



۱ سرعت متوسط خودرویی در حرکت از تهران به سمت کرج در یک مسیر مستقیم بین دو نقطه مشخص برابر با 100 km/h است. در این صورت کدام یک از عبارات‌های زیر نادرست است؟

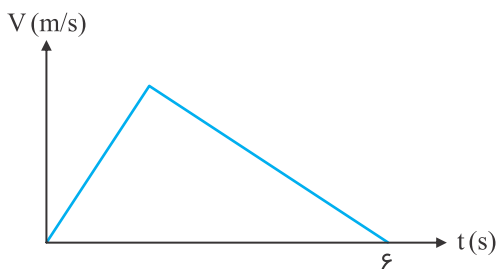
(۱) عقربه تندی سنج خودرو همواره روی عدد 100 km/h است.

(۲) تندی خودرو در یک لحظه می‌تواند از عدد 100 km/h بیشتر باشد.

(۳) تندی متوسط خودرو برابر با 100 km/h است.

(۴) خودرو به طور متوسط در هر ساعت 100 km جابه‌جا می‌شود.

۲ یک آهو پس از شنیدن صدای تیر از حال سکون شروع به دویدن می‌کند و در نهایت پس از 30 متر جابه‌جایی در مسیر مستقیم دوباره می‌ایستد. نمودار سرعت- زمان آهو در طی این حرکت به صورت شکل زیر است. اگر مسافت طی شده در مرحله‌ی کندشونده دو برابر مسافت طی شده در مرحله تندی‌شونده باشد، اندازه شتاب مرحله تندی‌شونده چند متر بر مجذور ثانیه است؟



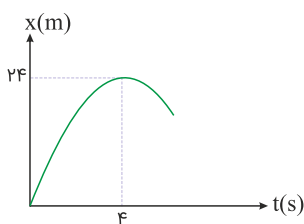
(۱) $2/5$

(۲) 5

(۳) $7/5$

(۴) 10

۳ نمودار مکان- زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند قسمتی از یک سهمی است. سرعت متحرک در لحظه $t = 6 \text{ s}$ در SI کدام است؟



(۱) -6

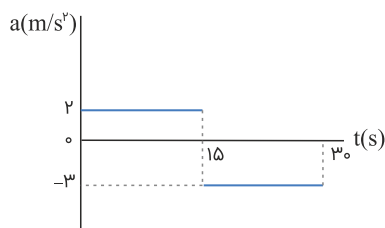
(۲) -8

(۳) 8

(۴) 6



نمودار شتاب- زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند و بردار سرعت اولیه آن در SI به صورت $\vec{V}_0 = -10 \vec{i}$ است، مطابق شکل زیر است. بزرگی جابه‌جایی در ۵ ثانیه ششم، چند برابر بزرگی جابه‌جایی در ۵ ثانیه اول حرکت است؟



(۱) ۳/۵

(۲) ۲

(۳) ۱/۵

(۴) ۱

متحرکی روی محور x ها در حال حرکت است. کدام گزینه الزاماً صحیح است؟

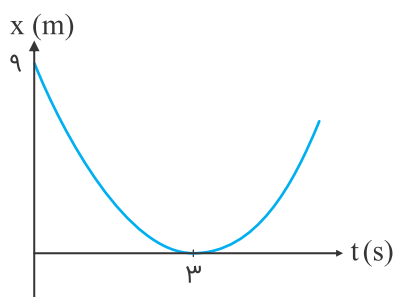
(۱) با مثبت بودن سرعت متحرک، طول بردار مکان آن افزایش می‌یابد.

(۲) در صورتی که علامت بردار مکان و بردار سرعت متحرک خلاف یکدیگر باشند، طول بردار مکان کاهش می‌یابد.

(۳) نمودار مکان- زمان متحرک نشانگر شکل مسیر حرکت آن است.

(۴) به ازای هر بار تغییر جهت بردار مکان متحرک، علامت بردار سرعت متحرک نیز تغییر می‌کند.

نمودار مکان- زمان متحرکی یک سهمی به صورت شکل زیر است. سرعت متوسط این متحرک در بازه زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 5s$ چند متر بر ثانیه است؟



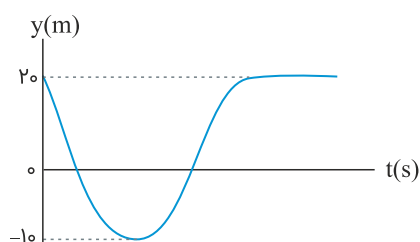
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

نمودار مکان- زمان متحرکی که روی محور y ها حرکت می‌کند، مطابق شکل است. در مدتی که متحرک خلاف جهت محور y ها حرکت می‌کند، چه مسافتی بر حسب متر را طی می‌کند؟



(۱) ۱۰

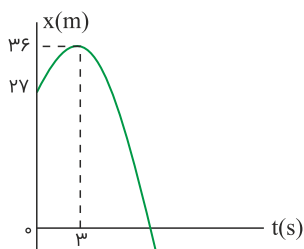
(۲) ۲۰

(۳) ۳۰

(۴) ۶۰

۸

شکل زیر، نمودار مکان- زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم با شتاب ثابت حرکت می‌کند. مسافتی که متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 10$ طی می‌کند، چند متر است؟



- (۱) ۴۰
- (۲) ۴۵
- (۳) ۵۸
- (۴) ۸۵

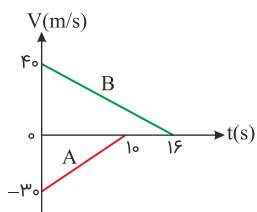
۹

در یک مسیر مستقیم اتومبیل با سرعت 20 m/s در حرکت است. از 36 متر جلوتر اتومبیل دیگری با شتاب ثابت 2 m/s^2 از حال سکون در همان جهت به راه می‌افتد. در این حرکت اتومبیل‌ها دو بار از هم سبقت می‌گیرند. فاصله زمانی این دو سبقت چند ثانیه است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱۶
- (۴) ۱۸

