\frac{EC}{EB}$$

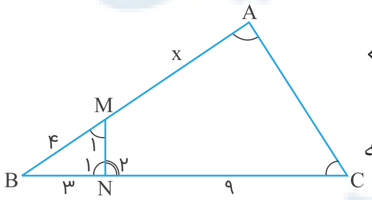
$$\Rightarrow EC^۲=ED\times EB \Rightarrow (۱۶-x+x)^۲=(۱۶-x)(۱۶-x+x+۹)$$
$$\Rightarrow ۲۵۶=(۱۶-x)\times ۲۵ \Rightarrow x=۵/۷۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۷۰

گزینه ۱

ابتدا ثابت می‌کنیم دو مثلث کوچک و بزرگ متشابه‌اند:




$$\begin{cases} MNCA : \hat{N}_۲+\hat{A}=۱۸۰^\circ \\ \hat{N}_۱+\hat{N}_۲=۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}=\hat{N}_۱$$

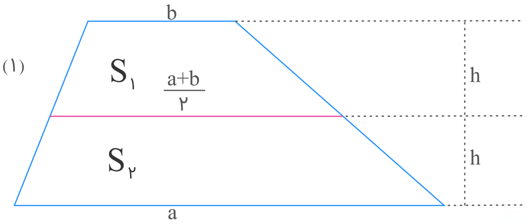
بنابراین می‌توان گفت دو مثلث $ABC$ و $BMN$ متشابه‌اند (زیرا $\hat{B}=\hat{B}$ و $\hat{A}=\hat{N}_۱$ و درنتیجه $\hat{C}=\hat{M}_۱$)، پس:

$$\frac{AB}{BN}=\frac{AC}{MN}=\frac{BC}{BM} \Rightarrow \frac{x+۴}{۳}=\frac{۳+۹}{۴} \Rightarrow x=۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۷۱ گزینه ۲

پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر $\frac{a+b}{۲}$ است.




$$S_۲ = ۲S_۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}h(a+\frac{a+b}{۲}) = ۲\times\frac{۱}{۲}h(b+\frac{a+b}{۲})$$

$$\Rightarrow \frac{۳a+b}{۲} = ۳b+a \Rightarrow ۳a+b = ۶b+۲a \Rightarrow a = ۵b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۱}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

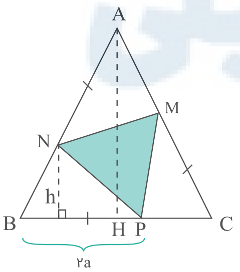
۷۲ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) اندازهٔ هر یک از سه قسمت مشخص‌شده بر روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر a و هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر ۳a در نظر می‌گیریم. همچنین در مثلث‌های رنگ‌نشده ارتفاع وارد بر ضلع های با اندازهٔ ۲a را h فرض می‌کنیم.

ب) اگر ارتفاع مثلث اصلی را رسم کنیم طبق قضیهٔ تالس اندازهٔ آن برابر ۳h به دست می آید (چون ارتفاع دو مثلث ABC و NBP موازی‌اند پس $\frac{a}{۳a} = \frac{h}{AH}$ درنتیجه $AH = ۳h$). پس می‌توان اندازهٔ مساحت مثلث رنگی و مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه را برحسب a و h تعیین و درنهایت نسبت آن‌ها را محاسبه کنیم.




گام دوم

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۳h\times۳a}{۲} = \frac{۹ha}{۲}$$

$$S_{\overset{\triangle}{BNP}} = \frac{۱}{۲}\times h\times ۲a = ha$$

$$S_{\overset{\triangle}{MNP}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - ۳S_{\overset{\triangle}{BNP}} = \frac{۹ha}{۲} - ۳ha = \frac{۳ha}{۲}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۳ha}{۲}}{\frac{۹ha}{۲}} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$$

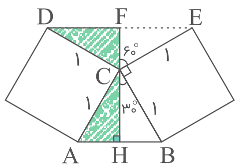
۷۳ گزینه ۴

قاعدهٔ هر دو مثلث $DE$ است و ارتفاع هر دو یکسان است، پس مساحت‌های برابر دارند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷۴ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل واضح است که مثلث‌های $ACH$ و $CDF$ همنهشت هستند؛ بنابراین مساحت مثلث $ABC$ دو برابر مساحت مثلث $DCF$ و مساوی با مساحت مثلث $DCE$ است.

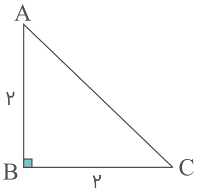



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۷۵

گزینه ۴

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$ به ضلع قائم ۲ واحد را رسم می‌کنیم.

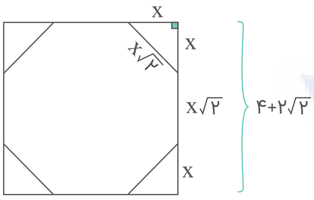



محیط این مثلث برابر طول ضلع یک مربع است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ ضلع AC و سپس محیط مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۲}$$

$$\overset{\triangle}{ABC}\ \text{محیط مثلث} = ۲ + ۲ + ۲\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲}$$

پس طول ضلع مربع موردنظر برابر $۴ + ۲\sqrt{۲}$ است.
می‌خواهیم با حذف گوشه‌های این مربع، یک هشت ضلعی منتظم را درون آن محاط کنیم. اگر اندازهٔ اضلاع قائمه چهار مثلث گوشه‌ای را x در نظر بگیریم، طول ضلع هشت ضلعی منتظم با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس برابر $x\sqrt{۲}$ می‌شود.




باتوجه‌به اینکه طول ضلع مربع برابر $۴ + ۲\sqrt{۲}$ است، مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$x + x + x\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲x + x\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = ۲$$

برای محاسبهٔ مساحت هشت ضلعی منتظم، کافی است مساحت چهار مثلث گوشه‌ای را از مساحت مربع کم کنیم:

$$S_{\text{مربع}} = (۴ + ۲\sqrt{۲})^۲$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ = ۲$$

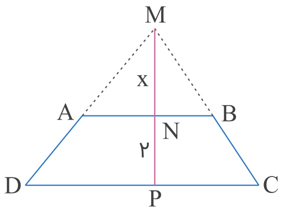
پس مساحت هشت ضلعی برابر است با:

$$S_{\text{هشت ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - (۴ \times S_{\text{مثلث}}) = (۴ + ۲\sqrt{۲})^۲ - ۸ = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲} + ۸ - ۸ = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۷۶ گزینه ۲

مطابق شکل، چون در مثلث $\mathrm{MDC}$ پاره‌خط $\mathrm{AB}$ موازی ضلع $\mathrm{CD}$ از این مثلث است، پس $\overset{\triangle}{\mathrm{MAB}} \sim \overset{\triangle}{\mathrm{MDC}}$.



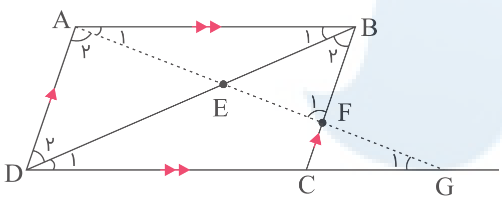

بنابراین نسبت دو ضلع نظیر و موازی $\mathrm{AB}$ و $\mathrm{CD}$ از این دو مثلث، برابر نسبت ارتفاع نظیر این دو ضلع است، پس:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MP}} \Rightarrow \frac{۶}{۹} = \frac{x}{x+۲} \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow \mathrm{MP} = ۴ + ۲ = ۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۷۷ گزینه ۱

چون $\mathrm{DG} \parallel \mathrm{AB}$ و $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$ است، داریم:



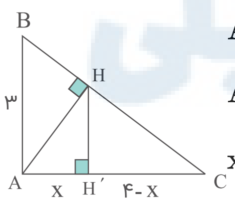

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\mathrm{A}}_۱ = \hat{\mathrm{G}}_۱ \ , \ \hat{\mathrm{B}}_۱ = \hat{\mathrm{D}}_۱ \Rightarrow \overset{\triangle}{\mathrm{EAB}} \sim \overset{\triangle}{\mathrm{EGD}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EG}} = \dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{ED}} \\ \hat{\mathrm{B}}_۲ = \hat{\mathrm{D}}_۲ \ , \ \hat{\mathrm{F}}_۱ = \hat{\mathrm{A}}_۲ \Rightarrow \overset{\triangle}{\mathrm{EBF}} \sim \overset{\triangle}{\mathrm{EAD}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EA}} = \dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{ED}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EG}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EA}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{EF}.\mathrm{EG} = \mathrm{EA}^۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۷۸ گزینه ۴

شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم و داریم:




$$\mathrm{AC} = \mathrm{AH'} + \mathrm{CH'} = ۴ - x + x = ۴$$

$$\mathrm{AB}^۲ + \mathrm{AC}^۲ = \mathrm{BC}^۲ \Rightarrow ۹ + ۱۶ = \mathrm{BC}^۲ \Rightarrow \mathrm{BC}^۲ = ۲۵ \Rightarrow \mathrm{BC} = ۵$$

اندازهٔ $\mathrm{AH}$ را با استفاده از رابطهٔ $\mathrm{AH} \times \mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$ به دست می‌آوریم. سپس اندازهٔ $\mathrm{AH'}$ یا همان $x$ را با استفاده از رابطهٔ $\mathrm{AH}^۲ = \mathrm{AH'} \times \mathrm{AC}$ در مثلث $\overset{\triangle}{\mathrm{AHC}}$، به دست می‌آوریم.

$$\mathrm{AH} \times \mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \Rightarrow ۵\mathrm{AH} = ۱۲ \Rightarrow \mathrm{AH} = \frac{۱۲}{۵}$$

$$\mathrm{AH}^۲ = \mathrm{AH'} \times \mathrm{AC} \Rightarrow \frac{۱۴۴}{۲۵} = x \times ۴ \Rightarrow x = \frac{۱۴۴}{۱۰۰} = ۱/۴۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۷۹ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

**گام اول**

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است.

