www.alirezaafshar.org

حسابان

۱ خط $d_1 : y = 2x + 1$ و خط d_2 که از نقطهٔ $A(3 , 2)$ می‌گذرد، با جهت مثبت محور xها، زاویه‌های مساوی ایجاد کرده‌اند. معادلهٔ خط d_2 کدام است؟

۱) $y = 2x - 4$
۲) $y = 2x + 4$
۳) $y = 4x - 2$
۴) $y = 4x + 2$

۲ اگر $\sqrt{3^{x} + 72\sqrt{3}} = 3^{\frac{9}{4}}$ باشد، x کدام است؟

۱) $3\sqrt{3}$
۲) $\frac{5}{2}$
۳) $9\sqrt{3}$
۴) $12\sqrt{3}$

۳ به ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت است؟ (با تغییر)

۱) $a < -4 , a \neq -5$
۲) $a > -4$
۳) $a < 4$
۴) $a > 4$

۴ به ازای چند مقدار k، مجموعه جواب معادله $\frac{k+2}{3x} = \frac{5-x}{4x-x^2}$ تهی است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۵ خط $y = k \ (k \neq 0)$ سهمی $y = x^2 + 2x$ را در ۲ نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کرده است. به ازای کدام مقدار k دو خطی که از O (مبدأ مختصات) به نقاط برخورد خط افقی و سهمی وصل می‌شوند، بر هم عمودند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶ خط $3x = 4y - 5$ و دایره C به مرکز $O(3 , 2)$ یک نقطه مشترک دارند. عدد مساحت این دایره چند برابر عدد محیط آن است؟

۱) $\frac{5}{3}$
۲) ۰/۶
۳) ۱/۲
۴) $\frac{10}{3}$

www.alirezaafshar.org

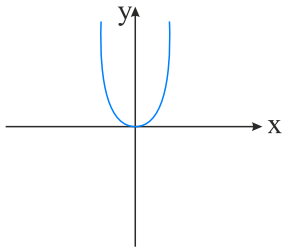
۷ اگر $A(۲ , ۰)$، $B(۳ , ۱)$ و $C(۱ , ۲)$ باشند، مختصات محل برخورد عمود منصف‌های AB و AC کدام است؟

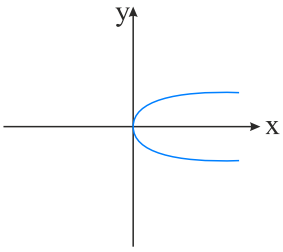
۱) $(\frac{۷}{۶} , \frac{۱۱}{۶})$
۲) $(\frac{۱۱}{۶} , \frac{۷}{۶})$
۳) $(\frac{۱۱}{۷} , \frac{۶}{۷})$
۴) $(\frac{۶}{۷} , \frac{۱۱}{۷})$

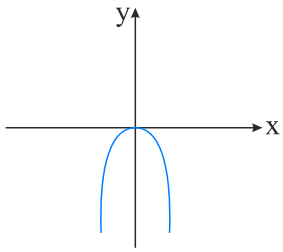
۸ معادلهٔ $\sqrt{x^۲ + x + ۱۰} + \sqrt{x^۲ + x + ۳} = ۷$ چند جواب متمایز دارد؟

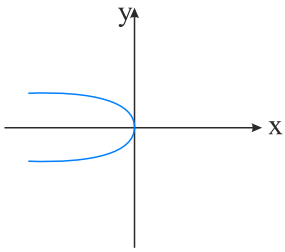
۱) صفر
۲) چهار
۳) دو
۴) سه

۹ اگر $f(x) = x$ و $g(x) = -x$ باشد، نمودار تابع $f \times g$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۰ در دنبالهٔ حسابی با اختلاف مشترک $-\frac{۱}{۷}$، مجموع ۲۲ جملهٔ اول برابر ۵۵ می‌باشد. جملهٔ هشتم این دنباله کدام است؟

۱) ۵
۲) ۷
۳) ۴
۴) ۳

۱۱ اگر $\log(x - ۲) + \log(۹ - x) > ۱$ آن‌گاه مجموعه جواب x کدام است؟

۱) $۴ < x < ۷$
۲) $۵ < x < ۸$
۳) $۳ < x < ۷$
۴) $۳ < x < ۸$

۱۲ حاصل عبارت $(\log_{۱۵}۵)^۲ + \log_{۱۵}۳\log_{۱۵}۷۵$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۱۵
۴) $\log_۵^۳$

۱۳ مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x + ۱| - |x - ۱| < ۳$ شامل چند عدد صحیح است؟ $|۲x - ۴|$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۴ به ازای کدام مقدار a در معادلهٔ درجه دوم $۹x^۲ - ۲۵ax + ۴a = ۰$ قدر مطلق تفاضل جذر ریشه‌ها برابر $\frac{۱}{۶}$ است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۵ اگر $f(x)$ تابعی خطی با شیب ۲ و عرض از مبدأ ۱ و $g(x)$ مجموعه خطوطی موازی نیمساز اول و سوم با عرض از مبدأ h باشند، به ازای کدام مقدار h، مقدار تابع f به ازای $g(۰)$ با $(gof)(۱)$ برابر است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۱۶ در مورد جواب‌های معادلهٔ $\frac{۳x-۱}{x+۱} + \frac{۱}{x-۲} = \frac{۲x}{x-۲}$ کدام صحیح است؟

۱) یک جواب منفی دارد
۲) دو جواب مثبت دارد
۳) یک جواب مثبت دارد
۴) معادله جواب ندارد

۱۷ تعداد صفرهای تابع $f(x) = (x^۲ + ۳x + ۳)^۲ + x^۲ + ۳x + ۱$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

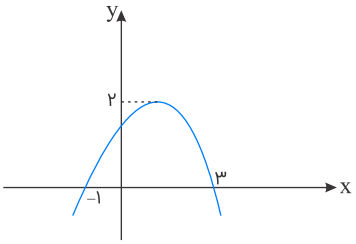
۱۸ از معادلهٔ $\log\log_۲\log_۳(۲x+۱) = ۰$ مقدار x کدام است؟

۱) ۴/۵
۲) ۳/۵
۳) ۵
۴) ۴

۱۹ اگر $۸۱^x = ۳^{x^۲-۲}$ باشد، $\log_۶^{(x-۲)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۰ نمودار تابع درجهٔ دوم $y = f(x)$ به شکل زیر است. $f(۴)$ کدام است؟



۱) -۳
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) -۵
۴) $-\frac{۵}{۲}$

۲۱ به ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟

۱) $a > ۶$ یا $a < ۲$

۲) $a > ۴$ یا $a < ۳$

۳) $۲ < a < ۶$

۴) $۳ < a < ۴$

۲۲ وارون تابع $f(x) = ۱ + \log_۳ x$ کدام است؟

۱) $۳^{x-۱}$

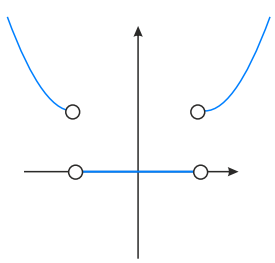
۲) $۳^x - ۱$

۳) $۳^{x+۱}$

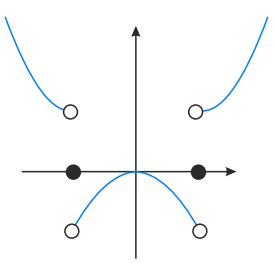
۴) $۳^x + ۱$

۲۳ اگر $f(x) = \frac{|x|}{x}$، $g(x) = x^۲ - ۱$ و $h(x) = x^۲$ باشد، نمایش هندسی $y = h(x)(fog(x))$ در صفحهٔ مختصات به کدام صورت است؟

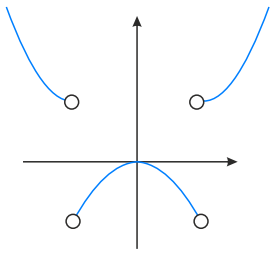
۱)



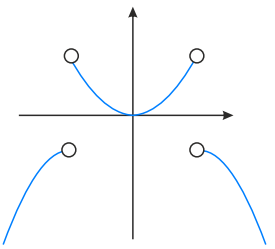
۲)



۳)



۴)



۲۴ خط d از نقطهٔ $(-۱, ۱)$ گذشته و مجموع عرض از مبدأ و طول از مبدأ آن برابر با ۲ است. مجموع مقادیر ممکن برای شیب d کدام است؟

۱) -۲

۲) $-۲\sqrt{۲}$

۳) -۴

۴) $-۴\sqrt{۲}$

۲۵ نقطهٔ $H(۲,۱)$ را روی خط $۳x - y = ۵$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با ارتفاع AH را روی خط $۳x - y = ۵$ می‌سازیم، به‌طوری‌که محیط مثلث $\sqrt{۲۷۰}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A کدام است؟ (با تغییر)

۱) $(\frac{۷}{۲}, \frac{۱}{۲})$

۲) $(\frac{۱۳}{۲}, \frac{-۱}{۲})$

۳) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$

۴) $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱۱}{۶})$

۲۶ اگر $x = ۲$ ریشهٔ معادلهٔ $۵x^۲ - ۷mx = -۸$ باشد، ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ + ۲mx + ۴ = ۰$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۱

۳) -۱

۴) -۲

۲۷ اگر $\log ۵ = a$ باشد، $\log ۲۰$ کدام است؟

۱) $-a$
۲) a
۳) $۲ - a$
۴) $۲ + a$

۲۸ معادله $\sqrt{x - ۲} + \sqrt{۲x + ۳} + ۱ = ۰$ دارای چند جواب حقیقی است؟

۱) یک
۲) دو
۳) صفر
۴) سه

۲۹ تابع $f = \{(۲,۱), (۳,۲), (۴,۵), (۱,۷)\}$ و $g = \{(۱,۲), (۳,۱), (a,۳), (b,۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(۴,۲) \in fog$ و $(۴,۱) \in gof$ باشند، دوتایی (a,b) کدام است؟

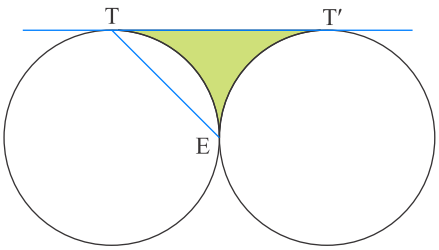
۱) $(۳,۴)$
۲) $(۴,۳)$
۳) $(۴,۵)$
۴) $(۵,۴)$

۳۰ کدام مقادیر زیر ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۲}{x} - \frac{x}{x-۲} = ۵$ می‌باشد؟

۱) $\frac{۱ \pm ۲\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{۳ \pm \sqrt{۲}}{۳}$
۳) $\frac{۱ \pm \sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۳ \pm \sqrt{۳}}{۳}$

هندسه

۳۱ در شکل زیر دو دایره به شعاع‌های برابر مماس خارج هستند. اگر $TE = ۴$ سانتی‌متر باشد، مساحت قسمت رنگی چند است؟

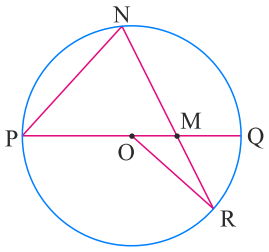


۱) $۸\sqrt{۲} - ۳\pi$
۲) $۱۶ - ۴\pi$
۳) $۴\sqrt{۲} - \pi$
۴) $۲\sqrt{۲} + ۳\pi$

۳۲ مطابق شکل $CD = ۵$ است. نقطهٔ M روی d قرار دارد، به‌طوری‌که مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر می‌باشد. طول این مسیر کدام است؟

۱) $\sqrt{۴۰}$
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۴۱}$
۴) $\sqrt{۶۱}$

۳۳ در شکل زیر، نقطهٔ O مرکز دایره است. اگر $\hat{P} = ۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{RQ} = ۵۰^\circ$ باشد، زاویهٔ RMQ کدام است؟



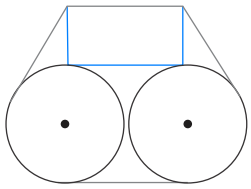
۱) ۶۰°

۲) ۶۵°

۳) ۷۰°

۴) ۷۵°

۳۴ در شکل زیر، دو دایره با شعاع‌های مساوی $r = \sqrt{۳}$ مماس خارج هستند. روی این دو دایره مستطیلی قرار گرفته است که طول آن دو برابر عرضش است. اگر عرض این مستطیل با شعاع دایره برابر باشد، طول نخی که دورتادور شکل است چندبرابر $۴\sqrt{۳} + ۳$ است؟ $(\pi \simeq ۳)$



۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

۳۵ رئوس مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ روی دایرهٔ $C(۰, ۶)$ قرار دارند. اگر $AC = ۶$ و $AB = ۶\sqrt{۲}$ باشد، طول کمان $\overset{\frown}{BC}$ کدام است؟

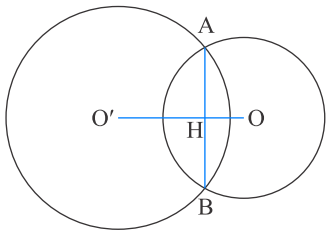
۱) ۷π

۲) ۵π

۳) ۶π

۴) ۱۲π

۳۶ در شکل زیر اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره ۶ سانتی‌متر و $AB = ۴$ است. اگر $OH \times O'H = ۵$ آنگاه حاصل‌ضرب شعاع‌های دو دایره کدام است؟



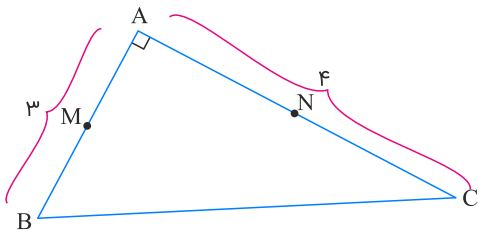
۱) ۱۴

۲) ۱۵

۳) ۱۶

۴) ۱۷

۳۷ مطابق شکل M و N وسط‌های AB و AC هستند. نقطهٔ P روی BC به‌طوری قرار گرفته که محیط MNP کمترین مقدار است. مساحت مثلث MNP کدام می‌باشد؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

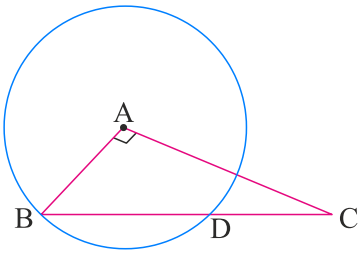
۲) ۶

۳) ۹

۴) ۴

www.alirezaafshar.org

۳۸ در شکل زیر ABC مثلثی قائم‌الزاویه به اضلاع $AB = ۳$ و $AC = ۴$ است. طول DC کدام است؟ (A مرکز دایره)



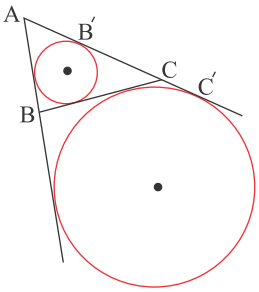
۱) $\frac{۱}{۵}$

۲) $\frac{۶}{۵}$

۳) $\frac{۷}{۵}$

۴) $\frac{۸}{۵}$

۳۹ در شکل زیر، دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث ABC به شعاع‌های ۲ و ۶ رسم شدند. اگر $AB' = ۳$ باشد، طول $B'C'$ چقدر است؟



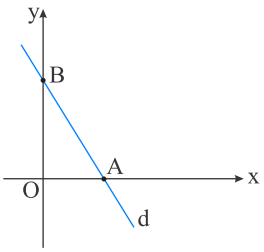
۱) ۶

۲) ۸

۳) ۵

۴) ۱۰

۴۰ در تجانس مستقیم به مرکز O و نسبت k، خط d را تصویر می‌کنیم تا محورهای مختصات را در A' و B' قطع کند. اگر مساحت چهار ضلعی $ABB'A'$ پانزده برابر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OA'B'}$ باشد، k کدام است؟



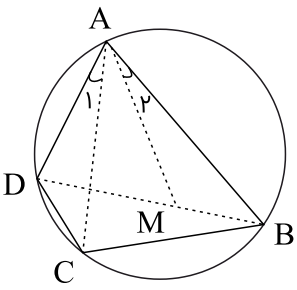
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۴۱ در شکل زیر، $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ حاصل $AD.BC$ برابر کدام است؟



۱) $DM.AC$

۲) $BM.AC$

۳) $AB.CD$

۴) $BD.BM$

۴۲ کدام‌یک از تبدیلات زیر، طولپا نیست؟

۱) انتقال

۲) دوران

۳) تجانس

۴) بازتاب

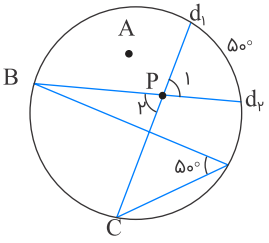
۴۳ پاره‌خط AB به طول ۱۲ واحد مفروض است. اندازه وتری از دایره به شعاع AB و موازی آن و مماس بر دایره به قطر AB کدام است؟

۱) ۱۲
۲) $۸\sqrt{۳}$
۳) $۱۲\sqrt{۳}$
۴) ۱۶

۴۴ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) ارتفاع AH، ضلع BC را به دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد تقسیم کرده است. اگر بازتاب نقطهٔ H نسبت به AB و AC را به‌ترتیب P و Q بنامیم، طول PQ کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۴۵ اگر نقطهٔ A را نسبت به $d_۱$ و سپس نسبت به $d_۲$ بازتاب دهیم، $AP\,A''$ چند درجه است؟ (A'' بازتاب‌یافتهٔ A است)



۱) ۱۸۰°
۲) ۹۰°
۳) ۱۵۰°
۴) ۷۵°

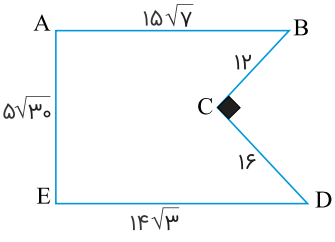
۴۶ دو مماس عمود بر هم بر دایره‌ای به شعاع $۱۲\sqrt{۲}$ در نقطه M متقاطع‌اند. فاصله M از مرکز دایره کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۱۸
۳) ۳۳
۴) ۱۶

۴۷ نقطهٔ P بیرون دایره‌ای به شعاع ۸ قرار دارد. فاصلهٔ نقطهٔ P تا نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره ۲ است. اندازهٔ مماسی که از نقطهٔ P بر دایره رسم می‌شود، کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

۴۸ اگر در شکل زیر بخواهیم بدون تغییر محیط و با استفاده از تبدیل بازتاب، مساحت را افزایش دهیم، مساحت جدید چقدر نسبت به مساحت اولیه بیشتر است؟



۱) ۹۶
۲) ۱۹۲
۳) ۴۸
۴) ۲۴

۴۹ اگر مثلث ABC را با بردار $\frac{۱}{۴}\overrightarrow{AB}$ انتقال دهیم و به مثلث $A'B'C'$ تبدیل کنیم، مساحت چهارضلعی $ACC'B'$، چند برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

۱) مساحت‌ها برابر است.
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

۵۰ مساحت هشت ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۲ واحد کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) $۸(\sqrt{۲}-۱)$
۳) $۴(۱+\sqrt{۲})$
۴) $۴(۲+\sqrt{۲})$

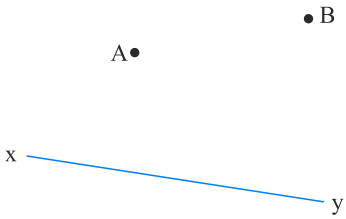
۵۱ تصویر مربع $ABCD$ تحت تجانس به مرکز مربع و نسبت $\frac{۳}{۴}$، مربع $A'B'C'D'$ است. اگر مساحت بین این دو مربع ۷ باشد، محیط مربع $A'B'C'D'$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۱۴

۵۲ در چهارضلعی محاطی $ABCD$، $\hat{A}=۵۵^\circ$ و $\hat{B}=۸۵^\circ$ است. حاصل $\hat{C}-\hat{D}$ چند درجه است؟

۱) ۶۰°
۲) ۵۵°
۳) ۳۰°
۴) ۷۰°

۵۳ مطابق شکل می‌خواهیم نقطهٔ M را بر xy بیابیم که $B\hat{M}y=A\hat{M}x$ باشد، از کدام تبدیل باید استفاده کنیم؟



۱) انتقال
۲) بازتاب محوری
۳) دوران
۴) هیچ‌کدام

۵۴ فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایرهٔ $C(O\ ,\ ۳)$ برابر $x-۱۰$ است. به ازای چند مقدار طبیعی x، نقطهٔ A بیرون دایرهٔ C قرار دارد؟

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

۵۵ از نقطهٔ A بر دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ مماس‌هایی رسم شده است. اگر زاویهٔ بین مماس‌ها ۶۰° باشد، طول این مماس‌ها چقدر است؟

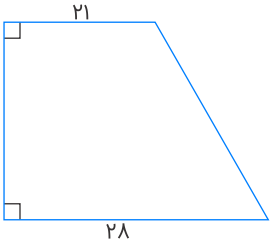
۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۳
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) ۱

www.alirezaafshar.org

۵۶ بازتاب خط $y = 2x - 1$ نسبت به نقطهٔ $M(2, -1)$، از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(0, 9)$
۲) $(1, -3)$
۳) $(3, 0)$
۴) $(4, -1)$

۵۷ ذوزنقهٔ زیر بر دایره‌ای محیط است. بزرگ‌ترین فاصلهٔ رأس ذوزنقه تا نقاط این دایره چقدر است؟

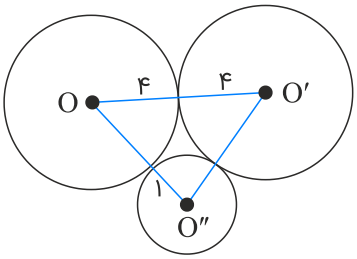


۱) ۴۴
۲) ۳۶
۳) ۴۰
۴) ۳۲

۵۸ اگر $A'B'$ تصویر پاره‌خط $AB = 5cm$ در دوران به مرکز مبدأ و زاویهٔ $45°$ بوده و $A''B''$ تصویر پاره‌خط $A'B'$ در تجانس به مرکز مبدأ و نسبت تجانس ۴ باشد، اندازهٔ $A''B''$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۴۰
۴) ۸۰

۵۹ در شکل زیر مساحت مثلث $OO'O''$ کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۳۲
۳) ۲۴
۴) ۱۲

۶۰ در مثلث ABC، نقطهٔ O محل برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ $\hat{B}$ و $\hat{C}$ است. از O بر BC عمود می‌کنیم و پای عمودی را H می‌نامیم و دایره به مرکز O و شعاع OH رسم می‌کنیم. کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) اضلاع مثلث بر دایرهٔ رسم‌شده مماس‌اند.
۲) دایرهٔ رسم‌شده از رئوس مثلث عبور می‌کنند.
۳) O روی نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ قرار دارد.
۴) O محل برخورد نیمسازهای مثلث ABC است.

آمار و احتمال

۶۱ چه تعداد از عبارت‌های زیر، مشخص‌کنندهٔ یک گزاره هستند؟

- برو کار کن مگو چیست کار.
- هوای آسمانت ابری!
- به پنجره بیاندیش!
- آیا به مزرعه می‌روی؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۶۲ مجموعهٔ A شامل تمام مضرب‌های دورقمی عدد ۷ است. این مجموعه چند زیرمجموعه با حداقل سه عضو دارد؟

۱) ۴۰۰۴ ۲) ۸۰۹۶

۳) ۴۰۴۸ ۴) ۸۱۰۰

۶۳ اگر $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \ , \ x^3 = x\}$ و $A \cap B = \{1, -1\}$ و مجموعهٔ $(A - B) \times (B - A)$ دارای ۸ عضو باشد، تعداد عضوهای مجموعهٔ B کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰

۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۶۴ یک خانوادهٔ سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد؟ در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است.

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۶۵ برای دو مجموعهٔ A و B، تساوی $(A \cup B) \cap (A \cup B') = (A - B) \cup (A - B')$، .....

۱) همواره برقرار است.

۲) به شرط $A = B$ برقرار است.

۳) به شرط $A \cap B = \varnothing$ برقرار است.

۴) فقط در صورتی برقرار است که A و B هر دو تهی باشند.