۱۰

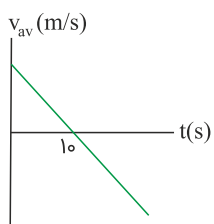
نمودار سرعت- زمان دو قطار A و B که روی یک ریل مستقیم به طرف هم حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در لحظه $t = 0$ فاصله قطارها از هم 500 متر است. لحظه‌ای که قطار A می‌ایستد، قطار B در چه فاصله‌ای از آن قرار دارد؟



- (۱) ۲۵
- (۲) ۷۵
- (۳) ۱۰۰
- (۴) ۱۲۵

۱۱

نمودار سرعت متوسط- زمان در حرکت جسمی با اندازه شتاب ثابت 2 m/s^2 مطابق شکل است. سرعت اولیه متحرک چند متر بر ثانیه است؟



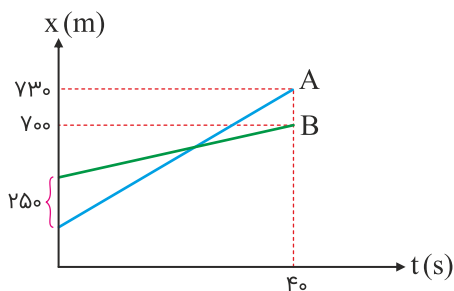
- (۱) ۱۰
- (۲) ۲۰
- (۳) ۵
- (۴) ۲/۵

۱۲

اتومبیلی روی یک خط راست با سرعت 108 km/h در حال حرکت است. راننده با دیدن مانعی در فاصله 165 m ، با شتاب ثابت 3 m/s^2 ترمز می‌کند و درست جلو مانع می‌ایستد. اگر زمان واکنش راننده t_1 و زمانی که حرکت اتومبیل کندشونده بوده، t_2 باشد، $\frac{t_2}{t_1}$ کدام است؟

- (۱) ۵
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱۵
- (۴) ۲۰

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B به صورت شکل زیر است. سرعت متحرک A چند متر بر ثانیه بیشتر از سرعت متحرک B است؟



(۱) ۵

(۲) ۶/۵

(۳) ۱۳/۵

(۴) ۷

خودرویی با سرعت 54 km/h در حال حرکت است. هنگامی که خودرو به فاصله 20 متری یک مانع می‌رسد، راننده با شتاب ثابت ترمز می‌کند و خودرو پس از 2 ثانیه به مانع برخورد می‌کند. اندازه سرعت خودرو در لحظه برخورد، چند کیلومتر بر ساعت است؟

(۲) ۱۰

(۱) ۵

(۴) ۳۴

(۳) ۱۸

دو متحرک روی محور x از حال سکون با شتاب‌های ثابت a و $\frac{4}{9}a$ هم‌زمان از یک نقطه به سوی مقصدی معین به حرکت درمی‌آیند و با فاصله زمانی ۴ ثانیه به مقصد می‌رسند. زمان حرکت جسمی که دیرتر به مقصد می‌رسد، چند ثانیه است؟

(۲) ۸

(۱) ۱۰

(۴) ۶

(۳) ۱۲

قطاری به طول 200 متر از روی پلی به طول 300 متر با سرعت ثابت 25 m/s عبور می‌کند. اگر t_1 ثانیه طول بکشد تا قطار از روی پل رد شود و t_2 ثانیه قطار به طور کامل روی پل واقع شده باشد نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ کدام است؟

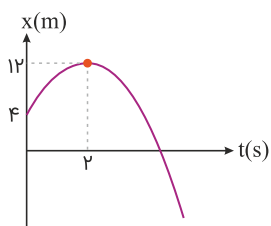
(۲) ۲/۵

(۱) ۱

(۴) ۵

(۳) ۴

نمودار مکان-زمان متحرک با شتاب ثابت به صورت شکل زیر است. تندی متحرک در لحظه $t = 4 \text{ s}$ چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۸

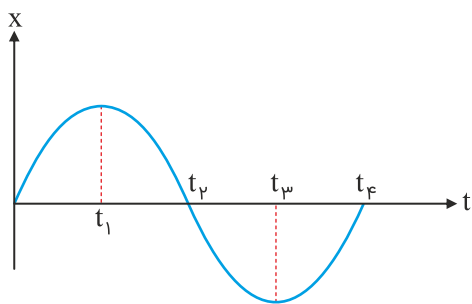
(۴) ۱۰



"سوال و جواب"

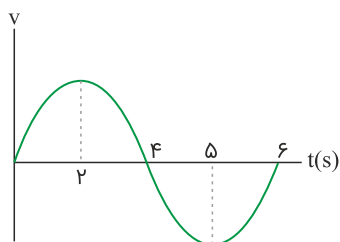
@soal_javab_ostad_afshar

نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در چه بازه زمانی اندازه جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط متحرک یکسان نیست؟



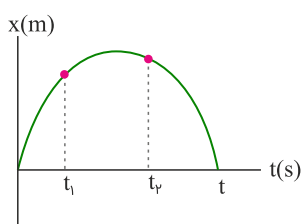
- (۱) $t_1 - t_3$
- (۲) $t_2 - t_4$
- (۳) $t_2 - t_3$
- (۴) $t_1 - t_2$

باتوجه به نمودار سرعت- زمان زیر کدام گزینه درست است؟



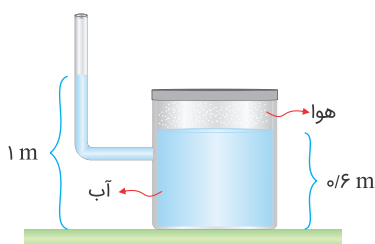
- (۱) در بازه (۲ s, ۴ s) متحرک در حال حرکت خلاف جهت محور مکان است.
- (۲) در بازه (۴ s, ۶ s) حرکت کندشونده است.
- (۳) شتاب متوسط در بازه (۲ s, ۵ s) مخالف صفر است.
- (۴) متحرک ۳ ثانیه خلاف جهت محور مکان حرکت کرده است.