**گام دوم**

با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند و $\frac{۵}{۹} \neq \frac{۴}{۷}$ و $\frac{۴}{۹} \neq \frac{۵}{۷}$ است، دو ضلع به طول‌های a و b از دو مثلث نمی‌توانند متناظر باشند؛ بنابراین ضلعِ به طول a از مثلث اول یا با ضلعِ به طول ۷ از مثلث دوم متناظر است یا با ضلعِ به طول ۹. هریک از این دو حالت را بررسی و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: ضلعِ به طول a از مثلث اول با ضلعِ به طول ۹ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{۹} = \frac{۴}{b} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow a = \frac{۴۵}{۷} \text{ یا } \frac{a}{۹} = \frac{۴}{۷} = \frac{۵}{b} \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow a = \frac{۳۶}{۷}$$

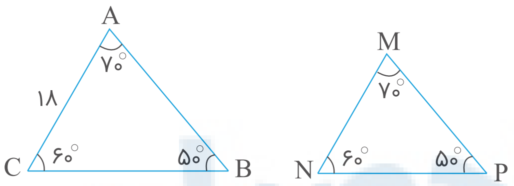
حالت دوم: ضلعِ به طول a از مثلث اول با ضلعِ به طول ۷ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{۷} = \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{b} \Rightarrow \frac{a}{۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow a = \frac{۲۸}{۹} \text{ یا } \frac{a}{۷} = \frac{۵}{۹} = \frac{۴}{b} \Rightarrow \frac{a}{۷} = \frac{۵}{۹} \Rightarrow a = \frac{۳۵}{۹}$$

از بین مقادیر به‌دست‌آمده، بیشترین مقدار $a = \frac{۴۵}{۷}$ است.

۸۰ گزینه ۱

در مثلث ABC داریم $\hat{C} = ۱۸۰^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = ۶۰^\circ$ و در مثلث MNP داریم $\hat{P} = ۱۸۰^\circ - (\hat{M} + \hat{N}) = ۵۰^\circ$. پس دو مثلث ABC و MNP با داشتن زاویه‌های مساوی متشابه‌اند. با کمی دقت متوجه می‌شویم که در مثلث ABC ضلع AB روبه‌روی زاویهٔ $\hat{C} = ۶۰^\circ$ است و در مثلث MNP ضلع MP روبه‌روی زاویهٔ $\hat{N} = ۶۰^\circ$. پس این دو ضلع نظیر هم هستند. بنابراین:




$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \left(\frac{AB}{MP}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۴} = \left(\frac{۱۸}{MP}\right)^۲$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{۱۸}{MP} \Rightarrow MP = ۱۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۸۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است پس داریم:

$$MN||BP \Rightarrow MN||BC \Rightarrow \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$
$$NP||MB \Rightarrow NP||AB \Rightarrow \overset{\triangle}{NPC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

ب) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه اضلاع است.

گام دوم

طبق گام اول، $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ است. با توجه به اینکه $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۲}$، نسبت تشابه دو مثلث و سپس نسبت مساحت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{MA}{MA+MB} = \frac{۱}{\frac{MA+MB}{MA}} = \frac{۱}{۱+\frac{MA}{MB}} = \frac{۱}{۱+\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{\frac{۵}{۳}} = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = (\frac{۳}{۵})^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}} = \frac{۹}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

چون $MN||BC$ است، با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{۲}{۳}$$

$$\overset{\triangle}{NPC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

است پس نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{NC}{AN+NC} = \frac{۱}{\frac{AN+NC}{NC}} = \frac{۱}{\frac{NC}{AN}+۱} = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}+۱} = \frac{۱}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۲}{۵}$$

حال نسبت مساحت‌های این دو مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{NPC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = (\frac{۲}{۵})^۲ = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{NPC}} = \frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

با توجه به نسبت‌های بالا، مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ را برحسب مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ می‌نویسیم. داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{AMN}} + S_{\overset{\triangle}{NPC}} + S_{MNPB}$$
$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۹}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}} + \frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{MNPB}$$
$$\Rightarrow S_{MNPB} = \frac{۱۲}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۴۸}{۱۰۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

۸۲

گزینه ۲

با دو بار نوشتن تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ACF} \ : \ BE||CF \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF} \\ \overset{\triangle}{ADF} \ : \ CE||DF \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AE}{AF} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AB \times AD = AC^{۲}$$

$$\Rightarrow (۵+۳)^{۲} = ۵AD \Rightarrow AD = ۱۲/۸$$

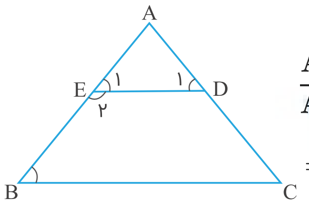
$$\Rightarrow CD = ۱۲/۸ - (۵+۳) = ۴/۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۸۳

گزینه ۲

مطابق شکل و طبق فرض $\hat{E}_۲ + \hat{C} = ۱۸۰$ و چون $\hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = ۱۸۰^\circ$، پس $\hat{E}_۱ = \hat{C}$ و چون زاویهٔ A در هر دو مثلث AED و ABC مشترک است، پس $\hat{D}_۱ = \hat{B}$ و دو مثلث مذکور متشابه‌اند؛ و لذا داریم:




$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{۲۰}{۱۲} \Rightarrow k = \frac{۵}{۳}$$

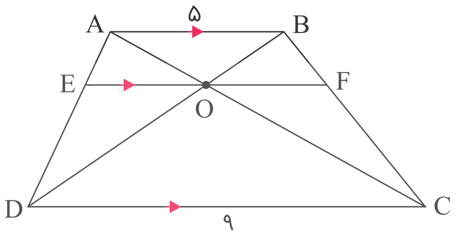
$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ADE}}} = (\frac{۵}{۳})^{۲} = \frac{۲۵}{۹}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}} - S_{\overset{\triangle}{ADE}}} = \frac{۲۵}{۲۵-۹}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\text{چهار ضلعی}}} = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \frac{S_{\text{چهار ضلعی}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = ۰/۶۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۸۴ گزینه ۱




$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ADC} : EO \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{۹} = \frac{AE}{AD} \\ \overset{\triangle}{DAB} : EO \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{۵} = \frac{DE}{AD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EO}{۹} + \frac{EO}{۵} = \frac{\overbrace{AE + DE}^{AD}}{AD} = ۱ \xrightarrow{\times ۴۵} ۵EO + ۹EO = ۴۵$$

$$\Rightarrow ۱۴EO = ۴۵ \Rightarrow EO = \frac{۴۵}{۱۴}$$

به روش مشابه $\Rightarrow OF = \frac{۴۵}{۱۴} \Rightarrow EF = \frac{۴۵}{۱۴} + \frac{۴۵}{۱۴} = \frac{۴۵}{۷}$

تذکر: در حالت کلی، $O$ وسط $EF$ است و $EF = \dfrac{۲}{\frac{۱}{AB} + \frac{۱}{DC}}$. (طول $EF$ واسطهٔ توافقی طول قاعده‌ها است)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۸۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

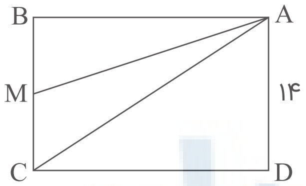
گام اول

الف) عرض مستطیل ۱۴ واحد و قطر آن ۲۵ واحد است.