۶۶ دو تاس را باهم می‌ریزیم با کدام احتمال مجموع دو عدد روشده بیشتر از ۹ است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۳۶}$

۶۷ اگر A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای باشند، در کدام حالت $P(B-A)=P(B)-P(A)$ درست است؟

۱) $A \subset B$
۲) همواره
۳) $A \cap B = \varnothing$
۴) $P(A) < P(B)$

۶۸ مجموعهٔ A دارای ۱۵ زیرمجموعهٔ ناتهی و مجموعهٔ B دارای ۸ زیرمجموعه است. تعداد زیرمجموعه‌های $C = A \cap (A' - B)'$ کدام است؟ (با تغییر)

۱) ۴
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۶

۶۹ کیسه‌ای شامل چهار مهرهٔ آبی، پنج مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ سفید است. دو مهره باهم و به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. در کدام گزینه احتمال نادرست محاسبه شده است؟

۱) احتمال آنکه دو مهره همرنگ باشند برابر $\frac{۱۶}{۴۵}$ است.
۲) احتمال آنکه دو مهره همرنگ نباشند برابر $\frac{۲۹}{۴۵}$ است.
۳) احتمال آنکه حداقل یک مهره آبی باشد برابر $\frac{۲}{۳}$ است.
۴) احتمال آنکه حداکثر یک مهره آبی باشد برابر $\frac{۱۱}{۱۵}$ است.

۷۰ متمم مجموعهٔ $[(A \cup B) - A'] \cup [B' \cap (A \cup B)]$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\varnothing$
۲) U
۳) A'
۴) B'

۷۱ حاصل هم‌ارزی زیر کدام است؟

$$\sim (\sim p \Rightarrow q) \equiv ?$$

۱) $\sim p \wedge q$
۲) $\sim p \vee q$
۳) $\sim p \vee \sim q$
۴) $\sim p \wedge \sim q$

۷۲ مجموعهٔ $A = \{a, b, c, d, e\}$ دارای چند افراز است که سه عضو a، b و d در داخل یک مجموعه از افراز باشند؟

۱) ۱۵
۲) ۱۰
۳) ۶
۴) ۵

۷۳ عکس نقیض گزارهٔ شرطی $(p \vee q) \Rightarrow r$ کدام است؟

۱) $\sim r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
۲) $r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
۳) $r \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
۴) $\sim r \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

۷۴ در جدول ارزش‌های سه گزاره، در چند حالت حداقل دو گزاره درست است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۷

۷۵ روی هر کارت یکی از اعداد ۱ تا ۱۲ را نوشته و سپس در یک کیسه قرار می‌دهیم. سپس به دلخواه یک کارت از کیسه بیرون می‌آوریم. اگر عدد زوج باشد، یک عدد دیگر از کیسه بیرون می‌آوریم و در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم، اگر عدد فرد باشد یک تاس پرتاب‌کرده و عدد روشده را در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم. سپس از اعداد ساخته‌شده، در همهٔ حالت‌های ممکن، مجموعهٔ A را تشکیل می‌دهیم. یک عدد از مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر است؟

۱) $\frac{۹}{۳۴}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۹}{۴۰}$
۴) $\frac{۲}{۹}$

۷۶ اگر $A = \{۱, ۳\}$ و $B = [۱, ۳]$ باشد، آنگاه نمودار $(A \times B) \cup (B \times A)$ کدام است؟

۱) سطح یک مربع
۲) دو پاره‌خط افقی
۳) دو پاره‌خط عمودی
۴) سطح یک مستطیل

۷۷ دو مجموعهٔ $A = \{\varnothing, a+۱, \sqrt{\frac{۹}{۴}}, \frac{b}{۳}\}$ و $B = \{۲a-۱, \frac{۳}{۲}, b+۱, \{\}\}$ مفروض‌اند. اگر $A = B$ باشد، زوج مرتب (a, b) کدام است؟

۱) $(-۲, \frac{۳}{۲})$
۲) $(۲, -\frac{۳}{۲})$
۳) $(\frac{۳}{۲}, -۲)$
۴) $(-\frac{۳}{۲}, ۲)$

۷۸ از تساوی $A \cap (B \cup C) = B - C$ برای سه مجموعهٔ A، B و C، کدام گزینه را می‌توان نتیجه گرفت؟

۱) $B \cap C = \varnothing$
۲) $A \subseteq C$
۳) $B \subseteq A \cup C$
۴) $C \subseteq A \cup B$

۷۹ دو فرزند خانواده‌ای پسر هستند با کدام احتمال فرزند سوم آن‌ها پسر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۸}$
۴) $\frac{۵}{۸}$

۸۰ مجموعهٔ $\{a, b, c, d, e\}$ دارای چند افراز حداقل سه قسمتی است؟

۱) ۴۱
۲) ۲۶
۳) ۳۶
۴) ۵۲

۸۱ تاسی همگن را می‌اندازیم، هر عددی آمد به همان تعداد سکه پرتاب می‌کنیم. اگر تعداد خط‌های ظاهرشده بیش از ۴ باشد، به چه احتمالی تاس عدد اول آمده است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۳}{۹}$

۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۸۲ اگر $n \in N$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} | m \geq -n, ۲^m \leq n\}$، آنگاه مجموعهٔ $A_۳ \cap A_۴$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۶

۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۸۳ اگر $A = \{x | x \in \mathbb{N} \ , \ ۲ \leq x \leq ۵\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \ , \ ۳ \leq x \leq ۴\}$، آنگاه $A^۲ - B^۲$ چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۰

۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۸۴ پرتاب‌های بسکتبالیست A، ۲۰ درصد بیشتر از پرتاب‌های بسکتبالیست B وارد سبد می‌شود. اگر هرکدام از این دو نفر یک پرتاب انجام دهند و احتمال آنکه حداقل یکی از این دو پرتاب وارد سبد شود برابر ۷۶ درصد باشد، با کدام احتمال پرتاب بسکتبالیست A وارد سبد شده است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۴

۳) ۰/۷ ۴) ۰/۲۴

۸۵ اگر $A_n = [-\frac{۱}{n}, ۲ + \frac{۱}{n})$ آنگاه $A_۱ \cup A_۲ \cup ... \cup A_{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $[-۱, ۳)$ ۲) $[-\frac{۱}{۱۰۰}, ۳]$

۳) $[-\frac{۱}{۱۰۰}, \frac{۲۰۱}{۱۰۰})$ ۴) $[-۱, \frac{۲۰۱}{۱۰۰})$

۸۶ کیسه‌ای شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۷ مهرهٔ قرمز است. مهره‌ای را از کیسه خارج می‌کنیم و آن را به کیسه باز می‌گردانیم و این آزمایش را ۵ بار تکرار می‌کنیم. احتمال آنکه فقط بار سوم و چهارم مهره‌های بیرون‌آمده قرمز باشند، کدام است؟

۱) $(\frac{۳}{۱۲}) \times (\frac{۴}{۱۲})$ ۲) $(\frac{۳}{۱۲})^۲ \times (\frac{۴}{۱۲})^۳$

۳) $(\frac{۵}{۱۲})^۳ \times (\frac{۷}{۱۲})^۲$ ۴) $(\frac{۵ \times ۷}{۱۲ \times ۱۲})^۵$

۸۷ کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. سه مهره به تصادف به‌طور متوالی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه رنگ مهره‌ها یک‌درمیان عوض شوند، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$

۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

www.alirezaafshar.org

۸۸ در جبر مجموعه‌ها چند مورد از توزیع‌پذیری‌های زیر الزاماً وجود دارد؟

الف) توزیع‌پذیری اجتماع نسبت به اشتراک

ب) توزیع‌پذیری تفاضل نسبت به اشتراک

ج) توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

د) توزیع‌پذیری اجتماع نسبت به تفاضل

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۸۹ در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۹۰ می‌دانیم که رمز یک کارت اعتباری بانکی چهاررقمی با ارقام متمایز ۵، ۲، ۴ و ۱ ساخته شده و مضرب ۶ است. احتمال درست وارد کردن این رمز برای دفعهٔ اول چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

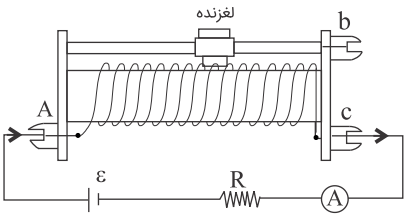
فیزیک

۹۱ دو کرهٔ فلزی هم‌شکل و هم‌اندازه که دارای بارهای الکتریکی $۶q$ و $-۹q$ هستند، در فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند و در این فاصله نیروی F را به یکدیگر وارد می‌کنند. دو کره را تماس داده و سپس در همان فاصلهٔ d قرار می‌دهیم. در این حالت دو کره نیروی F' را به یکدیگر وارد می‌کنند. $\left|\frac{F'}{F}\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

۹۲ اگر در مدار زیر، لغزنده به سمت B حرکت کند، شدت جریانی که آمپرسنج نشان می‌دهد، چگونه تغییر می‌کند؟



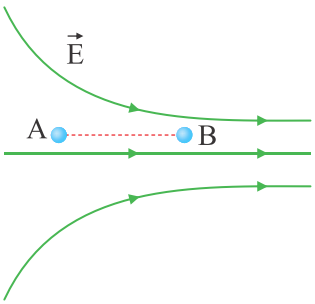
۱) ثابت می‌ماند.

۲) کم می‌شود.

۳) زیاد می‌شود.

۴) بسته به مقدار R، ممکن است کم یا زیاد شود.

۹۳ در شکل زیر، خطوط میدان الکتریکی در قسمتی از فضا نشان داده شده است. در مورد پتانسیل الکتریکی نقاط A و B و انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون در حرکت از A تا B کدام مقایسه درست است؟



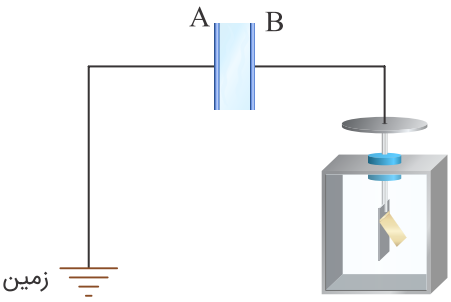
۱) $U_A = U_B \, , \; V_A = V_B$

۲) $U_A = U_B \, , \; V_B > V_A$

۳) $U_A > U_B \, , \; V_B < V_A$

۴) $U_A < U_B \, , \; V_B < V_A$

۹۴ در شکل زیر دو صفحهٔ A و B فلزی و باهم موازی‌اند. صفحهٔ A به زمین و صفحهٔ B به یک الکتروسکوپ که صفحات آن باز هستند وصل شده است. اگر یک صفحهٔ شیشه‌ای بدون بار را بین صفحات خازن وارد کنیم، انحراف ورقه‌های الکتروسکوپ .....



۱) کم می‌شود.

۲) زیاد می‌شود.

۳) تغییر نمی‌کند.

۴) ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود.

۹۵ در هر سانتی‌متر مربع از صفحه‌های خازنی به‌طور متوسط $0/18\ \mu C$ بار الکتریکی ذخیره شده است. اگر ثابت دی‌الکتریک خازن ۱۰ باشد، بزرگی میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن تقریباً چند کیلوولت بر متر است؟ $(\varepsilon_0 \simeq 9 \times 10^{-9}\ C^2/N.m^2)$

۱) ۱۰

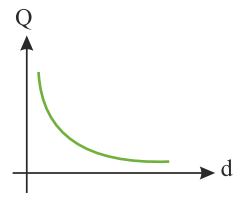
۲) ۲۰

۳) ۴۰

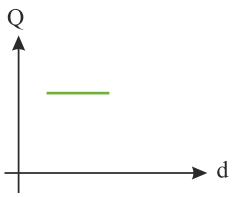
۴) ۵۰

۹۶ خازن تختی را پس از باردارشدن متصل به مولد نگه می‌داریم و سپس فاصلهٔ بین صفحاتش را زیاد می‌کنیم. کدام گزینه تغییرات بار روی صفحات خازن را برحسب فاصلهٔ دو صفحه درست نشان می‌دهد؟

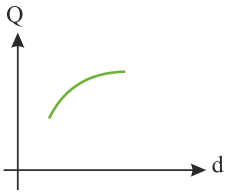
۱)



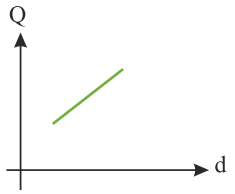
۲)



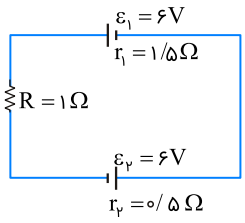
۳)



۴)



۹۷ در مدار زیر، اختلاف‌پتانسیل الکتریکی دو سر مولد ε_1 چند ولت است؟



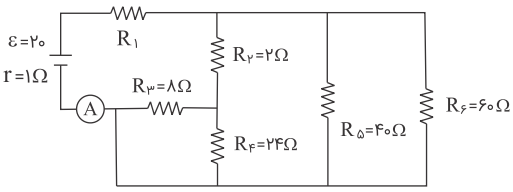
۱) صفر

۲) ۳

۳) ۶

۴) ۱۲

۹۸ در مدار زیر، مقاومت R_1 چند اهم باشد تا آمپرسنج ایده‌آل A، ۲ آمپر را نشان دهد؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۹

۴) ۱۰

۹۹ خازنی به ظرفیت $50\,\mu F$ مفروض است. اگر فاصلهٔ بین صفحات خازن سه برابر و قطر سطح مقطع دایره شکل آن نصف شود و فضای خالی بین صفحات خازن را با دی‌الکتریکی با ثابت $k = 3$ پر کنیم، ظرفیت خازن جدید چند میلی‌فاراد خواهد شد؟

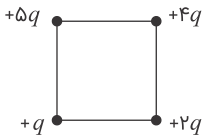
۱) $1/25 \times 10^{-3}$

۲) $1/25 \times 10^{-2}$

۳) ۰/۲

۴) ۲

۱۰۰ اگر در یک رأس مربعی بار q قرار گیرد، میدان الکتریکی حاصل از آن در مرکز مربع E است. حال اگر در چهار رأس همان مربع بارهای الکتریکی مطابق شکل قرار گیرند، اندازهٔ میدان الکتریکی در مرکز آن چند E می‌شود؟



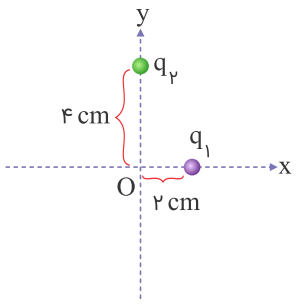
۱) $\sqrt{2}$

۲) $2\sqrt{2}$

۳) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

۴) $3\sqrt{2}$

۱۰۱ در شکل زیر اگر بردار میدان الکتریکی در نقطهٔ O به‌صورت $\vec{E} = 22500(-\vec{i} + \vec{j})\,N/C$ باشد، q_1 و q_2 برحسب نانوکولن به‌ترتیب از راست به چپ کدام گزینه‌اند؟ $(k = 9 \times 10^9\,N.m^2/C^2)$



۱) -1 و $+4$

۲) $+1$ و -4

۳) -2 و $+8$

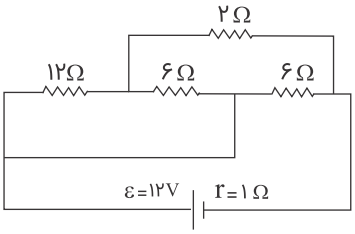
۴) $+2$ و -8

www.alirezaafshar.org

۱۰۲ برای ساختن یک خازن، دو صفحهٔ فلزی، یک ورقهٔ میکا (به ضخامت $۰/۳\,mm$ و $k = ۷$)، یک ورقهٔ شیشه‌ای (به ضخامت $۰/۲\,cm$ و $k = ۵$)، یک لایه پارافین (به ضخامت $۰/۱\,cm$ و $k = ۲$) و یک لایه پلاستیک (به ضخامت $۰/۲\,mm$ و $k = ۳$) در اختیار داریم. برای به دست آوردن بیشترین ظرفیت با کدام ورقه باید میان صفحات فلزی را پر کنیم؟

۱) میکا
۲) شیشه
۳) پارافین
۴) پلاستیک

۱۰۳ در مدار زیر، توان تلف‌شده در باتری چند وات است؟

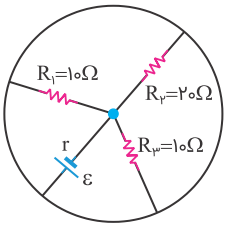


۱) ۴/۵
۲) ۹
۳) ۱۸
۴) ۲۷

۱۰۴ در آزمایش قطره - روغن میلیکان جرم یک قطرهٔ روغن $۱۲/۸ \times ۱۰^{-۱۵}\,kg$ و میدان الکتریکی بین دو ورقهٔ فلزی که قطرهٔ روغن مابین آن‌ها معلق است $۱/۰ \times ۱۰^{۵}\,N/C$ می‌باشد. تعداد الکترون‌هایی که قطرهٔ روغن جذب کرده یا از دست داده کدام است؟ $(g = ۱۰\,N/kg, e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹})$

۱) ۸
۲) ۸×۱۰^{۱۰}
۳) ۸×۱۰^{۱۵}
۴) ۸×۱۰^{۸}

۱۰۵ در شکل زیر، اگر جریان الکتریکی عبوری از مقاومت $R_۲$ برابر با ۲ آمپر باشد، جریانی که از مولد عبور می‌کند برابر با چند آمپر است؟

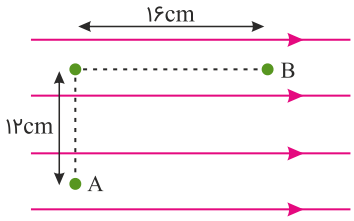


۱) ۱۰
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۱

۱۰۶ در شکل زیر، میدان الکتریکی برآیند در نقطهٔ M برابر با $\vec{E}$ است. اگر به‌جای بار $q_۱$ بار $-۲q_۱$ در همان نقطه قرار گیرد، میدان برآیند در نقطهٔ M برابر با $-\frac{\vec{E}}{۲}$ خواهد شد. نسبت $\frac{q_۱}{q_۲}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) ۴
۴) -۴

۱۰۷ نقاط A و B در فضایی قرار دارند که در آن میدان الکتریکی یکنواختی به شدت $10^5\ N/C$ برقرار است. چنانچه پتانسیل نقطهٔ B برابر با $14\ kV$ باشد، پتانسیل نقطهٔ A چند kV است؟



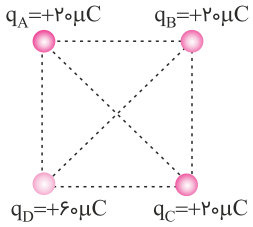
۱) ۲

۲) ۳۰

۳) ۱۶

۴) ۲۶

۱۰۸ در چهار رأس یک مربع به ضلع ۲۰ سانتی‌متر، مطابق شکل زیر، بارهای نقطه‌ای قرار داده‌ایم. اگر یک بار $-10\ \mu C$ را در مرکز مربع قرار دهیم، نیروی وارد بر آن چند نیوتون و در کدام جهت خواهد بود؟



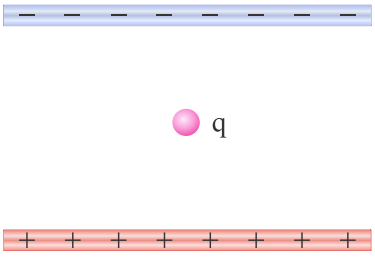
۱) $180\sqrt{2}$، به‌سمت چپ

۲) ۱۸۰، به‌سمت بار D

۳) $270\sqrt{2}$، به‌سمت بالا

۴) $270\sqrt{2}$، به‌سمت چپ

۱۰۹ مطابق شکل بار نقطه‌ای q در بین صفحات خازن مسطحی که فضای بین آن‌ها خلأ است به حالت تعادل قرار دارد. اگر فضای بین دو صفحه را با هوا پرکنیم، چه وضعیتی برای بار q پیش می‌آید؟



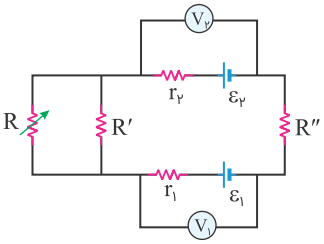
۱) ثابت می‌ماند.

۲) به سمت بالا حرکت می‌کند.

۳) به سمت پایین حرکت می‌کند.

۴) بسته به شرایط هر سه مورد ممکن است.

۱۱۰ در مدار شکل زیر $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ است. با کاهش مقاومت متغیر R، عددهایی که ولت‌سنج ایده‌آل V_1 و V_2 نشان می‌دهند نسبت به حالت اول چگونه تغییر می‌کنند؟



۱) هر دو افزایش می‌یابند.

۲) هر دو کاهش می‌یابند.

۳) V_1 کاهش و V_2 افزایش می‌یابد.

۴) V_1 افزایش و V_2 کاهش می‌یابد.

۱۱۱ نسبت چگالی سطحی بار الکتریکی دو کره ۱ به ۴ است. اگر بار کرهٔ اول برابر $3q$ و بار کرهٔ دوم برابر $\frac{5}{3}q$ باشد، نسبت قطر کرهٔ اول به قطر کرهٔ دوم کدام است؟

۱) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
۲) $\frac{\sqrt{5}}{6}$
۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
۴) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

۱۱۲ یک جسم از طریق تماس دارای بار الکتریکی شده است. چند کولن الکتریسیته ممکن است به جسم منتقل شده باشد؟ $(e = 1/6 \times 10^{-19} C)$

۱) 4×10^{-19}
۲) 8×10^{-19}
۳) $8/6 \times 10^{-19}$
۴) $17/2 \times 10^{-19}$

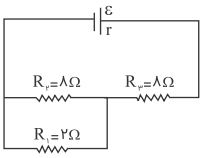
۱۱۳ اگر در میدان الکتریکی یکنواخت $10^4\ N/C$، بار الکتریکی نقطه‌ای ۵ میکروکولنی را با تندی ثابت ۴۰ سانتی‌متر در خلاف جهت میدان الکتریکی و موازی با خطوط آن جابه‌جا کنیم، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند ژول می‌شود؟

۱) -۰/۰۲
۲) ۰/۰۴
۳) ۰/۰۲
۴) -۰/۰۴

۱۱۴ بار الکتریکی باتری یک اتومبیل ۶۰ آمپرساعت است. به کمک این باتری چند ساعت می‌توان لامپی که نیاز به شدت‌جریان ۵۰۰ میلی‌آمپر دارد را روشن نگه داشت؟

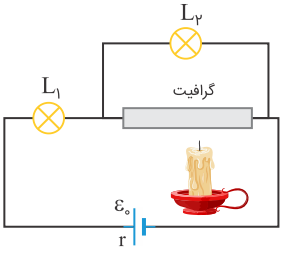
۱) ۶۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۸۰
۴) ۲۴۰

۱۱۵ در مدار زیر، توان مصرفی در مقاومت R_3 چندبرابر توان مصرفی در مقاومت R_1 است؟



۱) $\frac{9}{4}$
۲) $\frac{12}{5}$
۳) $\frac{16}{5}$
۴) $\frac{25}{4}$

۱۱۶ در شکل زیر، در صورت روشن کردن شمع، روشنایی لامپ‌های L_1 و L_2 به ترتیب (از راست به چپ) چگونه تغییر می‌کنند؟



۱) کاهش - کاهش
۲) کاهش - افزایش
۳) افزایش - افزایش
۴) افزایش - کاهش

www.alirezaafshar.org

۱۱۷ دو گلولهٔ فلزی با شعاع‌های یکسان دارای بار الکتریکی $q_۱ = ۴۰\,\mu C$ و $q_۲ = ۱۰\,\mu C$ را با سیم رسانایی به هم متصل می‌کنیم. پس از برقراری تعادل بار هریک از کره‌ها برابر است با:

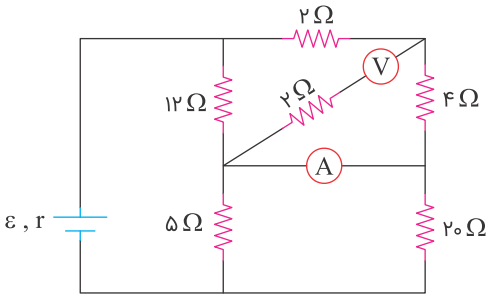
۱) $q'_۲ = ۱۰\,\mu C\,,\ q'_۱ = ۴۰\,\mu C$

۲) $q'_۲ = q'_۱ = ۲۵\,\mu C$

۳) $q'_۱ = q'_۲ = ۳۰\,\mu C$

۴) $q'_۱ = q'_۲ = ۱۵\,\mu C$

۱۱۸ در مدار شکل زیر، ولت‌سنج عدد ۸ ولت را نشان می‌دهد. آمپرسنج چند آمپر را نمایش می‌دهد؟ (آمپرسنج و ولت‌سنج هر دو ایده‌آل هستند)



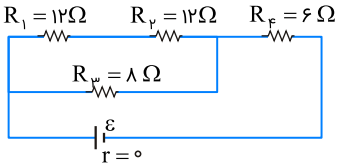
۱) صفر

۲) ۱/۵

۳) ۱/۴

۴) ۳/۴

۱۱۹ در مدار زیر، توان مصرفی مقاومت $R_۴$ چندبرابر توان مصرفی مقاومت $R_۱$ است؟



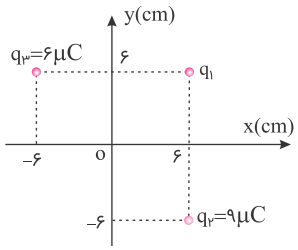
۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

۱۲۰ مطابق شکل زیر، سه بار نقطه‌ای در صفحهٔ xy قرار دارند و بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ O (مبدأ مختصات) در SI، برابر $۶/۲۵ \times ۱۰^۶\ N/C$ است. $|q_۱|$ چند میکروکولن است؟ $(k = ۹ \times ۱۰^۹\ N.m^۲/C^۲)$



۱) ۲

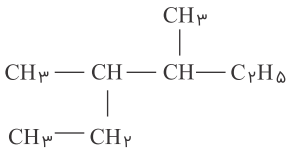
۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

شیمی

۱۲۱ نام آلکانی با فرمول زیر کدام است؟



۱) ۲ و ۲-دی‌اتیل بوتان

۲) ۳ و ۴-دی‌متیل هگزان

۳) ۲ و ۳-دی‌متیل هگزان

۴) ۲-اتیل، ۳-متیل هگزان

www.alirezaafshar.org

۱۲۲ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) در رازیانه گروه عاملی اتری وجود دارد.