باتوجه به نمودار مکان- زمان زیر که مربوط به حرکت روی محور xها است، چند لحظه در بازه (۰ - t) یافت می‌شود که تندی آنها با سرعت متوسط در بازه (t1 - t2) برابر باشد؟



- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

مقداری هوا داخل مخزن شکل زیر، بالای سطح آب محبوس است. اگر مساحت قاعده طرف 70 cm^2 باشد، برآیند نیروهای وارد شده از درون و بیرون مخزن به سقف مخزن چند نیوتن و به کدام سمت است؟
($\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3$, $g = 10 \text{ N/kg}$)



- (۱) 28 N به طرف بالا
- (۲) 28 N به طرف پایین
- (۳) 280 N به طرف بالا
- (۴) 280 N به طرف پایین

نیروی بین‌مولکولی و این نیرو در مولکول‌های آب نام دارد.

- (۱) کوتاه‌برد - دافعه
- (۲) کوتاه‌برد - هم‌چسبی
- (۳) ثابت - هم‌چسبی
- (۴) بلندبرد - هم‌چسبی

مکعب مستطیلی به ابعاد 10 cm ، 20 cm و 50 cm و به جرم 10 kg روی سطح افقی میزی قرار دارد. نسبت بیشترین فشار به کمترین فشاری که مکعب مستطیل به سطح میز وارد می‌کند کدام است؟ ($g = 10\text{ N/kg}$)

۵ (۲)

۲ (۱)

۲/۵ (۴)

۱۰ (۳)

قطر داخلی یک لیوان استوانه‌ای، 10 سانتی‌متر است. اگر 450 سانتی‌متر مکعب آب در آن بریزیم، فشار کل در ته لیوان تقریباً چند سانتی‌متر جیوه است؟ ($P_0 = 75\text{ cmHg}$ و $\rho_{\text{Hg}} = 13/6\rho_{\text{H}_2\text{O}}$ ، $g = 10\text{ N/kg}$ ، $\pi = 3$)

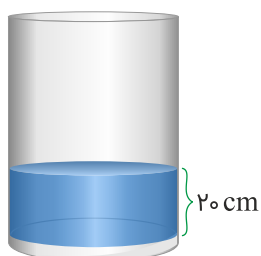
۷۶ (۲)

۷۵/۴۴ (۱)

۷۵/۲۵ (۴)

۷۷ (۳)

مطابق شکل زیر در یک استوانه بلند به سطح مقطع 2 cm^2 تا ارتفاع 20 cm از یک مایع به چگالی 1200 گرم بر لیتر قرار دارد و فشار در ته لوله P_1 است. چند سانتی‌متر مکعب از مایع دیگری به چگالی 1600 گرم بر لیتر به مایع داخل لوله اضافه کنیم تا فشار در ته لوله به $1/04P_1$ برسد؟ ($g = 10\text{ N/kg}$ ، $P_0 = 10^5\text{ Pa}$)



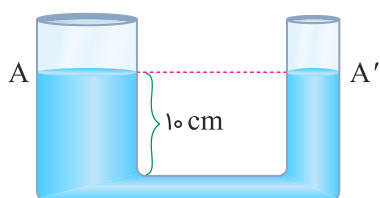
۵۱/۲ (۱)

۵/۲ (۲)

۲۵/۶ (۳)

۲۵۶ (۴)

در دو لوله استوانه‌ای مربوط به هم تا سطح AA' آب وجود دارد و قطر قاعده یکی 4 برابر قطر قاعده استوانه دیگر است. اگر به لوله سمت چپ تا ارتفاع 17 cm نفت اضافه کنیم، آب در لوله باریک چند سانتی‌متر نسبت به حالت اول بالا می‌رود؟ ($\rho_{\text{آب}} = 1\text{ g/cm}^3$ ، $g = 10\text{ m/s}^2$ ، $\rho_{\text{نفت}} = 0/8\text{ g/cm}^3$)



۰/۸ (۱)

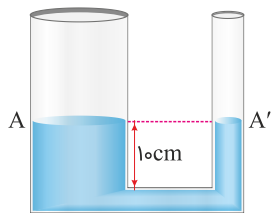
۱۱/۲ (۲)

۱۲/۸ (۳)

۱/۷ (۴)



در دو لوله استوانه‌ای مربوط به هم تا سطح AA' آب وجود دارد و قطر قاعده یکی از استوانه‌ها ۳ برابر قطر قاعده استوانه دیگر است. اگر از لوله سمت چپ تا ارتفاع ۵ سانتی‌متر نفت اضافه کنیم، آب در لوله باریک چند سانتی‌متر نسبت به حالت اول بالا می‌رود؟ ($\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3$ و $g = 10 \text{ m/s}^2$ و $\rho_{\text{نفت}} = 0.8 \text{ g/cm}^3$)