ب) $\frac{S_{ABM}}{S_{AMCD}} = \frac{۵}{۹}$

ج) $AM = ?$

گام دوم




با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول مستطیل را به دست می‌آوریم.

$$AC^۲ = AD^۲ + CD^۲ \xrightarrow[AD=۱۴]{AC=۲۵} ۲۵^۲ = ۱۴^۲ + CD^۲$$

$$\Rightarrow ۶۲۵ = ۱۹۶ + CD^۲ \Rightarrow CD^۲ = ۶۲۵ - ۱۹۶ = ۴۲۹ \Rightarrow AB^۲ = ۴۲۹$$

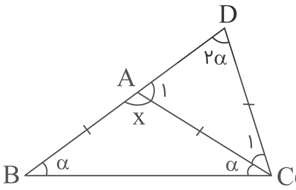
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{\overset{\triangle}{ABM}} + S_{AMCD}} = \frac{۵}{۵+۹} = \frac{۵}{۱۴}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times AB \times BM}{AB \times AD} = \frac{BM}{۲AD} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow \frac{BM}{۲۸} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow BM = ۱۰$$

رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ نوشته و اندازهٔ $AM$ را تعیین می‌کنیم:

$$AB^۲ + BM^۲ = AM^۲ \Rightarrow ۴۲۹ + ۱۰۰ = AM^۲ \Rightarrow AM^۲ = ۵۲۹ \Rightarrow AM = \sqrt{۵۲۹} = ۲۳$$

۸۶ گزینه ۳




$$\begin{cases} BD = BC \\ AB = AC = DC \end{cases}$$

زاویهٔ خارجی $\hat{A}_1 = 2\alpha$

$$AC = DC \Rightarrow \hat{D} = \hat{A}_1 = 2\alpha \quad , \quad BD = BC \Rightarrow \hat{D} = D\hat{C}B = 2\alpha \Rightarrow \hat{C}_1 = \alpha$$

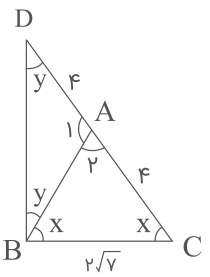
$$\overset{\triangle}{ADC} : \hat{A}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

$$\hat{x} = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 2\hat{\alpha} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۸۷ گزینه ۳

ابتدا بر اساس توضیحات صورت سؤال، یک شکل دقیق رسم می‌کنیم:




مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ABD}$ متساوی‌الساقین هستند پس:

$$A\hat{B}C = A\hat{C}B = x \quad , \quad A\hat{B}D = A\hat{D}B = y$$

زاویهٔ $\hat{A}_1$ زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است و اندازهٔ آن برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش می‌شود؛ یعنی:

$$\hat{A}_1 = x + x = 2x$$

با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر $180^\circ$ است، داریم:

$$\hat{A}_1 + y + y = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Rightarrow 2(x+y) = 180^\circ \Rightarrow x + y = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{DBC}$ در رأس B قائمه است و می‌توان اندازهٔ ضلع BD را با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس محاسبه کرد.

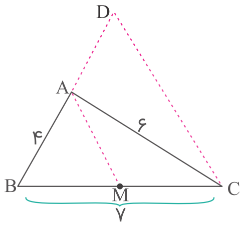
$$CD = AD + AC = 4 + 4 = 8 \quad , \quad BC = 2\sqrt{7}$$

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 \quad \Rightarrow 8^2 = BD^2 + (2\sqrt{7})^2 \quad \Rightarrow 64 = BD^2 + 28$$
$$\Rightarrow BD^2 = 64 - 28 = 36 \quad \Rightarrow BD = \sqrt{36} = 6$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۸۸

گزینه ۲



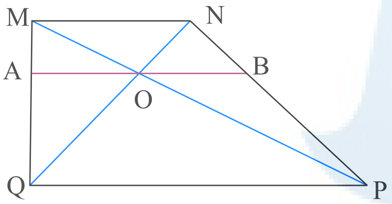

در مثلث $BDC$ می‌دانیم $AM||CD$ است. به کمک رابطهٔ تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BA}{BD}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow\frac{۴}{BD}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow BD=۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۹

گزینه ۲




نکته: طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم $\frac{BP}{BN}=\frac{AQ}{AM}$، سپس با ترکیب نسبت در مخرج نتیجه می‌گیریم: $\frac{BP}{PN}=\frac{AQ}{QM}$

باتوجه‌به تعمیم قضیهٔ تالس در دو مثلث $QMN$ و $PMN$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{OA}{MN}=\frac{AQ}{QM}\\\frac{OB}{MN}=\frac{BP}{PN}\end{array}\right\}\xrightarrow{\div}\frac{OA}{OB}=\underbrace{\frac{AQ}{QM}\times\frac{PN}{BP}}_{۱}\Rightarrow\frac{OA}{OB}=۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۹۰

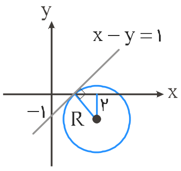
گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصلهٔ یک نقطه با مختصات $(x_\circ, y_\circ)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = \circ$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|۲ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \sqrt{۲}$$




$$\text{معادلهٔ دایره} : (x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۲ \xrightarrow{y=\circ} (x - ۲)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۹۱

گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

## گام اول

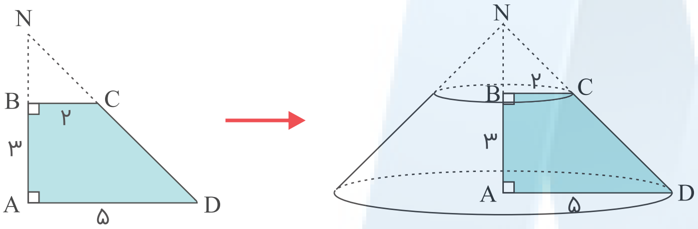
الف) در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه با امتداد دادن اضلاع غیرقاعده‌ای، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آید.

ب) از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش، یک مخروط ایجاد می‌شود.

ج) حجم مخروط از رابطهٔ $V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$ به دست می‌آید که $r$ شعاع قاعده و $h$ ارتفاع آن است.

## گام دوم

ذوزنقهٔ $ABCD$ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع امتداد دو ضلع $AB$ و $CD$ را $N$ می‌نامیم. دو مثلث $\overset{\triangle}{NBC}$ و $\overset{\triangle}{NAD}$ قائم‌الزاویه هستند. برای محاسبهٔ حجم حاصل از دوران ذوزنقه حول ضلع قائم آن، کافی است حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\overset{\triangle}{NBC}$ حول ضلع $NB$ را از حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\overset{\triangle}{NAD}$ حول ضلع $NA$ کم کنیم.




باتوجه‌به اینکه $BC || AD$ است، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{BN}{BN + ۳} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow ۵BN = ۲BN + ۶ \Rightarrow ۳BN = ۶ \Rightarrow BN = ۲$$

بنابراین:

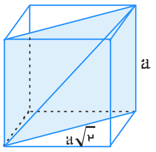
$$V_{\text{دوران ذوزنقه}} = V_{\text{دوران مثلث } \overset{\triangle}{NAD}} - V_{\text{دوران مثلث } \overset{\triangle}{NBC}}$$

$$V_{\text{دوران ذوزنقه}} = \frac{۱}{۳}\pi(۵)^{۲} \times ۵ - \frac{۱}{۳}\pi(۲)^{۲} \times ۲ = \frac{۱}{۳}\pi\,(۱۲۵ - ۸) = \frac{۱۱۷}{۳}\pi = ۳۹\pi$$

۹۲

گزینه ۴

همان‌طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال $a$ و صفحهٔ قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع $a$ و $a\sqrt{۲}$ است. با توجه به مساحت مستطیل، اندازهٔ $a$ را محاسبه می‌کنیم.




بنابراین می‌توان نوشت:

$$a\left(a\sqrt{۲}\right)=۹\sqrt{۲}\Rightarrow a^{۲}\sqrt{۲}=۹\sqrt{۲}\Rightarrow a^{۲}=۹\Rightarrow a=۳$$

قطر مکعب به طول یال $a$ برابر $a\sqrt{۳}$ است (با دو بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

$$a\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۹۳

گزینه ۱

ابتدا با دادن دو مقدار دلخواه $m=۲$ و $m=-۱$ به معادلهٔ قطرهای دایره، معادلهٔ دو تا از قطرها را یافته و سپس آن‌ها را قطع می‌دهیم تا مرکز دایره به دست آید:

$$\left.\begin{array}{l} m=۲\Rightarrow ۳y=۶\Rightarrow y=۲ \\ m=-۱\Rightarrow -۳x=۶\Rightarrow x=-۲ \end{array}\right\}\Rightarrow O(-۲\,,\,۲)$$

حال چون نقطهٔ $A(-۱,۱)$ روی دایره است، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره، برابر با شعاع دایره است. بنابراین:

$$R=|OA|=\sqrt{(-۱+۲)^{۲}+(۱-۲)^{۲}}=\sqrt{۲}$$
$$\text{محیط دایره}=۲\pi R=۲\pi(\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۹۴

گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
ب) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(\alpha , \beta)$ و شعاع $R$ به‌صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = R^{۲}$$

گام دوم

طبق قسمت (الف) از گام اول، شعاع دایره برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ $(۲ , ۰)$ از خط $y = x$، پس داریم:

$$y = x \Rightarrow -x + y = ۰$$
$$R = \frac{|-۲+۰|}{\sqrt{(-۱)^{۲}+۱^{۲}}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

معادلهٔ این دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-۲)^{۲} + (y-۰)^{۲} = (\sqrt{۲})^{۲} \Rightarrow (x-۲)^{۲} + y^{۲} = ۲$$

اکنون نقطهٔ تلاقی دایره با خط $y = ۱$ را به دست می‌آوریم:

$$(x-۲)^{۲} + y^{۲} = ۲ \xrightarrow{y=۱} (x-۲)^{۲} + ۱ = ۲ \Rightarrow (x-۲)^{۲} = ۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x-۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

پس این دایره، خط $y = ۱$ را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند.

