۱

گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

ب) می‌دانیم:

$$|u| = \begin{cases} u & ; u \geq 0 \\ -u & ; u < 0 \end{cases}$$

گام دوم

ضابطهٔ تابع شامل یک عبارت قدر مطلقی است، پس ابتدا این عبارت را تجزیه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

		-۲		۱	
x^2+x-2	+	۰	-	۰	+

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & ; x \leq -2 \\ \dfrac{-x^2-x+2}{x-1} & ; -2 < x < 1 \\ a & ; x = 1 \\ \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & ; x > 1 \end{cases}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = 1$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} (x+2) = 1+2 = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2-x+2}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} (-x-2) = -1-2 = -3$$

باتوجه‌به اینکه حد چپ و راست تابع در نقطهٔ $x = 1$ مساوی نیستند، پس این تابع به ازای هیچ مقدار a، در نقطهٔ $x = 1$ پیوسته نخواهد بود.

۲

گزینه ۳

برای پیوستگی این تابع در $\mathbb{R}$، بایستی در $x=۲$ پیوسته باشد.

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax-۱)=۲a-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}{\left(x-\sqrt{x+۲}\right)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}{x^۲-x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}{(x-۲)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}{x+۱}=\frac{۳(۲+۲)}{۲+۱}=۴$$

ضمناً برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ از قاعدهٔ هوپیتال نیز می‌توانید استفاده کنید:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۴}}=۴$$

حال برای پیوستگی f در $x=۲$، مقدار تابع را برابر حد آن قرار می‌دهیم:

$$۲a-۱=۴\Rightarrow a=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳

گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) شرط پیوستگی در نقطه ای به طول $x=۰$ عبارت است از:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=f(۰)$$

ب) در این تست $f(۰)=a$ است پس برای این که تابع پیوسته باشد باید $\lim_{x\to ۰}\sin\frac{\pi}{x}=a$ باشد.

گام دوم

با به دست آوردن حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to ۰$، شرط پیوستگی را بررسی می کنیم:

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\sin\frac{\pi}{x}\to \text{وجود ندارد}$$

بنابراین به ازای هیچ مقدار a تابع $f(x)$ در $x=۰$ پیوسته نیست.

۴

گزینه ۳

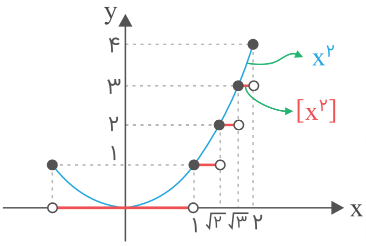
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

تابع $y=[f(x)]$ در نقاطی که $f(x)$ مقداری صحیح باشد، ناپیوسته است.

گام دوم

بهترین راه برای تشخیص نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x^۲]$ در بازهٔ $[-۱,۲]$، رسم نمودار این تابع در بازهٔ موردنظر است:



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در نقاط $x=۱$، $x=\sqrt{۲}$، $x=\sqrt{۳}$، $x=۲$ و $x=-۱$ ناپیوسته است؛ بنابراین تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ دارای پنج نقطهٔ ناپیوستگی است.

۵

گزینه ۱

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\sin\frac{\pi}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۲})^+]-\cos\pi[\sin(۲\pi)^+]$$
$$=۱\times[۰^-]-(-۱)[۰^+]=۱\times(-۱)-۰=-۱$$
$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\sin\frac{\pi}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۲})^-]-\cos\pi[\sin(۲\pi)^-]$$
$$=۱\times[۰^+]-(-۱)[۰^-]=۰+(-۱)=-۱\Rightarrow\lim_{x\to\pi} f(x)=-۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۶

گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\frac{۰}{۰}$$
$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱-\cos^۲\pi x}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(۱+\cos\pi x)(۱-\cos\pi x)}{۱+\cos\pi x}$$
$$=\lim_{x\to ۱^+}(۱-\cos\pi x)=۱-\cos\pi=۱-(-۱)=۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۷ گزینه ۱

مقدار تابع : $f(-۲) = a$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{۸ + x^۳}{|x+۲|} = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{(x+۲)(x^۲ - ۲x + ۴)}{-(x+۲)}$$

$$= -\lim_{x\to(-۲)^-} (x^۲ - ۲x + ۴) = -(۴ + ۴ + ۴) = -۱۲$$

برای پیوستگی چپ، باید $a = -۱۲$ باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸ گزینه ۱

بایستی تابع در $x = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(۲) = ۴ + b \;,\; \lim_{x\to۲^-} f(x) = \lim_{x\to۲^-} (۲x + b) = ۴ + b$$

$$\lim_{x\to۲^+} \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۴}{x - ۲} = \lim_{x\to۲^+} \frac{(x-۲)(x^۲ - x - ۲)}{x - ۲} = \lim_{x\to۲^+} (x^۲ - x - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴ + b = ۰ \Rightarrow b = -۴$$

برای تجزیهٔ $x^۳ - ۳x^۲ + ۴$ از تقسیم بر $x - ۲$ استفاده شده است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۹ گزینه ۴

حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to ۱$ محاسبه می کنیم. برای این که تابع در $x = ۱$ پیوسته باشد، باید رابطهٔ $\lim_{x\to۱} f(x) = a$ برقرار باشد. این رابطه را بررسی کرده و مقداری از a را تعیین می کنیم که به ازای آن تابع پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to۱} f(x) = \lim_{x\to۱} \frac{\sqrt[۳]{۱ - \sqrt{x}}}{x - ۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to۱} \frac{\sqrt[۳]{۱ - \sqrt{x}}}{x - ۱} = \lim_{x\to۱} \frac{\sqrt[۳]{۱ - \sqrt{x}}}{-(۱ - \sqrt{x})(۱ + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{x\to۱} \frac{-۱}{\sqrt[۳]{(۱ - \sqrt{x})^۲}\,(۱ + \sqrt{x})} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول $x = ۱$ فاقد حد است بنابراین به ازای هیچ مقدار a در $x = ۱$ پیوسته نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰

گزینه ۲

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = a\log_۲^۴ = ۲a \\ \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = ۳a+۱ \end{cases} \Rightarrow ۳a+۱ = ۲a \Rightarrow a = -۱$$

$$x < ۳ : f(x) = ax + ۲^{x-۳} = -x + ۲^{x-۳}$$

$$f(۲) = -۲ + ۲^{-۱} = -۲ + \frac{۱}{۲} = -۱/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۱

گزینه ۱

ابتدا تعیین می کنیم حاصل $[۴\cos^۲\pi x]$ وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$، برابر چه عددی می شود. با توجه به این که حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ است، مقادیر a و b و در نهایت مقدار $a+b$ را محاسبه می کنیم.

$$x \to \frac{۱}{۶}^+ \Rightarrow x > \frac{۱}{۶} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \cos \pi x < \cos \frac{\pi}{۶}$$

دقت کنید که در ناحیهٔ اول مثلثاتی با افزایش مقدار x، مقدار $\cos x$ کاهش پیدا می کند. چون πx از $\frac{\pi}{۶}$ بزرگ تر است، بنابراین مقدار $\cos \pi x$ از مقدار $\cos \frac{\pi}{۶}$ کمتر خواهد بود.

$$\xrightarrow{\cos \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} \cos \pi x < \frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \cos^۲ \pi x < \frac{۳}{۴} \overset{\times ۴}{\Rightarrow}$$
$$۴\cos^۲\pi x < ۳ \Rightarrow ۴\cos^۲\pi x \to ۳^- \Rightarrow [۴\cos^۲\pi x] = ۲$$

پس حاصل صورت کسر وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ برابر صفر می شود. اما از آن جا که حاصل حد برابر عدد غیر صفر $\frac{۱}{۲}$ است، اگر وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ مخرج کسر عددی غیر از صفر باشد حاصل حد برابر صفر می شود و چون حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ داده شده پس باید وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$، مخرج کسر هم برابر صفر شود. پس داریم:

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} ax+b = ۰ \Rightarrow \frac{a}{۶} + b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{a}{۶} \Rightarrow a = -۶b \quad (I)$$

با فرض $a = -۶b$ و قرار دادن آن در حد داده شده و حذف عامل صفر کننده، حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲-۱۲x}{ax+b} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲-۱۲x}{-۶bx+b}$$
$$= \lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲(۱-۶x)}{b(-۶x+۱)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲}{b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = ۴$$

$$\overset{(I)}{\Rightarrow} a = -۶b = -۶ \times ۴ = -۲۴$$

بنابراین $a+b$ برابر است با:

$$a+b = -۲۴ + ۴ = -۲۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۲ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این مجموعه پیوسته باشد.
ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x > ۲$ و $x < ۲$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است، بنابراین کافی است پیوستگی تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} ax + b = ۲a + b$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} x^۲ + bx - ۱ = ۴ + ۲b - ۱ = ۳ + ۲b$$

$$f(۲) = ۵ \Rightarrow ۲a + b = ۳ + ۲b = ۵$$

داریم:

$$۳ + ۲b = ۵ \Rightarrow ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$

$$۲a + b = ۵ \Rightarrow ۲a + ۱ = ۵ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

۱۳ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

تابع در $x = ۰$ پیوسته است؛ بنابراین $\lim\limits_{x \to ۰} f(x) = f(۰)$ است.

گام دوم

$$f(۰) = \lim_{x \to ۰} \frac{x}{۱ - \sqrt{۱ - x}} = \lim_{x \to ۰} \frac{x}{۱ - \sqrt{۱ - x}} \times \frac{۱ + \sqrt{۱ - x}}{۱ + \sqrt{۱ - x}}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{x(۱ + \sqrt{۱ - x})}{(۱ - \sqrt{۱ - x})(۱ + \sqrt{۱ - x})} = \lim_{x \to ۰} \frac{x(۱ + \sqrt{۱ - x})}{۱ - ۱ + x}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{x(۱ + \sqrt{۱ - x})}{x} \Rightarrow a = ۱ + \sqrt{۱ - ۰} = ۱ + ۱ = ۲ \Rightarrow a = ۲$$

۱۴

گزینه ۲

$$\xrightarrow{\text{دامنه}}\begin{cases} x+۴\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۴ \\ ۱+\sqrt[۳]{x+۱}\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۲ \\ x+۵\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه} = [-۴,+\infty)-\{-۲\}$$

بنابراین تنها در $x=-۲$ ناپیوسته است.

پی‌نوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطهٔ ناپیوستگی داریم.

کلید سنجش ۱ نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۵

گزینه ۲

ابتدا باید تعیین کنیم وقتی $x \to ۰^-$ عبارت $x^۳-x$ به سمت ۰^+ میل می کند یا ۰^-. برای این کار از تغییر متغیر $x^۳-x=t$ استفاده می کنیم. با تعیین محدودهٔ t حاصل حد آن را با استفاده از ضابطه های داده شده به دست می آوریم.

$$x\to ۰^- \Rightarrow -۱<x<۰ \Rightarrow x^۳>x \Rightarrow x^۳-x>۰ \xrightarrow{x^۳-x=t} t>۰ \Rightarrow t\to ۰^+$$

بنابراین برای به دست آوردن حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x^۳-x)$ یا همان $\lim\limits_{t\to ۰^+} f(t)$ باید از ضابطهٔ بالا که مربوط به xهای مثبت است، استفاده کنیم:

$$t\to ۰^+ \Rightarrow t>۰ \Rightarrow f(t)=\sqrt{۱-t}$$
$$\lim_{t\to ۰^+} f(t)=\lim_{t\to ۰^+}\sqrt{۱-t}=\sqrt{۱-۰}=۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۶

گزینه ۴

باتوجه‌به ضابطهٔ تابع f، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} (۳x - [x]) = ۶ - [۲^-] = ۶ - ۱ = ۵ \\ f(۲) = a \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (x + ۲) = ۴ \end{cases}$$

برای آنکه تابع f در $x = ۲$ پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲) = \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$، پس باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده در بالا، ازآنجاکه $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$، بنابراین تابع f در $x = ۲$، به ازای هیچ مقداری برای a پیوسته نیست.