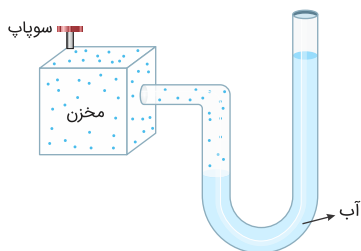
(۱) ۱/۲

(۲) ۳/۶

(۳) ۴

(۴) ۵

در شکل زیر، با باز کردن موقت سوپاپ، فشار گاز درون مخزن را 600 Pa کاهش می‌دهیم. سطح آب در شاخه سمت راست سانتی‌متر به سمت جابه‌جا می‌شود؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$, $\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3$)



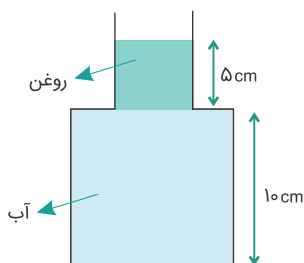
(۱) ۶، بالا

(۲) ۶، پایین

(۳) ۳، بالا

(۴) ۳، پایین

در شکل زیر، طرف از دو قسمت استوانه‌ای تشکیل شده است که سطح مقطع استوانه‌ها 10 cm^2 و 50 cm^2 است. نیرویی که از طرف مایع‌ها بر کف طرف وارد می‌شود چند نیوتن است؟ (چگالی روغن و آب به ترتیب 0.8 g/cm^3 و 1 g/cm^3 است و $g = 10 \text{ m/s}^2$)



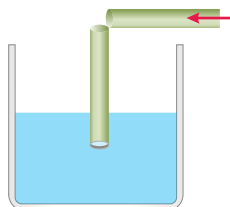
(۱) ۴/۵

(۲) ۶/۶

(۳) ۶

(۴) ۷

یک نی پلاستیکی را مطابق شکل زیر از وسط می‌بریم و بدون اینکه دو قسمت آن کاملاً از هم جدا شوند، آن را ۹۰ درجه تا کرده و درون آب قرار می‌دهیم. حال اگر از قسمت افقی آن در جهت نشان داده شده بدمیم، فشار هوا داخل نی قائم، چگونه تغییر می‌کند و سطح آب داخل آن چگونه جابه‌جا می‌شود؟



(۱) افزایش می‌یابد، پایین می‌رود.

(۲) کاهش می‌یابد، پایین می‌رود.

(۳) افزایش می‌یابد، بالا می‌آید.

(۴) کاهش می‌یابد، بالا می‌آید.



۳۱ دو کره رسانای A و B به شعاع‌های r_A و $r_B = 2r_A$ و چگالی سطحی بار σ_A و $\sigma_B = 2\sigma_A$ دارای بار الکتریکی مثبت‌اند. چند درصد از بار کره بزرگ‌تر به کره کوچک‌تر منتقل شود تا نسبت بار کره‌ها برابر نسبت شعاع آن‌ها شود؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۲۵
(۳) ۵۰
(۴) ۷۵

۳۲ در سیم رسانای زیر، در هر دقیقه $1/5 \times 10^{19}$ الکترون از نقطه A به سمت نقطه B شارش می‌کند. جریان الکتریکی عبوری از این سیم رسانا چند آمپر و در چه جهتی است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

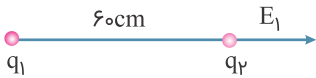


- (۱) $\leftarrow, 0/4$
(۲) $\uparrow, 0/8$
(۳) $\rightarrow, 0/04$
(۴) $\downarrow, 1/6$

۳۳ ذره‌ای به جرم $0/4 \text{ g}$ و بار الکتریکی $-8 \mu\text{C}$ را از نقطه A در جهت میدان الکتریکی یکنواختی با تندی 2 m/s پرتاب می‌کنیم. ذره در نقطه B متوقف می‌شود. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر با 30 V باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه B چند ولت است؟

- (۱) -30
(۲) -70
(۳) 40
(۴) 130

۳۴ در شکل زیر q_1 میدانی به اندازه $E_1 = 100 \text{ (kN/C)}$ را در محل بار $q_2 = 16 \mu\text{C}$ ایجاد می‌کند. بار q_3 را در چه فاصله‌ای از بار q_2 قرار دهیم تا برآیند نیروهای وارد بر بار q_3 آن صفر شود؟ ($k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$)

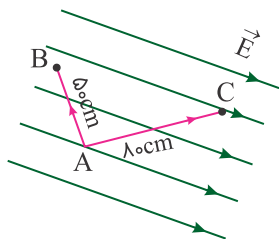


- (۱) 40 cm
(۲) 20 cm
(۳) 60 cm
(۴) 80 cm

۳۵ از یک سیم رسانا در هر 30 ثانیه 90 میلی‌کولن بار الکتریکی عبور می‌کند. جریان الکتریکی عبوری از این سیم چند آمپر است؟

- (۱) $0/27$
(۲) $0/003$
(۳) 3
(۴) $2/7$

بار $q = -2 \text{ mC}$ را یک بار از A تا B و بار دیگر از A تا C جابه‌جا می‌کنیم. اگر اندازه تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار در مسیر AB برابر با 2 J و در مسیر AC برابر با 3 J باشد، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه B و C $(V_B - V_C)$ چند کیلوولت است؟



(۱) $-2/5$

(۲) $+2/5$

(۳) -5

(۴) $+5$

درون یک میدان الکتریکی یکنواخت، بار الکتریکی $q = +2 \text{ } \mu\text{C}$ از نقطه A تا نقطه B جابه‌جا می‌شود. اگر کار نیروی الکتریکی در این انتقال، برابر $5 \times 10^{-5} \text{ J}$ باشد، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار q چند ژول است و $V_B - V_A$ برابر با چند ولت است؟