۹۵

گزینه ۲

دایرهٔ اول:

$$x^{۲} + y^{۲} + ۲y - ۴x = ۰ \Rightarrow (x-۲)^{۲} + (y+۱)^{۲} = ۵$$
$$O_۱(۲,-۱) \quad , \quad r_۱ = \sqrt{۵}$$

دایرهٔ دوم

$$x^{۲} + y^{۲} - ۲y = ۲ \Rightarrow x^{۲} + (y-۱)^{۲} = ۳$$
$$O_۲(۰,۱) \quad , \quad r_۲ = \sqrt{۳}$$
$$O_۱O_۲ = \sqrt{۲^{۲}+۲^{۲}} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow O_۱O_۲ \simeq ۲/۸$$
$$r_۱ + r_۲ \simeq ۳/۹$$
$$|r_۱ - r_۲| = ۰/۵$$
$$\Rightarrow ۰/۵ < O_۱O_۲ < ۳/۹$$

پس دو دایره متقاطع‌اند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹۶ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R=\sqrt{(\frac{a}{۲})^۲+(\frac{b}{۲})^۲-c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ $(۲\,,۱)$، $(-۲\,,۴)$ و $(۰\,,۰)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$
$$\xrightarrow{(۲\,,۱)} ۲^۲+۱^۲+a(۲)+b(۱)+c=۰\Rightarrow ۴+۱+۲a+b+c=۰\Rightarrow ۲a+b+c=-۵ \qquad (I)$$
$$\xrightarrow{(-۲\,,۴)} (-۲)^۲+۴^۲+a(-۲)+b(۴)+c=۰\Rightarrow ۴+۱۶-۲a+۴b+c=۰\Rightarrow -۲a+۴b+c=-۲۰ \qquad (II)$$
$$\xrightarrow{(۰\,,۰)} ۰^۲+۰^۲+a(۰)+b(۰)+c=۰\Rightarrow c=۰ \qquad (III)$$

با جایگذاری $c=۰$ در دو معادلهٔ I و II، به یک دستگاه دومعادله و دومجهول می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases}۲a+b=-۵\\ -۲a+۴b=-۲۰\end{cases}\xrightarrow{+} ۵b=-۲۵\Rightarrow b=-۵$$
$$۲a+b=-۵\xrightarrow{b=-۵} ۲a-۵=-۵\Rightarrow ۲a=۰\Rightarrow a=۰$$

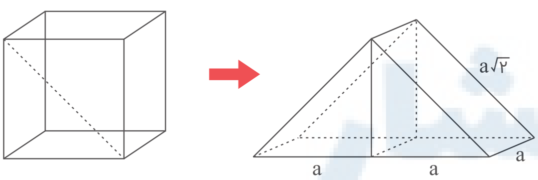
اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R=\sqrt{(\frac{۰}{۲})^۲+(\frac{-۵}{۲})^۲-۰}=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

۹۷ گزینه ۲

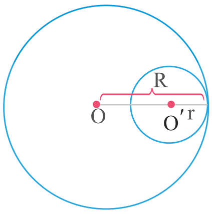
مساحت کل منشور حاصل برابر است با:

$$S=۲(a\times a\sqrt{۲}+a\times a+۲\times\frac{a^۲}{۲})=۲(a^۲\sqrt{۲}+۲a^۲)=a^۲(۴+۲\sqrt{۲})$$




کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۹۸ گزینه ۱




شعاع دایرهٔ بزرگ را $R$ و شعاع دایرهٔ کوچک را $r$ فرض می‌کنیم. چون دایره‌ها مماس داخل‌اند، داریم:

$$\text{طول خط‌المرکزین} = R - r \xrightarrow{\text{فرض سوال}} R - r = ۳/۵ = \frac{۷}{۲} \quad (*)$$

$$S_{\text{ناحیهٔ بین}} = ۲۱\pi \Rightarrow S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایرهٔ کوچک}} = ۲۱\pi$$

$$\Rightarrow \pi R^{۲} - \pi r^{۲} = ۲۱\pi \Rightarrow R^{۲} - r^{۲} = ۲۱ \Rightarrow (R - r)(R + r) = ۲۱$$

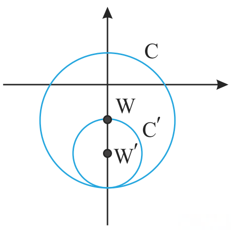
$$\xrightarrow{(*)} \frac{۷}{۲}(R + r) = ۲۱ \Rightarrow R + r = ۶ \xrightarrow{(*)} \begin{cases} R + r = ۶ \\ R - r = ۳/۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۲r = ۲/۵ \Rightarrow r = ۱/۲۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۹۹ گزینه ۴

$$x^{۲} + y^{۲} + ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow W(۰, -۱), \; r = ۲$$




درواقع چون دایرهٔ بزرگ‌تر از $(۰, -۳)$ عبور می‌کند، پس نقطهٔ تماس همین نقطه است و همچنین $W'(۰, -۲)$ و $r' = ۱$ خواهد بود.

$$C' : (x - ۰)^{۲} + (y + ۲)^{۲} = ۱ \Rightarrow x^{۲} + y^{۲} + ۴y + ۳ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

**۱۰۰** گزینه ۲

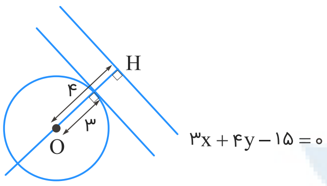
در آغاز معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم، برای این منظور باید بنویسیم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴ \Rightarrow (x^۲ - ۲x + ۱ - ۱) + (y^۲ + ۴y + ۴ - ۴) = ۴$$
$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی جمله‌ها}} (x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۱ + ۴ + ۴ = ۹$$
$$\Rightarrow R = \sqrt{۹} = ۳, \quad O = (۱, -۲)$$

فاصلهٔ هر نقطه مانند $(x_۰, y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$ که $a^۲ + b^۲ \neq ۰$، برابر است با $d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$، پس فاصلهٔ مرکز دایره $O = (۱, -۲)$ تا خط $۳x + ۴y - ۱۵ = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|۳(۱) + ۴(-۲) - ۱۵|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

فاصلهٔ یک نقطه تا یک خط برابر با اندازهٔ عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود و هر خط گذرنده از مرکز یک دایره، قطری از آن است، پس فاصلهٔ مرکز تا خط موردنظر، برابر با طول پاره‌خط عمودی از قطر است که بین مرکز و آن خط محصور است. ازآنجاکه هر قطر دایره، در نقطهٔ تماس بر آن عمود است، پس کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره تا خط موردنظر طبق شکل زیر، برابر می‌شود با $d_{min} = ۴ - ۳ = ۱$.




کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

**۱۰۱** گزینه ۳

چون دایره بر دو خط موازی $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۱۰$ مماس است؛ پس مرکز آن روی خط $y = ۲x + ۵$ (وسط این دو خط) قرار دارد و شعاع دایره برابر نصف فاصلهٔ این دو خط است.

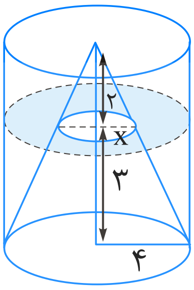
$$\text{فاصله دو خط} = \frac{|۱۰ - ۰|}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow R = \sqrt{۵}$$

چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصلهٔ مبدأ از مرکز دایره برابر R است.

$$R = \sqrt{x^۲ + (۲x + ۵)^۲} \Rightarrow \sqrt{۵} = \sqrt{۵x^۲ + ۲۰x + ۲۵}$$
$$\Rightarrow ۵(x^۲ + ۴x + ۴) = ۰ \Rightarrow (x + ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow y = ۲(-۲) + ۵ = ۱$$
$$\text{مرکز دایره} = (-۲, ۱)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۰۲ گزینه ۴



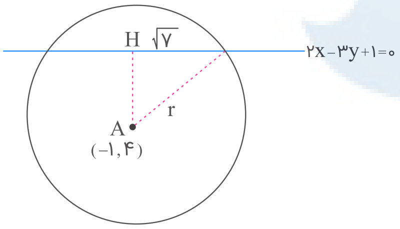

$$\text{نسبت تشابه}: \frac{x}{۴} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = \frac{۸}{۵}$$

$$S = \pi(۴)^۲ - \pi(\frac{۸}{۵})^۲ = ۱۶\pi - \frac{۶۴}{۲۵}\pi = \frac{۳۳۶}{۲۵}\pi = ۱۳/۴۴\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۰۳ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر $AH$ است. داریم:




$$AH = \frac{|۲(-۱) - ۳(۴) + ۱|}{\sqrt{۲^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$

همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

$$r^۲ = AH^۲ + \sqrt{۷}^۲ \Rightarrow r^۲ = ۱۳ + ۷ = ۲۰$$

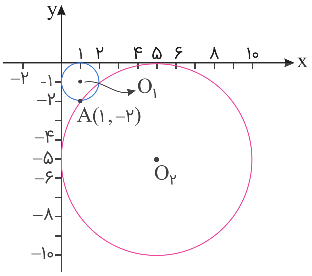
معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x+۱)^۲ + (y-۴)^۲ = ۲۰ \xrightarrow{y=۲} (x+۱)^۲ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۵ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۰۴ گزینه ۲



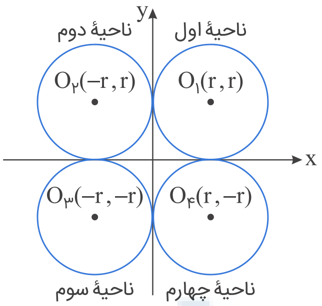

شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که ۲تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطهٔ $A(۱,-۲)$ می‌گذرند. به‌علاوه مرکز دایره‌ها به‌صورت $O(r,-r)$ است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورها برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز $O(r,-r)$ و شعاع $r$ هستند. معادلهٔ آن‌ها به این صورت است:

$$(x-r)^۲+(y+r)^۲=r^۲ \xrightarrow{(۱,-۲)} (۱-r)^۲+(-۲+r)^۲=r^۲$$

$$۱-۲r+r^۲+۴-۴r+r^۲=r^۲ \Rightarrow r^۲-۶r+۵=۰$$

$$\Rightarrow (r-۱)(r-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} r=۱ \\ r=۵ \end{cases}$$

همان‌طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای $r$ به دست آوردیم.
نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به‌صورت زیر است:




کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰۵

گزینه ۲

باتوجه‌به شکل، قطر نیم‌دایره بر طول مستطیل منطبق شده است. حال داریم:

نکتهٔ ۱: از دوران یک مستطیل حول طول خود یک استوانه به ارتفاعی برابر با طول مستطیل و شعاع قاعده‌ای برابر با عرض آن پدید می‌آید.