تذکر:

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} [a^-] = a - ۱ \\ [a^+] = a \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۷

گزینه ۱

اگر قرار باشد تابع $f(x)$ در نقاطی ناپیوسته باشد، باید دنبال نقاطی باشیم که در آن $[x]$ ناپیوسته است. در تابع $y=[x]$ نقاط $x\in\mathbb{Z}$ نقاط مشکوک به ناپیوستگی برای تابع $f(x)$ هستند. (در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ خود تابع $y=[x]$ همواره ناپیوسته است، اما ممکن است تابع $f(x)$ در این نقاط پیوسته باشد. پس باید نقاط $x\in\mathbb{Z}$ در بازهٔ $(۲,۶)$ را مورد بررسی قرار دهیم.) پس برای تعیین تعداد نقاط ناپیوستگی، نقاط $x=۳$، $x=۴$ و $x=۵$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول $x=۳$:

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}\sin(x-[x])\pi=\lim_{x\to ۳^-}\sin(x-۲)\pi=\sin\pi=۰$$
$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}\sin(x-[x])\pi=\sin(۳-۳)\pi=\sin ۰=۰$$

$$f(۳)=\sin(۳-۳)\pi=\sin ۰=۰$$

بنابراین تابع در $x=۳$ پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x=۴$:

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=\lim_{x\to ۴^-}\sin(x-[x])\pi=\sin(۴-۳)\pi=\sin\pi=۰$$
$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^+}\sin(x-[x])\pi=\sin(۴-۴)\pi=\sin ۰=۰$$

$$f(۴)=\sin(۴-۴)\pi=\sin ۰=۰$$

تابع در $x=۴$ هم پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x=۵$:

$$\lim_{x\to ۵^-} f(x)=\lim_{x\to ۵^-}\sin(x-[x])\pi=\sin(۵-۴)\pi=\sin\pi=۰$$
$$\lim_{x\to ۵^+} f(x)=\lim_{x\to ۵^+}\sin(x-[x])\pi=\sin(۵-۵)\pi=\sin ۰=۰$$
$$f(۵)=\sin(۵-۵)\pi=\sin ۰=۰$$

تابع در $x=۵$ هم پیوسته است. ثابت شد تابع در کلیهٔ نقاط مشکوک به ناپیوستگی پیوسته است بنابراین تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ برابر صفر می شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۸ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & ;|x-1|<1\\ x^2+ax+b & ;|x-1|\geq 1\end{cases}=\begin{cases}(x-1)[x] & ;-1<x-1<1\\ x^2+ax+b & ;x-1\geq 1 \text{ یا } x-1\leq -1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(x-1)[x] & ;0<x<2\\ x^2+ax+b & ;x\geq 2 \text{ یا } x\leq 0\end{cases}$$

بنابراین برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، باید در $x=0$ و $x=2$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4+2a+b\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=(2-1)[2^-]=1\end{cases}\Rightarrow 4+2a+b=1 \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=(0-1)[0^+]=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b\end{cases}\Rightarrow b=0 \quad (\text{II})$$

$$\xrightarrow{(\text{I}),(\text{II})} a=-\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۹ گزینه ۲

برای اینکه تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید در $x=-1$ که مرز ضابطه های تابع است نیز پیوسته باشد. پس پیوستگی تابع را در نقطه ای به طول $x=-1$ بررسی می کنیم. حد چپ تابع در نقطه ای به طول $x=-1$ برابر $\frac{0}{0}$ و مبهم است. بنابراین برای به دست آوردن حد چپ صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب کرده و با ساده کردن آن حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2-\sqrt{3-x}}{x+1}\times\frac{2+\sqrt{3-x}}{2+\sqrt{3-x}}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(4-3+x)}{(x+1)(2+\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x+1)}{(x+1)(2+\sqrt{3-x})}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{4}}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+} ax+1=-a+1\ ,\ f(-1)=-a+1$$

طبق شرط پیوستگی داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=f(-1)\Rightarrow -a+1=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -a=-\frac{3}{4}\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۰

گزینه ۱

کافی است تابع در $x = \frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد.

$$f(\frac{\pi}{۴}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = \sqrt{۲} \cos \frac{۳\pi}{۴} = \sqrt{۲} \cos(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -۱$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} (a + \sin^۲ x) = a + \frac{۱}{۲}$$

چون f در $x = \frac{\pi}{۴}$ پیوسته است، پس:

$$a + \frac{۱}{۲} = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۲۱ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این بازه پیوسته باشد.
ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_۰^+} f(x) = \lim_{x \to x_۰^-} f(x) = f(x_۰)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ با ضابطهٔ داده‌شده روی بازهٔ $[۱, +\infty)$ تعریف شده است. برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی این بازه کافی است شرط پیوستگی تابع فقط در نقطهٔ $x = ۶$ بررسی شود. داریم:

$$\lim_{x \to ۶^-} f(x) = \lim_{x \to ۶^-} \sin\frac{\pi}{x} = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$f(۶) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x \to ۶^+} f(x) = \lim_{x \to ۶^+} a + \cos^۲\frac{\pi x}{۳۶} = a + \cos^۲\frac{\pi}{۶} = a + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ = a + \frac{۳}{۴}$$

برای پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۶$ کافی است تساوی زیر برقرار باشد:

$$a + \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۲۲ گزینه ۴

$$x \to -۱^+ \Rightarrow [x] = -۱ \; , \; [-x] = ۰ \; , \; x + ۱ > ۰ \Rightarrow |x + ۱| = x + ۱$$

$$\lim_{x \to -۱^+} \frac{|x + ۱| - [x]}{x - [-x]} = \lim_{x \to -۱^+} \frac{x + ۱ + (-۱)}{x - ۰} = \lim_{x \to -۱^+} \frac{x}{x} = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۳ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) نقاط مشکوک به ناپیوستگی برای تابع $f(x)$ نقاطی هستند که در آن عبارت $\frac{1}{3}x-1$ برابر یک عدد صحیح شود. (اصولاً نقاطی که در آن عبارت داخل جزء صحیح برابر یک عدد صحیح شود، نقاط ناپیوستگی تابع جزء صحیح محسوب می شوند.)

ب) $\frac{1}{3}x-1$ را برابر عدد صحیح K فرض کرده و مشخص می کنیم در چه نقاطی از بازهٔ $(0,9)$ برابر عدد صحیح می شود. سپس در آن نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

گام دوم

$$\frac{1}{3}x-1=K \Rightarrow \frac{1}{3}x=K+1 \Rightarrow x=3K+3\ ,\ \ x\in(0,9)$$

x یک عدد مضرب ۳ به دست می آید. در بازهٔ $(0,9)$ دو عدد مضرب ۳ وجود دارد، $x=3$ و $x=6$. پیوستگی تابع را در این نقاط بررسی می کنیم:

بررسی پیوستگی تابع در $x=3$:

تابع $f(x)$ قطعاً در $x=3$ پیوسته است. زیرا در ضابطهٔ تابع عامل صفر کننده $(x-3)$ وجود دارد که باعث می شود بدون توجه به مقادیری که تابع جزء صحیح به خود می گیرد، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر صفر شود. در نتیجه تابع در این نقطه پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x=6$:

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-}(x-3)[\frac{1}{3}x-1]=(6-3)[1^-]=3\times 0=0$$
$$\lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+}(x-3)[\frac{1}{3}x-1]=(6-3)[1^+]=3\times 1=3$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 6^-} f(x)\neq\lim_{x\to 6^+} f(x)$$

تابع در $x=6$ ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x)$ در بازهٔ $(0,9)$ تنها در ۱ نقطه ناپیوسته است.

۲۴ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = \frac{۳\pi}{۴}$ پیوسته است؛ بنابراین رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} f(x) = f(\frac{۳\pi}{۴})$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x = \frac{۳\pi}{۴}$ به دست آورده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} a\sin ۲x = a\sin ۲(\frac{۳\pi}{۴}) = a\sin\frac{۳\pi}{۲} = -a$$

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} \cos(x+\frac{\pi}{۴}) = \cos(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}) = \cos\pi = -۱$$

$$f(\frac{۳\pi}{۴}) = \cos(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}) = \cos\pi = -۱$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} f(x) = f(\frac{۳\pi}{۴}) \Rightarrow -a = -۱ \Rightarrow a = ۱$$

۲۵ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

اگر $x \notin \mathbb{Z}$، در این صورت حاصل $[x]+[-x] = -۱$ است.

گام دوم

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & ; x \notin \mathbb{Z} \\ a & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to t^-} f(x) = \lim_{x\to t^+} f(x) = f(t) \Rightarrow a = -۱$$

۲۶

گزینه ۲

مرز ضابطه ها خیلی شفاف مشخص نشده است. باتوجه‌به نامعادلات قدر مطلقی، ضابطه ها را با مرز شفاف آن یک بار دیگر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & , \quad x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱ \\ x[x] & , \quad -۱<x<۱ \end{cases}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید در دو نقطهٔ $x=۱$ و $x=-۱$ که مرز ضابطه ها هستند پیوسته باشد.
می‌دانیم خط $x=۳$ بالای خط $x=۱$ قرار دارد، بنابراین باید برای به دست آوردن نقطهٔ برخورد آن با محور عرض ها از ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ استفاده کرد.
بررسی پیوستگی تابع در $x=۱$:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to ۱^+} ax+b=\lim_{x\to ۱^-} x[x]\Rightarrow a+b=۱\times ۰=۰\Rightarrow a+b=۰ \quad (I)$$

بررسی پیوستگی تابع در $x=-۱$:

$$\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-} ax+b=-a+b \ , \ f(-۱)=-a+b$$

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^+} x[x]=(-۱)[-۱^+]=(-۱)(-۱)=۱$$
$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=f(-۱)\Rightarrow -a+b=۱ \ (II)$$

از دو رابطهٔ (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a+b=۰ \\ -a+b=۱ \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} ۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\overset{(I)}{\Rightarrow} a=-\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow ax+b=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x=۳} f(۳)=-\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=-۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۷

گزینه ۳

$$|x^۳|=x^۲\Rightarrow x^۲|x|=x^۲\Rightarrow x^۲(|x|-۱)=۰\Rightarrow x=۰,۱,-۱$$
$$f(x)=\begin{cases} |x|+[-x] & ; x\in(-۱,۱)-\{۰\} \\ ۱+\cos\pi x & ; x=۰,۱,-۱ \\ [x^۲]-[x] & ; x<-۱ \text{ یا } x>۱ \end{cases}$$

ضابطهٔ سوم به‌ازای تمام xهایی که در آن $x^۲$ صحیح ولی x غیرصحیح می‌شود، ناپیوسته است. همچنین در همهٔ xهای صحیح منفی ناپیوسته است. پس تابع f در بی‌شمار نقطهٔ ناپیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۲۸

گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^{۳}}{x}=\lim_{x\to ۰}(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^{۳}=(\sqrt{\frac{۱}{۹}})^{۳}=\frac{۱}{۲۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۹

گزینه ۱

اگر $x=۲k$ (یک عدد زوج) فرض شود، در این صورت $\sin\frac{\pi}{۲}x$ همواره برابر صفر می‌شود زیرا $\sin k\pi$ به ازای $k\in\mathbb{Z}$ همواره برابر صفر است. صفر شدن این عبارت باعث می‌شود کل تابع $f(x)$ برابر صفر شده و درنتیجه در نقاط زوج تابع $f(x)$ همواره پیوسته است.