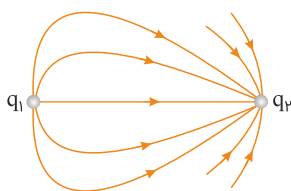
(۲) $+25$ و -5×10^{-5}

(۱) -25 و -5×10^{-5}

(۴) $+25$ و $+5 \times 10^{-5}$

(۳) -25 و $+5 \times 10^{-5}$

باتوجه به شکل زیر کدام گزینه در مورد بارهای q_1 و q_2 صحیح است؟



(۱) $q_1 > 0, q_2 < 0, |q_1| > |q_2|$

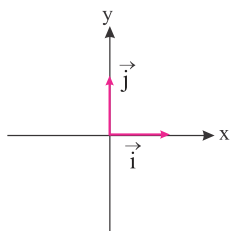
(۲) $q_1 < 0, q_2 > 0, |q_1| > |q_2|$

(۳) $q_1 > 0, q_2 < 0, |q_1| < |q_2|$

(۴) $q_1 < 0, q_2 > 0, |q_1| < |q_2|$

بار الکتریکی $q = -2 \text{ } \mu\text{C}$ در نقطه‌ای در صفحه مختصات قرار دارد به طوری که میدان الکتریکی آن در مبدأ مختصات در SI،

$\vec{E}_0 = -2 \times 10^5 \vec{j}$ است. بردار میدان الکتریکی بار q در نقطه $A \begin{cases} 0/1 \text{ m} \\ 0/3 \text{ m} \end{cases}$ در SI کدام است؟ $(k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2)$



(۱) $-8 \times 10^5 \vec{i}$

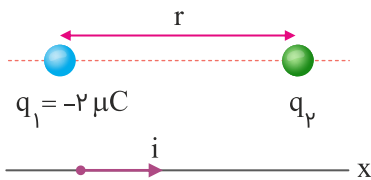
(۲) $-1/8 \times 10^6 \vec{j}$

(۳) $-1/8 \times 10^6 \vec{i}$

(۴) $-8 \times 10^5 \vec{j}$



۴۰ مطابق شکل دو بار q_1 و q_2 در فاصله r از هم قرار دارند. اگر بردار نیرویی که بار q_1 به بار q_2 وارد می‌کند برابر $(-0.4 \text{ N})\vec{i}$ باشد، میدان الکتریکی بار q_2 در محل بار q_1 در SI کدام است؟



(۱) $8 \times 10^{-7} \vec{i}$

(۲) $2 \times 10^5 \vec{i}$

(۳) $-2 \times 10^5 \vec{i}$

(۴) $-8 \times 10^{-7} \vec{i}$

۴۱ اگر در ۲۰۰ میلی‌لیتر از محلول سدیم هیدروکسید، ۸۰ میلی‌گرم از آن به صورت حل‌شده وجود داشته باشد، pH این محلول برابر با،، [OH⁻] در آن، برابر [H⁺] است و ۱۰ میلی‌لیتر آن می‌تواند میلی‌لیتر محلول ۰.۰۰۲ mol.L⁻¹ هیدروکلریک اسید را خنثی کند. (H = ۱, O = ۱۶, Na = ۲۳ : g.mol⁻¹)

(۲) $40 - 10^{10} - 12/7$

(۱) $50 - 10^8 - 12/7$

(۴) $50 - 10^{10} - 12$

(۳) $40 - 10^8 - 12$

۴۲ چند مورد از عبارت‌های زیر درست هستند؟ (Ca = ۴۰, N = ۲۳, O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol⁻¹)

الف) افزایش دما، قدرت پاک‌کنندگی یک صابون را افزایش می‌دهد.

ب) با افزایش غلظت Ca^{2+} آب سخت، ارتفاع کف حاصل از حل کردن مقدار معینی صابون در آب کاهش می‌یابد.

پ) پاک‌کننده‌های صابونی، لکه‌های کثیف و چربی را از روی پارچه‌های نخی پاک نمی‌کنند.

ت) از واکنش ۱۰/۲ گرم از یک صابون با فرمول $\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa}$ با مقدار کافی از کلسیم کلرید، ۱۰/۱ گرم رسوب به دست می‌آید.

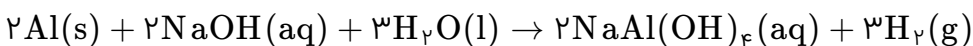
(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۱

(۳) ۲

۴۳ نوعی پاک‌کننده پودری در اثر واکنش با آب، گاز هیدروژن تولید می‌کند:



اگر در این واکنش ۳۰ گرم پودر با ۹۰ درصد خلوص استفاده شود در صورتی که بازده درصدی واکنش ۶۰ باشد حداکثر چند لیتر گاز تولید می‌شود؟ (چگالی گاز ۱/۲ g.L⁻¹ است) (Al = ۲۷, H = ۱ : g.mol⁻¹)

(۲) ۵/۱

(۱) ۱/۵

(۴) ۹/۴

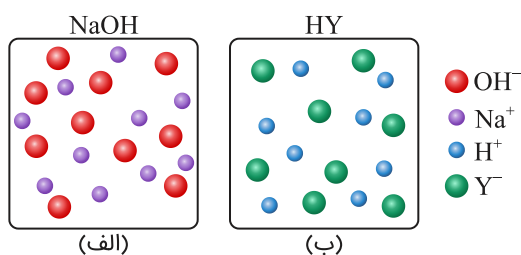
(۳) ۴/۹

کدام گزینه جاهای خالی را به درستی تکمیل می‌کند؟

"سوسپانسیون‌ها و کلوئیدها از نظر رفتار در مقابل نور با یکدیگر هستند. همچنین کلوئیدها و محلول‌ها از نظر مشابه، اما از نظر با یکدیگر تفاوت دارند. بزرگ‌ترین اندازه ذرات سازنده نیز مربوط به ها است."