نکتهٔ ۲: از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن، یک کره با همان شعاع پدید می‌آید.

بنابراین باتوجه‌به این دو نکته، شکل ما یک استوانه می‌شود که از درون آن یک کره به شعاع $\frac{۳}{۲}$ خالی شده است، حجم جسم حاصل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(۲)^۲ \times ۵ - \frac{۴}{۳}\pi(\frac{۳}{۲})^۳ = ۲۰\pi - \frac{۹}{۲}\pi = ۱۵/۵\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

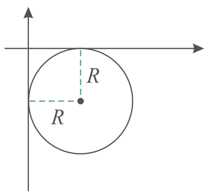
۱۰۶

گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) شکل دایره‌ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات مماس باشد و از نقطهٔ $(۲, -۹)$ نیز عبور کند به‌صورت زیر است:




ب) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(x_۰, y_۰)$ و به شعاع R برابر است با:

$$(x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲ = R^۲$$

گام دوم

با توجه به شکل رسم‌شده در قسمت (الف) از گام اول، مختصات مرکز این دایره برابر $(R, -R)$ است. طبق قسمت (ب) از گام اول، معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x - R)^۲ + (y + R)^۲ = R^۲$$

چون هر دو دایره از نقطهٔ $(۲, -۹)$ عبور می‌کنند، بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ آن‌ها صدق می‌کند پس داریم:

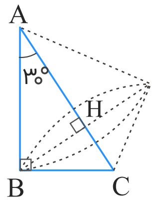
$$\xrightarrow{x=۲,y=-۹} (۲ - R)^۲ + (-۹ + R)^۲ = R^۲ \Rightarrow ۴ - ۴R + R^۲ + ۸۱ - ۱۸R + R^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۲۲R + ۸۵ = ۰ \Rightarrow (R - ۱۷)(R - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} R = ۱۷ \\ R = ۵ \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر ۱۷ است.

۱۰۷ گزینه ۲

مطابق شکل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC$ حول وتر $AC$، دو مخروط پدید می‌آید که ارتفاع وارد بر وتر $(BH)$، شعاع قاعدهٔ این دو مخروط است.




طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ $۳۰^\circ$ در مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است. پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC = ۸ \Rightarrow BC = \frac{۱}{۲} \times ۸ = ۴$$
$$BC^۲ = AC.CH \Rightarrow ۱۶ = ۸ \times CH$$
$$\Rightarrow CH = ۲ \Rightarrow AH = ۸ - ۲ = ۶$$
$$BH^۲ = AH.CH = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

مجموع حجم دو مخروط برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(BH)^۲ \times AH + \frac{۱}{۳}\pi(BH)^۲ \times CH$$
$$= \frac{\pi}{۳} \times ۱۲ \times ۶ + \frac{\pi}{۳} \times ۱۲ \times ۲$$
$$= ۲۴\pi + ۸\pi = ۳۲\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۰۸ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) دایره محور xها را در دو نقطه به طول $x = ۱$ و $x = ۳$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A\,(۱, ۰)$ و $B\,(۳, ۰)$ روی دایرهٔ موردنظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به‌صورت $O\,(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط $A$ و $B$ روی دایره قرار دارند پس فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲} = \sqrt{(\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲ = (\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲$$
$$\Rightarrow \alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ = \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ \Rightarrow ۴\alpha = ۸ \Rightarrow \alpha = ۲$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O\,(۲, ۲)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(۲ - ۱)^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

۱۰۹ گزینه ۲

ابتدا معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ + ۴y + ۴ - ۱ - ۴ + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴ \Rightarrow O_۱ : (۱, -۲),\ R_۱ = ۲$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، بنابراین فاصلهٔ مراکز آن‌ها از یکدیگر برابر مجموع اندازه‌های شعاع‌های آن‌ها است.

$$O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲ \Rightarrow \sqrt{(۱-(-۲))^۲ + (-۲-۲)^۲} = ۲ + R_۲ \Rightarrow ۵ = ۲ + R_۲ \Rightarrow R_۲ = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۱۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

**گام اول**

الف) معادلهٔ استاندارد یک دایره به مرکز $(\alpha , \beta)$ و شعاع $R$ به‌صورت $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$ است.

ب) معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است.

**گام دوم**

باتوجه‌به معادلهٔ گستردهٔ نوشته‌شده در گام اول، ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باید باهم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر $a$ را به‌گونه‌ای می‌یابیم که ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باهم برابر شوند؛ درنتیجه:

$$a^۲ - ۷ = ۲ \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = \pm ۳$$

ازطرفی معادلهٔ این دایره را باید بتوان به‌صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a = +۳$ و $a = -۳$ را در معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a = ۳ : \ ۲x^۲ + (۹-۷)y^۲ + ۴y + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y^۲ + ۲y + ۱) + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y+۱)^۲ + ۱ = ۰$$
$$\xrightarrow{\div ۲} (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ = -\frac{۱}{۲} \quad \text{غ ق ق}$$

رابطهٔ به‌دست‌آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می‌باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

$$a = -۳ : \ ۲x^۲ + (۹-۷)y^۲ + ۴y - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y^۲ + ۲y + ۱) - ۵ = ۰ \Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y+۱)^۲ - ۵ = ۰$$
$$\xrightarrow{\div ۲} (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ - \frac{۵}{۲} = ۰ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۵}{۲}$$

به ازای $a = -۳$، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(۰, -۱)$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{۵}{۲}}$ داریم.

۱۱۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$، نقطهٔ $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $R_۱ + R_۲$ و $|R_۱ - R_۲|$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y = ۸ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y - ۸ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۱(-\frac{-۲}{۲}, -\frac{۶}{۲}) \Rightarrow O_۱(۱, -۳)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۱ = \sqrt{(-\frac{۲}{۲})^۲ + (\frac{۶}{۲})^۲ + ۸} = \sqrt{۱ + ۹ + ۸} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۲(-\frac{۸}{۲}, -\frac{-۴}{۲}) \Rightarrow O_۲(-۴ , ۲)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۲ = \sqrt{(\frac{۸}{۲})^۲ + (\frac{-۴}{۲})^۲ - ۱۲} = \sqrt{۱۶ + ۴ - ۱۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

بنابراین داریم:

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(-۴ - ۱)^۲ + (۲ + ۳)^۲} = \sqrt{۲۵ + ۲۵} = ۵\sqrt{۲}$$
$$R_۱ + R_۲ = ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$$

چون $O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲$ است پس دو دایره مماس خارج هستند.

۱۱۲ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$، مختصات مرکز دایره $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $R_۱ + R_۲$ و $|R_۱ - R_۲|$ مقایسه می‌کنیم، بنابراین لازم است ابتدا مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست آوریم.

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۴y = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۴x + ۴y - ۱ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۱(-\frac{-۴}{۲}, -\frac{۴}{۲}) \Rightarrow O_۱(۲, -۲)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۱ = \sqrt{(-\frac{۴}{۲})^۲ + (\frac{۴}{۲})^۲ - (-۱)} = \sqrt{۴ + ۴ + ۱} = ۳$$

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۸y + ۱۹ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۲(-\frac{-۴}{۲}, -\frac{۸}{۲}) \Rightarrow O_۲(۲, -۴)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۲ = \sqrt{(-\frac{۴}{۲})^۲ + (\frac{۸}{۲})^۲ - ۱۹} = \sqrt{۴ + ۱۶ - ۱۹} = ۱$$

طول خط‌المرکزین دو دایره برابر است با:

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (-۴+۲)^۲} = \sqrt{۰ + (-۲)^۲} = \sqrt{۴} = ۲$$

همچنین داریم:

$$|R_۱ - R_۲| = |۳ - ۱| = ۲$$

بنابراین $O_۱O_۲ = |R_۱ - R_۲|$ است، پس دو دایره مماس داخل هستند.