حالا فرض می‌کنیم x فرد بوده و آن را به صورت $x=۲k+۱$ در نظر می‌گیریم. پیوستگی آن را در نقاط فرد مورد بررسی قرار می‌دهیم. نقطهٔ فردی مانند $x=۱$ در نظر گرفته و پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{+}}(-۱)^{[x]}\sin\frac{\pi}{۲}x=(-۱)^{۱}\sin\frac{\pi}{۲}=(-۱)(۱)=-۱$$

$$\lim_{x\to ۱^{-}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}}(-۱)^{[x]}\sin\frac{\pi}{۲}x=(-۱)^{۰}\sin\frac{\pi}{۲}=(۱)(۱)=۱$$

$$f(۱)=(-۱)^{۱}\sin\frac{\pi}{۲}=(-۱)(۱)=-۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^{+}}f(x)\neq\lim_{x\to ۱^{-}}f(x)\Rightarrow \text{در اعداد فرد ناپیوسته است}$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در اعداد زوج پیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۳۰ گزینه ۱

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-[x]}{x^۳ - x - ۶} = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{x^۳-x-۶} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{x^۳-x-۶} = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{(x^۲+۲x+۳)(x-۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{x^۲+۲x+۳} = \frac{۱}{۱۱}$$

$$f(۲) = a \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۱}$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-[x]}{x^۳ - x - ۶} = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{x^۳-x-۶}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{x^۳-x-۶} = \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{۳x^۲-۱} = \frac{۱}{۱۲-۱} = \frac{۱}{۱۱}$$

$$f(۲) = a \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۱}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳۱ گزینه ۴

حد راست : $\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)} = \frac{۴}{۲} = ۲$

حد چپ $= \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x^۲-۴}{-۲(x-۲)} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۲}{-۲} = -۲$

$$f(۲) = ۲$$

$$\Rightarrow f(۲) = \lim_{x\to ۲^+} f(x)$$

پس تابع فقط از راست پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۲ گزینه ۱

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۶})^-} [۲\sin x - ۱] = [۲(\frac{۱}{۲})^-] - ۱ = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۳

گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = f(x_\circ)$$

ب) می‌دانیم:

$$|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ یا } x < -a$$

گام دوم

ابتدا باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، محدودهٔ دو ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲-۱}{x+۱} & ; |x| > ۱ \\ ۲x & ; |x| \le ۱ \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲-۱}{x+۱} & ; x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \\ ۲x & ; -۱ \le x \le ۱ \end{cases}$$

اکنون حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = -۱$ محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم پیوستگی تابع را در این دو نقطه بررسی کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{x+۱} = \frac{۱-۱}{۱+۱} = \circ$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} ۲x = ۲(۱) = ۲$$

$$f(۱) = ۲(۱) = ۲$$

باتوجه‌به اینکه $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x)$ است، تابع در $x = ۱$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x) = \lim_{x\to -۱^+} ۲x = ۲(-۱) = -۲$$

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x) = \lim_{x\to -۱^-} \frac{x^۲-۱}{x+۱} = \lim_{x\to -۱^-} \frac{(x-۱)(x+۱)}{x+۱} = \lim_{x\to -۱^-} (x-۱) = -۱-۱ = -۲$$

$$f(-۱) = ۲(-۱) = -۲$$

داریم:

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x) = \lim_{x\to -۱^+} f(x) = f(-۱)$$

بنابراین تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته است.

۳۴ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=-۱$ دارای حد است درصورتی‌که:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} f(x)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=-۱$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} (x+a)^۲ = (-۱+a)^۲$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-} (۲x+۱) = -۲+۱ = -۱$$

باتوجه‌به گام اول در صورتی حد تابع در نقطهٔ $x=-۱$ موجود است که تساوی $(-۱+a)^۲ = -۱$ برقرار باشد اما این تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست؛ بنابراین مجموعه مقادیر a برابر $\varnothing$ می‌شود.

۳۵ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)$ از ضابطهٔ پایین که در آن $x \geq ۱$ است، استفاده می‌کنیم.

ب) برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to۱^-} f(x)$ از ضابطهٔ بالا که $x>۱$ است، بهره می‌بریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to۱^+} f(x) = \lim_{x\to۱^+} x^۲+۲a = (۱)^۲+۲a = ۲a+۱$$
$$\lim_{x\to۱^-} f(x) = \lim_{x\to۱^-} ax-۱ = a(۱)-۱ = a-۱$$
$$\lim_{x\to۱^+} f(x) - \lim_{x\to۱^-} f(x) = ۲a+۱-(a-۱) = -۱$$
$$\Rightarrow ۲a+۱-a+۱ = -۱ \Rightarrow a+۲ = -۱ \Rightarrow a = -۳$$

۳۶

گزینه ۳

تابع در $x=۱$ پیوسته است، پس مقادیر حد چپ و راست تابع در $x=۱$ برابرند.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\sqrt{a+۳} \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱+a$$

$$\Rightarrow ۱+a=\sqrt{a+۳} \Rightarrow a^۲+۲a+۱=a+۳ \Rightarrow a^۲+a-۲=۰$$

$$\Rightarrow (a+۲)(a-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ & \checkmark \\ a=-۲ & \times \end{cases}$$

به ازای $a=-۲$ تساوی بالا برقرار نیست. حالا $f(-\frac{۳}{۴})$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{ax+۳}=\sqrt{x+۳}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{۳}{۴})=\sqrt{-\frac{۳}{۴}+۳}=\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۷

گزینه ۲

شرط پیوستگی در نقطهٔ a:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\frac{۱}{a} \\ f(a)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=۱-\frac{a}{۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{a}=۱-\frac{a}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{a}=\frac{۴-a}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴=۴a-a^۲ \Rightarrow a^۲-۴a+۴=۰ \Rightarrow (a-۲)^۲=۰ \Rightarrow a=۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۸

گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} & ; x\neq ۰ \\ a & ; x=۰ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{۱-\cos^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{(۱-\sqrt{\cos x})(۱+\sqrt{\cos x})(۱+\cos x)}=-\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۹

گزینه ۳

مقدار تابع و حد چپ و راست تابع را در $x = ۰$ می‌یابیم:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} [x] - ۲a = -۱ - ۲a$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱-\cos x}{۲bx^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{۲bx^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\frac{x^۲}{۴}}{۲bx^۲} = \frac{۱}{۴b}$$

$$f(۰) = |b - ۰| = |b|$$

حال برای پیوستگی باید: $|b| = \frac{۱}{۴b} = -۱ - ۲a$

$$\Rightarrow |b| = \frac{۱}{۴b} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{۱}{۴b} \Rightarrow ۴b^۲ = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} \;, b > ۰ \\ b = -\frac{۱}{۴b} \Rightarrow -۴b^۲ = ۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$-۱ - ۲a = \frac{۱}{۴b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۳}{۴}$$

$$b - a = \frac{۱}{۲} - (-\frac{۳}{۴}) = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴} = \frac{۲+۳}{۴} = \frac{۵}{۴}$$

توجه: تابع f همواره پیوسته نیست! در نقاط $\mathbb{Z}^-$ این تابع ناپیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۴۰

گزینه ۱

وقتی $x \to \frac{۳\pi}{۴}^-$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. برای رفع ابهام می‌توان نسبت‌های مثلثاتی را ساده کرد (می‌توان از روش‌های دیگری مانند هوپیتال نیز استفاده کرد):

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\cot x}{۱+\tan x} = \frac{۱-۱}{۱-۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\cot x = \frac{۱}{\tan x}} \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\cot x}{۱+\tan x} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\frac{۱}{\tan x}}{۱+\tan x} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{\frac{\tan x + ۱}{\tan x}}{۱+\tan x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱}{\tan x} = \frac{۱}{-۱} = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۴۱

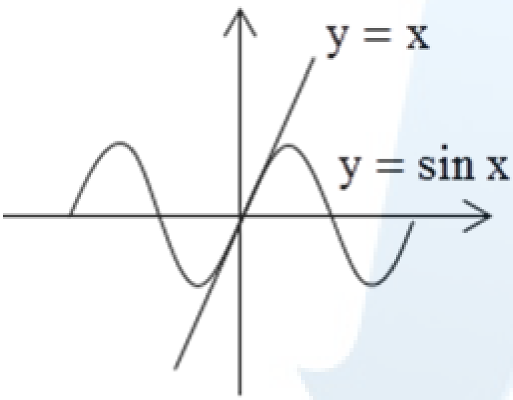
گزینه ۲

در مورد تابع $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \to \circ$، رابطهٔ زیر برقرار است:

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < ۱$. با استفاده از تساوی داده شده می توان گفت $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \to \circ$ با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود و تابع $\frac{x}{\sin x}$ وقتی $x \to \circ$ با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود.

با استفاده از نمودار دو تابع نیز می توان دریافت که

$$\lim_{x\to\circ}\left[\frac{x}{\sin x}\right]=۱ \quad , \quad \lim_{x\to\circ}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\circ$$



همان طور که مشاهده می کنید اگر $x > \circ$ باشد نمودار $y = x$ بالاتر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد و اگر $x < \circ$ باشد نمودار $y = x$ پایین تر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد.

$$x \to \circ \Rightarrow \frac{x}{\sin x} \to ۱^{+} \Rightarrow \lim_{x\to\circ}\left[\frac{x}{\sin x}\right]=[۱^{+}]=۱$$
$$x \to \circ \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \to ۱^{-} \Rightarrow \lim_{x\to\circ}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=[۱^{-}]=\circ$$

بنابراین حد عبارت داده شده وقتی $x \to \circ$ برابر است با:

$$\lim_{x\to\circ}\left[\frac{\sin x}{x}\right]+۲\left[\frac{x}{\sin x}\right]=\circ+۲(۱)=\circ+۲=۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۲

گزینه ۴

تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{\pm}} f(x)=f(\frac{\pi}{۲})=a$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin^۲ x-\sin x-۱}{\cos^۲ x}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin^۲ x-\sin x-۱}{\cos^۲ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۲\sin x+۱)(\sin x-۱)}{(۱-\sin^۲ x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۲\sin x+۱)\cancel{(\sin x-۱)}}{-\cancel{(\sin x-۱)}(\sin x+۱)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(-\frac{۲\sin x+۱}{\sin x+۱})=-\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴۳

گزینه ۲

در تابع به فرم $y=[f(x)]$ هر جا حاصل $f(x)$ برابر عدد صحیح شود، تابع در آن نقاط ناپیوسته است. بنابراین در بازهٔ $[۲,۲+k)$ حاصل عبارت جبری $x^۲-۳$ نباید برابر یک عدد صحیح شود. (البته در نقطهٔ شروع بازه درصورتی‌که تابع از راست پیوسته باشد، این نقطه جزء نقاط ناپیوستگی تابع محسوب نمی‌شود.)

ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=[x^۲-۳]=[x^۲]-۳$$

سپس بررسی می‌کنیم عبارت $[x^۲]$ در اولین نقطه‌ای که بعد از $x=۲$ برابر یک عدد صحیح می‌شود کدام نقطه است. آن نقطه را برابر $۲+k$ قرار داده و درنهایت مقدار k را محاسبه می‌کنیم.

$$x=۲\Rightarrow x^۲=۴\xrightarrow{\text{اولین عدد صحیح بعد از ۴}}x^۲=۵\Rightarrow x=\sqrt{۵}$$

پس تابع $f(x)$ به ازای $x=\sqrt{۵}$ ناپیوسته می‌شود. $k+۲$ را برابر $\sqrt{۵}$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$۲+k=\sqrt{۵}\Rightarrow k=\sqrt{۵}-۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۴۴ گزینه ۳

شرط پیوستگی تابع در نقطهٔ $x = ۱$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

بنابراین داریم:

$$f(۱) = a - a + ۲ = ۲$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} (ax - a + ۲) = a - a + ۲ = ۲$$
$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{x - ۱}{x - \sqrt{x}} = \frac{۰}{۰}$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to ۱^+} \frac{x - ۱}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x} - ۱)} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{\cancel{(\sqrt{x} - ۱)}(\sqrt{x} + ۱)}{(\sqrt{x})\cancel{(\sqrt{x} - ۱)}} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

پس به ازای هر مقدار a، تابع در $x = ۱$ پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۵ گزینه ۳

معادلهٔ سهمی و خط را می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x - ۰)(x - ۴) = ax(x - ۴)$$
$$f(۲) = ۱ \Rightarrow -۴a = ۱ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۴}$$
$$g(x) = \frac{-x}{۴} + ۱ = \frac{-۱}{۴}(x - ۴)$$

$$\lim_{x \to ۴^-} \frac{f(x) + g(x)}{۴ - x} = \lim_{x \to ۴^-} \frac{-\frac{۱}{۴}x(x - ۴) - \frac{۱}{۴}(x - ۴)}{۴ - x}$$
$$= \lim_{x \to ۴^-} \frac{-\frac{۱}{۴}(x - ۴)(x + ۱)}{-(x - ۴)} = \lim_{x \to ۴^-} \frac{۱}{۴}(x + ۱) = \frac{۵}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۶

گزینه ۳

تابع f به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} x[x] & ; -۱<x<۱ \\ ax+b & ; (x\geq ۱) \text{ یا } (x\leq -۱) \end{cases}$$

تابع $x[x]$ در فاصلهٔ $(-۱,۱)$ و تابع $ax+b$ در هر فاصله‌ای پیوسته است، پس فقط کافی است که تابع f در ۱ و ۱- پیوسته باشد.

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(ax+b)=a+b$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(x[x])=۰$$

f در $x=۱$ پیوسته است، پس $a+b=۰$ یا $a=-b$ است. ازطرفی f در ۱- پیوسته است؛ پس:

$$f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(ax+b)=-a+b$$
$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}(x[x])=(-۱)\left[(-۱)^+\right]=(-۱)(-۱)=۱$$

$$\Rightarrow -a+b=۱ \xrightarrow{b=-a} -a-a=۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۷ گزینه ۲

$$f(x) = \left[x - \frac{۱}{۳}\right] + \left[x + \frac{۲}{۳}\right] = \left[x - \frac{۱}{۳}\right] + \left[x - \frac{۱}{۳} + ۱\right]$$
$$= \left[x - \frac{۱}{۳}\right] + \left[x - \frac{۱}{۳}\right] + ۱ = ۲\left[x - \frac{۱}{۳}\right] + ۱$$

عبارت خطی $x - \frac{۱}{۳}$ در نقاط صحیح کنندهٔ $\left\{\frac{۴}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{-۲}{۳}\right\}$ از بازهٔ $\left(-\frac{۵}{۳}, \frac{۵}{۳}\right)$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \to (-\frac{۵}{۳})^+} \left(۲\left[x - \frac{۱}{۳}\right] + ۱\right) = ۲\left[(-۲)^+\right] + ۱ = ۲(-۲) + ۱ = -۳$$
$$f\left(-\frac{۵}{۳}\right) = -۳$$
$$\lim_{x \to (\frac{۵}{۳})^-} \left(۲\left[x - \frac{۱}{۳}\right] + ۱\right) = ۲\left[\left(\frac{۴}{۳}\right)^-\right] + ۱ = ۲ \times ۱ + ۱ = ۳ \quad , \quad f\left(\frac{۵}{۳}\right) = ۳$$

پس f در $-\frac{۵}{۳}$ پیوستگی راست و در $\frac{۵}{۳}$ پیوستگی چپ دارد. درنهایت در سه نقطه ناپیوسته است.

پی‌نوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۵ نقطهٔ ناپیوستگی داریم.
کلید سنجش ۳ نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۸

گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه حد تابع و مقدار تابع در این نقطه باهم برابر باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$$

گام دوم

ابتدا مقدار حد تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = \lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} = \frac{\circ}{\circ}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت، ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} \times \frac{x + \sqrt{۲x}}{x + \sqrt{۲x}} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۲x}{(۲ - x)(x + \sqrt{۲x})} = \lim_{x \to ۲} \frac{x(x - ۲)}{(۲ - x)(x + \sqrt{۲x})}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{-x}{x + \sqrt{۲x}} = \frac{-۲}{۲ + ۲} = \frac{-۲}{۴} = -\frac{۱}{۲}$$

باتوجه‌به گام اول، شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۲$ به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = f(۲) \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۴۹

گزینه ۴

ابتدا تعیین می‌کنیم مقادیر $f(x)$ به ازای $x \in \mathbb{Z}$ و $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ چند است:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & ;x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & ;x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$$

ضابطهٔ $g(x)$ را باتوجه‌به مقادیر $f(x)$ تشکیل داده و بررسی می‌کنیم در بازهٔ $[-۴,۴]$ تابع در چه نقاطی ناپیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & ;x\notin\mathbb{Z} \\ ۰ & ;x\in\mathbb{Z}\end{cases}\quad , \qquad g(x)=\begin{cases} f(x) & ;x\notin\mathbb{Z} \\ f(x)-۱ & ;x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases} -۱ & ;x\notin\mathbb{Z} \\ -۱ & ;x\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad \Rightarrow g(x)=-۱\ \ ;x\in\mathbb{R}$$

در تمام نقاط بازهٔ $[-۴,۴]$ تابع $g(x)=-۱$ (چون یک تابع ثابت است) پیوسته است. پس تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در این بازه برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۵۰

گزینه ۴

تابع در $x=\frac{۳\pi}{۲}$ حفره دارد، پس $\frac{۳\pi}{۲}$ ریشهٔ صورت و مخرج تابع f می‌باشد.

$$۱+a\sin x=۰ \xrightarrow{x=\frac{۳\pi}{۲}} ۱+a\sin\frac{۳\pi}{۲}=۰\Rightarrow ۱+a(-۱)=۰\Rightarrow a=۱$$

$$b+\cos x=۰ \xrightarrow{x=\frac{۳\pi}{۲}} b+\cos\frac{۳\pi}{۲}=۰\Rightarrow b+۰=۰\Rightarrow b=۰$$

$$f(x)=\frac{۱+\sin x}{\cos x}\Rightarrow f(\frac{\pi}{۳})=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۲+\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۵۱

گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه پیوسته باشد.
ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x > 2$ و $x < 2$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است؛ بنابراین کافی است پیوستگی تابع را فقط در نقطهٔ $x = 2$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x = 2$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 + ax - 5 = 2^2 + 2a - 5 = 2a - 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} ax - 1 = 2a - 1$$

$$f(2) = 2a - 1$$

به ازای هر مقدار حقیقی a، تساوی $2a - 1 = 2a - 1$ برقرار است.

۵۲

گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

برای بررسی شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -1$، ابتدا لازم است حد چپ و راست تابع را در این نقطه به دست آوریم.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{-1+a}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x^2 + ax = 1 - a$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1+a}$$

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow \frac{1}{-1+a} = 1 - a$$

$$\Rightarrow -(1-a)(1-a) = 1 \Rightarrow -(1-a)^2 = 1 \Rightarrow (1-a)^2 = -1 \quad (*)$$

معادلهٔ $(*)$ فاقد ریشهٔ حقیقی است، پس مجموعه مقادیر a برابر $\varnothing$ می‌شود.

۵۳

گزینه ۴

$$f(x) = [x]\sin \pi x \ ; \ x \in [-2 , 2]$$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی کنیم. اما ازآنجاکه در نقاط صحیح، تابع $\sin \pi x$ همواره برابر با صفر است، پس $f(x)$ نیز برابر با صفر می‌شود. بنابراین در کل تابع $f(x)$ در این بازه پیوسته است.
پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطهٔ ناپیوستگی داریم.
کلید سنجش صفر نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۴ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۴)}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

راه‌حل دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲x}{۳x^۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵۵ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}=-۲$$

باتوجه‌به اینکه صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است، پس حاصل حد از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}}=-۲$$

حاصل حد یک عدد ثابت شده است، پس داریم: $m+۳=n-۲$
بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}}=\frac{۱}{m}=-۲\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

و همچنین:

$$m+۳=n-۲\xrightarrow{m=-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۲}+۳=n-۲\Rightarrow n=-\frac{۱}{۲}+۵=\frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow m+n=-\frac{۱}{۲}+\frac{۹}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۵۶

گزینه ۴

راه حل اول:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}} \times \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}} \times \frac{1+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{-(x+1)(1+1+1)}{(1+1)(1+x)} = -\frac{3}{2}$$

راه حل دوم: برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}-\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} \overset{x=-1}{=} \frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۵۷

گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

حاصل حد مبهم است. با استفاده از رفع ابهام عامل صفرشونده یا همان $x-2$، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{x^2-2x}-\frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{x(x-2)}-\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{6-x^2-x}{x(x-2)}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{-(x-2)(x+3)}{x(x-2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-(x+3)}{x} = \frac{-5}{2}$$

۵۸

گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم. برای این کار کافی است در ضابطهٔ تابع $g(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ $f(x)$ را جایگزین کنیم. در ادامه حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (حد توان تابع $g(f(x))$) را وقتی $x \to 1^+$ تعیین کرده، سپس حاصل حد تابع $g(f(x))$ را به دست می آوریم.

$$g(f(x)) = 2^{\frac{2x+5}{x^2-4x+3}}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+5}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+5}{(x-3)(x-1)} = \frac{7}{(-2)(0^+)} = -\infty$$

و حالا محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 1^+} g(f(x))$:

$$\lim_{x\to 1^+} g(f(x)) = \lim_{f(x)\to -\infty} g(f(x)) = \lim_{f(x)\to -\infty} 2^{f(x)} = 2^{-\infty} = 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۵۹ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) در تابع $f(x)$ وقتی $x \to +\infty$ حد تابع برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. چون حاصل حد وقتی $x \to +\infty$ یک عدد شده است، پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت کسر با بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باید برابر باشد. بزرگ‌ترین درجهٔ x در صورت کسر ۱ است، پس $n = ۱$ است.