- (۱) مشابه - همگن بودن یا نبودن - اندازه ذرات - سوسپانسیون
- (۲) متفاوت - پایداری - همگن بودن یا نبودن - کلوئیدها
- (۳) مشابه - پایداری - همگن بودن یا نبودن - سوسپانسیون
- (۴) متفاوت - همگن بودن یا نبودن - اندازه ذرات - کلوئید

در شکل زیر دو محلول سود (الف) و HY (ب) نشان داده شده است. اگر این دو محلول را باهم مخلوط کنیم، گونه‌های موجود در محلول حاصل عبارت است از:



- (۱) 8Na^+ , 2OH^- , 8Y^- , $8\text{H}_2\text{O}$
- (۲) 10Na^+ , 8OH^- , 8Y^- , $8\text{H}_2\text{O}$
- (۳) 10Na^+ , 2OH^- , 8Y^- , $10\text{H}_2\text{O}$
- (۴) 10Na^+ , 2OH^- , 8Y^- , $8\text{H}_2\text{O}$

در دمای ثابت به ۵۰ میلی‌لیتر از اسید HCOOH که غلظت مولی آن 0.2 mol.L^{-1} و غلظت یون هیدرونیوم در آن برابر 0.04 mol.L^{-1} است، ۴۵۰ میلی‌لیتر آب می‌افزاییم. تعیین کنید چند عبارت، از عبارتهای نوشته شده، درست است؟

(الف) نسبت حاصل ضرب غلظت تعادلی یون‌های موجود در محلول به غلظت تعادلی اسید، ثابت می‌ماند.

(ب) روشنایی لامپ به کار رفته در یک مدار الکتریکی در شرایط یکسان برای محلول اولی کمتر از دومی است.

(ج) pH محلول به اندازه 0.6 واحد کاهش می‌یابد.

(د) نسبت مول‌های یونیده نشده به کل مول‌های حل شده در محلول اول نسبت به محلول دوم کمتر است.

(ه) خاصیت اسیدی در محلول اولی نسبت به محلول دومی بیشتر است.

- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۱

چه تعداد از عبارتهای زیر نا درست است؟

- جوهر نمک خاصیت اسیدی دارد و هر شناساگر را به رنگ قرمز درمی‌آورد.
- تغییر رنگ کاغذ pH در حضور صابون و محلول سود نشان می‌دهد که این دو پاک‌کننده خاصیت بازی دارند.
- از آنجا که سرکه و هیدروکلریک اسید هر دو خاصیت اسیدی دارند، بنابراین تغییر رنگ کاغذ pH در آن‌ها کاملاً یکسان است.
- تولید گاز در هنگام واکنش سدیم هیدروکسید با رسوبات چربی، قدرت پاک‌کنندگی این پاک‌کننده خورنده را افزایش می‌دهد.
- پاک‌کننده‌های خورنده مانند جوهر نمک و محلول سود همانند صابون دارای دو بخش قطبی و ناقطبی هستند.

- (۱) صفر
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

سلامت و بهداشت در اهمیت بسیاری دارد و در راستای ارتقای آن نقش پررنگی ایفا می‌کنند.

۴۸

(۲) شاخص امید به زندگی - پاک‌کننده‌ها و شوینده‌ها

(۱) بهبود پاک‌کننده‌ها - دانشمندان

(۴) شاخص امید به زندگی - دانشمندان

(۳) بهبود پاک‌کننده‌ها - تکنولوژی

۴۹

پاسخ درست پرسش‌های زیر کدام است؟

(الف) روده‌های بدن انسان خاصیت بازی دارند یا اسیدی؟

(ب) pH شیر ترش شده بیشتر از ۷ است یا کمتر از آن؟

(پ) آیا کاغذ pH در تمامی محلول‌ها تغییر رنگ می‌دهد؟

(۲) بازی ، کمتر از ۷ ، خیر

(۱) بازی ، بیشتر از ۷ ، بله

(۴) اسیدی ، بیشتر از ۷ ، خیر

(۳) اسیدی ، کمتر از ۷ ، بله

۵۰

باتوجه به شکل‌های زیر چه تعداد از عبارتهای داده شده، درست‌اند؟

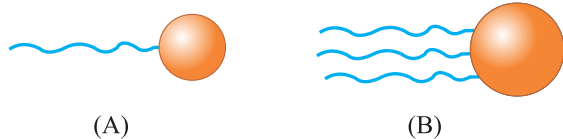
- شکل A الگویی برای نمایش یک مولکول اسید چرب و شکل B الگویی برای نمایش یک استر سبک است.

- نیروی بین مولکولی غالب در A از نوع هیدروژنی و نیروی بین مولکولی غالب در B از نوع واندروالسی است.

- در ساختار چربی‌ها، فقط مولکول‌های A می‌توانند وجود داشته باشند.

- بخش دایره‌ای شکل در مولکول B، بخش قطبی است که شامل گروه‌های (-COOH) می‌باشد.

- مولکول B برخلاف مولکول A در آب نامحلول است.