۱۱۳ گزینه ۴

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2-12y+36=4x^2+4y^2$$
$$\Rightarrow 3x^2+3y^2+6x+12y-45=0$$
$$\xrightarrow{\div 3} x^2+y^2+2x+4y-15=0$$
$$\Rightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=20 \Rightarrow O(-1,-2)$$

معادلهٔ فوق، معادلهٔ یک دایره است که بزرگ‌ترین وتر همان قطر است:

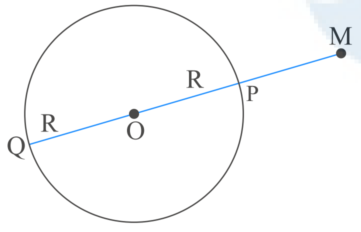
$$r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\Rightarrow 2r=4\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۱۴ گزینه ۴

نکته: نقطهٔ $M$ و دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض‌اند. در این صورت:

$$\text{کمترین فاصلهٔ } M \text{ از دایره} = MP = |OM-R|$$
$$\text{بیشترین فاصلهٔ } M \text{ از دایره} = MQ = OM+R$$




ابتدا محل برخورد قطرها را می‌یابیم تا مرکز دایره و فاصلهٔ $M$ از مرکز، مشخص شود:

$$\begin{cases}x+y=1\\x-y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}\Rightarrow O=(2,-1)\xrightarrow{M=(4,-2)}|OM|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

حال فاصلهٔ مرکز دایره از خط $4x+3y+5=0$ را می‌یابیم تا شعاع دایره، مشخص شود:

$$R=|OH|=\frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$$

درنهایت طبق نکتهٔ فوق داریم:

$$\text{کمترین فاصلهٔ } M \text{ از دایره} = |OM-R|=\sqrt{5}-2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۱۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ A، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{A(-۱,۰)} (-۱)^۲ + ۰^۲ + a(-۱) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۱ - a + c = ۰ \Rightarrow a - c = ۱ \qquad (I)$$

$$\xrightarrow{B(۳,۰)} ۳^۲ + ۰^۲ + a(۳) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۹ + ۳a + c = ۰ \Rightarrow ۳a + c = -۹ \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{C(۰,-۳)} ۰^۲ + (-۳)^۲ + a(۰) + b(-۳) + c = ۰ \Rightarrow ۹ - ۳b + c = ۰ \Rightarrow c - ۳b = -۹ \qquad (III)$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادلهٔ I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = ۱ \\ ۳a + c = -۹ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴a = -۸ \Rightarrow a = -۲$$

$$a - c = ۱ \xrightarrow{a=-۲} c = -۲ - ۱ = -۳$$

با جایگذاری $c = -۳$ در معادلهٔ (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - ۳b = -۹ \xrightarrow{c=-۳} -۳ - ۳b = -۹ \Rightarrow ۳b = ۶ \Rightarrow b = ۲$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\frac{-۲}{۲})^۲ + (\frac{۲}{۲})^۲ + ۳} = \sqrt{۱ + ۱ + ۳} = \sqrt{۵}$$

۱۱۶ گزینه ۲

شعاع و مرکز دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۴ = ۰$ عبارت‌اند از:

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۴ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۹$$

$$\text{مرکز} : O'(۲, -۱) \quad , \quad \text{شعاع} : R' = ۳$$

نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایرهٔ C از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(۸, ۷)$ مرکز دایرهٔ C است.

$$d = OO' = \sqrt{(۲ - ۸)^۲ + (-۱ - ۷)^۲} = ۱۰$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow ۱۰ = R + ۳ \Rightarrow R = ۷$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۱۷

گزینه ۱

مرکز دایره روی نیمساز ناحیهٔ اول است، پس مختصات آن به‌صورت $(x,x)$ است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ $A(۶,۳)$ و خط $y=۲x$ یکسان است، پس داریم:

$$\sqrt{(x-۶)^۲+(x-۳)^۲}=\frac{|۲x-x|}{\sqrt{۴+۱}}\Rightarrow (x-۶)^۲+(x-۳)^۲=\frac{x^۲}{۵}\Rightarrow ۲x^۲-۱۸x+۴۵=\frac{x^۲}{۵}$$

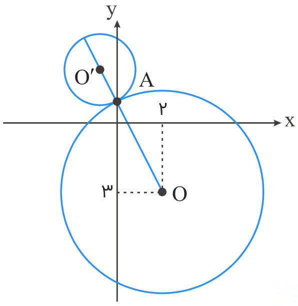
$$\Rightarrow ۹x^۲-۹۰x+۲۲۵=۰\Rightarrow x^۲-۱۰x+۲۵=۰\Rightarrow (x-۵)^۲=۰\Rightarrow x=۵$$

شعاع دایره : $R=\frac{|x|}{\sqrt{۵}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۱۸

گزینه ۱




مطابق شکل، مراکز دو دایرهٔ مماس خارج و محل تماس دو دایره، روی یک خط راست قرار دارند و مرکز دایرهٔ $C'$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات است. می‌دانیم قائم‌های رسم‌شده بر یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند، پس با فرض $O=(۲,-۳)$ و $A=(۰,۱)$، داریم:

$$m_{OA}=\frac{۱-(-۳)}{۰-۲}=-۲$$

معادلهٔ خط $OA$ : $y-۱=-۲(x-۰)\Rightarrow y=-۲x+۱$

در بین گزینه‌ها، تنها نقطهٔ $(-۱,۳)$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات است و در معادلهٔ خط $OA$ صدق می‌کند. با فرض $O'=(-۱,۳)$ داریم:

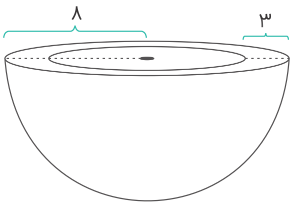
$$O'A=\sqrt{(۰+۱)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۱۹

گزینه ۴

طبق توضیحات صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:




برای محاسبهٔ سطح کل این ظرف کافی است مساحت نیمکرهٔ درونی، نیمکرهٔ بیرونی و مساحت سطح مقطع ظرف را به دست آوریم؛ دقت کنید که سطح مقطع ظرف به‌صورت دایره‌ای به شعاع ۸ است که دایرهٔ دیگری به شعاع ۵ از آن کسر شده است.

$$S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}} = \frac{۱}{۲}(۴\pi \times ۶۴) = ۲\pi \times ۶۴ = ۱۲۸\pi$$

$$S_{\text{نیمکرهٔ درونی}} = \frac{۱}{۲}(۴\pi \times ۲۵) = ۲\pi \times ۲۵ = ۵۰\pi$$

$$S_{\text{سطح مقطع}} = \pi(۶۴ - ۲۵) = ۳۹\pi$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}} + S_{\text{نیمکرهٔ درونی}} + S_{\text{سطح مقطع}} = ۱۲۸\pi + ۵۰\pi + ۳۹\pi = ۲۱۷\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۲۰

گزینه ۱

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{(۰,۰) را صدق می‌دهیم}} c = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{(۲,۱) را صدق می‌دهیم}} ۴ + ۱ + ۲a + b = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{(۱,−۲) را صدق می‌دهیم}} ۱ + ۴ + a - ۲b = ۰$$

اکنون با معلوم بودن مقادیر a، b و c شعاع دایره برابر است با:

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\times ۲} ۴a + ۲b = -۱۰ \\ \quad a - ۲b = -۵ \end{array} \Rightarrow ۵a = -۱۵ \Rightarrow a = -۳, b = ۱$$

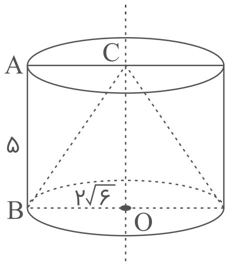
$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲ + (۱)^۲ - ۴(۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۲۱

گزینه ۴

مطابق شکل، باید حجم بین استوانه و مخروط را بیابیم که برابر است با:



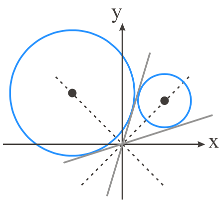

$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) - \frac{۱}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) = \frac{۲}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵)$$
$$= \frac{۲}{۳}\pi(۲۴)(۵) = ۸۰\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۲۲

گزینه ۳

مرکز دایره بر روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط قرار دارد. باتوجه‌به شکل، مرکز دایرهٔ کوچک‌تر روی $y = x$ و مرکز دایره بزرگ‌تر روی $y = -x$ قرار دارد.




$$M(۲\sqrt{۵}, ۲\sqrt{۵})$$

شعاع دایره برابر با فاصلهٔ مرکز آن از خط $۲y - x = ۰$ است.

$$R = \frac{|۴\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵}|}{\sqrt{۲^۲ + ۱^۲}} = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۲۳

گزینه ۱

معادلهٔ گستردهٔ دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادلهٔ وتر مشترک به دست آید:

$$\text{وتر مشترک} : (x^۲ + y^۲ + ۲x - ۳) - (x^۲ + y^۲ + ۲y - ۳) = ۰$$
$$\Rightarrow \text{وتر مشترک} : ۲x - ۲y = ۰ \Rightarrow \text{وتر مشترک} : x = y$$

معادلهٔ درجه اولی که از کم کردن معادلهٔ دو دایره به دست می‌آید، حتما معادلهٔ وتر مشترک است، چون هم یک معادلهٔ درجه اول است و هم $(x, y)$ این خط در هر دو دایره صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

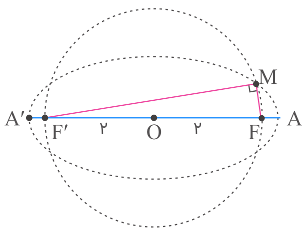
۱۲۴ گزینه ۲

باتوجه‌به معلومات سؤال، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{طول قطر بزرگ} = ۲a = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow a = \sqrt{۵} \\ \text{طول قطر کوچک} = ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱\end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} c = ۲$$

پس $OF = OF' = ۲$ و چون طول شعاع دایره هم ۲ واحد است، نقاط $F$ و $F'$ روی دایره‌اند. پس $FF'$ قطر دایره است و چون زاویهٔ $FMF'$ محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد، قائمه است و داریم:

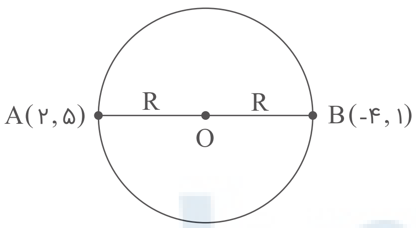
$$\overset{\Delta}{MFF'} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ = ۴^۲ = ۱۶$$




کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۲۵ گزینه ۱

کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از $A$ و $B$، دایره‌ای است که $AB$ یک قطر آن باشد.