۲) گشنیز علاوه بر گروه عاملی هیدروکسیل، دارای گروه‌های سیرنشده هم هست.

۳) ادویه برخلاف زردچوبه جزو ترکیبات آروماتیک است.

۴) شیمی‌دان‌ها به موادی که فرمول مولکولی یکسان اما ساختار متفاوتی دارند، همپار می‌گویند.

۱۲۳ باتوجه‌به ترکیب‌های زیر، چند جمله از جمله‌های زیر درست است؟ $(C = ۱۲ \ , \ H = ۱ : g.mol^{-۱})$

$C_۳H_۶$ (a) (b) (c)

الف) اختلاف تعداد پیوندهای اشتراکی (c) با (a) برابر با تعداد کربن‌های ترکیب (b) است.

ب) تعداد مول‌های فرآوردهٔ تولیدشده به هنگام سوختن کامل ترکیب (b) برابر با مجموع اتم‌های ترکیب (c) است.

پ) ترکیب c برخلاف ترکیب (b) سیرنشده است.

ت) ترکیب c (بنزن) و ترکیب b (هگزان) ازجمله هیدروکربن‌های حلقوی سازندهٔ نفت خام هستند.

ث) اختلاف جرم مولی ترکیب‌های (b) و (c) کمتر از اختلاف جرم مولی (a) و (c) است.

۱) ۳

۲) ۱

۳) ۴

۴) ۲

۱۲۴ عناصر A، B، C، D و E به ترتیب از راست به چپ در دورهٔ سوم جدول تناوبی قرار دارند. اگر ترکیب شیمیایی عنصر روی و B به‌صورت $Zn_۳B_۲$ باشد، کدام گزینهٔ زیر نادرست است؟

۱) عنصر A شبه‌فلز و عنصر B نافلز است.

۲) عنصر D در دمای اتاق به‌آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

۳) تمایل گرفتن الکترون همانند شعاع اتمی در عنصر D بیشتر از عنصر C است.

۴) آرایش الکترونی آخرین لایهٔ عنصر A به‌صورت $۳s^۲۳p^۲$ است.

۱۲۵ چه تعداد ترکیب با فرمول مولکولی یکسان $C_۷H_{۱۶}$ و فرمول ساختاری متفاوت می‌توان ساخت؟

۱) ۶

۲) ۷

۳) ۸

۴) ۹

www.alirezaafshar.org

۱۲۶ چند مورد از مطالب زیر نادرست هستند؟

الف) میزان جنبش مولکول‌ها در آب گرم، شدیدتر از آب سرد است.

ب) اگر دمای مادهٔ A بیشتر از B باشد، انرژی گرمایی A هم بیشتر از B خواهد بود.

پ) اگر انرژی گرمایی مادهٔ A بیشتر از B باشد، دمای A هم بیشتر از B خواهد بود.

ت) انرژی گرمایی یک ماده برخلاف دما، به مقدار آن بستگی ندارد.

۱) ۱ ۲) ۲

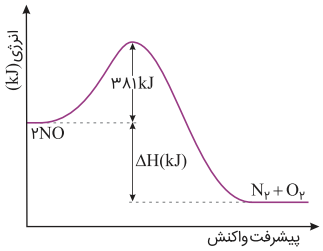
۳) ۳ ۴) صفر

۱۲۷ میزان فراریت گازوئیل، در مقایسه با "نفت کوره، نفت سفید و بنزین" به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟

۱) بیشتر - کمتر - کمتر ۲) کمتر - بیشتر - بیشتر

۳) بیشتر - بیشتر - بیشتر ۴) کمتر - کمتر - بیشتر

۱۲۸ باتوجه‌به شکل زیر، اگر انرژی پیوندهای $N=O$ و $N\equiv N$ و $O=O$ به ترتیب برابر ۶۰۷، ۹۴۴ و ۴۹۶ کیلوژول بر مول باشد، جمع جبری ΔH و E_a در واکنش (رفت) نشان داده‌شده، چند کیلوژول است؟



۱) +۱۵۵

۲) +۱۸۷

۳) +۴۲۱

۴) +۶۰۷

۱۲۹ اگر با وارد کردن یک تیغهٔ روی در ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱/۲۵ مولار مس (II) سولفات، پس از ۵۰ دقیقه واکنش پایان یافته باشد، تفاوت جرم تیغه پیش و پس از انجام واکنش برابر چند گرم و سرعت متوسط تشکیل کاتیون روی برابر چند مول بر لیتر بر دقیقه است؟ (فرض شود که همهٔ ذرات مس آزادشده بر سطح تیغهٔ روی نشسته است، $Cu=۶۴\ ,\ Zn=۶۵ : g.mol^{-1}$) (با اندکی تغییر)

۱) ۰/۲۵ ، ۰/۰۵ ۲) ۰/۲۵ ، ۰/۰۲۵

۳) ۱۶/۲۵ ، ۰/۰۲۵ ۴) ۱۶/۲۵ ، ۰/۰۵

۱۳۰ کدام عبارت یا عبارت‌های زیر در رابطه با جدول دوره‌ای عنصرها نادرست است؟

آ) شمار عنصرها در هریک از دوره‌های چهارم، پنجم و ششم جدول یکسان و برابر با ۱۸ است.

ب) شامل هفت دوره و هجده گروه است که درمجموع، ۱۱۸ عنصر را در برمی‌گیرد.

پ) اختلاف شمار فلزهای قلیایی و هالوژن‌ها برابر با ۱ است.

ت) شمار عنصرهای شبه‌فلز گروه چهاردهم با شمار فلزهای دورهٔ سوم برابر است.

ث) تمام عنصرهای دستهٔ s و d جزء فلزها هستند.

۱) الف - پ - ت - ث ۲) الف - ت - ث

۳) پ - ت - ث ۴) الف - ب - ت

www.alirezaafshar.org

۱۳۱ در رازیانه، بادام و میخک به ترتیب از راست به چپ چه گروه عاملی وجود دارد؟

۱) اتری - آلدهیدی - کتونی
۲) اتری - کتونی - آلدهیدی
۳) کتونی - آلدهیدی - اتری
۴) کتونی - اتری - آلدهیدی

۱۳۲ چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست هستند؟

الف) حل مشکل حمل‌ونقل و ساخت داروهای تازه ازجمله کاربردهای نفت خام است.
ب) در آلکان شاخه‌دار، هر کربن به سه یا چهار اتم کربن دیگر متصل است.
پ) اگر ساختار هیدروکربن‌ها متفاوت باشد، رفتار آن‌ها باهم متفاوت خواهد بود.
ت) سوخت اکثر فندک‌ها، گاز پروپان است که تحت‌فشار پر شده‌اند.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۳۳ کدام گزینهٔ زیر نادرست است؟

۱) در یک واکنش گرماده انرژی سامانه کاهش می‌یابد و علامت Q در سمت راست واکنش است.
۲) در سوختن گلوکز سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها پایین‌تر از فرآورده‌ها است.
۳) در واکنش فتوسنتز پایداری واکنش‌دهنده‌ها از فرآورده‌ها بیشتر است.
۴) تغییر آنتالپی هر واکنش هم‌ارز با گرمایی است که در فشار ثابت با محیط پیرامون مبادله می‌شود.

۱۳۴ باتوجه‌به داده‌های زیر، ΔH واکنش سوم کدام است؟

$$N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g) \quad \Delta H_1 = 181\,kJ$$
$$2N_2O(g) \rightarrow 2N_2(g) + O_2(g) \quad \Delta H_2 = -163\,kJ$$
$$2NO(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g) \quad \Delta H_3 = ?$$
$$N_2O(g) + NO_2(g) \rightarrow 3NO(g) \quad \Delta H_T = 156\,kJ$$

۱) -۱۳۱
۲) -۱۱۳
۳) +۲۵
۴) +۷۲

۱۳۵ ΔH واکنش حل شدن کلسیم کلرید $(M = 111\ g.mol^{-1})$ در آب، برابر $-35kJ.mol^{-1}$ است. برای گرم کردن ۲۵۰ گرم آب از دمای $25^\circ C$ تا دمای $45^\circ C$ چند گرم از آن باید در آب حل شود؟ $(c_{آب} = 4/2\,J.g^{-1}.^\circ C^{-1})$، از گرمای جذب‌شده به‌وسیلهٔ کلسیم کلرید صرف‌نظر شود)

۱) ۴۴/۴
۲) ۶۶/۶
۳) ۸۳/۲۵
۴) ۱۴۹/۸۵

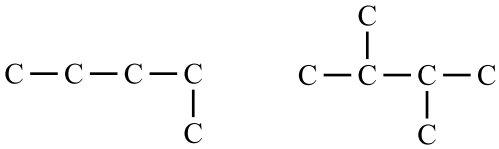
۱۳۶ چه تعداد از مقایسه‌های زیر به‌درستی انجام نشده است؟

الف) مجموع شمار الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی: کربن دی‌اکسید = اتن

ب) وجود پیوند سه‌گانه بین دو اتم یکسان در هیدروژن سیانید و اتین

پ) شاخه‌دار بودن آلکان‌های "شکل ۱" و "شکل ۲"

ت) شمار جفت‌الکترون ناپیوندی: اتان < اتین



شکل ۱

شکل ۲

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۳۷ احتمال انجام کدام واکنش در شرایط مشخص‌شده، کمتر است؟

۱) $SiO_2(s) + 2C(s) \xrightarrow{\Delta} Si(l) + 2CO(g)$

۲) $C_2H_4(g) + Cl_2(g) \xrightarrow{FeCl_2(aq)} C_2H_4Cl_2(g)$

۳) $2Fe_2O_3(s) + 3C(s) \xrightarrow{\Delta} 4Fe(s) + 3CO_2(g)$

۴) $CH_3COOH(l) + C_2H_5OH(l) \xrightarrow{H_2SO_4} CH_3COOC_2H_5(l) + H_2O(l)$

۱۳۸ باتوجه‌به واکنش کلی زیر چند گزینه درست است؟ (عنصر A هالوژن است)

$$A_2(x) + H_2 \xrightarrow{t} 2HA(g)$$

الف) اگر A_2 هالوژنی باشد که حتی در دمای $-200^\circ C$ به‌سرعت واکنش دهد، تمایل A به تشکیل آنیون کمتر از بقیهٔ هالوژن‌ها است.

ب) اگر t برابر با $25^\circ C$ باشد و واکنش انجام نشود، آنگاه x به‌صورت l یا s است.

پ) اگر x جامد باشد، در این صورت A شعاع بیشتری نسبت به Br دارد.

ت) اگر A_2 هالوژنی باشد که در واکنش با فلز سدیم نور زردرنگ تولید می‌کند، آنگاه $t > 200^\circ C$ است.

ث) اگر x به‌صورت g باشد، آنگاه تمام هالوژن‌ها می‌توانند در واکنش با هیدروژن شرکت کنند.

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۱

۱۳۹ پاسخ درست پرسش‌های (الف) و (ب) و پاسخ نادرست پرسش (پ) کدام است؟

الف) در واکنش‌های گرماده پایداری مواد اولیه بیشتر است یا فرآورده؟

ب) ΔH واکنش‌های گرماده منفی است یا مثبت؟

پ) در واکنش‌های گرماده آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است یا فرآورده‌ها؟

۱) فرآورده - منفی - فرآورده

۲) فرآورده - منفی - واکنش‌دهنده

۳) واکنش‌دهنده - منفی - فرآورده

۴) واکنش‌دهنده - مثبت - واکنش‌دهنده

۱۴۰ باتوجه‌به شکل زیر A و B به ترتیب از راست به چپ ..... و ..... است و با فرآیند ..... به توسعهٔ پایدار کشور کمک می‌شود.

۱) خوردگی و فرسایش، بازیافت، A

۲) خوردگی و فرسایش، بازیافت، B

۳) بازیافت، خوردگی و فرسایش، A

۴) بازیافت، خوردگی و فرسایش، B

۱۴۱ چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ آنتالپی پیوند درست است؟

الف) مقدار آن همواره عددی مثبت است.

ب) مطابق تعریف، برای محاسبهٔ آن، مادهٔ موردنظر باید به حالت گاز باشد.

پ) می‌توان آن را برای هر دو پیوند کووالانسی و یونی به کار برد.

ت) مجموع آنتالپی‌های پیوند در H_2S کمتر از مجموع آنتالپی‌های پیوند در بخار آب است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۳

۱۴۲ باتوجه‌به واکنش‌های گرماشیمیایی زیر:

$$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l) \quad , \quad \Delta H^\circ = -572\,kJ$$
$$2H_2O(l) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O_2(aq) \quad , \quad \Delta H^\circ = +190\,kJ$$
$$C_6H_6O_2(aq) \rightarrow C_6H_4O_2(aq) + H_2(g) \quad , \quad \Delta H^\circ = +116\,kJ$$

ΔH° واکنش: $C_6H_6O_2(aq) + H_2O_2(aq) \rightarrow C_6H_4O_2(aq) + 2H_2O(l)$، برابر با چند کیلوژول است و اگر ۱۰۰ میلی‌لیتر از محلول ۲/۵ مولار هیدروژن پراکسید در این واکنش مصرف شود، با گرمای آزادشده، چند گرم کربن دی‌اکسید جامد را می‌توان به گاز تبدیل کرد؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید، هر مول کربن دی‌اکسید جامد با جذب ۵۰ کیلوژول انرژی، به‌طور مستقیم به گاز تبدیل می‌شود، $(C = 12 \ , \ O = 16 : g.mol^{-1})$

۱) ۴۲/۸ ، -۲۵۴ ۲) ۴۵/۳ ، -۲۵۴

۳) ۵۸/۳ ، -۲۶۵ ۴) ۶۲/۸ ، -۲۶۵

۱۴۳ باتوجه‌به واکنش‌های زیر، با حل‌شدن ۰/۱ مول از $BaO(s)$ در ۲۰۰ گرم آب با دمای $25^\circ C$ و دارای سولفوریک اسید کافی، طبق معادلهٔ: $BaO(s) + H_2SO_4(aq) \rightarrow BaSO_4(g) + H_2O(l)$، دمای نهایی آب، به‌تقریب به چند درجهٔ سلسیوس می‌رسد؟ (فرض کنید که آنتالپی واکنش فقط صرف تغییر دمای آب شده است؛ $(c_{H_2O} = 4/2\,J.g^{-1}.K^{-1})$

$$BaSO_4(s) \rightarrow BaO(s) + SO_3(g) \quad , \quad \Delta H = +213\,kJ$$
$$SO_3(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2SO_4(aq) \quad , \quad \Delta H = -78\,kJ$$

۱) ۱۶ ۲) ۱۹

۳) ۳۱ ۴) ۴۱

۱۴۴ برای تولید ۱۱۲۰ کیلوگرم آهن از طریق واکنش ترمیت، چند کیلوگرم آلومینیوم با خلوص ۹۰٪ نیاز است؟

$(Al = ۲۷ \ , \ Fe = ۵۶ : g.mol^{-۱})$

$Al(s) + Fe_۲O_۳(s) \rightarrow Al_۲O_۳(s) + Fe(l)$ (موازنه نیست)

۱) ۶۰۰
۲) ۱۲۰۰
۳) ۳۰۰
۴) ۴۵۰

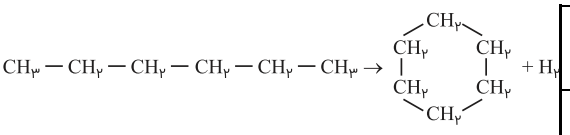
۱۴۵ از واکنش ۱۵۶۸ میلی‌لیتر گاز هیدروژن در شرایط استاندارد STP با مقدار کافی از آلکنی مجهول در حضور کاتالیزگر نیکل، ۳/۰۸ گرم هیدروکربن سیرشده تولید می‌شود. کدام گزینه نام آلکن مجهول است؟ $(H = ۱ \ , \ C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$

۱) ۲- بوتن
۲) اتن
۳) پروپن
۴) ۱- پنتن

۱۴۶ اگر در ترکیب کلرواتان به‌جای یک هیدروژن متصل به کربنی که کلر دارد، گروه متیل و به‌جای هیدروژن دیگر آن گروه اتیل قرار دهیم، نام ترکیب حاصل کدام خواهد بود؟

۱) ۳- کلرو- ۲- متیل بوتان
۲) ۲- کلرو- ۲- اتیل پروپان
۳) ۲- کلروپروپان
۴) ۲- کلرو- ۲- متیل بوتان

۱۴۷ باتوجه‌به آنتالپی پیوندها و واکنش زیر، کدام هیدروکربن زیر پایدارتر است و ΔH این واکنش، چند کیلوژول است؟



پیوند:	$H - H$	$C - H$	$C - C$
انرژی $kJ.mol^{-۱}$	۴۳۶	۴۱۲	۳۴۸

۱) هگزان، ۴۰-
۲) سیکلوهگزان، ۴۰-
۳) هگزان، ۴۰+
۴) سیکلوهگزان، ۴۰+

۱۴۸ باتوجه‌به واکنش $PbO_2 + 2H_2SO_4 \rightarrow 2PbSO_4 + 2H_2O$، اگر ۱۰۳۵ گرم سرب در این واکنش مصرف شود، انرژی گرمایی آزادشده چند کیلوژول است؟ $(Pb = 207\ g.mol^{-1})$

$$I)\ Pb + S + 2O_2 \rightarrow PbSO_4 \qquad \Delta H = -918\ kJ$$
$$II)\ H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O \qquad \Delta H = -286\ kJ$$
$$III)\ Pb + O_2 \rightarrow PbO_2 \qquad \Delta H = -277\ kJ$$
$$IV)\ H_2 + S + 2O_2 \rightarrow H_2SO_4 \qquad \Delta H = -814\ kJ$$

۱) ۱۳۸۵
۲) ۱۵۰۳
۳) ۱۸۵۱
۴) ۲۵۱۵

۱۴۹ مطابق واکنش زیر مقدار ۵ لیتر گاز کربن دی‌اکسید با چگالی $1/1\ g.L^{-1}$ و بازدهٔ ۸۰ درصدی تولید شده است. به‌تقریب چند گرم کلسیم کربنات با خلوص ۷۵ درصد مصرف شده است؟ $(Ca = 40\ ,\ C = 12\ ,\ O = 16 : g.mol^{-1})$

$$CaCO_3(s) + 2HI(aq) \rightarrow CaI_2(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

۱) ۳۸/۰۳
۲) ۳۰/۳۸
۳) ۲۸/۰۳
۴) ۲۰/۸۳

۱۵۰ ΔH واکنش: $2NH_3(g) + 2CH_4(g) + 3O_2(g) \rightarrow 2HCN(g) + 6H_2O(l)$، برابر با چند کیلوژول است؟ (آنتالپی پیوندهای $O=O$، $C \equiv N$ و میانگین آنتالپی پیوندهای $O-H$، $C-H$ و $N-H$ به ترتیب برابر با ۴۹۵، ۸۸۰، ۴۶۳، ۴۱۴ و ۳۹۰ کیلوژول بر مول است)

۱) -۹۱۰
۲) -۹۱۶
۳) -۱۰۰۷
۴) -۱۰۱۷

استاد علیرضا افشار
”همایش ها“
@hamayesh_dr_afshar

www.alirezaafshar.org

حسابان

۱ گزینه ۱

$$d_۱ || d_۲ \Rightarrow d_۲ : y = ۲x + h \xrightarrow{(۳,۲)} ۲ = ۶ + h \Rightarrow h = -۴$$
$$\Rightarrow d_۲ : y = ۲x - ۴$$

۲ گزینه ۲

$$\sqrt{۳^x + ۷۲\sqrt{۳}} = ۳^{\frac{۹}{۴}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۳^x + ۷۲\sqrt{۳} = ۳^{\frac{۹}{۲}} \Rightarrow ۳^x + ۷۲\sqrt{۳} = ۳^۴ \times ۳^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۳^x + ۷۲\sqrt{۳} = ۸۱\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow ۳^x = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow ۳^x = ۳^۲ \times ۳^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۳^x = ۳^{\frac{۵}{۲}} \Rightarrow x = \frac{۵}{۲}$$

۳ گزینه ۱

مجموع ضرایب معادله برابر با صفر است، بنابراین یکی از ریشه‌های این معادله $x = ۱$ می‌باشد. حال معادله را تجزیه می‌کنیم تا ریشه‌های دیگر را به دست آوریم.

$$\begin{array}{l} x^۳ + (a-۱)x^۲ + (۴-a)x - ۴ \\ \hline -(x^۳ - x^۲) \\ \hline ax^۲ + (۴-a)x - ۴ \\ -(ax^۲ - ax) \\ \hline ۴x - ۴ \\ -(۴x - ۴) \\ \hline ۰ \end{array} \Big| \; x - ۱ \;\; / \;\; x^۲ + ax + ۴$$

بنابراین داریم:.

$$x^۳ + (a-۱)x^۲ + (۴-a)x - ۴ = (x-۱)(x^۲ + ax + ۴)$$

معادله دارای سه ریشهٔ مثبت است، درنتیجه باید معادلهٔ $x^۲ + ax + ۴$ دو ریشهٔ متمایز مثبت داشته باشد. پس در معادلهٔ $x^۲ + ax + ۴$ شرایط زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow a^۲ - ۱۶ > ۰ \Rightarrow a < -۴ \;\; \text{یا} \;\; a > ۴ \\ P = \dfrac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \dfrac{۴}{۱} > ۰ \;\; \checkmark \\ S = -\dfrac{b}{a} > ۰ \Rightarrow -\dfrac{a}{۱} > ۰ \Rightarrow a < ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a < -۴$$

همچنین ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ + ax + ۴$ نباید $x = ۱$ باشد ($a \neq -۵$). بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$a < -۴ \;\; , \;\; a \neq -۵$$

۴ گزینه ۳

ابتدا در معادلهٔ داده‌شده، عبارت‌های دو طرف تساوی را طرفین وسطین می‌کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود. داریم:

$$۳x(۵-x)=(k+۲)(۴x-x^۲)\Rightarrow ۱۵x-۳x^۲=۴(k+۲)x-(k+۲)x^۲$$
$$\Rightarrow (k-۱)x^۲-(۴k-۷)x=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ \ x=\frac{۴k-۷}{k-۱}$$

جواب $x=۰$ غیرقابل‌قبول است (مخرج کسر را صفر می‌کند). برای برقراری شرط مسئله جواب دیگر نیز باید غیرقابل‌قبول باشد. این جواب در حالت‌های زیر غیرقابل‌قبول است:

۱) $k=۱$ که در این صورت مخرج کسر صفر می‌شود.