(A)

(B)

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴



باتوجه به داده‌های جدول زیر، کدام مطالب درست است؟ (عنصرهای X ، E ، D و A در دوره چهارم جدول تناوبی جای دارند)

۵۱

یون‌ها				ویژگی‌ها	ردیف
A^-	${}_{29}D^{2+}$	${}_{33}E^{3-}$	X^{3+}		
۸	۱۷	۸	۱۴	شمار الکترون‌های آخرین لایه اشغال شده	۱
۱۰	b	a	۶	شمار الکترون‌های دارای عدد کوانتومی $l = 2$	۲
۲/۲۵	۲	۲/۲۵	۲	نسبت شعاع الکترون‌های دارای عدد کوانتومی $l = 1$ به $l = 0$	۳

- عدد اتمی عنصر A ، برابر مجموع عددهای ردیف دوم جدول است.
- تفاوت عدد اتمی عنصر X با فلز قلیایی هم‌دوره‌اش، برابر ۸ است.
- عنصر E در واکنش با عنصر M ، ترکیبی با فرمول شیمیایی ME تشکیل می‌دهد.
- بار کاتیون D در ترکیب هایش، همانند بار کاتیون عنصر ۳۱ جدول تناوبی در ترکیب هایش است.

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

باتوجه به شکل زیر که بخشی از جدول دوره‌های عنصرها است، کدام عبارت‌ها درست هستند؟

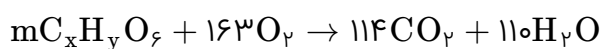
۵۲

- (الف) خواص شیمیایی دو عنصر B و D مشابه هم هستند.
- (ب) عنصر F همانند Ca ، می‌تواند یون دو بار مثبت ایجاد کند.
- (پ) عنصر Cr با عنصر A هم‌گروه است.
- (ت) عنصر C برخلاف عنصر E می‌تواند یون دو بار منفی ایجاد کند.

- (۱) ب - پ
(۲) الف - ت
(۳) الف - ب - پ
(۴) ب - پ - ت

در اثر سوختن کامل ۸۹ گرم از یک نوع چربی ($C_xH_yO_z$) مطابق واکنش زیر، به ترتیب از راست به چپ، چند لیتر اکسیژن مصرف و چند مول گاز CO_2 تولید می‌شود؟ (حجم مولی گازها در شرایط آزمایش، برابر با ۲۵ لیتر فرض شود؛ $H = 1$, $C = 12$, $O = 16$: $g \cdot mol^{-1}$) (موازنه معادله واکنش کامل شود)

۵۳



- (۱) ۳۰۲/۷۵ ، ۵/۷
(۲) ۳۰۲/۷۵ ، ۷/۵
(۳) ۲۰۳/۷۵ ، ۵/۷
(۴) ۲۰۳/۷۵ ، ۷/۵

باتوجه به ترکیبات زیر کدام گزینه، عبارت داده شده را به درستی تکمیل نمی‌کند؟
 "شمار اتم‌های ترکیب، شمار اتم‌های ترکیب است."

(الف) نیتروژن تری‌فلوئورید (ب) سیلیسیم تترابرمید
 (پ) تترافسفر هگزااکسید (ت) نیتروژن مونواکسید

- (۱) الف - دو برابر - ت
 (۲) ب - نصف - پ
 (۳) پ - پنج برابر - ت
 (۴) ب - ۸/۰ برابر - الف

کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) پراکنده شدن عنصرهای سنگین در فضا سبب انفجار و مرگ ستارگان می‌شود.
 (۲) درون ستاره‌ها برخلاف خورشید در دماهای بسیار بالا و ویژه، واکنش‌های هسته‌ای رخ نمی‌دهد.
 (۳) عنصر منیزیم دارای ۳ ایزوتوپ ^{23}Mg ، ^{24}Mg و ^{25}Mg است.
 (۴) دو گونه ^{35}A و ^{37}A چگالی متفاوتی دارند.

چه تعداد از عبارت‌های زیر پیرامون ساختار لوویس دو گونه نیتروژن تری‌فلوئورید و گوگرد تری‌اکسید درست است؟
 (${}^7\text{N}$ ، ${}^8\text{O}$ ، ${}^9\text{F}$ ، ${}^{16}\text{S}$)

- (الف) هر دو ترکیب دارای یک جفت الکترون ناپیوندی در اتم مرکزی هستند.
 (ب) گشتاور دوقطبی نیتروژن تری‌فلوئورید بزرگ‌تر از گوگرد تری‌اکسید است.
 (پ) همه اتم‌های هر دو گونه به آرایش هشت‌تایی رسیده‌اند.
 (ت) شمار جفت الکترون پیوندی در نیتروژن تری‌فلوئورید برابر ۳ است.

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

مقایسه انرژی، فاصله الکترون از هسته و شمار الکترون‌ها به ترتیب در حالت برانگیخته به نسبت حالت پایه چگونه است؟

- (۱) بیشتر - بیشتر - ثابت
 (۲) کمتر - بیشتر - بیشتر
 (۳) کمتر - کمتر - ثابت
 (۴) بیشتر - بیشتر - کمتر

با فاصله گرفتن از سطح زمین تراکم مولکول‌های هوا کم می‌شود، اگر در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین درصد حجمی اکسیژن ۲۱٪ و درصد حجمی نیتروژن ۷۸٪ باشد، در ارتفاع ۴۰۰۰ متری درصد حجمی گازهای اکسیژن و نیتروژن کدام است؟ (از راست به چپ بخوانید)

- (۱) کمتر از ۲۱٪، بیشتر از ۷۸٪
 (۲) بیشتر از ۲۱٪، کمتر از ۷۸٪
 (۳) ۲۱٪، ۷۸٪
 (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

شمار پروتون‌های یون ${}^{22}\text{M}^{2+}$ برابر با ۸/۰ شمار نوترون‌های آن است. عنصر M با کدام عنصر در جدول تناوبی هم‌دوره است و در این یون، چند لایه از الکترون پر شده است؟

- (۱) ${}_{36}\text{A}$ ، ۳
 (۲) ${}_{36}\text{A}$ ، ۴
 (۳) ${}_{16}\text{D}$ ، ۳
 (۴) ${}_{16}\text{D}$ ، ۴

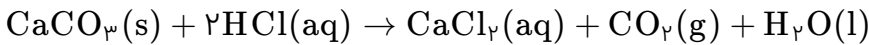
۱) فسفر دارای ایزوتوپی پرتوزا است.