ب) حاصل حد را وقتی‌که $x \to +\infty$ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^۲ + bx + c} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}|x + \frac{b}{۲a}|$ تعیین کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$n = ۱ \Rightarrow f(x) = \frac{۲x + \sqrt{x^۲ - ۳x}}{ax - ۶}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x + \sqrt{x^۲ - ۳x}}{ax - ۶} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x + \sqrt{۱}|x + (\frac{-۳}{۲})|}{ax - ۶}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x + x - \frac{۳}{۲}}{ax - ۶} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x - \frac{۳}{۲}}{ax - ۶} = \frac{۳}{a} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -۶$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۲x + \sqrt{x^۲ - ۳x}}{-۶x - ۶}$$

$$\lim_{x\to-۱} f(x) = \lim_{x\to-۱} \frac{۲x + \sqrt{x^۲ - ۳x}}{-۶x - ۶} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب کرده و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-۱} \frac{۲x + \sqrt{x^۲ - ۳x}}{-۶x - ۶} \times \frac{۲x - \sqrt{x^۲ - ۳x}}{۲x - \sqrt{x^۲ - ۳x}} = \lim_{x\to-۱} \frac{۴x^۲ - x^۲ + ۳x}{-۶(x + ۱)(۲x - \sqrt{x^۲ - ۳x})}$$

$$= \lim_{x\to-۱} \frac{۳x(x + ۱)}{-۶(x + ۱)(۲x - \sqrt{x^۲ - ۳x})} = \lim_{x\to-۱} \frac{۳x}{-۶(۲x - \sqrt{x^۲ - ۳x})}$$

$$= \frac{-۳}{-۶(-۲ - ۲)} = \frac{-۳}{(-۶)(-۴)} = \frac{-۳}{۲۴} = \frac{-۱}{۸}$$

۶۰

گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to-8}\frac{x^2+10x+16}{6(2+\sqrt[3]{x})}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to-8}\frac{x^2+10x+16}{6(2+\sqrt[3]{x})}=\lim_{x\to-8}\frac{(x+8)(x+2)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{6(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{(x+8)(x+2)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{6(x+8)}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{(x+2)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{6}=\frac{-6\times 12}{6}=-12$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\text{HOP}:\ \lim_{x\to-8}\frac{2x+10}{6\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{-16+10}{6\times\frac{1}{3\times 4}}=-6\times 2=-12$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۶۱

گزینه ۳

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}=\frac{۰}{۰}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}\times\frac{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})}{۴-(۲+\sqrt{۳-x})}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})}{۲-\sqrt{۳-x}}\times\frac{۲+\sqrt{۳-x}}{۲+\sqrt{۳-x}}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})(۲+\sqrt{۳-x})}{۴-۳+x}$$

$$=\lim_{x\to -۱}(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})(۲+\sqrt{۳-x})=۱(۲+۲)(۲+۲)=۱۶$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

استفاده از قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۱}\frac{۴x+۵}{-\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}\times\frac{۱}{۲\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}}=۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۶۲

گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

گام اول

وقتی باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $P(x)=x^۴-ax^۳+x^۲+۲ax+۱$ بر $x+۱$ برابر ۴ باشد، یعنی حاصل $P(-۱)$ برابر ۴ است.

گام دوم

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow P(-۱)=۴$$

$$P(-۱)=(-۱)^۴-a(-۱)^۳+(-۱)^۲+۲a(-۱)+۱=۴\Rightarrow ۱+a+۱-۲a+۱=۴\Rightarrow -a+۳=۴$$
$$\Rightarrow a=۳-۴=-۱\Rightarrow a=-۱$$

۶۳

گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

گام اول

حاصل حد $\infty - \infty$ و مبهم است.

گام دوم

برای رفع ابهام و به دست آوردن حاصل حد، از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$n = ۳ \Rightarrow \text{عدد فرد} \Rightarrow \underset{x\to\pm\infty}{\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-۱} + \dots}} \sim \sqrt[n]{a}(x + \frac{b}{na})$$

$$\underset{x\to\infty}{\sqrt[۳]{۸x^۳ + ۲x^۲}} \sim \sqrt[۳]{۸}(x + \frac{۲}{۲۴}) = ۲(x + \frac{۱}{۱۲}) = ۲x + \frac{۱}{۶}$$

حالا حاصل حد را محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[۳]{۸x^۳ + ۲x^۲} - ۲x) = \lim_{x\to\infty}(۲x + \frac{۱}{۶} - ۲x) = \frac{۱}{۶}$$

۶۴

گزینه ۴

در سوال گفته‌شده به‌ازای هر n طبیعی $p(x)$ بر $x + ۲$ بخش‌پذیر است، پس به دلخواه n را برابر یک قرار می‌دهیم:

$$p(x) = x^۴ + ۲x^۳ + x^۶ + ۳x^۵ + ۱۶a$$
$$p(-۲) = ۰ : ۱۶ - ۱۶ + ۶۴ - ۹۶ + ۱۶a = ۰ \Rightarrow a = ۲$$
$$p(x) = x^۶ + ۳x^۵ + x^۴ + ۲x^۳ + ۳۲ = (x^۲ + ۲x - ۳)Q(x) + \underbrace{R(x)}_{bx+c}$$

$$\Rightarrow p(x) = (x - ۱)(x + ۳)Q(x) + bx + c$$

$$\begin{cases} p(۱) = ۳۹ = b + c \\ p(-۳) = ۵۹ = -۳b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -۵ \\ c = ۴۴ \end{cases} \Rightarrow R(x) = -۵x + ۴۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶۵

گزینه ۲

حد تابع در بی‌نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+\sqrt{۴x^۲}}{۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(a+۲)}{۲x}$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{۵}{۲}} \frac{a+۲}{۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow a = ۳$$

$$\lim_{x\to-۱} f(x) = \lim_{x\to-۱} \frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲} \xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می‌کنیم}]{\text{در مزدوج صورت}} \lim_{x\to-۱} \frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲} \times \frac{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}$$

$$= \lim_{x\to-۱} \frac{۹x^۲-۴x^۲-۵}{۲(x+۱)(-۳-\sqrt{۴+۵})} = \lim_{x\to-۱} \frac{-۵(x-۱)(x+۱)}{۱۲(x+۱)} = \frac{۵}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۶

گزینه ۲

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+} \left[\frac{-۲}{x^۲}\right] = \left[\frac{-۲}{(\frac{۱}{۴})^-}\right] = [-(۸^+)] = -۹$$

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+} \left[\frac{۳}{x^۲}\right] = \left[\frac{۳}{(\frac{۱}{۴})^-}\right] = [۱۲^+] = ۱۲$$

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+} \frac{۱۶x+۹}{۲۴x+۱۲} = \frac{۱}{(-۱۲)^+ + ۱۲} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۶۷

گزینه ۳

ابتدا وقتی $x \to -\infty$، حاصل $\left[\frac{۱}{x}\right]$ را به دست می آوریم. با داشتن مقدار $\left[\frac{۱}{x}\right]$ حاصل حد را محاسبه می کنیم.

$$x \to -\infty \Rightarrow \frac{۱}{x} \to ۰^- \Rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right] = [۰^-] = -۱$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right] = (-\infty)(-۱) = +\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۶۸

گزینه ۴

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-|۲x|}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+۲x}{x}=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۹

گزینه ۲

می‌دانیم: $[۲^-]=۱$

$$\lim_{x\to۲^-}\left(\frac{x+۲}{x^۲-۲x}+\frac{۲(۱)}{۲-x}\right)=\lim_{x\to۲^-}\left(\frac{x+۲}{x(x-۲)}+\frac{۲}{۲-x}\right)=\lim_{x\to۲^-}\left(\frac{x+۲}{x(x-۲)}-\frac{۲}{x-۲}\right)$$
$$=\lim_{x\to۲^-}\frac{x+۲-۲x}{x(x-۲)}=\lim_{x\to۲^-}\frac{-۱}{x}=-\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۷۰

گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

می‌دانیم: $x \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{x^۲+۵}$

گام دوم

صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین درجهٔ بزرگ‌ترین جملهٔ صورت و بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج باهم برابر است و حاصل حد از تقسیم ضرائب آن‌ها بر هم به دست می‌آید، پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{ax^n+۴} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-x}{ax^n+۴}$$

$$\xrightarrow{n=۱} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-x}{ax+۴} = \frac{-۱}{a}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a=-۲ \Rightarrow f(x) = \frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{-۲x+۴}$$

اکنون حاصل $\lim_{x\to۲} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲} f(x) = \frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to۲} \frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{-۲x+۴} \times \frac{۳+\sqrt{x^۲+۵}}{۳+\sqrt{x^۲+۵}} = \lim_{x\to۲} \frac{۹-x^۲-۵}{۲(۲-x)(۳+\sqrt{x^۲+۵})}$$

$$= \lim_{x\to۲} \frac{(۲-x)(۲+x)}{۲(۲-x)(۳+\sqrt{x^۲+۵})} = \lim_{x\to۲} \frac{۲+x}{۲(۳+\sqrt{x^۲+۵})} = \frac{۲+۲}{۲(۳+\sqrt{۴+۵})} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

۷۱

گزینه ۴

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x}} - \sqrt{\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x^۲+۱}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+x+۱}{x\,(x+۱)}} - \sqrt{\frac{x^۲+۱-x^۲}{x^۲\,(x^۲+۱)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{x^۲+x}} - \sqrt{\frac{۱}{x^۴+x^۲}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{x+۱}} - \sqrt{\frac{۱}{x^۳+x}}\right) = \sqrt{۲} - ۰ = \sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۷۲ گزینه ۴

ابتدا حاصل حد تابع $f(x) = \frac{|x^۲ - ۴|}{ax^۲ - x + ۲}$ را وقتی $x \to +\infty$ برابر -۱ قرار داده و مقدار a را محاسبه می کنیم. وقتی $x \to +\infty$ عبارت $x^۲ - ۴$ مثبت بوده و می توان از قدرمطلق چشم پوشی کرد. برای محاسبهٔ $\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)$ ابتدا تکلیف قدرمطلق را روشن می کنیم و سپس حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x^۲ - ۴|}{ax^۲ - x + ۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲ - ۴}{ax^۲ - x + ۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲}{ax^۲} = \frac{۱}{a} = -۱$$

$$\Rightarrow a = -۱ \Rightarrow f(x) = \frac{|x^۲ - ۴|}{-x^۲ - x + ۲}$$

برای به دست آوردن $\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)$، ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین می کنیم:

$$x \to (-۲)^+ \Rightarrow x > -۲ \Rightarrow x^۲ < ۴ \Rightarrow x^۲ - ۴ < ۰ \Rightarrow |x^۲ - ۴| = -(x^۲ - ۴)$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{-(x^۲ - ۴)}{-x^۲ - x + ۲} = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{-(x-۲)(x+۲)}{-(x+۲)(x-۱)}$$

$$= \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{x-۲}{x-۱} = \frac{-۲-۲}{-۲-۱} = \frac{-۴}{-۳} = \frac{۴}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۷۳ گزینه ۴

$$۳a - ۷ < ۳ < a + ۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳a - ۷ < ۳ \Rightarrow ۳a < ۱۰ \Rightarrow a < \frac{۱۰}{۳} \\ a + ۵ > ۳ \Rightarrow a > -۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۲ < a < \frac{۱۰}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۷۴ گزینه ۲

چون $\lim_{x\to۲} \frac{۲x - ۵}{x^۲ + ax + b} = -\infty$ است، پس باید مخرج کسر در همسایگی $x = ۲$ مثبت و به ازای $x = ۲$ صفر شود. یعنی معادلهٔ $x^۲ + ax + b = ۰$ باید ریشهٔ مضاعف $x = ۲$ داشته باشد و درنتیجه:

$$x^۲ + ax + b = (x-۲)^۲ = x^۲ - ۴x + ۴$$

با مقایسهٔ دو عبارت $x^۲ + ax + b$ و $x^۲ - ۴x + ۴$ نتیجه می‌شود که $a = -۴$ و $b = ۴$، پس $a + b = ۰$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۷۵

گزینه ۱

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۴$ برابر ۳ است، پس $p(۴)=۳$.
باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+۲$ برابر ۱ است، پس $p(-۲)=۱$.
حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲)+۴p(-x)$ بر $x-۲$ را می‌خواهیم، بنابراین $x=۲$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^۲)+۴p(-x)=p(۲^۲)+۴p(-۲)$$
$$=p(۴)+۴p(-۲)=۳+۴\times ۱=۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷۶

گزینه ۲

باتوجه‌به نمودار $f(۰)=۰$ است، پس داریم:

$$f(۰)=۰\Rightarrow \frac{۰+b}{۰-۱}=۰\Rightarrow -b=۰\Rightarrow b=۰$$

ازطرفی تابع در نقطهٔ $x=۱$ تعریف‌نشده است، چون $x=۱$ ریشهٔ مخرج کسر است پس حد صورت کسر نیز وقتی $x\to ۱$ باید برابر صفر باشد که تابع به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ دربیاید.

$$\lim_{x\to ۱} ۴x^۳+ax+b=۰\Rightarrow ۴+a=۰\Rightarrow a=-۴$$

بنابراین داریم: $(a,b)=(-۴,۰)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۷۷

گزینه ۲

حاصل حد، وقتی $x\to ۱$، مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}\times\frac{۲+\sqrt{۵-x}}{۲+\sqrt{۵-x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۱-x)(۲+\sqrt{۵-x})}{(۴-۵+x)(۱+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(۱-x)(۲+\sqrt{۵-x})}{(x-۱)(۱+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{-(۲+\sqrt{۵-x})}{۱+\sqrt{x}}=\frac{-(۲+۲)}{۱+۱}=-\frac{۴}{۲}=-۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۷۸

گزینه ۲

$$\lim_{x\to -۲}\left(\frac{۳}{(۲x+۱)(x+۲)}-\frac{۴}{(x+۲)(x-۲)}\right)=\lim_{x\to -۲}\left(\frac{۳(x-۲)-۴(۲x+۱)}{(۲x+۱)(x+۲)(x-۲)}\right)$$
$$=\lim_{x\to -۲}\left(\frac{-۵(x+۲)}{(۲x+۱)(x+۲)(x-۲)}\right)=\lim_{x\to -۲}\left(\frac{-۵}{(۲x+۱)(x-۲)}\right)=-\frac{۵}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۷۹

گزینه ۱

طبق صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که $P\left(\frac{۱}{۲}\right)=۰$، بنابراین:

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴+a\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲-۳\left(\frac{۱}{۲}\right)=۰\Rightarrow ۲\left(\frac{۱}{۱۶}\right)+a\left(\frac{۱}{۸}\right)+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۸}+\frac{a}{۸}-۱=۰\Rightarrow a=۷$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر با $P(-۲)$ است، پس داریم:

$$P(x)=۲x^۴+۷x^۳+۲x^۲-۳x$$
$$\Rightarrow P(-۲)=۲(-۲)^۴+۷(-۲)^۳+۲(-۲)^۲-۳(-۲)=۳۲-۵۶+۸+۶=-۱۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۸۰

گزینه ۱

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x^n-۱۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{۴x^n}=\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow n=۱\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{۴x}=\frac{a}{۴}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

$$\lim_{x\to۳}f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}=\frac{۰}{۰}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}\times\frac{\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۲}{\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۲}$$

$$=\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۸}{۲۷}x^۳-x^۲+۱}{(۴x-۱۲)(\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۲)}$$

$$=\lim_{x\to۳}\frac{\cancel{(x-۳)}\left(\frac{۸}{۲۷}x^۲-\frac{x}{۹}-\frac{۱}{۳}\right)}{۴\cancel{(x-۳)}(\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۲)}$$

$$=\frac{\frac{۸}{۳}-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۴\times(۴+۲\times۲+۴)}=\frac{۲}{۴۸}=\frac{۱}{۲۴}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{۸}{۲۷}x^۳-x^۲+۱ & x-۳ \\ \cline{2-2}
\underline{-\frac{۸}{۲۷}x^۳+\frac{۸}{۹}x^۲} & \frac{۸}{۲۷}x^۲-\frac{x}{۹}-\frac{۱}{۳} \\
-\frac{۱}{۹}x^۲+۱ & \\
\underline{+\frac{۱}{۹}x^۲-\frac{۱}{۳}x} & \\
-\frac{۱}{۳}x+۱ & \\
\underline{+\frac{۱}{۳}x-۱} & \\
۰ &
\end{array}$$

روش دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۲}{۳}}}{۴}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۳}-۲\times\frac{۱}{۴}}{۴}=\frac{\frac{۴-۳}{۶}}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸۱ گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-۱)^۳-(x+۱)^۳}{x(x-۱)^۲-x^۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۳-۳x^۲+۳x-۱-(x^۳+۳x^۲+۳x+۱)}{x(x^۲-۲x+۱)-x^۳}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۶x^۲}{-۲x^۲}=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۸۲ گزینه ۳

نکته: اگر عبارت داخل جزء صحیح به سمت بی نهایت میل کند، می‌توان نتیجه گرفت جزء صحیح با عبارت داخل آن هم‌ارز است.

بررسی گزینهٔ اول:

$$x\to ۰^-\Rightarrow\frac{۱}{x}\to-\infty\Rightarrow\lim_{x\to ۰^-}x\left[\frac{۱}{x}\right]=\lim_{x\to ۰^-}x(\frac{۱}{x})=۱$$

بررسی گزینهٔ دوم:

$$x\to ۰^+\Rightarrow\frac{۱}{x}\to+\infty\Rightarrow\lim_{x\to ۰^+}x\left[\frac{۱}{x}\right]=\lim_{x\to ۰^+}x(\frac{۱}{x})=۱$$

بررسی گزینهٔ سوم:

$$x\to-\infty\Rightarrow\frac{۱}{x}\to ۰^-\Rightarrow\left[\frac{۱}{x}\right]=-۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}x\left[\frac{۱}{x}\right]=(-\infty)(-۱)=+\infty$$

پس حاصل حد تابع وقتی $x\to-\infty$ متناهی نیست.

بررسی گزینهٔ چهارم:

$$x\to+\infty\Rightarrow\frac{۱}{x}\to ۰^+\Rightarrow\left[\frac{۱}{x}\right]=۰$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{۱}{x}\right]=(+\infty)(۰)=۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۸۳ گزینه ۱

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^۲+x+۱}}{x+۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{a}|x|}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{a}x}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-}[\frac{۱}{x}]\times\sqrt{\frac{۱}{۴}x^۲+x+۱}=-۱\times\sqrt{\frac{۱}{۴}(-۱)^۲+(-۱)+۱}=-۱\times\sqrt{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸۴ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱-\tan^۲x}{\sqrt{۱+\sin ۲x}}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱-\tan^۲x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^۲}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱-\tan^۲x}{|\sin x+\cos x|}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{\frac{\cos^۲x-\sin^۲x}{\cos^۲x}}{(\sin x+\cos x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos^۲x(\sin x+\cos x)}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^۲x}=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=-۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۸۵ گزینه ۴

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+|x|}=\lim_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+x}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{x^۲-۱}{x+|x|}=\lim_{x\to۰^-}\frac{x^۲-۱}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف‌نشده}$$

تابع در همسایگی چپ صفر حد ندارد، بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸۶ گزینه ۳

$$\lim_{x\to 1^+}(۴-[x])g(x)=۶ \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} ۳g(x)=۶$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} g(x)=۲$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|}=۲$$

جواب حد یک عدد است و مخرج به ازای $x=۱$ صفر است، بنابراین باید صورت کسر نیز به ازای آن صفر باشد، حال داریم:

$$ax^۲+bx+c=a(x-۱)^۲$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{a(x-۱)^۲}}{|x-۱|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{a}|x-۱|}{|x-۱|}=۲$$

$$\Rightarrow a=۴$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{۴}|x-۱|}{|x-۱|}=۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸۷ گزینه ۴

نکته:

$$\sin ۲A=۲\sin A\cos A$$
$$\cos ۲A=۲\cos^۲ A-۱$$

$$\lim_{x\to \pi^+}\frac{۲\sin(-x)\cos ۲x}{\sqrt{۲(۱+\cos x)}}=\frac{۰}{۰}\quad (\text{مبهم})$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \pi^+}\frac{۲\sin(-x)\cos ۲x}{\sqrt{۲(۱+\cos x)}}=-۲\lim_{x\to \pi^+}\frac{\sin x\cos ۲x}{\sqrt{۴\cos^۲\frac{x}{۲}}}=-\lim_{x\to \pi^+}\frac{\sin x}{\left|\cos\frac{x}{۲}\right|}$$

$$=-\lim_{x\to \pi^+}\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{-\cos\frac{x}{۲}}=۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۸۸

گزینه ۳

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}=\frac{\overbrace{\left[(-۲)^-\right]}^{-۳}+۳}{(-۲)^-+۲}=\frac{۰}{۰^-}=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸۹

گزینه ۳

راه‌حل اول: استفاده از هم‌ارزی:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$$

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x+\sqrt{۴x^۲+x})=\lim_{x\to-\infty}(۲x+۲\left|x+\frac{۱}{۸}\right|)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x-۲(x+\frac{۱}{۸}))=-\frac{۱}{۴}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x+\sqrt{۴x^۲+x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(۲x+\sqrt{۴x^۲+x})(۲x-\sqrt{۴x^۲+x})}{۲x-\sqrt{۴x^۲+x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x^۲-(۴x^۲+x)}{۲x-\sqrt{۴x^۲}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۲x-|۲x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۴x}=-\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۹۰

گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) $x \to ۲^-$ یعنی $x < ۲$ است، باتوجه‌به این نکته تعیین می‌کنیم علامت عبارت داخل قدر مطلق مثبت است یا منفی سپس آن را از قدر مطلق خارج می‌کنیم.

ب) وقتی $x \to ۲^-$ حاصل صورت و مخرج کسر برابر صفر حدی می‌شود. پس برای رفع ابهام می‌توانیم هم صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم و هم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم.

گام دوم

$$\left.\begin{array}{l} x^۲ - x - ۲ = (x-۲)(x+۱) \\ x \to ۲^- \Rightarrow x < ۲ \Rightarrow x - ۲ < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow |x^۲ - x - ۲| = -(x-۲)(x+۱)$$

روش اول:

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{|x^۲ - x - ۲|}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-x^۲ + x + ۲}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$
$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{-x^۲ + x + ۲}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} \times \frac{۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲}}{۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$
$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{(-x^۲ + x + ۲)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{(۴x^۲ - x^۲ - ۱۲)}$$
$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x-۲)(x+۱)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{۳(x-۲)(x+۲)}$$
$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x+۱)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{۳(x+۲)}$$
$$= \frac{-(۲+۱)(۴+۴)}{۳(۲+۲)} = \frac{-۳ \times ۸}{۳ \times ۴} = -۲$$

روش دوم: (فراتر از کتاب درسی)

در این روش حاصل حد را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{|x^۲ - x - ۲|}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x-۲)(x+۱)}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$
$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲^-} \frac{-۲x + ۱}{۲ - \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۱۲}}} = \frac{-۴ + ۱}{۲ - \frac{۲}{\sqrt{۴ + ۱۲}}} = \frac{-۳}{۲ - \frac{۱}{۲}} = \frac{-۳}{\frac{۳}{۲}} = -۲$$

۹۱

گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

گام اول

وقتی $x \to \frac{\pi}{4}$، هم حاصل صورت و هم حاصل مخرج برابر صفر شده و درنتیجه حد دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است.

گام دوم

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر، تا جایی که امکان دارد عبارت مثلثاتی داده‌شده را ساده کرده و حد آن را به دست می‌آوریم:

$$1)\quad \sin 2x = 2\sin x\cos x \Rightarrow 1-\sin 2x = \sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x$$
$$=(\sin x-\cos x)^2 \Rightarrow 1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2$$
$$2)\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{(1-\tan x)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)^2}{(1-\frac{\sin x}{\cos x})^2}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)^2}{\frac{(\cos x-\sin x)^2}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)^2\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos^2 x=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{1}{2}$$

۹۲

گزینه ۴

$\cot x$ را برابر $\frac{1}{\tan x}$ فرض کرده و عبارت را بر حسب $\tan x$ به دست می‌آوریم و حاصل حد را وقتی $x\to\frac{\pi}{2}^+$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\tan x}{\cot x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan^2 x=(-\infty)^2=+\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۹۳ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

وقتی $x \to -۴$، حاصل حد $\infty - \infty$ بوده و مبهم است.