۲) $\frac{۴k-۷}{k-۱}$ مخرج یکی از کسرهای معادله را صفر کند یعنی برابر با صفر یا ۴ باشد:

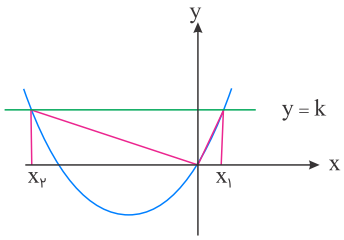
$$\begin{cases}\frac{۴k-۷}{k-۱}=۴\Rightarrow ۴k-۷=۴k-۴\Rightarrow \text{امکان‌ناپذیر}\\ \frac{۴k-۷}{k-۱}=۰\Rightarrow ۴k-۷=۰\Rightarrow k=\frac{۷}{۴}\end{cases}$$

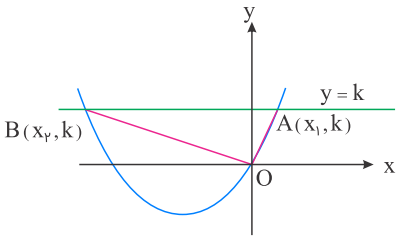
بنابراین به ازای دو مقدار $k=۱$ و $k=\frac{۷}{۴}$، مجموع جواب معادله تهی است.

۵ گزینه ۱

ابتدا خط و سهمی را قطع می‌دهیم: $x^۲+۲x=k$

معادلهٔ تلاقی خط و سهمی $(*)$ $x^۲+۲x-k=۰$ است. $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های این معادله‌اند.



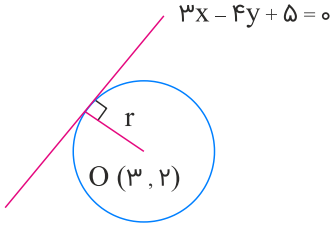


$$\left.\begin{matrix}m_{OA}=\frac{k}{x_۱}\\ m_{OB}=\frac{k}{x_۲}\end{matrix}\right\}\Rightarrow m_{OA}.m_{OB}=-۱\Rightarrow \frac{k}{x_۱}.\frac{k}{x_۲}=-۱$$

$$k^۲=-x_۱x_۲\xrightarrow[\text{در معادلهٔ }(*)]{x_۱x_۲=\frac{c}{a}}k^۲=-(-k)$$

$$k^۲=k\Rightarrow k^۲-k=۰\Rightarrow k(k-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}k=۰\\ k=۱\end{cases}\xrightarrow{k\neq ۰}k=۱$$

۶ گزینه ۲



$$r = \frac{|۹ - ۸ + ۵|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = \frac{|۶|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

$$\frac{S_{\text{دایره}}}{P_{\text{دایره}}} = \frac{\pi r^۲}{۲\pi r} = \frac{r}{۲} = \frac{۱/۲}{۲} = ۰/۶$$

۷ گزینه ۲

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را به دست می‌آوریم و با استفاده از آن و شیب خط عمود منصف AB (باتوجه‌به اینکه شیب خط عمود منصف AB قرینه و معکوس شیب خط AB است) معادلهٔ خط عمود منصف AB را محاسبه می‌کنیم، همچنین معادلهٔ خط عمود منصف AC را به طریق مشابه به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{عمود منصف AB} : y = -x + ۳ \\ \text{عمود منصف AC} : y = \frac{x}{۲} + \frac{۱}{۴} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{محل برخورد}} O(\frac{۱۱}{۶} , \frac{۷}{۶})$$

۸ گزینه ۳

فرض می‌کنیم $x^۲ + x + ۳ = t$ باشد، در این صورت:

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+۷} = ۷ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} t + t + ۷ + ۲\sqrt{t^۲ + ۷t} = ۴۹$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^۲ + ۷t} = ۲۱ - t$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} t^۲ + ۷t = ۴۴۱ - ۴۲t + t^۲$$

$$\Rightarrow ۴۹t = ۴۴۱ \Rightarrow t = \frac{۴۴۱}{۴۹} \Rightarrow t = ۹$$

$$\Rightarrow x^۲ + x + ۳ = ۹ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ \\ x = ۲ \end{cases}$$

پس هردو جواب، قابل‌قبول‌اند.

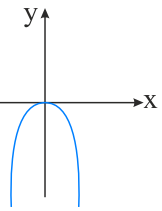
۹ گزینه ۳

$D_f = \mathbb{R} \;\; ; \;\; D_g = \mathbb{R} \;\; ; \;\; D_{f\times g} = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = -x \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(x) = x(-x) = -x^{۲}$$

x	y
۰	۰
۱	−۱
−۱	−۱

$\Rightarrow$



۱۰ گزینه ۴

از فرمول S_n استفاده می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$\left.\begin{array}{l} n = ۲۲ \\ d = -\frac{۱}{۷} \\ S_{۲۲} = ۵۵ \\ a_۸ = ? \end{array}\right\} \Rightarrow ۵۵ = \frac{۲۲}{۲}(۲a_۱ + (۲۲-۱)(-\frac{۱}{۷})) \Rightarrow ۵۵ = ۱۱(۲a_۱ - ۳)$$

$$\Rightarrow ۲a_۱ - ۳ = ۵ \Rightarrow ۲a_۱ = ۸ \Rightarrow a_۱ = ۴$$

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow a_۸ = ۴ + ۷(-\frac{۱}{۷}) \Rightarrow a_۸ = ۴ - ۱ = ۳$$

۱۱ گزینه ۱

$$\log(x-۲)+\log(۹-x)=\log((x-۲)(۹-x))$$

$$=\log(-x^۲+۱۱x-۱۸)>۱\Rightarrow\log(-x^۲+۱۱x-۱۸)>\log ۱۰$$

مبنای لگاریتم برابر ۱۰ است پس صعودی است. اگر $a>۱$ باشد چون $\log_a^x$ صعودی است می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\log_a^{x_۱}>\log_a^{x_۲}\Rightarrow x_۱>x_۲$$

در این سؤال هم از خاصیت صعودی بودن لگاریتم استفاده می‌کنیم.

$$\log(-x^۲+۱۱x-۱۸)>\log ۱۰\Rightarrow -x^۲+۱۱x-۱۸>۱۰$$

$$-x^۲+۱۱x-۲۸>۰\Rightarrow x^۲-۱۱x+۲۸<۰$$

$$\Rightarrow(x-۷)(x-۴)<۰\Rightarrow ۴<x<۷$$

۱۲ گزینه ۱

$$(\log_{۱۵}۵)^۲+\log_{۱۵}۳\log_{۱۵}۷۵=(\log_{۱۵}۵)^۲+\log_{۱۵}۳\log_{۱۵}(۳\times ۲۵)$$
$$=(\log_{۱۵}۵)^۲+\log_{۱۵}۳(\log_{۱۵}۳+\log_{۱۵}۲۵)=(\log_{۱۵}۵)^۲+(\log_{۱۵}۳)^۲+(\log_{۱۵}۳)(\log_{۱۵}۲۵)$$
$$=(\log_{۱۵}۵)^۲+(\log_{۱۵}۳)^۲+۲(\log_{۱۵}۳\log_{۱۵}۵)=(\log_{۱۵}۵+\log_{۱۵}۳)^۲=(\log_{۱۵}۱۵)^۲=۱^۲=۱$$

۱۳ گزینه ۴

ابتدا نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|۲x-۴|+|x+۱|<۳|x-۱|$$

می‌دانیم $|a||b|=|ab|$، پس:

$$|۲x-۴|+|x+۱|<|۳x-۳|$$

می‌دانیم $|a|+|b|\geq|a+b|$ است. حال اگر $a=۲x-۴$ و $b=x+۱$ باشد، $a+b=۳x-۳$ است و درنتیجه نامساوی $|a|+|b|<|a+b|$ هیچ‌گاه برقرار نیست.

۱۴ گزینه ۴

در معادلهٔ $۹x^۲ - ۲۵ax + ۴a = ۰$ داریم $|\sqrt{x_۱} - \sqrt{x_۲}| = \frac{۱}{۶}$ پس خواهیم داشت:

$$(|\sqrt{x_۱} - \sqrt{x_۲}|)^۲ = (\frac{۱}{۶})^۲ \Rightarrow x_۱ + x_۲ - ۲\sqrt{x_۱x_۲} = \frac{۱}{۳۶}$$

$$\xrightarrow[x_۱.x_۲=\frac{۴a}{۹}]{x_۱+x_۲=\frac{۲۵a}{۹}} \quad \frac{۲۵a}{۹} - ۲\sqrt{\frac{۴a}{۹}} = \frac{۱}{۳۶} \quad \Rightarrow \quad ۲۵a - ۱۲\sqrt{a} = \frac{۱}{۴}$$

$$۲۵a - ۱۲\sqrt{a} - \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{۱۲ \pm \sqrt{۱۴۴ + ۲۵}}{۵۰} = \frac{۱۲ \pm ۱۳}{۵۰}$$

با توجه به اینکه $\sqrt{a}$ عددی مثبت است پس داریم:

$$\sqrt{a} = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{۱}{۴}$$

۱۵ گزینه ۴

باتوجه‌به صورت سؤال:

$$f(x) = ۲x + ۱$$
$$g(x) = x + h$$

$$f(g(۰)) = g(f(۱)) \Rightarrow f(h) = g(۳) \Rightarrow ۲h + ۱ = ۳ + h \Rightarrow h = ۲$$

۱۶ گزینه ۲

دو طرف تساوی را در $(x + ۱)(x - ۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$(۳x - ۱)(x - ۲) + (x + ۱) = ۲x(x + ۱) \Rightarrow x^۲ - ۸x + ۳ = ۰$$

به روش Δ حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۵۲ \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۸ \pm \sqrt{۵۲}}{۲}, \ \sqrt{۵۲} \simeq ۷$$

$$\Rightarrow x_۱ = \frac{۸ + ۷}{۲} = \frac{۱۵}{۲}, x_۲ = \frac{۸ - ۷}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

دو جواب مثبت دارد.

۱۷ گزینه ۳

با تغییر متغیر $x^۲+۳x+۳=t$ خواهیم داشت:

$$f(x)=(x^۲+۳x+۳)^۲+(x^۲+۳x+۳)-۲=t^۲+t-۲\Rightarrow t^۲+t-۲=۰$$

$$(t-۱)(t+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۱\Rightarrow x^۲+۳x+۳=۱\\ t=-۲\Rightarrow x^۲+۳x+۳=-۲\Rightarrow x^۲+۳x+۵=۰\xrightarrow{\Delta<۰}\text{جواب ندارد.}\end{cases}$$

همان‌طور که دیدیم فقط جواب $t=۱$ قابل‌قبول است. اما برای حل $x^۲+۳x+۳=۱$ خواهیم داشت:

$$x^۲+۳x+۳=۱\Rightarrow x^۲+۳x+۲=۰\Rightarrow(x+۱)(x+۲)=۰\Rightarrow x=-۱,\ -۲$$

بنابراین این تابع تنها دو صفر دارد.

۱۸ گزینه ۴

$$\log\log_۲\log_۳(۲x+۱)=۰\Rightarrow\log_۲\log_۳(۲x+۱)=۱۰^\circ=۱$$

$$\log_۲\log_۳(۲x+۱)=۱\Rightarrow\log_۳(۲x+۱)=۲^۱=۲$$

$$\log_۳(۲x+۱)=۲\Rightarrow ۲x+۱=۳^۲=۹\Rightarrow x=۴$$

۱۹ گزینه ۳

$$۳^{x^۲-۲}=۸۱^x\Rightarrow ۳^{x^۲-۲}=۳^{۴x}\Rightarrow x^۲-۲=۴x$$

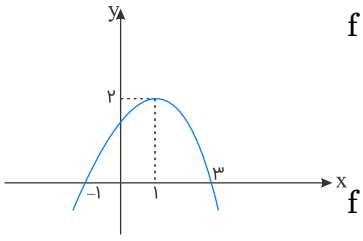
$$x^۲-۴x=۲\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۶\Rightarrow(x-۲)^۲=۶\Rightarrow x-۲=\sqrt{۶}$$

حاصل $\log_۶^{(x-۲)}$ را می‌خواهیم:

$$\log_۶^{(x-۲)}=\log_۶^{\sqrt{۶}}=\frac{۱}{۲}$$

۲۰ گزینه ۴

اول باتوجه‌به نمودار داده‌شده سعی می‌کنیم ضابطهٔ تابع را پیدا کنیم.



$$f(x)=a(x+۱)(x-۳)$$

طول رأس سهمی بین ریشه‌ها و برابر $\frac{۳-۱}{۲}=۱$ است.

$$f(۱)=۲\Rightarrow a(۲)(-۲)=۲\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

پس ضابطهٔ $f(x)$ را داریم:

$$f(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۱)(x-۳)\xrightarrow{x=۴}f(۴)=-\frac{۱}{۲}(۵)(۱)=-\frac{۵}{۲}$$

۲۱ گزینه ۱

در مسئله دو ریشهٔ حقیقی و متمایز ذکر شده، پس شرط $\Delta > ۰$ قابل‌قبول است؛ بنابراین:

$$\Delta = a^۲ - (۴)(۲)\left(a - \frac{۳}{۲}\right) > ۰ \Rightarrow a^۲ - ۸a + ۱۲ > ۰$$
$$\Rightarrow (a-۶)(a-۲) > ۰ \Rightarrow a > ۶ \text{ یا } a < ۲$$

۲۲ گزینه ۱

$$y = ۱ + \log_۳ x \Rightarrow y - ۱ = \log_۳ x \Rightarrow x = ۳^{y-۱} \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۳^{x-۱}$$

۲۳ گزینه ۳

ابتدا fog را می‌سازیم:

$$y = f\left(g(x) = x^۲ - ۱\right) = \frac{|x^۲ - ۱|}{x^۲ - ۱} = \begin{cases} ۱ & ; x^۲ - ۱ > ۰ \Rightarrow -۱ > x \text{ یا } x > ۱ \\ -۱ & ; x^۲ - ۱ < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

حال $h(x) = x^۲$ را در این تابع ضرب می‌کنیم:

$$y = h(x) f(g(x)) = \begin{cases} x^۲ & ; x < -۱ \text{ یا } x > ۱ \\ -x^۲ & ; -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

که در بازهٔ $(-۱, ۱)$ قرینهٔ $x^۲$ نسبت به محور xها است و در خارج از این بازه همان $x^۲$ است. در $x = \pm ۱$ هم که مخرج $y = f(g(x)) = \frac{|x^۲ - ۱|}{x^۲ - ۱}$ تعریف نشده است، تابع y تعریف نمی‌شود.

۲۴ گزینه ۱

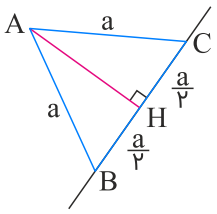
فرض کنیم معادله خط d به فرم $y = ax + b$ باشد. باتوجه‌به اینکه d از نقطهٔ $(۱, -۱)$ می‌گذرد، داریم:

$$(۱, -۱) \in d \Rightarrow -۱ = a(۱) + b \Rightarrow b = -۱ - a \quad \text{عرض از مبدأ}$$
$$y = ۰ \Rightarrow ۰ = ax + b \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a} = \frac{a+۱}{a} \quad \text{طول از مبدأ}$$

باتوجه‌به فرض مسأله داریم:

$$(-۱ - a) + \frac{a+۱}{a} = ۲ \Rightarrow \frac{a+۱}{a} = ۳ + a \xrightarrow{\times a} a + ۱ = a^۲ + ۳a \Rightarrow a^۲ + ۲a - ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow a \text{ مجموع مقادیر ممکن } = -۲$$

۲۵ گزینه ۲



$$\text{محیط} = ۳a = \sqrt{۲۷۰} = ۳\sqrt{۳۰} \Rightarrow a = \sqrt{۳۰}$$

$$AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \sqrt{۳۰} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

$$AH : y - ۱ = -\frac{۱}{۳}(x - ۲) \Rightarrow y = \frac{-x}{۳} + \frac{۵}{۳}$$

$$A(b, -\frac{b}{۳} + \frac{۵}{۳}) \quad , \quad H(۲, ۱)$$

$$|AH| = \sqrt{(b-۲)^۲ + (\frac{۲}{۳} - \frac{b}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۱۰}{۹}}|b-۲| = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow |b-۲| = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \begin{cases} b-۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow b = \frac{۱۳}{۲} \\ b-۲ = -\frac{۹}{۲} \Rightarrow b = \frac{-۵}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\frac{۱۳}{۲}, \frac{-۱}{۲}) \quad , \quad A(\frac{-۵}{۲}, \frac{۵}{۶})$$

۲۶ گزینه ۴

$$\xrightarrow{x=۲} ۲۰ - ۱۴m = -۸ \Rightarrow m = ۲$$

معادلهٔ موردنظر : $x^۲ + ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲$

۲۷ گزینه ۳

$$\log ۲۰ = \log(۲ \times ۱۰) = \log ۲ + \log ۱۰ = \log ۲ + ۱$$

می‌دانیم بین لگاریتم اعداد ۲ و ۵ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\log ۲ = ۱ - \log ۵ \Rightarrow \log ۲ = ۱ - a$$

$$\log ۲۰ = \log ۲ + ۱ = ۱ - a + ۱ = ۲ - a$$

۲۸ گزینه ۳

$$\underbrace{\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x+۳}}_{\text{(نامنفی)}}=\underset{\text{منفی}}{-۱}$$

درنتیجه معادله جواب ندارد.

۲۹ گزینه ۳

گام اول

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ است. $(۴,۲)\in fog$ است، یعنی $f(g(۴))=۲$ و $(۴,۱)\in gof$ است. یعنی $g(f(۴))=۱$. حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

گام دوم

تعیین a و b با استفاده از دو شرط $f(g(۴))=۲$ و $g(f(۴))=۱$:

$$f(g(۴))=۲\xrightarrow{f(۳)=۲}g(۴)=۳\xrightarrow{(a,۳)\in g}a=۴$$
$$g(f(۴))=۱\xrightarrow{f(۴)=۵}g(۵)=۱\xrightarrow{(b,۱)\in g}b=۵$$

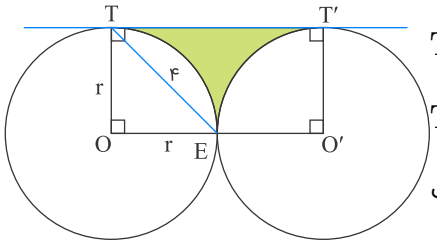
پس دوتایی مرتب (a,b) به صورت $(۴,۵)$ درمی‌آید.

۳۰ گزینه ۴

$$\frac{۲}{x}-\frac{x}{x-۲}=۵\Rightarrow\frac{۲(x-۲)-x^۲}{x(x-۲)}=۵\Rightarrow\frac{۲x-۴-x^۲}{x^۲-۲x}=۵$$
$$\Rightarrow ۵(x^۲-۲x)=۲x-۴-x^۲\Rightarrow ۵x^۲-۱۰x-۲x+۴+x^۲=۰$$
$$\Rightarrow ۶x^۲-۱۲x+۴=۰\xrightarrow{\div ۲}۳x^۲-۶x+۲=۰$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۶)^۲-۴(۳)(۲)=۳۶-۲۴=۱۲$$
$$x=\frac{-(-۶)\pm\sqrt{۱۲}}{۲(۳)}=\frac{۶\pm\sqrt{۴\times ۳}}{۶}=\frac{۶\pm ۲\sqrt{۳}}{۶}=\frac{۲(۳\pm\sqrt{۳})}{۶}=\frac{۳\pm\sqrt{۳}}{۳}$$

۳۱ گزینه ۲

شعاع دو دایره را r در نظر می‌گیریم. از دو نقطهٔ T و T' به مرکز دو دایره وصل می‌کنیم. باتوجه‌به شکل، چهار ضلعی $TT'O'O$ مستطیل است. داریم:



$$\overset{\Delta}{TOE}\ :\ r^۲ + r^۲ = ۴^۲ \Rightarrow ۲r^۲ = ۱۶ \Rightarrow r = ۲\sqrt{۲}$$

$$TT' = ۲r = ۴\sqrt{۲}$$

حال برای به دست آوردن مساحت قسمت رنگی، نصف مساحت دایره را از مساحت مستطیل کم می‌کنیم:

$$S_{\text{مستطیل}} = ۴\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۱۶$$

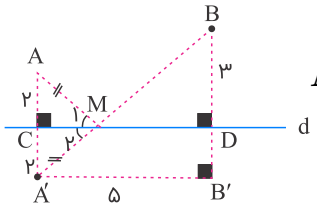
$$S_{\text{دایره}} = \pi r^۲ = ۸\pi$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مستطیل}} - \frac{۱}{۲}(S_{\text{دایره}}) = ۱۶ - ۴\pi$$

۳۲ گزینه ۲

مطابق شکل کوتاه‌ترین مسیر AMB است. بازتاب A نسبت به d، A' می‌باشد.

به این ترتیب مسیر AMB، همان $A'B$ است. داریم:



$$A'B^۲ = ۵^۲ + ۵^۲ \Rightarrow A'B = \sqrt{۵۰} \Rightarrow A'B = ۵\sqrt{۲}$$

۳۳ گزینه ۴

زاویهٔ خواسته‌شده، زاویهٔ بین دو وتر درون دایره و محدود به کمان‌های RQ (معلوم) و PN (مجهول) است:

$$\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{NQ}}{۲} \xrightarrow{\hat{P} = ۴۰^\circ} \overset{\frown}{NQ} = ۸۰^\circ$$

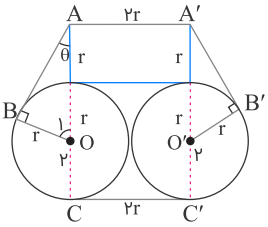
$$\xrightarrow{\text{قطر } PQ} \overset{\frown}{PN} = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ = ۱۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow R\hat{M}Q = \frac{\overset{\frown}{RQ} + \overset{\frown}{PN}}{۲} = \frac{۵۰^\circ + ۱۰۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

۳۴ گزینه ۱

$$\overset{\Delta}{AB}O : \sin\theta = \frac{r}{۲r} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۶۰ \ , \ \hat{O}_۲ = ۱۲۰$$

به همین ترتیب در مثلث $A'B'O'$ داریم: $O'_۲ = ۱۲۰^\circ$



$$\text{طول نخ} = AA' + CC' + AB + A'B' + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{B'C'}$$
$$= ۲r + ۲r + \sqrt{۳}r + \sqrt{۳}r + \frac{۱}{۳} \times ۲\pi r + \frac{۱}{۳}۲\pi r$$
$$= ۸\sqrt{۳} + ۶ = ۲(۴\sqrt{۳} + ۳)$$

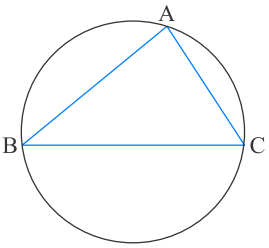
۳۵ گزینه ۱

نکته:

۱) اگر وتری در دایره مساوی شعاع باشد، کمان محصور آن ۶۰° است.

۲) اگر وتری $\sqrt{۲}$ برابر شعاع باشد، کمان محصور آن ۹۰° است.

۳) همچنین اگر وتری $\sqrt{۳}$ برابر شعاع باشد، کمان محصور آن ۱۲۰° است.



AC با شعاع برابر است، پس $\overset{\frown}{AC} = ۶۰^\circ$.

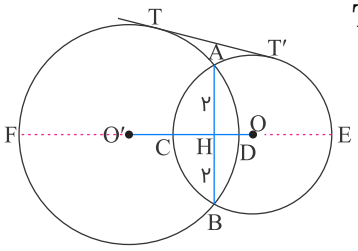
AB، $\sqrt{۲}$ برابر شعاع است، پس $\overset{\frown}{AB} = ۹۰^\circ$.

$$\overset{\frown}{BC} = ۳۶۰ - (۶۰ + ۹۰) = ۲۱۰^\circ$$
$$\left|\overset{\frown}{BC}\right| = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۳۶۰} \times ۲\pi R = \frac{۲۱۰}{۳۶۰} \times ۲\pi \times ۶ = ۷\pi$$

۳۶ گزینه ۴

شعاع دایرهٔ کوچک را r و شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر را R درنظر می‌گیریم.