حال داریم:

$$O \text{ وسط } AB \text{ است.} \Rightarrow O = \frac{A+B}{۲} = (-۱, ۳)$$

$$R = |OA| = \sqrt{(۲+۱)^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

$$\Rightarrow \text{دایره} : (x+۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۳$$

$$\xrightarrow{\text{برخورد با محور x ها}} (x+۱)^۲ + (۰-۳)^۲ = ۱۳$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲ = ۴ \Rightarrow x+۱ = \pm۲ \Rightarrow x = ۱ \,,\; x = -۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۲۶ گزینه ۲

مرکز دایره روی خطی به معادلهٔ $y = 2x$ قرار دارد. فرض می‌کنیم مختصات مرکز دایره $(\alpha , 2\alpha)$ باشد. طبق تعریف دایره، می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است. شعاع دایره را $R$ می‌نامیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ مرکز دایره از هریک از نقاط $(0, 0)$ و $(3 , 1)$ ابتدا مقدار $\alpha$ و سپس مقدار $R$ را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} \\ R &= \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5\alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2 \Rightarrow 5\alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 = 5\alpha^2 - 10\alpha + 10 \Rightarrow 10\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 1$$

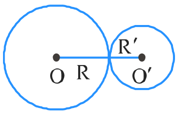
$$\Rightarrow R = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز $(1, 2)$ و شعاع $\sqrt{5}$ داریم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۲۷ گزینه ۴

دو دایره با مرکزهای $O$ و $O'$ و شعاع‌های $R$ و $R'$ مماس بیرون‌اند اگر و تنها اگر داشته باشیم $|OO'| = R + R'$. در آغاز با دسته‌بندی معادله‌ها، مرکز و شعاع هر دایره را می‌یابیم:




$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} O = (-2, 0) \\ R = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 - 16 + a = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 17 - a \Rightarrow \begin{cases} O' = (1, -4) \\ R' = \sqrt{17 - a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |OO'| = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (0 + 4)^2} = 5 \\ R + R' = 2 + \sqrt{17 - a} \end{cases} \xrightarrow{|OO'| = R + R'} 5 = 2 + \sqrt{17 - a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{17 - a} = 3 \Rightarrow 17 - a = 9 \Rightarrow a = 8$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۲۸ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) هرگاه خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) اگر معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای را به‌صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر بگیریم آنگاه مختصات مرکز این دایره برابر با $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و شعاع آن برابر با $R=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2-c}$ است.

ج) هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف خواهد داشت.

گام دوم

روش اول:

باتوجه‌به گام اول، مرکز این دایره نقطهٔ $(1, -2)$ و شعاع آن برابر است با:

$$R=\sqrt{(\frac{-2}{2})^2+(\frac{4}{2})^2-a}=\sqrt{1+4-a}=\sqrt{5-a}$$

ازطرفی فاصلهٔ نقطهٔ $(1, -2)$ از خط $x+3y=0$ برابر است با:

$$R=\frac{|1+3(-2)|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{5-a}=\frac{5}{\sqrt{10}}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}5-a=\frac{25}{10}\Rightarrow 50-10a=25$$
$$\Rightarrow 10a=25\Rightarrow a=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$$

روش دوم:

باتوجه‌به قسمت (ج) از گام اول، باید معادلهٔ تلاقی خط و دایره، ریشهٔ مضاعف داشته باشد. داریم:

$$x+3y=0\Rightarrow x=-3y \qquad (I)$$

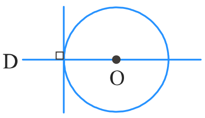
با جایگذاری رابطهٔ $I$ در معادلهٔ دایره، به یک معادلهٔ درجه دو برحسب $y$ می‌رسیم که ریشهٔ مضاعف دارد.

$$x^2+y^2-2x+4y+a=0\xrightarrow{I}(-3y)^2+y^2-2(-3y)+4y+a=0$$
$$\Rightarrow 9y^2+y^2+6y+4y+a=0\Rightarrow 10y^2+10y+a=0$$
$$\Delta=0\Rightarrow 100-4(10)a=0\Rightarrow 100-40a=0\Rightarrow 40a=100\Rightarrow a=\frac{5}{2}$$

۱۲۹

گزینه ۱

خط به معادلهٔ $۳x + ۲y = a$ از مرکز دایره می‌گذرد، پس قطر دایره است.
باتوجه‌به آنکه قطر $۳x + ۲y = a$ بر خط مماس بر دایره عمود است، پس شکل زیر را داریم:




مختصات مرکز دایره در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + y = ۱ \xrightarrow{\text{مرکز}} O(۱, -\frac{۱}{۲})$$

$$۳(۱) + ۲(-\frac{۱}{۲}) = a \Rightarrow a = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۱۳۰

گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
ب) عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

گام دوم

دو نقطهٔ $A(۲, ۰)$ و $B(-۲, ۰)$ روی دایره قرار دارد بنابراین پاره‌خط $AB$ وتری از دایره است که طبق گام اول، عمودمنصف آن از مرکز دایره عبور می‌کند. خط $x = ۰$ عمودمنصف پاره‌خط $AB$ است؛ پس فرض می‌کنیم نقطهٔ $O(۰, \alpha)$، مرکز دایره است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقاط $A$ و $B$ و خط $y = ۱$ برابر با شعاع دایره است، پس داریم:

$$R = OA = \sqrt{(۲ - ۰)^۲ + (۰ - \alpha)^۲} = \sqrt{۴ + \alpha^۲}$$

$$y = ۱ \Rightarrow y - ۱ = ۰ \Rightarrow R = \frac{|\alpha - ۱|}{\sqrt{۱^۲}} = |\alpha - ۱|$$

$$\Rightarrow \sqrt{۴ + \alpha^۲} = |\alpha - ۱| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴ + \alpha^۲ = (\alpha - ۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۴ + \alpha^۲ = \alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ \Rightarrow -۲\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha = -\frac{۳}{۲}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

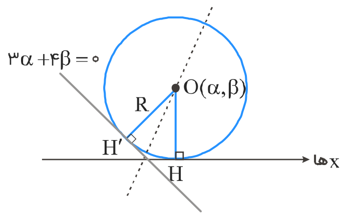
$$R = |\alpha - ۱| = \left|-\frac{۳}{۲} - ۱\right| = \left|-\frac{۵}{۲}\right| = \frac{۵}{۲}$$

۱۳۱ گزینه ۱

مرکز دایره را نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ درنظر می‌گیریم. باید فاصلهٔ O از محور xها با فاصلهٔ آن از خط $۳x+۴y=۰$، برابر باشد:

$$OH = OH' \Rightarrow |\beta| = \frac{|۳\alpha+۴\beta|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{|۳a+۴\beta|}{۵} \Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha+۴\beta = ۵\beta \\ ۳\alpha+۴\beta = -۵\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha = \beta \\ ۳\alpha = -۹\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}:\ O(\alpha, ۳\alpha) \\ \text{مرکز}:\ O(\alpha, -\frac{۱}{۳}\alpha) \end{cases}$$



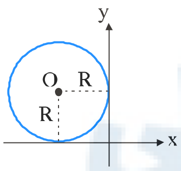

مرکز دایره در ناحیهٔ اول است، پس فقط $O(\alpha, ۳\alpha)$ قابل‌قبول است؛بنابراین مطابق شکل، داریم:

$$R = OH = ۳ \Rightarrow \beta = ۳\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha = ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۳۲ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به‌طور کامل در یکی از چهار ناحیهٔ مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطهٔ $(-۱, ۲)$ نیز عبور می‌کند و این نقطه در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس دایرهٔ موردنظر به‌صورت زیر خواهد بود:




بنابراین دایره‌ای به شعاع R و به مرکز $(-R\,,\,R)$ داریم. معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x+R)^۲ + (y-R)^۲ = R^۲$$

چون دایره از نقطهٔ $(-۱, ۲)$ عبور می‌کند پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-۱\,,\,y=۲} (-۱+R)^۲ + (۲-R)^۲ = R^۲ \Rightarrow ۱-۲R+R^۲+۴-۴R+R^۲ = R^۲$$

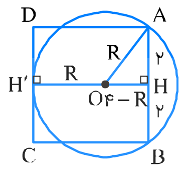
$$\Rightarrow R^۲ - ۶R + ۵ = ۰ \Rightarrow (R-۵)(R-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} R-۵ = ۰ \Rightarrow R = ۵ \\ R-۱ = ۰ \Rightarrow R = ۱ \end{cases}$$

قطر بزرگ‌تر به ازای شعاع بزرگ‌تر به دست می‌آید که برابر است با:

$$۲R = ۲(۵) = ۱۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۳۳ گزینه ۲




باتوجه‌به شکل، $OH = ۴ - R$ است. داریم:

$$\overset{\Delta}{OAH} : OA^{۲} = AH^{۲} + OH^{۲} \Rightarrow R^{۲} = ۲^{۲} + (۴ - R)^{۲} \Rightarrow R^{۲} = ۴ + ۱۶ - ۸R + R^{۲}$$
$$\Rightarrow ۸R = ۲۰ \Rightarrow R = ۲/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۳۴ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

ب) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است.