گام دوم

برای رفع ابهام ابتدا با مخرج مشترک گیری میان دو کسر، عبارت را به ساده ترین شکل ممکن در آورده سپس حد آن را وقتی $x \to -۴$ محاسبه می کنیم.

$$\frac{x+۱۹}{x^۲+۳x-۴}+\frac{۳}{x+۴}=\frac{x+۱۹}{(x+۴)(x-۱)}+\frac{۳}{x+۴}$$
$$=\frac{x+۱۹+۳(x-۱)}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{x+۱۹+۳x-۳}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{۴x+۱۶}{(x+۴)(x-۱)}$$
$$=\frac{۴(x+۴)}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{۴}{x-۱}$$

حالا حاصل عبارت ساده شده را وقتی $x \to -۴$ حساب می کنیم:

$$\lim_{x\to -۴}\frac{۴}{x-۱}=\frac{۴}{-۴-۱}=\frac{۴}{-۵}=-\frac{۴}{۵}$$

۹۴ گزینه ۱

$$x+۱<۳<۲x-۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱<۳ \Rightarrow x<۲ \\ ۲x-۱>۳ \Rightarrow ۲x>۴ \Rightarrow x>۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۹۵ گزینه ۲

پرتوان‌ها را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(a^2x^2)(a^4x^4)\dots(a^{100}x^{100})}}{a^{49}x^k}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(ax)^{2+4+\dots+100}}}{a^{49}x^k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|ax|^{51}}{a^{49}x^k}=-1$$

$$\xrightarrow{a>0}\lim_{x\to-\infty}\frac{-a^{51}x^{51}}{a^{49}x^k}=-1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2=1\xrightarrow{a>0}a=1\\ k=51\end{cases}$$

برای $a<0$ مسئله جواب ندارد.

توجه: از مجموع ۵۰ جملهٔ دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲ و قدر نسبت ۲ استفاده می‌کنیم:

$$2+4+\dots+100=\frac{50}{2}(2(2)+49(2))=2(\frac{50\times51}{2})=50\times51$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۹۶

گزینه ۲

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{۴x^n - ۶x^۲ + ۱}{ax^۳ + ۷x^۲ - ۲} = ۲$$

چون حاصل حد یک عدد شده است، پس باید درجهٔ صورت و مخرج کسر یکی باشد. بنابراین $n = ۳$ است. همچنین طبق قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{ax^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\infty} \frac{۴x^n}{ax^۳} = \frac{۴}{a} = ۲ \Rightarrow a = ۲$$

حال $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x) = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \frac{۰}{۰}$$

حد را رفع ابهام می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{\cancel{\left(x - \frac{۱}{۲}\right)}(۴x^۲ - ۴x - ۲)}{\cancel{\left(x - \frac{۱}{۲}\right)}(۲x^۲ + ۸x + ۴)} = \frac{-۳}{\frac{۱۷}{۲}} = -\frac{۶}{۱۷}$$

$$\begin{array}{r|l} ۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱ & x - \frac{۱}{۲} \\ \underline{-۴x^۳ + ۲x^۲} & \overline{۴x^۲ - ۴x - ۲} \\ -۴x^۲ + ۱ & \\ \underline{۴x^۲ - ۲x} & \\ -۲x + ۱ & \\ \underline{۲x - ۱} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲ & x - \frac{۱}{۲} \\ \underline{-۲x^۳ + x^۲} & \overline{۲x^۲ + ۸x + ۴} \\ ۸x^۲ - ۲ & \\ \underline{-۸x^۲ + ۴x} & \\ ۴x - ۲ & \\ \underline{-۴x + ۲} & \\ ۰ & \end{array}$$

روش دوم: هوپیتال

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۱۲x^۲ - ۱۲x}{۶x^۲ + ۱۴x} = \frac{۳ - ۶}{\frac{۱۷}{۲}} = \frac{-۶}{۱۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹۷ گزینه ۱

ضابطهٔ $gof(x)$ یا همان $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم. حد تابع $g(f(x))$ را وقتی $x \to ۰^-$، به دست می آوریم. دقت کنید اگر در محاسبهٔ حد به عدد $a^{-\infty}$ که در آن $a > ۱$ است برخوردیم حاصل برابر صفر می شود.

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{۲(۲^{\frac{۱}{x}}) - ۳}{۲^{\frac{۱}{x}} + ۱}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} gof(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲(۲^{\frac{۱}{x}}) - ۳}{۲^{\frac{۱}{x}} + ۱}$$

$$\xrightarrow{x\to ۰^- \Rightarrow \frac{۱}{x} \to -\infty} \lim_{x\to ۰^-} gof(x) = \frac{۲(۲^{-\infty}) - ۳}{(۲^{-\infty}) + ۱} = \frac{(۲ \times ۰) - ۳}{۰ + ۱} = \frac{-۳}{۱} = -۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۹۸ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) نمودار تابع از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

ب) می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^۲ + bx + c} \underset{x\to +\infty}{\sim} \sqrt{a}|x + \frac{b}{۲a}|$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$f(x) = \frac{ax + ۱ + \sqrt{۴x^۲ + ۹}}{۳x - ۲} \xrightarrow{f(۲)=۱} ۱ = \frac{۲a + ۱ + ۵}{۴} \Rightarrow ۲a + ۶ = ۴$$

$$\Rightarrow ۲a = -۲ \Rightarrow a = -۱$$

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول می‌توان نوشت:

$$\sqrt{۴x^۲ + ۹} \underset{x\to +\infty}{\sim} ۲x$$

پس:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x + ۱ + \sqrt{۴x^۲ + ۹}}{۳x - ۲} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x + ۱ + ۲x}{۳x - ۲} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x + ۱}{۳x - ۲} = \frac{۱}{۳}$$

۹۹

گزینه ۱

می‌دانیم $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ و $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ و $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$. حال داریم:

$$\lim_{x\to \frac{2\pi}{3}^+}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})^-}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{2\pi}{3}^-}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})^+}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{4\pi}{3}^\pm}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})^\pm}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^\pm}=\pm\infty$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۰۰

گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) وقتی $x\to 3$ حد عبارت صورت برابر -1 است. پس حد عبارت مخرج باید برابر 0^+ شود تا حاصل حد برابر $-\infty$ شود. حد عبارت مخرج وقتی $x\to 3$ در صورتی 0^+ می‌شود که $x=3$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد (حاصل حد مخرج کسر وقتی $x\to 3^+$ و $x\to 3^-$ باید برابر 0^+ شود).

ب) مخرج باید به صورت $2(x-3)^2$ باشد تا بتوان گفت $x=3$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

گام دوم

$$2(x-3)^2=2(x^2-6x+9)=2x^2-12x+18=2x^2+ax+b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-12 \\ b=18 \end{cases} \Rightarrow a+b=-12+18=6$$

۱۰۱

گزینه ۱

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^{۲}-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۳x+۲)(x-۴)}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}\times\frac{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۳x+۲)(x-۴)(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{(۲-\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{-(۳x+۲)\cancel{(۲-\sqrt{x})}(۲+\sqrt{x})(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{\cancel{(۲-\sqrt{x})}}=\lim_{x\to ۴}\left(-(۳x+۲)(۲+\sqrt{x})(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)\right)$$

$$=-۱۴\times ۴\times ۲=-۱۱۲$$

راه‌حل دوم:

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^{۲}-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{۶x-۱۰}{\frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{۳-\sqrt{x}}}}=\frac{۱۴}{\frac{-\frac{۱}{۲\times ۲}}{۲}}=-۱۴\times ۸=-۱۱۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۰۲ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) می‌دانیم وقتی $x \to \infty$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{2a}|$$

ب) صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، عبارت رادیکالی مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{4x^2+15x} \underset{x\to-\infty}{\sim} \sqrt{4}|x+\frac{15}{8}| = -2(x+\frac{15}{8})$$

(دقت کنید که چون $x \to -\infty$ بود، قرینهٔ عبارت درون قدر مطلق از آن خارج شد)

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، $n=1$ است. داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+15}{3x-(-2(x+\frac{15}{8}))} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+15}{3x+2x+\frac{15}{4}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+15}{5x+\frac{15}{4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{5x} = \frac{a}{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \frac{a}{5} = -1 \Rightarrow a = -5$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$$

اکنون حاصل حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to 3$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} = \frac{0}{0}$$

با دو روش می‌توان ابهام به‌وجودآمده را رفع کرد.

روش اول:

با به‌کاربردن قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to3} \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} = \lim_{x\to3} \frac{-5}{3-\frac{8x+15}{2\sqrt{4x^2+15x}}} = \frac{-5}{3-\frac{24+15}{2\sqrt{36+45}}}$$

$$= \frac{-۵}{۳ - \frac{۳۹}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۱۵}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۵}{۶}} = -۶ \Rightarrow \lim_{x \to ۳} f(x) = -۶$$

روش دوم:

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج، داریم:

$$\lim_{x \to ۳} \frac{-۵x + ۱۵}{۳x - \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}} \times \frac{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}}{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}} = \lim_{x \to ۳} \frac{-۵(x - ۳)(۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x})}{۹x^۲ - ۴x^۲ - ۱۵x}$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{-۵(x - ۳)(۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x})}{۵x(x - ۳)} = \lim_{x \to ۳} -\frac{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}}{x} = -\frac{۹ + ۹}{۳} = -\frac{۱۸}{۳} = -۶$$

۱۰۳ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \frac{\pi}{۴}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. باتوجه‌به گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\tan x - ۱}{\cos ۲x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - ۱}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{-۱}{\cos x(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲})} = \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۲})} = -۱$$

۱۰۴ گزینه ۲

در مرحلهٔ اول صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت مخرج کسر ضرب می کنیم تا عبارت را به ساده ترین شکل ممکن به دست آوریم.

$$\frac{۱}{x-\sqrt{x^۲+۲x}} \times \frac{x+\sqrt{x^۲+۲x}}{x+\sqrt{x^۲+۲x}} = \frac{x+\sqrt{x^۲+۲x}}{x^۲-x^۲-۲x} = \frac{x+\sqrt{x^۲+۲x}}{-۲x}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^۲+۲x}}{-۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+|x|}{-۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+x}{-۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x}{-۲x} = -۱$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

برای به دست آوردن حاصل حد وقتی $x \to +\infty$ از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|$$

با استفاده از هم‌ارزی حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^۲+۲x}}{-۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{۱}|x+\frac{۲}{۲}|}{-۲x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+x+۱}{-۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x+۱}{-۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x}{-۲x} = -۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۰۵ گزینه ۱

$$n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} ۲^{۱-۲n} = \frac{۱}{۲^{-۱+۲n}} \to ۰ \\ ۲^{۲n+۱} \to +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{۲^{۲n+۱} - ۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱} + ۳ \times ۲^{۱-۲n}} = \frac{\infty}{\infty}$$

راه‌حل اول:

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{۲^{۲n+۱} - ۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱} + ۳ \times ۲^{۱-۲n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۲^{۲n+۱}}{۲^{۲n+۱}} = ۱$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{۲^{۲n+۱} - ۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱} + ۳ \times ۲^{۱-۲n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{۲^{۱-۲n}}(۲^{۴n} - ۱)}{\cancel{۲^{۱-۲n}}(۲^{۴n} + ۳)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۲^{۴n} - ۱}{۲^{۴n} + ۳}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(۲^{۴n} + ۳) - ۴}{(۲^{۴n} + ۳)} = \lim_{n\to+\infty} ۱ - \underbrace{\frac{۴}{۲^{۴n} + ۳}}_{۰} = ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۰۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^۲ + bx + c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}|x + \frac{b}{۲a}|$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$\sqrt{۴x^۲ + ۹x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{۴}|x + \frac{۹}{۸}| = ۲(x + \frac{۹}{۸}) = ۲x + \frac{۹}{۴}$$

چون $x \to +\infty$، می‌توان در مخرج کسر از عبارت $\sqrt{x}$ در برابر $۳x$ صرف‌نظر کرد.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sqrt{۴x^۲ + ۹x}}{۳x + \sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - (۲x + \frac{۹}{۴})}{۳x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - ۲x - \frac{۹}{۴}}{۳x} = -\frac{۱}{۳}$$

۱۰۷ گزینه ۲

$$n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} ۳^{-۲n+۱} = \dfrac{۱}{۳^{۲n-۱}} \to ۰ \\ ۳^{۲n} \to +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۲n} - ۳^{-۲n+۱}}{۲ \times ۳^{۲n} + ۳^{-۲n+۱}} = \frac{\infty}{\infty}$$

روش اول: با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۲n} - ۳^{-۲n+۱}}{۲ \times ۳^{۲n} + ۳^{-۲n+۱}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۲n}}{۲ \times ۳^{۲n}} = \frac{۱}{۲}$$

روش دوم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۲n} - ۳^{-۲n+۱}}{۲ \times ۳^{۲n} + ۳^{-۲n+۱}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{-۲n+۱}(۳^{۴n-۱} - ۱)}{۳^{-۲n+۱}(۲ \times ۳^{۴n-۱} + ۱)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۴n-۱} - ۱}{۲ \times ۳^{۴n-۱} + ۱}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{۳^{۴n-۱}}(۱ - \overbrace{\cancel{\frac{۱}{۳^{۴n-۱}}}}^{۰})}{\cancel{۳^{۴n-۱}}(۲ + \underbrace{\cancel{\frac{۱}{۳^{۴n-۱}}}}_{۰})} = \frac{۱}{۲}$$

توجه:

$$(n \to +\infty) \Rightarrow (\frac{۱}{۳^{۴n-۱}} \to ۰)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰۸ گزینه ۴

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^۴ - x^۲ + ۱} + \sqrt{x^۲ + ۱} - x^۲}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x^۲| + |x| - x^۲}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰۹ گزینه ۲

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sin^{۲n}(x) = \lim_{n\to+\infty} (\sin^{۲}(x))^n$$

می‌دانیم $۰ \le \sin^{۲}(x) \le ۱$ است، پس در نقاطی که $\sin x \in [۰, ۱)$ حاصل حد برابر صفر خواهد بود، زیرا اعداد بازهٔ $(۰, ۱)$ را هرچه به توان بزرگ‌تر برسانیم کوچک و کوچک‌تر می‌شود:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sin^{۲n}(x) = \begin{cases} ۱ & ; x = k\pi + \dfrac{\pi}{۲} \\ ۰ & ; x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{۲} \end{cases}$$

در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ تابع داده‌شده در نقاط $x = \dfrac{\pi}{۲}$ و $x = \dfrac{۳\pi}{۲}$ ناپیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۴ نقطهٔ ناپیوستگی داریم. کلید سنجش دو نقطه است، پس ابتدا و انتهای بازه را با تعریف پیوستگی در بازه، پیوسته در نظر می‌گیریم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱۰ گزینه ۱

حاصل حد، وقتی $x \to -۱$، مبهم $\dfrac{۰}{۰}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to-۱} \frac{۲x + \sqrt{۳-x}}{x^۲ + x} \times \frac{۲x - \sqrt{۳-x}}{۲x - \sqrt{۳-x}} = \lim_{x\to-۱} \frac{(۲x)^۲ - (\sqrt{۳-x})^۲}{(x^۲+x)(۲x - \sqrt{۳-x})}$$

$$= \lim_{x\to-۱} \frac{۴x^۲ - ۳ + x}{x(x+۱)(۲x - \sqrt{۳-x})} = \lim_{x\to-۱} \frac{(x+۱)(۴x-۳)}{x(x+۱)(۲x - \sqrt{۳-x})} = \lim_{x\to-۱} \frac{۴x-۳}{x(۲x - \sqrt{۳-x})}$$

$$= \frac{-۴-۳}{(-۱)(-۲-۲)} = \frac{-۷}{(-۱)(-۴)} = -\frac{۷}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۱۱ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) برای به دست آوردن حاصل حد ابتدا عبارت $x(x+\sqrt{x^{2}-8})$ را در مزدوج عبارت $x+\sqrt{x^{2}-8}$ ضرب و تقسیم می کنیم.

ب) چون $x \to -\infty$، در عبارت کسری به دست آمده، برای محاسبهٔ حد حاصل تقسیم جملات پرتوان را در نظر می گیریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to-\infty} x(x+\sqrt{x^{2}-8}) \times \frac{x-\sqrt{x^{2}-8}}{x-\sqrt{x^{2}-8}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x^{2}-x^{2}+8)}{x-\sqrt{x^{2}-8}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{x-\sqrt{x^{2}-8}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{x-|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{x-(-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{2x}=4$$

۱۱۲ گزینه ۲

با استفاده از اتحاد $a^{3}-b^{3}=(a-b)(a^{2}+ab+b^{2})$ داریم:

$$\lim_{x\to2^{+}}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^{2}-4x+4}}=\lim_{x\to2^{+}}\frac{(2-\sqrt[3]{x+6})(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^{2}})}{\sqrt{(x-2)^{2}}(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^{2}})}$$

$$=\lim_{x\to2^{+}}\frac{(2-x)}{(x-2)(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^{2}}}=-\frac{1}{4+4+4}=-\frac{1}{12}$$

روش دوم: (هوپیتال ـ فراتر از کتاب)

$$\lim_{x\to2^{+}}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^{2}-4x+4}}=\lim_{x\to2^{+}}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^{2}}}=\lim_{x\to2^{+}}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{|x-2|}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to2^{+}}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{|x-2|}\xrightarrow[x\to2^{+}]{x-2>0}\lim_{x\to2^{+}}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}=\lim_{x\to2^{+}}\frac{-\frac{1}{3}(x+6)^{\frac{-2}{3}}}{1}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}(2+6)^{\frac{-2}{3}}}{1}=-\frac{1}{3\times4}=-\frac{1}{12}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۱۳

گزینه ۴

چون $f(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، بنابراین $f(-۲)=۰$ است.

$$f(x)=x^۴+ax^۳-۸x \Rightarrow f(-۲)=۱۶-۸a+۱۶=۰$$

$$\Rightarrow ۸a=۳۲ \Rightarrow a=۴ \Rightarrow f(x)=x^۴+۴x^۳-۸x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x+۲$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{l|l}
x^۴+۴x^۳-۸x & x+۲ \\ \cline{2-2}
-(x^۴+۲x^۳) & x^۳+۲x^۲-۴x \\ \cline{1-1}
۲x^۳-۸x & \\
-(۲x^۳+۴x^۲) & \\ \cline{1-1}
-۴x^۲-۸x & \\
-(-۴x^۲-۸x) & \\ \cline{1-1}
۰ &
\end{array}$$

$$f(x)=(x+۲)(x^۳+۲x^۲-۴x)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x(x^۲+۲x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=-۱\pm\sqrt{۵} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ برابر با $x=-۱-\sqrt{۵}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۱۴ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ و $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \frac{3\pi}{4}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. با استفاده از گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{-(\sin^2 x - \cos^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}} -\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 \frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

۱۱۵ گزینه ۱

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + \left[\frac{3}{x^2}\right]}{\left(16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]\right)} = \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + [3 \times (4)^-]}{16x - [-2 \times 4^-]} = \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + [12^-]}{16x - [(-8)^+]}$$

$$= \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + 11}{16x - (-8)} = \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{10x + 6}{16x + 8} = \frac{-5 + 6}{(-8)^- + 8} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۱۶ گزینه ۳

طبق سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(۱)=۸$ و $P(-\frac{۱}{۲})=۵$ است. همچنین داریم:

$$P(x)=(۲x^۲-x-۱)Q(x)+R(x)=((x-۱)(۲x+۱))Q(x)+R(x)\quad ;R(x)=ax+b$$

بنابراین:

$$P(۱)=R(۱)=a+b=۸$$
$$P(-\frac{۱}{۲})=R(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲}a+b=۵$$
$$\begin{cases}a+b=۸\\ -\frac{۱}{۲}a+b=۵\end{cases}\Rightarrow \frac{۳}{۲}a=۳\Rightarrow a=۲\ ,\ b=۸-۲=۶$$

پس: $R(x)=۲x+۶$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۱۷ گزینه ۲

راه‌حل اول: ابهام $\frac{۰}{۰}$ را با گویا کردن از بین می‌بریم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}\times\frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{۲x+\sqrt{۳x+۱}}=\lim_{x\to۱}\frac{(۲x-۷\sqrt{x}+۵)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{۴x^۲-۳x-۱}$$
$$=\lim_{x\to۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}-۵)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{(x-۱)(۴x+۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(۲\sqrt{x}-۵)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)(۴x+۱)}$$
$$=\frac{-۳\times۴}{۲\times۵}=\frac{-۱۲}{۱۰}=-۱/۲$$

راه‌حل دوم: با استفاده از هوپیتال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}=\frac{۰}{۰}$$
$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۱}\frac{۲-\frac{۷}{۲\sqrt{x}}}{۲-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}}=\frac{۲-\frac{۷}{۲}}{۲-\frac{۳}{۴}}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۴}}=-\frac{۶}{۵}=-۱/۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۱۸ گزینه ۲

ابتدا حد تابع $\frac{۱}{x^۳} - \frac{۱}{x}$ را وقتی $x \to ۰^-$ به دست می آوریم. اگر حاصل حد تابع محاسبه شده در قسمت قبل را L در نظر بگیریم، باید $\lim\limits_{x\to L} f(x)$ را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۳} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲ - ۱}{x^۳} = \frac{۰ - ۱}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

پس باید حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۳}) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x - \sqrt{x^۲ + ۱})$$
$$= \lim_{x\to +\infty} (x - |x|) = \lim_{x\to +\infty} (x - x) = ۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۱۱۹ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است پس حاصل حد آن در بی‌نهایت از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید.
ازطرفی چون حاصل حد تابع در بی‌نهایت یک عدد ثابت شده است پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

طبق گام اول داریم: $n = ۲$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲ - ۳x + ۱}{۳x^۲ + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲}{۳x^۲} = \frac{a}{۳}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{a}{۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow a = ۲$$

اکنون با مشخص شدن مقدار a، حاصل $f(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۲x^۲ - ۳x + ۱}{۳x^۲ + x} \Rightarrow f(-۱) = \frac{۲(-۱)^۲ - ۳(-۱) + ۱}{۳(-۱)^۲ - ۱} = \frac{۲ + ۳ + ۱}{۳ - ۱} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

۱۲۰

گزینه ۲

چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲ - ۱$ بخش‌پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^۲ - ۱$ برابر صفر است.

$$x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = ۱ , -۱$$

بنابراین داریم:

$$p(۱) = ۰ , p(-۱) = ۰ \quad (*)$$

اکنون باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x - ۲$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(۲)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x) = p(x - ۱) + p(۱ - x)$$

$$\xrightarrow{x=۲} Q(۲) = p(۲ - ۱) + p(۱ - ۲) = p(۱) + p(-۱)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(۲) = ۰ + ۰ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