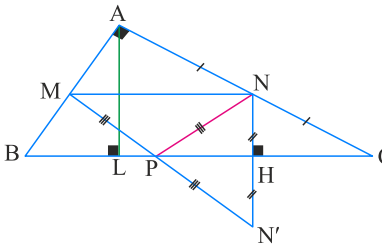
$$OH = x \Rightarrow CH = r - x \ , HE = r + x$$
$$O'H = y \Rightarrow HD = R - y \ , HF = R + y$$
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AOH} ; r^2 - x^2 = 4 \\ \overset{\Delta}{AO'H} ; R^2 - y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (r^2 + R^2) - (x^2 + y^2) = 8$$



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R-r)^2} \xrightarrow{d=x+y} 36 = x^2 + y^2 + 2xy - R^2 - r^2 + 2rR$$
$$\Rightarrow 36 = \underbrace{(x^2 + y^2) - (R^2 + r^2)}_{-8} + \underbrace{2xy}_{+10} + \underbrace{2rR}_{+2rR}$$
$$\Rightarrow 36 = -8 + 10 + 2rR \Rightarrow 34 = 2rR \Rightarrow rR = 17$$

۳۷ گزینه ۱

بازتاب N را نسبت به BC، N′ می‌نامیم. MN′، BC را در P قطع می‌کند.



$$MN + PN + MP = MN + PN' + MP = MN + MN'$$
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{BC}{2}, \ BC^2 = 3^2 + 4^2$$
$$\Rightarrow BC = 5 \Rightarrow MN = \frac{5}{2}$$

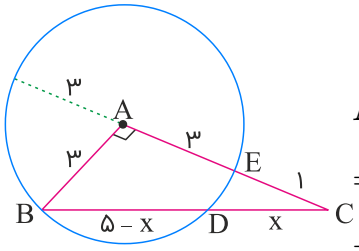
$$AL = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{12}{5}$$
$$\overset{\Delta}{ALC} : AC \text{ وسط } N \ , \ H = 90^\circ \Rightarrow NH = \frac{AL}{2} = \frac{6}{5}$$

$$NN' = 2NH = 2 \times \frac{6}{5} = \frac{12}{5} \ , \ M\hat{N}N' = 90^\circ$$
$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MNN'}} = \frac{1}{2} MN \times NN' = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{12}{5} = 3$$

$$S_{\overset{\Delta}{MNP}} = \frac{1}{2} S_{\overset{\Delta}{MNN'}} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

۳۸ گزینه ۳

$\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است:



$$\overset{\Delta}{ABC}: AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲}$$

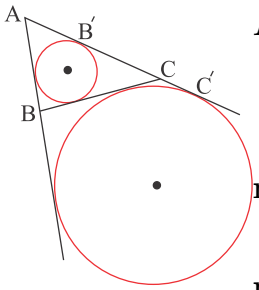
$$\Rightarrow BC^{۲} = ۲۵ \Rightarrow BC = ۵$$

$$\Rightarrow CD \times CB = CE \times CF$$

$$x \times ۵ = ۱ \times ۷ \Rightarrow x = \frac{۷}{۵}$$

۳۹ گزینه ۱

طول مماسی که از A بر دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی رسم شده است به ترتیب برابر $P - a$ و P می‌باشد. پس:



$$AB' = P - a = ۳$$

همچنین شعاع دایرهٔ محاطی خارجی روبه‌رو به رأس A به‌صورت زیر است:

$$r_a = \frac{S}{P - a} \Rightarrow ۶ = \frac{S}{۳} \Rightarrow S = ۱۸$$

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow ۲ = \frac{۱۸}{P} \Rightarrow P = ۹$$

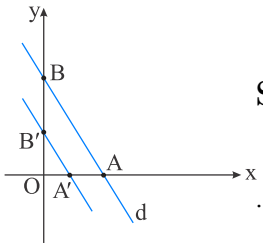
$$\Rightarrow P - a = ۹ - a = ۳ \Rightarrow a = ۶$$

$$B'C' = AC' - AB' = P - (P - a) = a = ۶$$

۴۰ گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه مساحت چهار ضلعی از مساحت $\overset{\Delta}{OA'B'}$ بیشتر است، پس تجانس انقباضی خواهد بود.

مثلث‌های $\overset{\Delta}{OA'B'}$ و $\overset{\Delta}{OAB}$ متشابه‌اند، پس داریم:



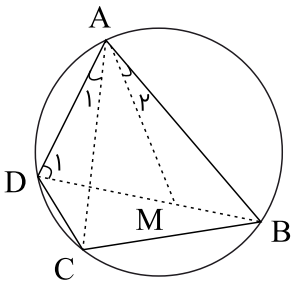
$$S_{ABB'A'} = ۱۵S_{\overset{\Delta}{OA'B'}} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}} = ۱۶S_{\overset{\Delta}{OA'B'}}$$

مساحت $\overset{\Delta}{OAB}$، ۱۶ برابر مساحت $OA'B'$ است، پس نسبت تشابه یا تجانس آن‌ها $\sqrt{۱۶} = ۴$ می‌باشد.

درنتیجه: $k = \frac{۱}{۴}$

۴۱ گزینه ۱

به شکل رسم‌شده خوب توجه کنید، اثبات می کنیم دو مثلث $\overset{\Delta}{ADM}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ باهم متشابه هستند:



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\hat{D}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{C} \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow C\hat{A}B = D\hat{A}M\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ADM}$$ (دو زاویهٔ مساوی)

باتوجه‌به متشابه‌بودن دو مثلث، نسبت تشابه را نوشته و گزینهٔ درست را به دست می‌آوریم:

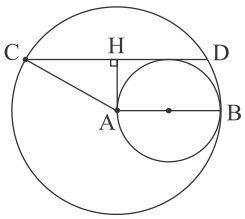
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ADM} \Rightarrow \underbrace{\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC}}_{\text{طرفین وسطین}} = \frac{AM}{AB}$$

$$\Rightarrow AD \times BC = AC \times DM$$

۴۲ گزینه ۳

تجانس طولپا نیست.

۴۳ گزینه ۳

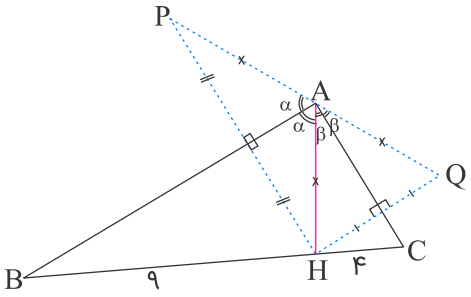


به فرض $AB = ۱۲$ پس شعاع دایره کوچکتر ۶ واحد است در مثلث ACH داریم:

$$CH^۲ = AC^۲ - AH^۲ = ۱۴۴ - ۳۶ = ۱۰۸$$

پس $CH = ۶\sqrt{۳}$ درنتیجه $CD = ۱۲\sqrt{۳}$.

۴۴ گزینه ۳



اولاً باتوجه‌به شکل، داریم:

$$P\hat{A}Q = ۲\alpha + ۲\beta = ۲(\alpha+\beta) \xrightarrow{\alpha+\beta=۹۰^\circ} P\hat{A}Q = ۱۸۰^\circ$$

پس سه نقطهٔ P، A و Q روی یک خط قرار دارند. درنتیجه $PQ = ۲AH$. حال طول AH را با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌یابیم:

$$AH^۲ = BH.HC = ۳۶ \Rightarrow AH = ۶ \Rightarrow PQ = ۱۲$$

۴۵ گزینه ۳

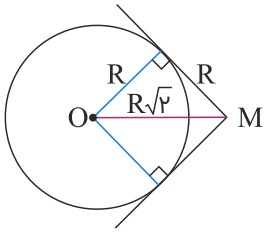
اگر آن نقطه را با شرایط گفته‌شده بازتاب دهیم، در حقیقت طبق تمرین کتاب، نقطه یک دوران انجام داده است و زاویهٔ دوران، دو برابر زاویهٔ بین دو خط $d_۱$ و $d_۲$ است. کمان BC برابر با ۱۰۰ درجه است؛ پس:

$$P_۱ = \frac{۵۰ + ۱۰۰}{۲} = ۷۵$$

پس زاویهٔ دوران برابر است با:

$$۷۵ \times ۲ = ۱۵۰^\circ$$

۴۶ گزینه ۱

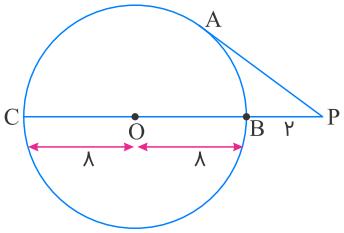


باتوجه‌به اینکه فاصله نقطه M از مرکز دایره برابر $R\sqrt{۲}$ است، داریم:

$$\begin{cases} OM = R\sqrt{۲} \\ R = ۱۲\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow OM = ۱۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۲۴$$

۴۷ گزینه ۲

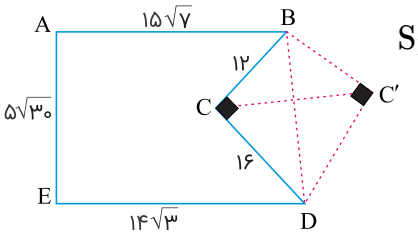
از P به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم. در این صورت کوتاه‌ترین فاصله از دایره، $PB = ۲$ است.



$$PB.PC = PA^{۲} \Rightarrow ۲ \times ۱۸ = PA^{۲} \Rightarrow PA = ۶$$

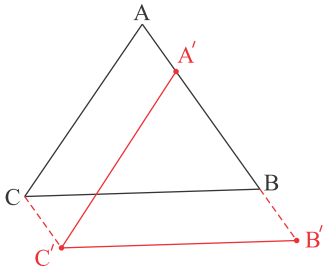
۴۸ گزینه ۲

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بازتاب نقطهٔ C را نسبت به BD به دست می‌آوریم (C' می‌نامیم). به‌اندازهٔ مساحت چهار ضلعی $BC'DC$ میزان افزایش مساحت موردنظر است:



$$S_{BC'DC} = ۲(S_{BCD}) = ۲(\frac{۱}{۲} \times BC \times CD) = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۱۶ = ۱۹۲$$

۴۹ گزینه ۲



اگر طول $\frac{۱}{۴}\overrightarrow{AB}$ را x قرار دهیم، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} AB = ۴x \\ AA' = x \\ CC' = x \\ BB' = x \end{cases}$$

می‌دانیم در انتقال شیب خطوط حفظ می‌شود، پس $CC' || AB'$ و چهارضلعی $ACC'B'$ یک ذوزنقه است.
واضح است که ارتفاع ذوزنقه و ارتفاع مثلث $A'B'C'$ از رأس C' هم‌اندازه هستند. این ارتفاع را h می‌نامیم.

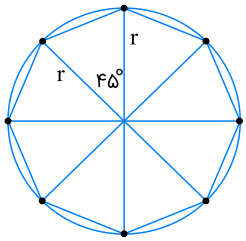
$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{۱}{۲}h(CC' + AB') = \frac{۱}{۲}h(x + ۵x) = ۳xh$$

$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{A'B'C'} = \frac{۱}{۲}h \cdot A'B' = \frac{۱}{۲}h \times ۴x = ۲xh$$

پس مساحت ذوزنقه، $\frac{۳}{۲}$ مساحت مثلث است.

۵۰ گزینه ۱

وقتی هشت‌ضلعی منتظم داخل دایره محاط می‌شود به این معنا است که مرکز دایره بر مرکز هشت‌ضلعی منتظم منطبق شده است. در چنین حالتی اگر مرکز هشت ضلعی را به رئوس‌اش وصل کنیم، ۸ تا مثلث متساوی‌الساقین همنهشت با طول ساقی برابر با شعاع دایره به وجود می‌آید که زاویهٔ رأس هرکدام برابر با $\frac{۳۶۰^\circ}{۸} = ۴۵^\circ$؛ بنابراین برای مساحت یکی از آن‌ها داریم (مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها):



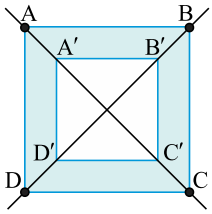
$$S = \frac{r \times r \times \sin ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۲ \times ۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

بنابراین مساحت هشت‌ضلعی منتظم برابر است با:

$$S_{\text{هشت ضلعی منتظم}} = ۸S = ۸\sqrt{۲}$$

۵۱ گزینه ۲

از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم:



با فرض $AB = a$ به دست می‌آید:

$$A'B' = \frac{۳}{۴}AB = \frac{۳}{۴}a$$

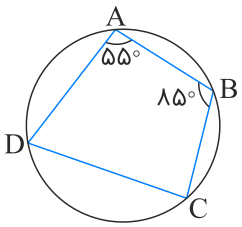
همچنین:

$$\text{مساحت بین دو مربع} = S_{ABCD} - S_{A'B'C'D'} = a^۲ - \frac{۹}{۱۶}a^۲ = \frac{۷}{۱۶}a^۲$$

بنا بر فرض سؤال $\frac{۷}{۱۶}a^۲ = ۷$، یعنی $a = ۴$، درنتیجه $A'B' = \frac{۳}{۴}a = ۳$. درنهایت به دست می‌آید:

$$\text{محیط مربع } A'B'C'D' = ۴A'B' = ۱۲$$

۵۲ گزینه ۳



می‌دانیم مجموع زوایای مقابل در چهارضلعی محاطی برابر با ۱۸۰° است، بنابراین داریم:

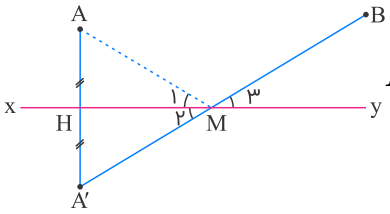
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{A}=۱۸۰^\circ-۵۵^\circ=۱۲۵^\circ \\ \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}=۱۸۰^\circ-\hat{B}=۱۸۰^\circ-۸۵^\circ=۹۵^\circ\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{C}-\hat{D}=۱۲۵^\circ-۹۵^\circ=۳۰^\circ$$

۵۳ گزینه ۲

مطابق شکل، بازتاب A نسبت به محور xy نقطهٔ A' است.

$A'B$، xy را در M قطع می‌کند. داریم:



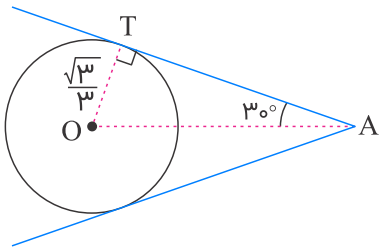
$$AH=A'H\ ,\ H=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{M}_۲\ ,\ \hat{M}_۲=\hat{M}_۳ \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{M}_۳$$

۵۴ گزینه ۲

باید $OA>R$، پس داریم:

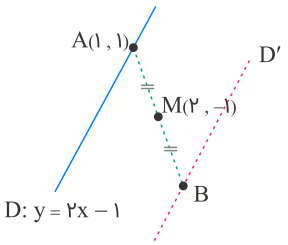
$$۱۰-x>۳ \Rightarrow x<۷ \Rightarrow x=۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳\ ,\ ۴\ ,\ ۵\ ,\ ۶$$

۵۵ گزینه ۴



$$\tan ۳۰^\circ=\frac{OT}{AT} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{AT} \Rightarrow AT=۱$$

۵۶ گزینه ۴



چون در بازتاب نسبت به یک نقطه شیب حفظ می‌شود، پس شیب خط تبدیل‌یافته هم برابر ۲ است. کافی است یک نقطه روی خط تبدیل‌یافته (D') بیابیم. اگر این نقطه را B بگیریم، داریم:

$$M = \frac{A+B}{۲} \Rightarrow B = ۲M - A = ۲(۲\,,\,-۱) - (۱\,,\,۱) = (۳\,,\,-۳)$$

بنابراین معادلهٔ D' عبارت است از:

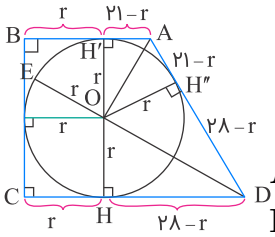
$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y + ۳ = ۲(x - ۳) \Rightarrow y = ۲x - ۹$$

با بررسی گزینه‌ها متوجه می‌شویم نقطهٔ $(-۱\,,\,۴)$ در معادلهٔ خط صادق است.

۵۷ گزینه ۴

این فاصله برابر DE است.

چون ۲ مماس رسم‌شده از یک نقطه بر دایره باهم برابرند:



$$AH'' = AH' = ۲۱ - r$$
$$DH'' = DH = ۲۸ - r$$

ازطرفی DO و AO نیمساز می‌باشند، پس $A\hat{O}D = ۹۰^\circ$. درنتیجه $\overset{\Delta}{AOD}$ قائم‌الزاویه است، پس:

$$OH'' = AH'' \times DH'' \Rightarrow r^۲ = (۲۱ - r)(۲۸ - r) = ۲۱ \times ۲۸ + r^۲ - ۴۹r \Rightarrow ۴۹r = ۲۱ \times ۲۸ \Rightarrow r = ۱۲$$

طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$OH^۲ + HD^۲ = OD^۲ \Rightarrow r^۲ + (۲۸ - r)^۲ = ۱۲^۲ + ۱۶^۲ = ۲۰^۲ \Rightarrow OD = ۲۰$$
$$\Rightarrow ED = ۲۰ + r = ۳۲$$

۵۸ گزینه ۲

می‌دانیم دوران به مرکز یک نقطهٔ دلخواه (که می‌تواند مبدأ هم نباشد) و تحت یک زاویهٔ دلخواه، یک تبدیل طولپا است؛ پس درنتیجه طول را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین:

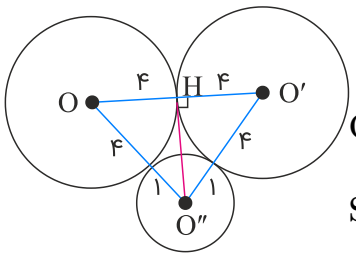
$$A'B' = AB = ۵\,cm$$

همچنین در تجانس طول پاره‌خط k برابر می‌شود:

$$A''B'' = k\,.\,A'B' = ۴ \times ۵ = ۲۰$$

۵۹ گزینه ۴

مثلث $OO'O''$ متساوی‌الساقین است، پس $O''H$ ارتفاع وارد بر قاعدهٔ OO' نقش میانه نیز دارد. پس داریم:

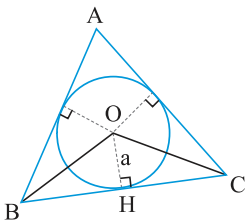


$$O''H = \sqrt{۲۵ - ۱۶} = ۳$$

$$S_{\overset{\Delta}{OO'O''}} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۳ = ۱۲$$

۶۰ گزینه ۲

محل برخورد نیمسازهای داخلی هر مثلث مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث است. در شکل زیر نقطهٔ O نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلث ABC و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی است.



آمار و احتمال

۶۱ گزینه ۱

عبارت اول از دو جملهٔ امری تشکیل شده است. عبارت دوم عاطفی است. عبارت سوم امری و چهارمین عبارت پرسشی است. هیچ‌کدام گزاره نیستند!

۶۲ گزینه ۴

نکته: اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، آنگاه تعداد کل زیرمجموعه‌های A برابر است با:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\ldots+\binom{n}{n}=۲^n$$

$$\text{تعداد مضرب‌های دورقمی } ۷=\left[\frac{۹۹}{۷}\right]-\left[\frac{۹}{۷}\right]=۱۴-۱=۱۳$$

پس برای $n=۱۳$ داریم:

$$\binom{۱۳}{۰}+\binom{۱۳}{۱}+\binom{۱۳}{۲}+\underbrace{\binom{۱۳}{۳}+\binom{۱۳}{۴}+\cdots+\binom{۱۳}{۱۳}}_{\substack{\downarrow\\ \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}\\ \text{با حداقل سه عضو}}}=۲^{۱۳}$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها با حداقل سه عضو}=۲^{۱۳}-\binom{۱۳}{۰}-\binom{۱۳}{۱}-\binom{۱۳}{۲}$$

$$=۲^{۱۳}-۱-۱۳-۷۸=۸۱۹۲-۹۲=۸۱۰۰$$

۶۳ گزینه ۲

ابتدا مجموعهٔ A را مشخص می‌کنیم.

$$x^۳-x=۰\Rightarrow x(x^۲-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x^۲-۱=۰\Rightarrow x=\pm۱\end{cases}$$

$$A=\{-۱,۰,۱\}\Rightarrow n(A)=۳\ ,\ \ n(A\cap B)=۲$$

$$n((A-B)\times(B-A))=n(A-B)\times n(B-A)=(n(A)-n(A\cap B))(n(B)-n(A\cap B))$$

$$۸=(۳-۲)\,(n(B)-۲)\Rightarrow n(B)=۱۰$$

۶۴ گزینه ۴

گام اول

الف) در چنین تست‌های احتمال شرطی بهتر است ابتدا فضای نمونه‌ای جدید را با توجه به شرط داده شده تعریف کنیم. می‌دانیم در یک خانوادهٔ سه فرزندی تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $۲^{۳} = ۸$ است. چون حداقل یکی از فرزندان حتماً دختر است پس حالتی که هر سه فرزند پسر باشند از فضای نمونه‌ای حذف می‌شود.

ب) پیشامد مطلوب را با توجه به فضای نمونه‌ای جدید تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$n(S) = ۸ - ۱ = ۷$$

اگر پیشامد داشتن حداقل دو فرزند دختر را با A نشان دهیم، داریم:

$$A = \{(د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د), (د, د, د)\}$$

$$n(A) = ۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۷}$$

۶۵ گزینه ۱

با استفاده از قوانین پخشی، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') = (A - B) \cup (A - B')$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup B') = (A \cap B') \cup (A \cap B)$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cap B') = A \cap (B' \cup B)$$

$$\Rightarrow A \cup \varnothing = A \cap U \Rightarrow A = A$$

پس تساوی داده‌شده، همواره برقرار است.

۶۶ گزینه ۲

در پرتاب دو تاس تعداد فضای نمونه‌ای برابر ۳۶ است فضای مساعد به‌صورت جفت‌های زیر است:

$$A = \{(۶, ۴), (۶, ۵), (۶, ۶), (۵, ۵), (۵, ۶), (۴, ۶)\}$$

پس: $P = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

۶۷ گزینه ۱

اگر $A \subset B$، آنگاه $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

۶۸ گزینه ۴

گام اول

هر مجموعهٔ nعضوی، دارای 2^n زیرمجموعه است که از میان آن‌ها $2^n - 1$ زیرمجموعه، ناتهی هستند.

گام دوم

با استفاده از ویژگی تفاضل و قانون دمورگان، داریم:

$$C = A \cap (A' - B)' = A \cap (A' \cap B')' = A \cap (A \cup B) = A$$

بنابراین تعداد عضوهای مجموعهٔ C برابر با تعداد عضوهای مجموعهٔ A است.
مجموعهٔ A دارای ۱۵ زیرمجموعهٔ ناتهی است؛ پس طبق گام اول، به‌طورکلی ۱۶ زیرمجموعه دارد؛ بنابراین مجموعهٔ A و درنتیجه مجموعهٔ C دارای ۴ عضو $(2^4 = 16)$ است.

۶۹ گزینه ۴

$$n(S) = \binom{10}{2} = 45$$

$$\text{گزینهٔ ۱ : } P(\text{دو مهره همرنگ باشند}) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}}{45} = \frac{6 + 10}{45} = \frac{16}{45}$$

$$\text{گزینهٔ ۲ : } P(\text{دو مهره همرنگ نباشند}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1} + \binom{4}{1} \times 1 + \binom{5}{1} \times 1}{45} = \frac{29}{45}$$

$$\text{گزینهٔ ۳ : } P(\text{حداقل یکی آبی}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1} + \binom{4}{2}}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

$$\text{گزینهٔ ۴ : } P(\text{حداکثر یکی آبی}) = \frac{\binom{6}{2} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{1}}{45} = \frac{39}{45} = \frac{13}{15}$$

۷۰ گزینه ۳

$$[[(A \cup B) \cap A] \cup [B' \cap (A \cup B)]]' = [(A \cup (A \cap B')]' = [A]' = A'$$

۷۱ گزینه ۴

ابتدا گزاره شرطی را به گزارهٔ فصلی تبدیل می‌کنیم، یعنی:

$$\sim p \Rightarrow q \equiv \sim (\sim p) \vee q \equiv p \vee q$$

حال از قانون دمورگان بهره می‌گیریم:

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

۷۲ گزینه ۴

افرازها به‌صورت زیر است:

۱) $\{a, b, d\}, \{c\}, \{e\}$

۲) $\{a, b, d\}, \{c, e\}$

۳) $\{a, b, d, c, e\}$

۴) $\{a, b, d, c\}, \{e\}$

۵) $\{a, b, d, e\}, \{c\}$

نکته: سه عضو a، b و d را به هم می‌بندیم که در این صورت مجموعهٔ جدید دارای سه عضو بوده که دارای ۵ افراز است.