گام دوم

باتوجه‌به اینکه هر خط قائم بر دایره از نقطهٔ $(۱ , -۲)$ عبور می‌کند و باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، نقطهٔ $(۱ , -۲)$ همان مرکز دایره است. طبق قسمت (ب) از گام اول، فاصلهٔ نقطهٔ $(۱ , -۲)$ از خط $y = x - ۱$ برابر با شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$y = x - ۱ \Rightarrow x - y - ۱ = ۰$$
$$R = \frac{|-۲ - ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^{۲} + (-۱)^{۲}}} = \frac{|-۴|}{\sqrt{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

۱۳۵ گزینه ۲

طبق فرض، داریم:

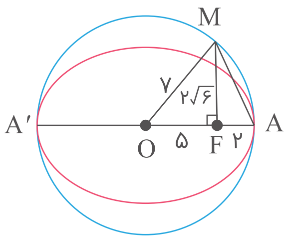
$$\left.\begin{array}{l} AA' = ۲a = ۱۴ \Rightarrow a = ۷ \\ BB' = ۲b = ۴\sqrt{۶} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۶} \end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} ۴۹ = ۲۴ + c^۲$$

$$\Rightarrow c^۲ = ۲۵ \Rightarrow c = ۵ \Rightarrow OF = ۵ \xrightarrow{OA=a=۷} AF = ۷ - ۵ = ۲$$

شعاع دایره است $OM \Rightarrow OM = OA = a = ۷$

$\overset{\Delta}{OFM}$ : فیثاغورس $\Rightarrow FM^۲ = OM^۲ - OF^۲ = ۴۹ - ۲۵ = ۲۴ \Rightarrow FM = ۲\sqrt{۶}$

$\overset{\Delta}{AFM}$ : فیثاغورس $\Rightarrow AM = \sqrt{FM^۲ + FA^۲} = \sqrt{۲۴ + ۴} = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$




کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

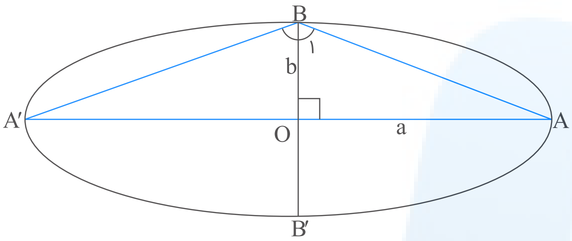
۱۳۶ گزینه ۳

$$e = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{a^۲ - b^۲}{a^۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۱ - (\frac{b}{a})^۲ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow (\frac{b}{a})^۲ = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{۳} \quad (*)$$

حال باتوجه‌به شکل زیر، داریم:




$$O\overset{\Delta}{A}B : \tan \hat{B}_۱ = \frac{a}{b} \xrightarrow{(*)} \tan \hat{B}_۱ = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۲\hat{B}_۱ = ۱۲۰^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$، نقطهٔ $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R=\sqrt{(\frac{a}{۲})^۲+(\frac{b}{۲})^۲-c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $|R_۱-R_۲|$ و $R_۱+R_۲$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y=۱۳ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱۳=۰$$

مرکز دایره : $O_۱(-\frac{-۲}{۲}, -\frac{۴}{۲}) \Rightarrow O_۱(۱, -۲)$

شعاع دایره : $R_۱=\sqrt{(-\frac{۲}{۲})^۲+(\frac{۴}{۲})^۲+۱۳}=\sqrt{۱+۴+۱۳}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$

$$x^۲+y^۲+۲x=۱ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۱=۰$$

مرکز دایره : $O_۲(-\frac{۲}{۲}, -\frac{۰}{۲}) \Rightarrow O_۲(-۱, ۰)$

شعاع دایره : $R_۲=\sqrt{(\frac{۲}{۲})^۲+۰+۱}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$

بنابراین داریم:

$$O_۱O_۲=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۰+۲)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$
$$R_۱+R_۲=۳\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$$
$$|R_۱-R_۲|=\left|۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}\right|=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین $O_۱O_۲=|R_۱-R_۲|$ است و دو دایره نسبت به هم مماس داخل هستند.

۱۳۸ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

دو منحنی در یک نقطه بر هم مماس هستند، هرگاه معادلهٔ تلاقی آن‌ها در آن نقطه ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

داریم:

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x=۳ \xrightarrow{y=mx+۲} x^{۲}+(mx+۲)^{۲}-۲x=۳ \Rightarrow x^{۲}+m^{۲}x^{۲}+۴mx+۴-۲x=۳$$
$$\Rightarrow (m^{۲}+۱)x^{۲}+(۴m-۲)x+۱=۰$$

این معادله باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد پس:

$$\Delta=۰ \Rightarrow (۴m-۲)^{۲}-۴(m^{۲}+۱)(۱)=۰ \Rightarrow ۱۶m^{۲}-۱۶m+۴-۴m^{۲}-۴=۰$$
$$\Rightarrow ۱۲m^{۲}-۱۶m=۰ \Rightarrow m(۱۲m-۱۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۰ \\ ۱۲m-۱۶=۰ \Rightarrow m=\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

۱۳۹ گزینه ۴

فاصلهٔ کانون‌های $F'(۲,-۱)$ و $F(۲,۷)$ برابر $۲c$ است.

$$۲c=|FF'|=|۷-(-۱)|=۸ \Rightarrow c=۴$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$۲b=۶ \Rightarrow b=۳$$

در بیضی رابطهٔ $a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}$ برقرار است.

$$a^{۲}=۹+۱۶=۲۵ \Rightarrow a=۵$$
$$\text{خروج از مرکز}=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۴۰ گزینه ۲

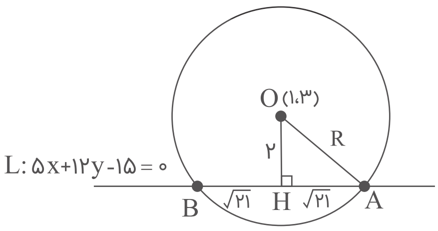
$$\begin{cases} c=۱۲ \\ ۲b=۱۸ \Rightarrow b=۹ \end{cases} \Rightarrow a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}=۸۱+۱۴۴=۲۲۵$$
$$\Rightarrow a=۱۵ \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۴۱

گزینه ۴

از مرکز دایره بر خط $L: ۵x + ۱۲y - ۱۵ = ۰$ عمود می‌کنیم، پس $AH = HB = \sqrt{۲۱}$ و داریم:




$$|OH| = \frac{|۵(۱) + ۱۲(۳) - ۱۵|}{\sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲}} = \frac{۲۶}{۱۳} = ۲$$

$$\overset{\Delta}{OHA} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow R^۲ = ۲^۲ + (\sqrt{۲۱})^۲ = ۲۵$$
$$\Rightarrow \text{دایره} : (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵$$

حال برای یافتن محل برخورد دایره و محور xها، مقدار y را در معادلهٔ دایره برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-۱)^۲ + (۰-۳)^۲ = ۲۵ \Rightarrow (x-۱)^۲ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۱۶$$
$$\Rightarrow x - ۱ = \pm ۴ \Rightarrow x = -۳ \,,\, x = ۵$$
$$\Rightarrow \text{نقاط برخورد با محور x ها} : (-۳, ۰) , (۵, ۰)$$
$$\Rightarrow \text{طول پاره‌خط حاصل} = ۵ - (-۳) = ۸$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

مرکز مشاوره تحصیلی
علیرضا افشار

## راه‌های ارتباطی مرکز مشاوره

| وبسایت | اینستاگرام | تلگرام |
|---|---|---|
| www.AlirezaAfshar.org | AlirezaAfsharOriginal | AlirezaAfsharOfficial |

## رزور مشاوره خصوصی علیرضا افشار

برای رزرو مشاوره خصوصی تک جلسه و ماهانه
به شمارهٔ ۰۹۳۵۸۹۶۰۵۰۳ در واتساپ پیام دهید

آدرس تمام رسانه ها : Afshar.xyz