$\{(a, b, d), c, e\}$

۷۳ گزینه ۴

عکس نقیض گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به‌صورت $\sim q \Rightarrow \sim p$ است بنابراین در این تست داریم:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \xrightarrow{\text{عکس نقیض}} ((p \vee q) \Rightarrow r) \equiv (\sim r \Rightarrow \sim (p \vee q)) \equiv (\sim r \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q))$$

بنابراین گزینهٔ "۴" صحیح است.

۷۴ گزینه ۳

جدول ارزش n گزاره، 2^n حالت دارد.

گزاره	p	q	r	گزاره	p	q	r
۱	د	د	د	۵	ن	د	د
۲	د	د	ن	۶	ن	د	ن
۳	د	ن	د	۷	ن	ن	د
۴	د	ن	ن	۸	ن	ن	ن

پس جدول ارزش سه گزاره، دارای ۸ حالت است. سوال شده که در چند حالت حداقل دو گزاره درست است، یعنی از سه گزاره یا باید دو گزاره یا هر سه گزاره درست باشند. باتوجه‌به جدول رسم‌شده، پاسخ ۴ (گزینهٔ "۳") است.

۷۵ گزینه ۱

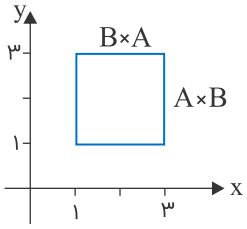
کارت اول اگر زوج باشد (۶ حالت) کارت دوم بدون جای‌گذاری ۱۱ حالت دارد. در این حالت فضای نمونه ۶۶ حالت دارد. می‌دانیم عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم سمت راست آن به ۴ بخش‌پذیر باشد. که در این حالت اعداد ۲۴ - ۲۸ - ۲۱۲ - ۴۸ - ۴۱۲ - ۶۴ - ۶۸ - ۶۱۲ - ۸۴ - ۸۱۲ - ۱۰۴ - ۱۰۸ - ۱۰۱۲ - ۱۲۴ - ۱۲۸ به ۴ بخش‌پذیر است که ۱۵ حالت مساعد دارد.

اما اگر کارت اول فرد باشد (۶ حالت). تاس پرتاب می‌کنیم که در این حالت فضای نمونه ۳۶ حالت دارد، که اعداد ۱۲ ۱۶ ۳۲ ۳۶ ۵۲ ۵۶ ۷۲ ۷۶ ۹۲ ۹۶ ۱۱۲ ۱۱۶ مضرب ۴ هستند که ۱۲ حالت مساعد دارد.

پس احتمال مطلوب آن $\frac{۹}{۳۴} = \frac{۲۷}{۱۰۲} = \frac{۱۵+۱۲}{۶۶+۳۶}$ می‌باشد.

۷۶ گزینه ۱

نمودار $(A \times B) \cup (B \times A)$ به‌صورت زیر است:



۷۷ گزینه ۲

باید تمامی اعضا باهم برابر باشند. دو حالت زیر را داریم:

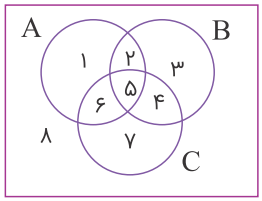
$$\begin{cases} ۲a-۱=a+۱ \Rightarrow a=۲ \\ b+۱=\frac{b}{۳} \Rightarrow b=-\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow (۲,-\frac{۳}{۲})$$

$$\begin{cases} b+۱=a+۱ \Rightarrow b=a \\ ۲a-۱=\frac{b}{۳} \Rightarrow ۲a-۱=\frac{a}{۳} \Rightarrow a=\frac{۳}{۵} \end{cases} \Rightarrow (\frac{۳}{۵},\frac{۳}{۵})$$

$(۲,-\frac{۳}{۲})$ در گزینه‌ها است.

۷۸ گزینه ۳

اگر سه مجموعه را در حالت کلی در نظر بگیریم، مجموعهٔ مرجع را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنند. مطابق شکل داریم:



دقت کنید منظور از اعداد، شمارهٔ ناحیه‌ها است نه اعضای مجموعه‌ها.

$$A \cap (B \cup C) = \{۲ , ۵ , ۶\}$$

$$B - C = \{۲ , ۳\}$$

$$\Rightarrow \{۲ , ۵ , ۶\} = \{۲ , ۳\} \Rightarrow \{۳\} = \{۵, ۶\} = \varnothing$$

پس دو مجموعهٔ A و C اشتراک ندارند و B زیرمجموعهٔ $A \cup C$ است.

۷۹ گزینه ۱

احتمال پسر بودن و احتمال دختر بودن فرزند همواره مستقل از هم هستند و احتمال هریک از آنان برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۸۰ گزینه ۳

تعداد افرازهای حداقل سه قسمتی یعنی افرازهای سه قسمتی، چهارقسمتی و پنج قسمتی را بایستی محاسبه کنیم، بنابراین داریم:

$$\text{سه قسمتی} : \begin{cases} (-,-,---) : \frac{۵!}{۳!۲!} = ۱۰ \\ (-,--,--) : \frac{۵!}{۲!۲!۲!} = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow ۱۰ + ۱۵ = ۲۵$$

$$\text{چهار قسمتی} : (-,-,-,--) : \frac{۵!}{۲!۳!} = ۱۰$$

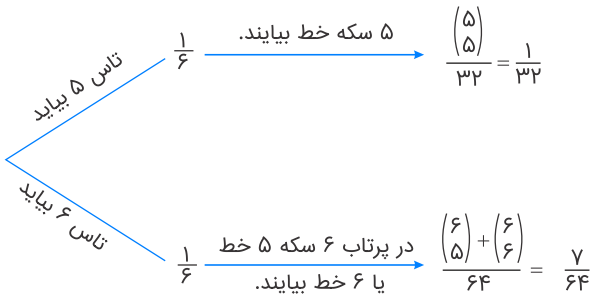
$$\text{پنج قسمتی} : (-,-,-,-,-) : \text{۱ حالت}$$

قسمت \ عضو	۱	۲	۳	۴	۵ ↓
۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۰	۱	۳	۷	۱۵
۳	۰	۰	۱	۶	۲۵
۴	۰	۰	۰	۱	۱۰
۵	۰	۰	۰	۰	۱

→ $۲۵ + ۱۰ + ۱ = ۳۶$

۸۱ گزینه ۱

عدد اول بیش از ۴ برابر ۵ است. نمودار درختی حاصل را رسم می‌کنیم:



$$P(B|A)=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{32}}{\frac{1}{6}\times\frac{1}{32}+\frac{7}{64}\times\frac{1}{6}}=\frac{2}{9}$$

۸۲ گزینه ۳

ابتدا مجموعه‌های A_3 و A_4 را با اعضای تشکیل دهندهٔ آن تعیین می‌کنیم.

$$A_n=\{m\in\mathbb{Z}|m\geq -n, 2^m\leq n\}$$

$$A_3=\{m\in\mathbb{Z}|m\geq -3, 2^m\leq 3\}=\{-3,-2,-1,0,1\}$$

$$A_4=\{m\in\mathbb{Z}|m\geq -4, 2^m\leq 4\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$$

بنابراین $A_3\cap A_4$ به صورت زیر می‌شود:

$$A_3\cap A_4=\{-3,-2,-1,0,1\}\Rightarrow |A_3\cap A_4|=5$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های $A_3\cap A_4$ برابر است با:

$$2^{|A_3\cap A_4|}=2^5=32$$

۸۳ گزینه ۳

نکته:

$$n(A^2-B^2)=(n(A))^2-(n(A\cap B))^2$$

$$A=\{2,3,4,5\},\ B=\{3,4\}$$

$$n(A^2-B^2)=(n(A))^2-(n(A\cap B))^2=4^2-2^2=16-4=12$$

۸۴ گزینه ۱

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A و B مستقل‌اند:

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = (P(B) + ۰/۲) \times P(B)$$

حال داریم:

$$P(B) = a \Rightarrow (a + ۰/۲) + a - a \times (a + ۰/۲) = ۰/۷۶$$

$$\Rightarrow a + ۰/۲ + a - a^۲ - ۰/۲a = ۰/۷۶ \Rightarrow a^۲ - ۱/۸a + ۰/۵۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (a - ۰/۴)(a - ۱/۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰/۴ & \text{ق ق} \\ a = ۱/۴ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(B) = ۰/۴ \ , \ P(A) = ۰/۶$$

۸۵ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{r} A_۱ = [-۱, ۳) \\ A_۲ = [-\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲}) \\ A_۳ = [-\frac{۱}{۳}, \frac{۷}{۳}) \\ \vdots \\ A_{۱۰۰} = [-\frac{۱}{۱۰۰}, \frac{۲۰۱}{۱۰۰}) \end{array}\right\} \Rightarrow A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_{۱۰۰} = [-۱, ۳)$$

۸۶ گزینه ۳

به‌دلیل آنکه بیرون‌آوردن مهره‌ها از کیسه مستقل می‌باشند، بنابراین:

$$P(\text{یک قرمز}) = \frac{۷}{۱۲} \quad , \quad P(\text{یک سفید}) = \frac{۵}{۱۲}$$

$$S = \{(\text{ سفید } , \text{ سفید } , \text{ قرمز } , \text{ قرمز } , \text{ سفید })\}$$

$$P(\text{ سفید }) \times P(\text{ سفید }) \times P(\text{ قرمز }) \times P(\text{ قرمز }) \times P(\text{ سفید })$$
$$= \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۵}{۱۲} = (\frac{۵}{۱۲})^۳ \times (\frac{۷}{۱۲})^۲$$

۸۷ گزینه ۴

$$P(\text{اولی سفید} \cap \text{دومی سیاه} \cap \text{سومی سفید}) + P(\text{اولی سیاه} \cap \text{دومی سفید} \cap \text{سومی سیاه})$$
$$= P(\text{اولی سفید}) \times P(\text{دومی سیاه} | \text{اولی سفید}) \times P(\text{سومی سفید} | \text{اولی سفید} \cap \text{دومی سیاه})$$
$$+ P(\text{اولی سیاه}) \times P(\text{دومی سفید} | \text{اولی سیاه}) \times P(\text{سومی سیاه} | \text{اولی سیاه} \cap \text{دومی سفید})$$
$$= \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۶}{۹} \times \frac{۳}{۸} + \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۴}{۹} \times \frac{۵}{۸} = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۶} = \frac{۴}{۱۵}$$

۸۸ گزینه ۲

عبارت‌های ب و د نادرست هستند.

الف) توزیع‌پذیری اجتماع نسبت به اشتراک:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ب) توزیع‌پذیری تفاضل نسبت به اشتراک:

$$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C')$$
$$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B') \cap (A \cap C') = A \cap (B' \cap C')$$
$$\Rightarrow A - (B \cap C) \neq (A - B) \cap (A - C)$$

ج) توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

د) توزیع‌پذیری اجتماع نسبت به تفاضل:

$$A \cup (B - C) = A \cup (B \cap C') = (A \cup B) \cap (A \cup C')$$
$$(A \cup B) - (A \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)'$$
$$\Rightarrow A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$$

۸۹ گزینه ۲

گام اول

با این شرط که می‌دانیم یکی از فرزندان خانوادهٔ سه فرزندی پسر است، فضای نمونه‌ای جدید را تعریف کرده و پیشامد مطلوب را از میان آن مشخص می‌کنیم.

گام دوم

$$S = \{(پ, د, د), (د, پ, د), (د, د, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ), (پ, پ, پ)\}$$

در واقع حالتی که تمام فرزندان دختر باشد، حذف شده است. پس در حالت جدید داریم:

$$n(S) = ۷$$

پیشامد A که داشتن دو دختر از میان سه فرزند را بیان می‌کند، ۳ عضو دارد.

$$A = \{(پ, د, د), (د, پ, د), (د, د, پ)\}$$

$$n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۷}$$

۹۰ گزینه ۴

جمع ارقام ۱۲ = ۵ + ۲ + ۴ + ۱ است و بر ۳ بخش‌پذیر است. اگر عدد ۴ رقمی ما زوج باشد، به ۲ هم بخش‌پذیر بوده و مضرب ۶ خواهد بود؛ پس مسئله مثل این است که از ما خواسته که عدد ما زوج باشد.

$$n(S) = \underbrace{\text{۳ حالت}}_{\text{به‌جز یکان که ۲ یا ۴ است}} \times ۲ \times ۱ \times \underbrace{\text{۲ حالت}}_{\text{فقط ۲ یا ۴}} = ۱۲$$

پس احتمال اینکه در دفعهٔ اول رمز را درست وارد کنیم $\frac{۱}{۱۲}$ است.

فیزیک

۹۱ گزینه ۴

$$|F| = k\frac{۵۴q^۲}{d^۲}$$

طبق اصل پایستگی بار الکتریکی : $q'_۱ = q'_۲ = \frac{q_۱ + q_۲}{۲} = \frac{۶q - ۹q}{۲} = \frac{-۳q}{۲}$

$$|F'| = k\frac{q^۲}{d^۲}(\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۹}{۴}k\frac{q^۲}{d^۲}$$

$$\frac{|F'|}{|F|} = \frac{\frac{۹}{۴}k\frac{q^۲}{d^۲}}{۵۴k\frac{q^۲}{d^۲}} = \frac{\frac{۹}{۴}}{\frac{۵۴}{۱}} = \frac{۱}{۴ \times ۶} = \frac{۱}{۲۴}$$

۹۲ گزینه ۱

جریان خروجی از رئوستا، از C خارج می‌شود (نه از B) و لغزنده تأثیری روی سیمی که از آن عبور می‌کند ندارد. در واقع طول سیم ثابت باقی می‌ماند و جریان تغییری نمی‌کند.

۹۳ گزینه ۴

هنگامی‌که در جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کنیم، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد، بنابراین با حرکت از نقطهٔ A تا نقطهٔ B پتانسیل الکتریکی کاهش یافته و درنتیجه $V_B < V_A$ است. همچنین چون الکترون در خلاف جهت خودبه‌خودی‌اش حرکت کرده است، پس بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد؛ یعنی:

$$U_B > U_A$$

۹۴ گزینه ۱

چون ورقه‌های الکتروسکوپ باز هستند، پس الکتروسکوپ و خازن هر دو باردارند. بار صفحهٔ B و الکتروسکوپ از یک نوع است. با قرار دادن شیشهٔ بدون بار بین صفحات خازن، ظرفیت خازن زیاد می‌شود. زیرا باوجود شیشه که به‌عنوان دی‌الکتریک بین صفحات خازن قرار دارد، ظرفیت خازن افزایش می‌یابد و همچنین بار روی صفحات خازن نیز زیاد می‌شود.

$$q = C \uparrow \underbrace{V}_{\text{ثابت}} \Rightarrow q \uparrow \text{ افزایشی}$$

این افزایش بار روی صفحات از انتقال بار الکتروسکوپ ناشی شده است. پس انحراف ورقه‌ها کاهش می‌یابد.

۹۵ گزینه ۲

از رابطه‌های $C = \frac{Q}{V}$ و $C = \kappa\varepsilon_{\circ}\frac{A}{d}$ داریم:

$$\kappa\varepsilon_{\circ}\frac{A}{d} = \frac{Q}{V} \Rightarrow \kappa\varepsilon_{\circ} = \frac{Q}{A} \times \frac{d}{V} \xrightarrow{E=\frac{V}{d}} \kappa\varepsilon_{\circ} = \frac{Q}{A} \times \frac{1}{E} \Rightarrow E = \frac{Q}{\kappa\varepsilon_{\circ}A}$$

حالا اندازهٔ میدان بین صفحه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} Q = 0/18 \times 10^{-6} \\ A = 1\,cm^2 = 10^{-4}\,m^2 \\ \kappa = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow E = \frac{0/18 \times 10^{-6}}{10 \times 9 \times 10^{-9} \times 1 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^4\,V/m = 20\,kV/m$$

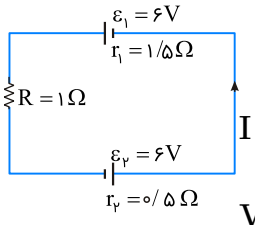
۹۶ گزینه ۱

$$Q = CV = \frac{\overbrace{k\varepsilon_{\circ}A}^{\text{ثابت}}}{d \uparrow} \times \overbrace{V}^{\text{ثابت}} \Rightarrow Q \text{ کاهش دارد}$$

تنها گزینه‌ای که بار در آن کاهش یافته گزینهٔ یک است.

۹۷ گزینه ۱

ابتدا جریان مدار را به دست آورده و سپس اختلاف‌پتانسیل الکتریکی دو سر مولد ε_1 را محاسبه می‌کنیم:

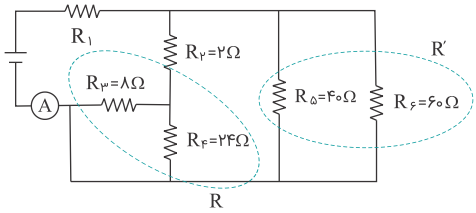


$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{6 + 6}{1 + 1/5 + 0/5} = \frac{12}{3} = 4\,A$$

$$V_1 = \varepsilon_1 - Ir_1 = 6 - 4 \times 1/5 = 0$$

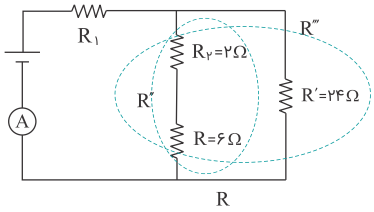
۹۸ گزینه ۱

آمپرسنج جریان عبوری کل را به ما می‌دهد. بنابراین باید مقاومت معادل کل مدار را به دست بیاوریم و از قانون حلقه استفاده کنیم. مقاومت‌های $R_۶$ ، $R_۵$ و همچنین مقاومت‌های $R_۴$ ، $R_۳$ باهم موازی‌اند بنابراین:



$$\frac{۱}{R}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲۴} \Rightarrow R=۶\Omega$$
$$\frac{۱}{R'}=\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{۶۰} \Rightarrow R'=۲۴\Omega$$

بنابراین مدارمان به‌صورت زیر درمی‌آید:

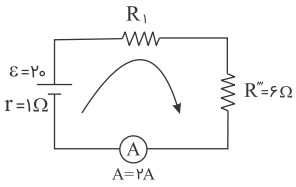


$$\begin{cases} R''=R_۲+R \\ R_۲=۲\Omega \\ R=۶\Omega \end{cases} \Rightarrow R''=۸\Omega$$

مقاومت R'' با R' نیز باهم موازی می‌باشند و مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

$$\frac{۱}{R'''}=\frac{۱}{R''}+\frac{۱}{R'} \Rightarrow \frac{۱}{R'''}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲۴} \Rightarrow R'''=۶\Omega$$

حال یک مدار ساده داریم و با نوشتن قانون حلقه می‌توانیم $R_۱$ را به دست بیاوریم:



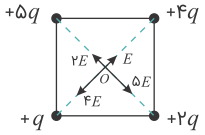
$$\varepsilon-IR_۱-IR'''-Ir=۰ \Rightarrow ۲۰-۲\times R_۱-۲\times ۶-۳\times ۱=۰ \Rightarrow R_۱=۳\Omega$$

۹۹ گزینه ۲

$$C=\kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C'}{C}=\frac{\kappa'}{\kappa}\times\frac{A'}{A}\times\frac{d}{d'}=۳\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}$$
$$C'=۵۰\times\frac{۱}{۴}=۱۲/۵\,\mu F=۱۲/۵\times۱۰^{-۳}\,mF=۱/۲۵\times۱۰^{-۲}\,mF$$

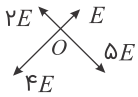
۱۰۰ گزینه ۴

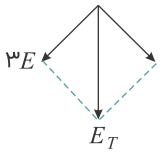
با توجه به رابطهٔ $E = k\frac{q}{r^۲}$ و یکسان بودن فاصلهٔ بارها $(r_۱ = r_۲ = r_۴ = r_۵ = r)$ تا مرکز مربع خواهیم داشت:



$$\begin{cases} E = kq/r^۲ \\ E_۲ = \dfrac{k(۲q)}{r^۲} = ۲E \\ E_۴ = \dfrac{k(۴q)}{r^۲} = ۴E \\ E_۵ = \dfrac{k(۵q)}{r^۲} = ۵E \end{cases}$$

بنابراین اگر برآیند آن‌ها را در نقطه O رسم کنیم، خواهیم داشت:

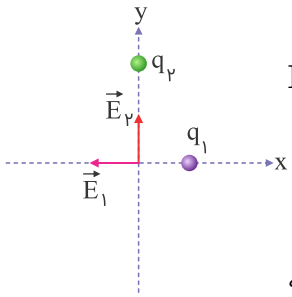




$$E_T = \sqrt{(۳E)^۲ + (۳E)^۲} = \sqrt{۱۸E^۲} = ۳\sqrt{۲}E$$

۱۰۱ گزینه ۲

بردارهای میدان الکتریکی حاصل از هریک از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ مطابق شکل زیر است:



$$\vec{E} = ۲۲۵۰۰(-\vec{i} + \vec{j}) = -۲۲۵۰۰\vec{i} + ۲۲۵۰۰\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_۱ = -۲۲۵۰۰\vec{i} \\ \vec{E}_۲ = ۲۲۵۰۰\vec{j} \end{cases}$$

چون میدان الکتریکی بار $q_۱$ به سمت خارج $q_۱$ است، پس $q_۱$ مثبت و چون میدان الکتریکی بار $q_۲$ به سمت داخل $q_۲$ است، پس $q_۲$ منفی است.

حال با استفاده از رابطهٔ محاسبهٔ اندازهٔ میدان الکتریکی، اندازهٔ بارها را به دست می آوریم:

$$E = k\frac{|q|}{r^۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲۲۵۰۰ = \dfrac{۹ \times ۱۰^۹ \times |q_۱|}{(۲ \times ۱۰^{-۲})^۲} \Rightarrow |q_۱| = ۱ \times ۱۰^{-۹}\,C = ۱\,nC \\ ۲۲۵۰۰ = \dfrac{۹ \times ۱۰^۹ \times |q_۲|}{(۴ \times ۱۰^{-۲})^۲} \Rightarrow |q_۲| = ۴ \times ۱۰^{-۹}\,C = ۴\,nC \end{cases}$$

۱۰۲ گزینه ۱

طبق فرمول ظرفیت خازن تخت $C = \kappa\varepsilon_{\circ}\frac{A}{d}$ باید از دی‌الکتریکی استفاده کنیم که نسبت $\frac{\kappa}{d}$ آن بیشترین مقدار باشد تا بیشترین ظرفیت خازن حاصل شود:

میکا : $\frac{\kappa}{d} = \frac{۷}{۰/۳} = \frac{۷۰}{۳}$

شیشه : $\frac{\kappa}{d} = \frac{۵}{۰/۲ \times ۱۰} = ۲/۵$

پارافین : $\frac{\kappa}{d} = \frac{۲}{۰/۱ \times ۱۰} = ۲$

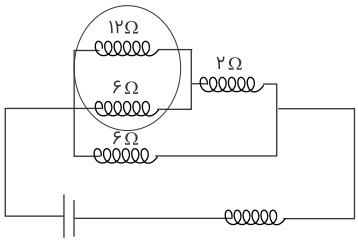
پلاستیک : $\frac{\kappa}{d} = \frac{۳}{۰/۲} = ۱۵$

مشاهده می‌شود که نسبت $\frac{\kappa}{d}$ برای میکا از مواد دیگر، بزرگ‌تر است، لذا بیشترین ظرفیت خازن با استفاده از میکا حاصل می‌شود.

۱۰۳ گزینه ۲

شکل مدار را می توانیم ساده کنیم:

مقاومت های نشان‌داده‌شده در شکل باهم موازی می باشند و مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

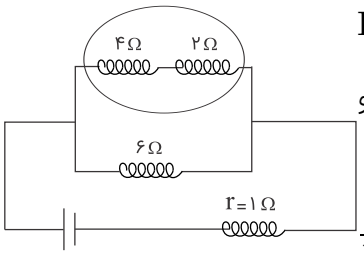


$$\frac{۱}{R} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۶} \Rightarrow R = \frac{۶ \times ۱۲}{۱۸} = ۴\Omega$$

مقاومت های ۲ و ۴ اهمی باهم متوالی اند، بنابراین مقاومت معادل آن‌ها می شود:

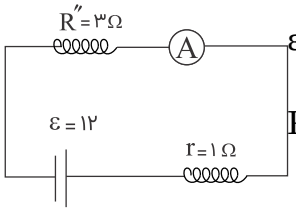
$$R' = ۴ + ۲ = ۶\Omega$$

و در نهایت مقاومت R' با مقاومت ۶Ω باهم موازی می باشند و مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:



$$\frac{۱}{R''} = \frac{۱}{R'} + \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{R''} = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} \Rightarrow R'' = ۳\Omega$$

حال با استفاده از قاعدهٔ حلقه می توانیم جریان را محاسبه کرده و در نهایت توان تلف‌شده در باتری را به دست آوریم:



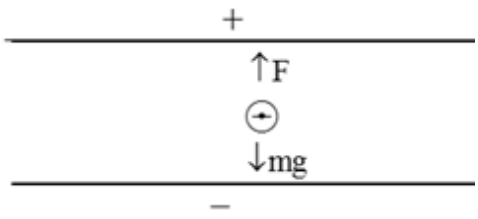
$$\varepsilon - Ir - IR'' = ۰ \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{r + R''} = \frac{۱۲}{۱ + ۳} = ۳A$$

$$P = RI^{۲} = ۱ \times (۳)^{۲} = ۹W$$

۱۰۴ گزینه ۱

در آزمایش قطره - روغن میلیکان، قطرهٔ روغن بین دو صفحهٔ رسانای موازی بزرگ که میدان الکتریکی در فضای بین آن‌ها یکنواخت است معلق می‌شود؛ یعنی وزن قطرهٔ روغن با نیروی الکتریکی که در میدان الکتریکی به روغن وارد شده است خنثی می‌شود:

$$mg = F$$



ازطرفی نیروی وارد بر یک ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی یکنواخت عبارت از $F = Eq$ است؛ بنابراین:

$$mg = Eq \Rightarrow ۱۲/۸ \times ۱۰^{-۱۵} \times ۱۰ = ۱ \times ۱۰^{۵} q \Rightarrow q = \frac{۱۲/۸ \times ۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{۵}} = ۱۲/۸ \times ۱۰^{-۱۹}\ C$$

بار الکتریکی مضرب صحیحی از بار الکترون است؛ پس:

$$q = ne \Rightarrow ۱۲/۸ \times ۱۰^{-۱۹} = n \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \Rightarrow n = \frac{۱۲/۸ \times ۱۰^{-۱۹}}{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} = ۸$$

۱۰۵ گزینه ۱

هر سه مقاومت به‌صورت موازی به یکدیگر بسته شده‌اند؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_{کل} = V_۱ = V_۲ = V_۳ \Rightarrow I_۲R_۲ = I_۱R_۱ = I_۳R_۳$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۲ = I_۱ \times ۱۰ = I_۳ \times ۱۰ \Rightarrow I_۱ = I_۳ = ۴\ A$$

$$I_{کل} = I_۱ + I_۲ + I_۳ = ۴ + ۲ + ۴ = ۱۰\ A$$

۱۰۶ گزینه ۴

ابتدا یک دستگاه از بردار میدان‌ها تشکیل داده و آن را حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{حالت اول: } \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ = \vec{E} \\ \text{حالت دوم (بعد از تغییر بار } q_۱\text{) : } -۲\vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ = -\dfrac{\vec{E}}{۲}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \vec{E}_۱ = \frac{\vec{E}}{۲}\,,\ \vec{E}_۲ = \frac{\vec{E}}{۲}$$

برای به دست آوردن نسبت اندازهٔ دو بار با مقایسهٔ میدان آن‌ها از رابطهٔ $E = k\dfrac{q}{r^۲}$ داریم:

$$\left|\frac{\vec{E}_۱}{\vec{E}_۲}\right| = \frac{k\frac{q_۱}{r_۱^۲}}{k\frac{q_۲}{r_۲^۲}} \Rightarrow \frac{\frac{E}{۲}}{\frac{E}{۲}} = \frac{\frac{q_۱}{۴۰^۲}}{\frac{q_۲}{۲۰^۲}} \Rightarrow ۱ = \frac{q_۱}{q_۲} \times \frac{۴۰۰}{۱۶۰۰} \Rightarrow \frac{q_۱}{q_۲} = ۴$$

چون میدان‌های اولیه همنام‌اند، پس علامت بارها قرینه یکدیگر است:

$$\frac{q_۱}{q_۲} = -۴$$

۱۰۷ گزینه ۲

در جابه‌جایی‌های عمود بر خطوط میدان (سطح هم‌پتانسیل) پتانسیل الکتریکی ثابت می‌ماند؛ بنابراین تنها در جابه‌جایی $۱۶\ \text{cm}$ موازی خطوط میدان؛ پتانسیل الکتریکی از A تا B کاهش می‌یابد:

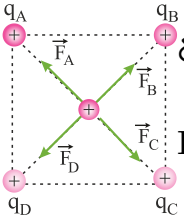
باتوجه‌به جابه‌جایی در جهت میدان است؛ داریم:

$$\Delta V = -E.d = -۱۰^۵ \times \frac{۱۶}{۱۰۰} \Rightarrow V = -۱۶ \times ۱۰^۳ = -۱۶\,\text{kV}$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_B - V_A \Rightarrow -۱۶ = ۱۴ - V_A \Rightarrow V_A = ۳۰\,\text{kV}$$

۱۰۸ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه فاصلهٔ هر چهار بار تا وسط مربع به یک اندازه است، نیروی الکتریکی هر بار به بار وسط با اندازهٔ بارها رابطهٔ مستقیم دارد. به همین دلیل فقط کافی است یک نیرو را حساب کنیم:



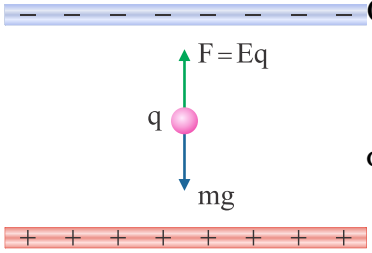
$$\text{فاصله بارها تا مرکز مربع} = \frac{۱}{۲}a\sqrt{۲} = ۱۰\sqrt{۲}\,\text{cm} \Rightarrow F_C = F_A = F_B = k\frac{|q_B||q|}{r^۲}$$

$$F_B = ۹ \times ۱۰^۹ \frac{(۲۰ \times ۱۰^{-۶})(۱۰ \times ۱۰^{-۶})}{(۱۰\sqrt{۲} \times ۱۰^{-۲})^۲} = ۹۰\,\text{N} \Rightarrow F_D = ۳F_B \Rightarrow F_D = ۲۷۰\,\text{N}$$

باتوجه‌به جهت نیروها در شکل فوق، اگر در هر قطر، برآیند نیروها را به دست آوریم، دو نیروی F_C و F_A یکدیگر را خنثی می‌کنند و نیروهای F_B و F_D از هم کم می‌شوند و نیروی برآیند برابر است با:

$$F_T = ۲۷۰ - ۹۰ = ۱۸۰\text{N}$$

۱۰۹ گزینه ۳



$$C = \kappa \frac{\varepsilon_0 A}{d} \Rightarrow C' = \kappa C$$

$$q = CV \Rightarrow V = \frac{\overset{\text{ثابت}}{\overset{\uparrow}{q}}}{\underset{\text{برابر}\kappa}{\underset{\downarrow}{C'}}}$$

$$\Rightarrow V' = \frac{V}{\kappa} \;,; \; E' = \frac{\overset{\text{برابر } \frac{1}{\kappa}}{\overset{\uparrow}{V'}}}{d} \Rightarrow E' = \frac{E}{\kappa} \;, \; \kappa = 1$$

پس E' ضعیف‌تر از E است. پس $F = Eq$ کاهش‌یافته، بنابراین q به سمت پایین حرکت می‌کند.

به عبارتی : $C' \uparrow \Rightarrow V' \downarrow \Rightarrow E' \downarrow \Rightarrow F \downarrow$

۱۱۰ گزینه ۴

با کاهش یکی از مقاومت‌های مجموعه (چه سری و چه موازی) مقاومت معادل کاهش می‌یابد. درنتیجه طبق رابطهٔ $I = \frac{\sum \varepsilon - \sum \varepsilon'}{R_{eq} + \sum r}$ شدت‌جریان عبوری از مولد افزایش می‌یابد.

چون $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ است، بنابراین مولد ε_2 در جهت جریان و مولد ε_1 در خلاف جهت جریان قرار دارند؛ بنابراین داریم:

$V_1 = \varepsilon_1 + r_1 I \Rightarrow$ ولتاژ V_1 افزایش می‌یابد

$V_2 = \varepsilon_2 - r_2 I \Rightarrow$ ولتاژ V_2 کاهش می‌یابد

یعنی عددی که ولت‌سنج V_1 نشان می‌دهد افزایش و عددی که ولت‌سنج V_2 نشان می‌دهد کاهش خواهد یافت.

۱۱۱ گزینه ۴

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{q_1}{q_2}\right) \times \left(\frac{A_2}{A_1}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{3q}{5q} \times \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{\sqrt{5}}{6} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

۱۱۲ گزینه ۲

باید بار الکتریکی، مضرب صحیحی از بار یک الکترون باشد $(q = ne)$. اگر توجه کنیم، فقط 8×10^{-19}، مضرب صحیحی از $1/6 \times 10^{-19}$ است.

$$\frac{8 \times 10^{-19}}{1/6 \times 10^{-19}} = \frac{80}{16} = \frac{10}{2} = 5$$

۱۱۳ گزینه ۳

$$\Delta U_E = -E|q|d\cos\theta$$

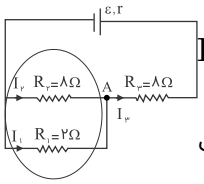
$$\Rightarrow \Delta U_E = E.q.d = ۱۰^۴(۵\times ۱۰^{-۶})(۴۰\times ۱۰^{-۲}) = ۰/۰۲\,J$$

۱۱۴ گزینه ۲

$$q = I.t \Rightarrow (۶۰\,Ah = ۶۰\times ۱۰^۳\,mAh) \Rightarrow ۶۰\times ۱۰^۳ = ۵۰۰t \Rightarrow t = \frac{۶۰\times ۱۰^۳}{۵۰۰} = ۱۲۰\,h$$

۱۱۵ گزینه ۴

با استفاده از رابطهٔ $P = RI^۲$ نسبت توان مصرفی مقاومت‌ها را به دست می‌آوریم:



$$P = RI^۲ \Rightarrow \frac{P_۳}{P_۱} = \frac{R_۳I_۳^۲}{R_۱I_۱^۲} = \frac{۸}{۲}\times\left(\frac{I_۳}{I_۱}\right)^۲ = ۴\left(\frac{I_۳}{I_۱}\right)^۲$$

کافی است $\frac{I}{I_۱}$ را بیابیم؛ مقاومت‌های $R_۱$ و $R_۲$ باهم موازی‌اند؛ بنابراین ولتاژ دو سر آن‌ها باهم برابر است $(V_۱ = V_۲)$:

$$\begin{cases} V_۱ = V_۲ \\ V = RI \end{cases} \Rightarrow R_۱I_۱ = R_۲I_۲ \Rightarrow ۲\times I_۱ = ۸I_۲ \Rightarrow I_۲ = \frac{۱}{۴}I_۱$$

با به‌کارگیری قاعدهٔ گره در نقطهٔ A داریم:

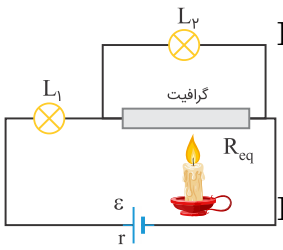
$$I_۳ = I_۱ + I_۲ \Rightarrow I_۳ = I_۱ + \frac{۱}{۴}I_۱ \Rightarrow I_۳ = \frac{۵}{۴}I_۱ \Rightarrow \frac{I_۳}{I_۱} = \frac{۵}{۴}$$

$$\frac{P_۳}{P_۱} = ۴\left(\frac{I_۳}{I_۱}\right)^۲ = ۴\left(\frac{۵}{۴}\right)^۲ = \frac{۲۵}{۴}$$

۱۱۶ گزینه ۴

گرافیت نیم‌رسانا است و با کاهش مقاومت خود، در برابر افزایش دما واکنش نشان می‌دهد. اگر یکی از مقاومت‌های موجود در مدار کاهش یابد، مقاومت معادل هم کاهش می‌یابد (البته به شرطی که از آن مقاومت جریان عبور کند).

کاهش مقاومت معادل به منزلهٔ افزایش جریان مدار است ($R_{eq}\downarrow$):



$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}\xrightarrow{(R_{eq}\downarrow)}I\uparrow$$

این جریان افزایش‌یافته از لامپ $L_۱$ عبور می‌کند و آن را پرنورتر از قبل می‌کند.

$$P_۱=R_۱I^۲\xrightarrow{(I\uparrow)}P_۱\uparrow$$

برای تشخیص نحوهٔ تغییرات روشنایی لامپ $L_۲$ می‌توانید کمی زرنگ‌بازی دربیارید و فرض کنید آن‌قدر مقاومت گرافیت کم می‌شود که به صفر می‌رسد و دو سر لامپ $L_۲$ را اتصال کوتاه می‌کند. آنگاه لامپ $L_۲$ خاموش می‌شود که این به معنی کاهش روشنایی لامپ $L_۲$ است. اگر می‌خواهید علمی به همین نتیجه برسید، مراحل زیر را دنبال کنید:

$$V=\varepsilon-rI\xrightarrow{(I\uparrow)}V\downarrow$$

$$V=V_۱+V_۲=R_۱I+V_۲\xrightarrow{(V\downarrow,I\uparrow)}V_۲\downarrow\Rightarrow\downarrow P_۲=\frac{V_۲^۲}{R_۲}$$

۱۱۷ گزینه ۲

چون شعاع کره‌ها یکسان است، بنابراین بار آن‌ها پس از تماس یکسان خواهد بود:

$$q'_۱=q'_۲=\frac{q_۱+q_۲}{۲}=\frac{۴۰+۱۰}{۲}=۲۵\,\mu C$$

۱۱۸ گزینه ۳

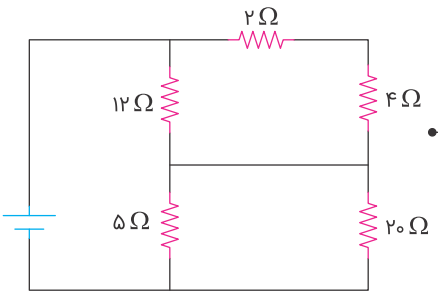
مقاومت ولت‌سنج ایده‌آل بی‌نهایت است و از آن مدار جریانی عبور نمی‌کند. (مقاومت ۲Ω که سری با ولت‌سنج است جریانی عبور نمی‌کند)

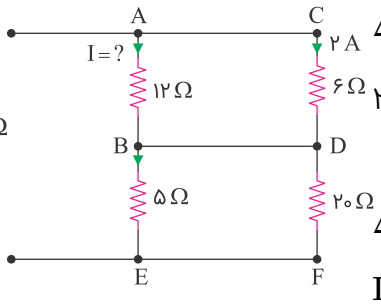
مقاومت آمپرسنج ایده‌آل صفر است و می‌توان سیم بدون مقاومت در نظر گرفت.

ساده‌شدهٔ مدار به‌صورت زیر است. ولت‌سنج اختلاف‌پتانسیل دو سر مقاومت ۴Ω را نشان می‌دهد و برابر با ۸ ولت است. درنتیجه جریان عبوری از مقاومت ۴Ω برابر با $۲A$ است. $(V = RI)$

مقاومت ۴Ω و ۲Ω سری هستند؛ پس جریان عبوری از مقاومت ۲Ω هم برابر با $۲A$ است.

مقاومت ۱۲Ω و مقاومت معادل ۴Ω و ۲Ω موازی هستند.





$$\Delta V_{AB} = \Delta V_{CD} \Rightarrow I \times ۱۲ = ۲ \times ۶ \Rightarrow I = ۱A$$

درنتیجه جریان کل $۳A$ است. جریان بین مقاومت ۲۰Ω و ۵Ω که موازی هستند به نسبت ۵ تقسیم می‌شود.

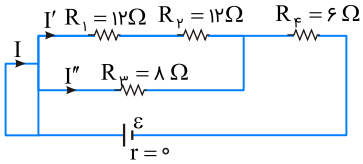
$$\Delta V_{BE} = \Delta V_{DF}$$

$$I_{R=۵\Omega} \times ۵ = I_{R=۲۰\Omega} \times ۲۰ \Rightarrow I_{R=۵\Omega} = ۴I_{R=۲۰\Omega}$$

$$\Rightarrow I_{R=۵} + I_{R=۲۰} = ۳ \Rightarrow I_{R=۵} = ۲/۴A \ , \ ۲/۴ - ۱ = ۱/۴A = \text{آمپرسنج}$$

۱۱۹ گزینه ۴

مدار به شکل زیر است.



از معادلهٔ $P = \frac{V^{۲}}{R}$، برای محاسبهٔ توان مصرفی مقاومت‌ها استفاده می‌کنیم؛ ازطرفی ولتاژ کل، بین مقاومت $R_۴$ و $R_{۱,۲,۳}$ تقسیم می‌گردد:

$$R_{۱,۲} = R_۱ + R_۲ = ۲۴\Omega$$
$$R_{۱,۲,۳} = \frac{R_{۱,۲} \times R_۳}{R_{۱,۲} + R_۳} = \frac{۲۴ \times ۸}{۲۴ + ۸} = ۶\Omega$$

چون $R_۴ = R_{۱,۲,۳} = ۶\Omega$ است، ولتاژها نیز باهم برابر است $(V_۴ = V_{۱,۲,۳} = V)$ در مقاومت‌های موازی ولتاژها باهم برابر هستند؛ بنابراین داریم:

$$V_۳ = V_{۱,۲} = V_{۱,۲,۳} = V$$

ازطرفی چون مقاومت‌های $R_۱, R_۲$ باهم برابر و سری هستند، داریم:

$$V_۱ = V_۲ = \frac{V_{۱,۲}}{۲} = \frac{V}{۲}$$

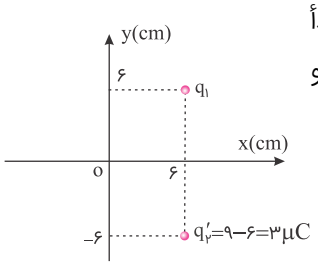
پس نسبت توان مصرفی مقاومت $R_۴$ به توان مصرفی مقاومت $R_۱$ برابر است با:

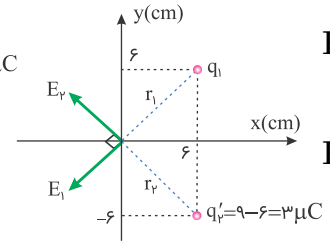
$$\frac{P_۴}{P_۱} = \frac{\frac{V_۴^{۲}}{R_۴}}{\frac{V_۱^{۲}}{R_۱}} = \frac{V^{۲}}{\frac{V^{۲}}{۴}} \times \frac{۱۲}{۶} = ۸$$

۱۲۰ گزینه ۳

چون دو بار $q_۲$ و $q_۳$ نسبت به نقطهٔ O تقارن دارند، می‌توانیم یک بار معادل به جای آن‌ها قرار دهیم. بار $q_۲$ را می‌توان دو بار فرضی $۶\,\mu C$ و $۳\,\mu C$ در نظر گرفت. بار فرضی $۶\,\mu C$ با بار $q_۳ = ۶\,\mu C$ میدانی هم‌اندازه و در خلاف جهت هم تولید می‌کنند پس این دو بار را حذف می‌کنیم.

میدان بارهای $q_۱$ و $q'_۲$ در مبدأ مختصات بر هم عمودند. برآیند دو میدان بارهای $q_۱$ و $q'_۲$ در مبدأ مختصات را برابر $۶/۲۵ \times ۱۰^۶\,N/C$ قرار می‌دهیم. چه بار $q_۱$ مثبت باشد و چه منفی، باز هم دو بردار $E_۱$ و $E_۲$ بر هم عمودند.





$$E_۲ = k\frac{|q_۲|}{r_۲^۲} = ۹\times ۱۰^۹ \times \frac{۳\times ۱۰^{-۶}}{(۶\sqrt{۲})^۲ \times ۱۰^{-۴}} = \frac{۳}{۸}\times ۱۰^۷\,N/C$$

$$E_{net} = \sqrt{E_۱^۲ + E_۲^۲} \Rightarrow ۶/۲۵\times ۱۰^۶ = \sqrt{(\frac{۳}{۸}\times ۱۰^۷)^۲ + E_۱^۲}$$

$$\Rightarrow E_۱^۲ = (\frac{۲۵}{۴}\times ۱۰^۶)^۲ - (\frac{۱۵}{۴}\times ۱۰^۶)^۲ = (\frac{۱۰^۶}{۴})^۲ (۲۵^۲ - ۱۵^۲)$$

$$E_۱ = \frac{۱۰^۶}{۴}\times \sqrt{(۲۵-۱۵)(۲۵+۱۵)} = \frac{۱۰^۶}{۴}\times ۲۰ = ۵\times ۱۰^۶\,N/C$$

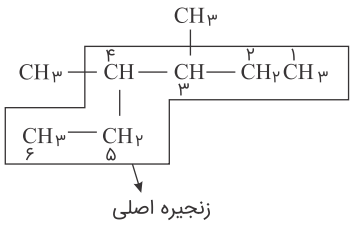
حالا اندازهٔ بار $q_۱$ را به دست می‌آوریم:

$$E_۱ = k\frac{|q_۱|}{r^۲} \Rightarrow ۵\times ۱۰^۶ = ۹\times ۱۰^۹ \times \frac{|q_۱|}{(۶\sqrt{۲})^۲} \Rightarrow |q_۱| = ۴\times ۱۰^{-۶}\,C = ۴\,\mu C$$

شیمی

۱۲۱ گزینه ۲

نام صحیح و کامل آلکان مربوطه به‌صورت ۳ و ۴-دی‌متیل هگزان است.



۱۲۲ گزینه ۳

باتوجه‌به کتاب درسی به دلیل دارا بودن حلقهٔ بنزن جزء ترکیبات آروماتیک به حساب می‌آیند.

www.alirezaafshar.org

۱۲۳ گزینه ۳

الف) درست.

$$c : C_۶H_۶ \Rightarrow \text{تعداد پیوند} = \frac{۶ \times ۴ + ۶ \times ۱}{۲} = ۱۵$$

$$b : C_۶H_{۱۲} \Rightarrow \text{تعداد پیوند} = \frac{۶ \times ۴ + ۱۲ \times ۱}{۲} = ۱۸ \Rightarrow ۱۵ - ۹ = ۶$$

$$a : C_۳H_۶ \Rightarrow \text{تعداد پیوند} = \frac{۳ \times ۴ + ۶ \times ۱}{۲} = ۹$$

ب) درست.

$$C_۶H_{۱۲} + ۹O_۲ \rightarrow \underbrace{۶CO_۲ + ۶H_۲O}_{۱۲} \quad , \quad c : C_۶H_۶ \Rightarrow ۶ + ۶ = ۱۲$$

پ) درست؛ ترکیب (c) بنزن به دلیل داشتن پیوندهای دوگانهٔ کربن- کربن سیرنشده است. ترکیب (b) جزء سیکلوآلکان‌ها است و سیرشده است.

ت) نادرست؛ ترکیب c بنزن و ترکیب b سیکلوهگزان نام دارد.

ث) درست.

$$c : C_۶H_۶ \Rightarrow ۶ \times ۱۲ + ۶ = ۷۸$$

$$b : C_۶H_{۱۲} \Rightarrow ۶ \times ۱۲ + ۱۲ = ۸۴$$

$$a : C_۳H_۶ \Rightarrow ۳ \times ۱۲ + ۶ \times ۱ = ۴۲$$

$$b - c = ۸۴ - ۷۸ = ۶$$

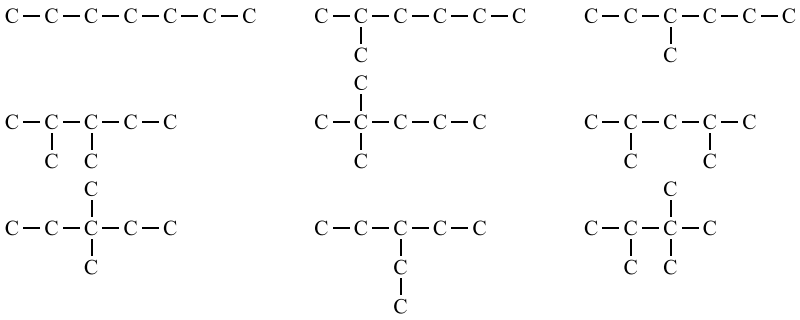
$$c - a = ۷۸ - ۴۲ = ۳۶$$

۱۲۴ گزینه ۳

عناصر A، B، C، D و E به ترتیب $_{۱۴}Si$، $_{۱۵}P$، $_{۱۶}S$، $_{۱۷}Cl$ و $_{۱۸}Ar$ هستند. تمایل گرفتن الکترون در یک دوره از چپ به راست افزایش می‌یابد و شعاع اتمی در یک دوره از چپ به راست کاهش می‌یابد؛ پس داریم:

$$\text{تمایل گرفتن الکترون} : D > C$$
$$\text{شعاع اتمی} : C > D$$

۱۲۵ گزینه ۴



۱۲۶ گزینه ۳

عبارت‌های "ب"، "پ" و "ت" نادرست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) لزوماً انرژی گرمایی A بیشتر نیست، ممکن است جرم B خیلی بیشتر باشد.

پ) لزوماً دمای A بیشتر نیست، ممکن است جرم A خیلی بیشتر باشد.

ت) انرژی گرمایی یک ماده، برخلاف دما به مقدار آن بستگی دارد.

۱۲۷ گزینه ۱

مقایسهٔ میزان فراریت ۴ مادهٔ نامبرده‌شده به‌صورت زیر است:

فراریت: بنزین و خوراک شیمیایی > نفت سفید > گازوئیل > نفت کوره

۱۲۸ گزینه ۱

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \left[\begin{array}{c}\text{مجموع آنتالپی پیوندها}\\ \text{در مواد واکنش‌دهنده}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{مجموع آنتالپی پیوندها}\\ \text{در مواد فراورده}\end{array}\right]$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [۲\Delta H_{(N=O)}] - [\Delta H_{(N\equiv N)} + \Delta H_{(O=O)}]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = [۲(۶۰۷)] - [۹۴۴ + ۴۹۶] = -۲۲۶$$

مطابق نمودار، E_a در واکنش رفت برابر ۳۸۱ کیلوژول است؛ بنابراین:

$$\Delta H + E_a = -۲۲۶ + ۳۸۱ = +۱۵۵$$

۱۲۹ گزینه ۲

بخش اول مسئله:

$$Zn(s) + CuSO_۴(aq) \rightarrow ZnSO_۴(aq) + Cu(s)$$

برای به دست آوردن تفاوت جرم تیغه پیش و پس از انجام واکنش، باید حساب کنیم اولاً چند گرم از تیغهٔ روی وارد واکنش شده و مصرف می‌شود؛ ثانیاً چند گرم مس، تولید شده و بر سطح تیغهٔ روی می‌نشیند.

$$?\,g\,Zn = ۰/۲\,L\,CuSO_۴ \times \frac{۱/۲۵\,mol\,CuSO_۴}{۱\,L\,CuSO_۴} \times \frac{۱\,mol\,Zn}{۱\,mol\,CuSO_۴} \times \frac{۶۵\,g\,Zn}{۱\,mol\,Zn} = ۱۶/۲۵\,g \quad \text{(روی مصرف می‌شود)}$$

$$?\,g\,Cu = ۰/۲\,L\,CuSO_۴ \times \frac{۱/۲۵\,mol\,CuSO_۴}{۱\,L\,CuSO_۴} \times \frac{۱\,mol\,Cu}{۱\,mol\,CuSO_۴} \times \frac{۶۴\,g\,Cu}{۱\,mol\,Cu} = ۱۶\,g \quad \text{(مس تولید می‌شود)}$$

$$\Rightarrow \text{تغییر جرم تیغه} = ۱۶/۲۵ - ۱۶ = ۰/۲۵\,g$$

در واقع ۰/۲۵ گرم درمجموع از جرم طریقه کم می‌شود.

بخش دوم مسئله:

$$۰/۲\,L\,CuSO_۴ \times \frac{۱/۲۵\,mol\,CuSO_۴}{۱\,L\,CuSO_۴} \times \frac{۱\,mol\,ZnSO_۴}{۱\,mol\,CuSO_۴} \times \frac{۱\,mol\,Zn^{۲+}}{۱\,mol\,ZnSO_۴} = ۰/۲۵\,mol\,Zn^{۲+}$$

$$\Delta[Zn^{۲+}] = \frac{۰/۲۵\,mol}{۰/۲\,L} = ۱/۲۵\,mol.L^{-۱}$$

$$\overline{R}_{Zn^{۲+}} = \frac{\Delta[Zn^{۲+}]}{\Delta t} = \frac{۱/۲۵\,mol.L^{-۱}}{۵۰\,min} = ۰/۰۲۵\,mol.L^{-۱}.min^{-۱}$$

۱۳۰ گزینه ۲

بررسی موارد:

الف) نادرست. در دوره‌های چهارم، پنجم و ششم جدول به ترتیب ۱۸، ۱۸ و ۳۲ عنصر وجود دارد.

ب) درست. در جدول دوره‌ای هفت دوره و هجده گروه وجود دارد و درمجموع ۱۱۸ عنصر در آن دیده می‌شود.

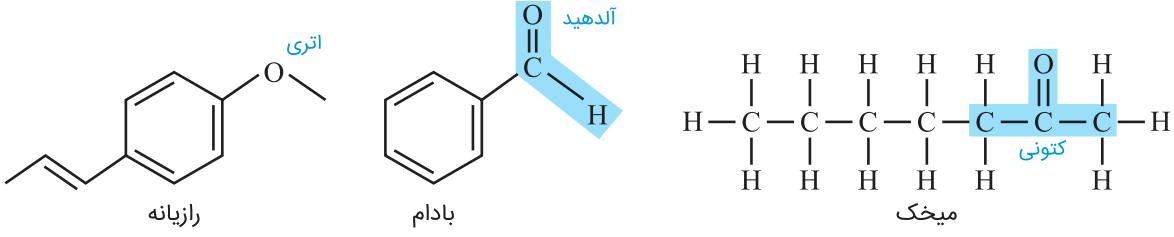
پ) درست. در گروه فلزهای قلیایی شش عنصر (Fr, Cs, Rb, K, Na, Li) وجود دارد. در گروه هالوژن‌ها پنج عنصر (At, I, Br, Cl, F) وجود دارد؛ پس اختلاف این دو گروه برابر با $۶ - ۵ = ۱$ است.

ت) نادرست. در گروه چهاردهم دو عنصر شبه‌فلز Si و Ge وجود دارد و در دورهٔ سوم سه عنصر Na، Mg و Al دیده می‌شود.

ث) نادرست. تمام عنصرهای واسطهٔ دستهٔ d فلزند، اما در دستهٔ s دو عنصر H و He نافلز هستند و بقیهٔ عنصرهای دستهٔ s فلزند.

۱۳۱ گزینه ۱

باتوجه‌به ساختارهای زیر داریم:



رازیانه　　بادام　　میخک

۱۳۲ گزینه ۲

عبارت‌های "ب" و "ت" نادرست هستند.

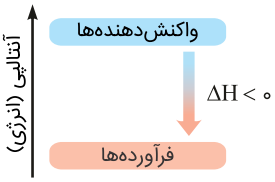
بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) در آلکان‌های شاخه‌دار، بعضی از کربن‌ها به سه یا چهار اتم کربن دیگر متصل است.

ت) سوخت اکثر فندک‌ها، بوتان است.

۱۳۳ گزینه ۲

سوختن گلوکز واکنشی گرماده است.



۱۳۴ گزینه ۲

$$\cancel{N_2(g)} + \cancel{O_2(g)} \rightarrow 2NO(g) \quad \Delta H_1' = \Delta H_1 = 181\,kJ$$

$$N_2O(g) \rightarrow \cancel{N_2(g)} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{O_2(g)} \quad \Delta H_2' = \frac{\Delta H_2}{2} = -\frac{163}{2} = -81/5\,kJ$$

$$NO_2(g) \rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{O_2(g)} + NO(g) \quad \Delta H_3' = -\frac{\Delta H_3}{2}$$

$$N_2O(s) + NO_2(g) \rightarrow 3NO(g) \quad \Delta H_T = 156\,kJ$$

$$\Delta H_1 + \frac{\Delta H_2}{2} - \frac{\Delta H_3}{2} = 156 \Rightarrow 181 - 81/5 - \frac{\Delta H_3}{2} = 156 \Rightarrow \Delta H_3 = -113\,kJ$$

۱۳۵ گزینه ۲

ابتدا باید مقدار انرژی لازم برای گرم کردن آب را محاسبه نمود و سپس با توجه به گرمای حاصل از انحلال کلسیم کلرید در آب، جرم لازم از $CaCl_2$ برای گرم کردن آب را بدست بیاوریم.

$$\Delta H = q = mc\Delta T$$

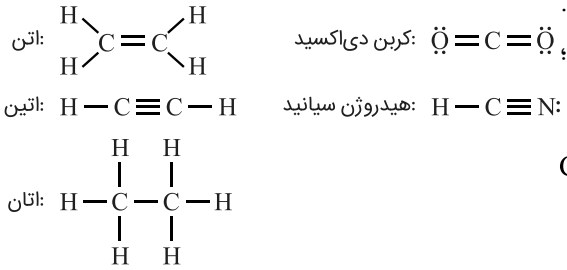
$$q = 250g \times 4/2J.g^{-1}.^\circ C^{-1} \times (45 - 25)^\circ C = 21000J \approx 21kJ$$

با توجه به گرمای انحلال کلسیم کلرید، ضمن حل شدن ۱ مول از آن (معادل ۱۱۱ گرم)، ۳۵ کیلوژول گرما به آب داده می شود. حال باید حساب کنیم با حل شدن چند گرم $CaCl_2$ در آب، ۲۱ کیلوژول گرما به آب داده می شود.

$$21\,kJ \text{ گرما} \times \frac{1\,mol\,CaCl_2}{35\,kJ \text{ گرما}} \times \frac{111\,g\,CaCl_2}{1\,mol\,CaCl_2} = 66/6\,g\,CaCl_2$$

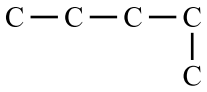
۱۳۶ گزینه ۴

ساختار لوویس مواد مذکور در عبارت‌ها به‌صورت زیر است:



باتوجه‌به ساختارهای بالا عبارت‌های "الف"، "ب" و "ت" نادرست هستند.

ازطرفی باتوجه‌به اینکه شکل زیر، هم ساختاری خطی دارد و راست‌زنجیر است؛



پس عبارت "پ" هم نادرست می‌باشد.

۱۳۷ گزینه ۲

بر اساس تمرین دوره‌ای مربوط به فصل سوم کتاب شیمی یازدهم (سؤال ۵)، کاتالیزگر به‌کاررفته در این واکنش (واکنش گاز اتن با گاز کلر)، $FeCl_3$ جامد است نه $FeCl_2$ محلول در آب!!

ازآنجاکه واکنش‌دهنده‌ها گازی‌شکل هستند، حالت فیزیکی کاتالیزگر باید جامد باشد تا با جذب سطحی واکنش‌دهنده‌ها بتواند نقش کاتالیزی خود را ایفا کند.

۱۳۸ گزینه ۱

الف) نادرست. فلوئور هالوژنی است که حتی در دمای $-200^\circ C$ به‌سرعت واکنش می‌دهد و این هالوژن فعالیت شیمیایی بیشتر و درنتیجه بیشترین تمایل به تشکیل آنیون را دارد.

ب) درست. در دمای $25^\circ C$ برم و یُد با گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهند؛ که به ترتیب، حالت فیزیکی آن‌ها مایع و جامد است.

پ) درست. در بین هالوژن‌ها I_2 و At_2 جامد هستند که هر دو شعاع اتمی بزرگ‌تری نسبت به اتم Br دارند.

ت) نادرست. گاز کلر در واکنش با فلز سدیم به‌شدت واکنش می‌دهد و نور زردرنگ تولید می‌کند و در پی آن $NaCl$ تولید می‌شود.

گاز کلر در دمای اتاق با H_2 واکنش می‌دهد. (البته تولید نور زرد مربوط به سدیم است و ربطی به نوع هالوژن ندارد)

ث) نادرست. انجام واکنش هالوژن با هیدروژن به دما بستگی دارد و گازی بودن شرط انجام واکنش نیست.

۱۳۹ گزینه ۲

پاسخ درست پرسش‌های مطرح‌شده به‌صورت زیر است:

الف) فرآورده ب) منفی پ) فرآورده

۱۴۰ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل کتاب درسی، A و B به ترتیب بازیافت و خوردگی و فرسایش است. فرسایش و خوردگی سبب تبدیل وسایل فلزی به سنگ معدن و اکسید فلز می‌شود.

بازیافت فلز سبب کاهش ردپای کربن دی‌اکسید، کاهش سرعت گرمایش جهانی می‌شود و به توسعهٔ پایدار کشور کمک می‌کند.

۱۴۱ گزینه ۴

موارد "الف"، "ب" و "ت" درست‌اند.

بررسی موارد مهم:

پ) نادرست. تعریف آنتالپی پیوند برای پیوندهای اشتراکی به کار می‌رود و برای پیوندهای یونی کاربردی ندارد.

ت) درست. باتوجه‌به اینکه شعاع اتمی S از O بزرگ‌تر است، طول پیوند $H-S$ بیشتر از پیوند $H-O$ بوده و درنتیجه آنتالپی پیوند آن کمتر از پیوند $O-H$ است؛ بنابراین مجموع آنتالپی‌های پیوند در $H_۲S$ کمتر از $H_۲O$ می‌باشد.

۱۴۲ گزینه ۳

پاسخ بخش اول مسئله:

با استفاده از قانون هس، ΔH واکنش داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}\times \text{معادلهٔ اول}: H_۲ + \frac{۱}{۲}O_۲ \rightarrow H_۲O \quad , \quad \Delta H^\circ_۱ = \frac{۱}{۲}(-۵۷۲) = -۲۸۶\,kJ$$

$$\frac{۱}{۲}\times \text{وارونهٔ معادلهٔ دوم}: H_۲O_۲ \rightarrow H_۲O + \frac{۱}{۲}O_۲ \quad , \quad \Delta H^\circ_۲ = \frac{۱}{۲}(-۱۹۰) = -۹۵\,kJ$$

$$\text{معادلهٔ سوم بدون تغییر}: C_۶H_۶O_۲ \rightarrow C_۶H_۴O_۲ + H_۲ \quad , \quad \Delta H^\circ_۳ = +۱۱۶\,kJ$$

$$\text{واکنش کلی}: C_۶H_۶O_۲ + H_۲O_۲ \rightarrow C_۶H_۴O_۲ + ۲H_۲O$$

$$\Delta H = \Delta H_۱ + \Delta H_۲ + \Delta H_۳ \Rightarrow \Delta H = -۲۸۶ - ۹۵ + ۱۱۶ = -۲۶۵\,kJ$$

پاسخ بخش دوم مسئله:

$$?\,g\,CO_۲ = ۱۰۰\,mL\,H_۲O_۲(aq) \times \frac{۱\,L}{۱۰^۳\,mL} \times \frac{۲/۵\,mol\,H_۲O_۲}{۱\,L\,H_۲O_۲(aq)} \times \frac{۲۶۵\,kJ}{۱\,mol\,H_۲O_۲} \times \frac{۱\,mol\,CO_۲(s)}{۵۰\,kJ}$$

$$\times \frac{۴۴\,g\,CO_۲(s)}{۱\,mol\,CO_۲(s)} = ۵۸/۳\,g$$

۱۴۳ گزینه ۴

برای به دست آوردن ΔH واکنش طبق قانون هس، هر دو واکنش را وارونه کرده و باهم جمع می‌کنیم.

$$BaO(s) + SO_۳(g) \rightarrow BaSO_۴(s) \qquad \Delta H = -۲۱۳\,kJ$$

$$H_۲SO_۴(aq) \rightarrow SO_۳(g) + H_۲O(l) \qquad \Delta H = +۷۸kJ$$

$$BaO(s) + H_۲SO_۴(aq) \rightarrow BaSO_۴(aq) + H_۲O(l) \qquad \Delta H = -۱۳۵kJ$$

$$\text{گرمای آزادشده از واکنش ۰/۱ مول BaO} = ۰/۱\,mol\,BaO \times \frac{۱۳۵ \times ۱۰^۳\,J}{۱\,mol\,BaO} = ۱۳۵۰۰\,J$$

این مقدار گرما به آب داده می‌شود و باعث افزایش دمای آن می‌شود.

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow ۱۳۵۰۰\,J = ۲۰۰\,g \times ۴/۲\frac{J}{g.^\circ C}(\theta_۲ - ۲۵)^\circ C \Rightarrow \theta_۲ = ۴۱^\circ C$$

۱۴۴ گزینه ۱

$$\frac{\frac{\text{جرم Al} \times \text{درصد خلوص}}{\text{جرم مولی Al}}}{\text{ضریب مولی Al}} = \frac{\frac{\text{جرم Fe}}{۵۶}}{\text{ضریب مولی Fe}} \quad \frac{\frac{\text{جرم Al} \times ۰/۹}{۲۷}}{۲} = \frac{\frac{۱۱۲۰}{۵۶}}{۲} \Rightarrow \text{جرم Al} = ۶۰۰\,\text{kg}$$

۱۴۵ گزینه ۳

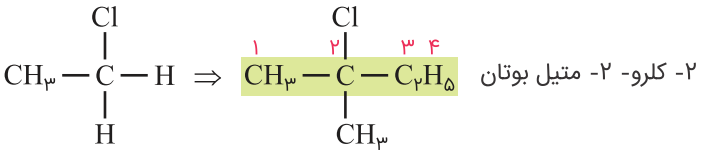
$$\underset{\text{آلکان سیرنشده}}{C_nH_{۲n}} + H_۲ \xrightarrow{Ni} \underset{\text{آلکان سیرشده}}{C_nH_{۲n+۲}}$$

$$?\,g\,C_nH_{۲n+۲} = ۱۵۶۸\,mL\,H_۲ \times \frac{۱\,mol\,H_۲}{۲۲۴۰۰\,mL\,H_۲} \times \frac{۱\,mol\ \text{آلکان}}{۱\,mol\,H_۲} \times \frac{(۱۴n+۲)\,g\ \text{آلکان}}{۱\,mol\ \text{آلکان}} = ۳/۰۸\,g\ \text{آلکان}$$

$n = ۳$؛ آلکان موردنظر $C_۳H_۶$ (پروپن) است.

۱۴۶ گزینه ۴

ترکیب کلرواتان به‌صورت زیر است:



۲- کلرو- ۲- متیل بوتان

۱۴۷ گزینه ۳

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \begin{bmatrix}\text{مجموع آنتالپی پیوندها}\\ \text{در مواد واکنش‌دهنده}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{مجموع آنتالپی پیوندها}\\ \text{در مواد فراورده}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = [۵\Delta H(C-C) + ۱۴\Delta H(C-H)] - [۶\Delta H(C-C) + ۱۲\Delta H(C-H) + \Delta H(H-H)]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = [۲\Delta H(C-H)] - [\Delta H(C-C) + \Delta H(H-H)]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = [۲ \times ۴۱۲] - [۳۴۸ + ۴۳۶] = +۴۰\,kJ$$

مجموع آنتالپی پیوندها در هگزان بیشتر از مجموع آنتالپی پیوندها در سیکلوهگزان است بنابراین پایدارتر می‌باشد (هرچه مجموع آنتالپی پیوندها در یک ترکیب بیشتر باشد، سطح انرژی آن ماده کمتر و پایداری بیشتر است)

مجموع آنتالپی پیوندها در هگزان $= [(۵ \times ۳۴۸) + (۱۴ \times ۴۱۲)] = ۷۵۰۸$

مجموع آنتالپی پیوندها در سیکلوهگزان $= [(۶ \times ۳۴۸) + (۱۲ \times ۴۱۲)] = ۷۰۳۲$

۱۴۸ گزینه ۴

برای رسیدن به واکنش کلی داده‌شده باید واکنش (I) را در ۲، واکنش (II) را در ۲، واکنش (III) را در ۱- و واکنش (IV) را در ۲- ضرب کنیم:

$$\text{I) } Pb + S + 2O_2 \rightarrow PbSO_4 \quad \Delta H = -918\,kJ \Rightarrow \Delta H_1 = 2 \times (-918) = -1836$$
$$\text{II) } H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O \quad \Delta H = -286\,kJ \Rightarrow \Delta H_2 = 2 \times (-286) = -572$$
$$\text{III) } Pb + O_2 \rightarrow PbO_2 \quad \Delta H = -277\,kJ \Rightarrow \Delta H_3 = (-1) \times (-277) = +277$$
$$\text{IV) } H_2 + S + 2O_2 \rightarrow H_2SO_4 \quad \Delta H = -814\,kJ \Rightarrow \Delta H_4 = (-2) \times (-814) = +1628$$

بنابراین ΔH واکنش کلی داده‌شده برابر می‌شود با:

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 = (-1836) + (-572) + 277 + 1628 \Rightarrow \Delta H = -503\,kJ$$

دقت داشته باشید سؤال گرما را به ازای مصرف ۱۰۳۵ گرم سرب (Pb) خواسته است.

$$\text{گرما} = 1035\,g\,Pb \times \frac{1\,mol\,Pb}{207\,g\,Pb} \times \frac{-503\,kJ}{1\,mol\,Pb} = -2515\,kJ$$

۱۴۹ گزینه ۴

$$\text{جرم مولی } CO_2 = 12 + 2(16) = 44$$

$$\text{جرم مولی } CaCO_3 = 40 + 12 + 3(16) = 100$$

$$\text{بازدهٔ درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow 80 = \frac{5}{x} \times 100 \Rightarrow x = 6/25\,L$$

$$?\,g\,CaCO_3 = 6/25\,L\,CO_2 \times \frac{1/1\,g\,CO_2}{1\,L} \times \frac{1\,mol\,CO_2}{44\,g\,CO_2} \times \frac{1\,mol\,CaCO_3}{1\,mol\,CO_2}$$
$$\times \frac{100\,g\,CO_3}{1\,mol\,CaCO_3} \times \frac{100}{75} \simeq 20/83\,g\,CaCO_3$$

۱۵۰ گزینه ۳

$$2\left(H-\underset{\displaystyle H}{\overset{}{\underset{|}{N}}}-H\right) + 2\left(H-\underset{\displaystyle H}{\overset{\displaystyle H}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}}-H\right) + 3(O=O) \rightarrow 2(H-C\equiv N) + 6\left(\underset{\displaystyle H}{\overset{}{\underset{|}{O}}}-H\right)$$

$$\Delta H = \left[\begin{matrix}\text{مجموع آنتالپی پیوند}\\ \text{مواد واکنش‌دهنده}\end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix}\text{مجموع آنتالپی پیوند}\\ \text{مواد فرآورده}\end{matrix}\right]$$
$$\Delta H = [6\Delta H(N-H) + 8\Delta H(C-H) + 3\Delta H(O=O)]$$
$$-[2\Delta H(C-H) + 2\Delta H(C\equiv N) + 12\Delta H(O-H)]$$
$$\Delta H = [6(390) + 8(414) + 3(495)] - [2(414) + 2(880) + 12(463)]$$
$$= 7137 - 8144 = -1007\,kJ$$