۲) فراوانی ایزوتوپی از اورانیم که در سوخت‌های هسته‌ای کاربرد دارد، در مخلوط طبیعی کمتر از ۷ درصد است.

۳) تبدیل عنصرهای دیگر به طلا یکی از آرزوهای دست‌نیافتنی بشر است.

۴) پسماند راکتورهای اتمی خاصیت پرتوزایی ندارند، اما برای طبیعت خطرناک هستند.

۶۱ مطابق واکنش زیر، ۴۰ گرم کلسیم کربنات ۸۰ درصد خالص وارد واکنش می‌شود. اگر بازده درصدی واکنش ۷۵ درصد باشد، به‌تقریب چند لیتر گاز CO_2 در شرایط استاندارد تولید می‌شود؟ ($\text{Ca} = 40$, $\text{C} = 12$, $\text{O} = 16$: g.mol^{-1})



۵/۴ (۲)

۴/۵ (۱)

۸/۳ (۴)

۳/۸ (۳)

۶۲ کدام مورد(ها) از عبارت‌های زیر نادرست است؟ ($\text{C} = 12$, $\text{H} = 1$: g.mol^{-1})

الف) حدود نیمی از نفتی که از چاه‌های نفت بیرون کشیده می‌شود به‌عنوان سوخت در وسایل نقلیه و تأمین گرما و انرژی الکتریکی مصرف می‌شود.

ب) هیدروکربن‌های سیرشده با n اتم کربن دارای $n + 1$ پیوند اشتراکی میان اتم‌ها هستند.

پ) تفاوت جرم مولی تقریبی گریس و وازلین ۹۸ گرم بر مول است.

ت) درصد نفت کوره در نفت سنگین ایران کمتر از نفت سنگین کشورهای عربی است.

۲ الف

۱ ب - پ

۴ پ - ت

۳ الف - ب

۶۳ کدام مطلب، نادرست است؟ ($\text{N} = 14$, $\text{C} = 12$, $\text{H} = 1$: g.mol^{-1})

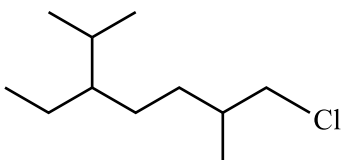
۱) تفاوت جرم مولی سیانواتن با پروپن برابر ۱۱ گرم است.

۲) فرمول مولکولی ۲-هگزن با سیکلوهگزان، یکسان است.

۳) از پلیمرشدن کلرواتان، پلی‌وینیل کلرید به دست می‌آید.

۴) فرمول تجربی ۱، ۲-دی‌برمو اتان با فرمول مولکولی آن، متفاوت است.

۶۴ نام ترکیب زیر چیست؟



۱) ۷-کلرو-۳-اتیل-۲ و ۶-دی‌متیل هپتان

۲) ۷-کلرو-۴-اتیل-۲-متیل هپتان

۳) ۱-کلرو-۵-اتیل-۲ و ۶-دی‌متیل هپتان

۴) ۱-کلرو-۳-اتیل-۶ و ۲-متیل هپتان

اگر ΔH واکنش: $Fe(s) + H_2O(g) \rightarrow Fe_3O_4(s) + H_2(g)$ ، پس از موازنه برابر -150 kJ باشد، گرمای آزاد شده ضمن تشکیل چند لیتر گاز هیدروژن در شرایطی که حجم مولی گازها برابر ۲۵ لیتر است، دمای 300 گرم آب را به اندازه 40°C بالا می‌برد؟ ($c_{H_2O} = 4/2 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$)

(۲) ۱۶/۸

(۱) ۳۳/۶

(۴) ۸/۴

(۳) ۱۲/۲

چند مورد از مطالب زیر درست است؟

(الف) برخی نافلزها مانند اکسیژن، نیتروژن، فسفر و ... به شکل آزاد در طبیعت وجود دارند.

(ب) در اثر انجام واکنش انجام یافته در استخراج آهن از آهن (III) اکسید توسط کربن، جرم مواد جامد موجود در مخلوط واکنش کاهش می‌یابد.

(پ) یکی از دلایل استفاده از عنصر کربن به جای فلز سدیم در استخراج آهن، واکنش پذیری بیش از حد فلز سدیم است.

(ت) در هر واکنشی که انجام می‌شود، واکنش پذیری فرآورده‌ها از واکنش دهنده‌ها کمتر است.

(ث) در میان فلزها، تنها طلا به شکل کلوخه یا رگه‌های زرد لابه‌لای خاک یافت می‌شود.

(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۱

(۳) ۲

همه گزینه‌های زیر کاملاً درست‌اند، به جز: (با کمی تغییر)

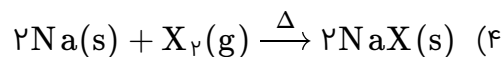
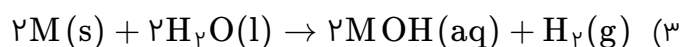
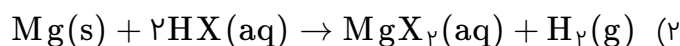
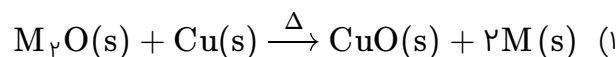
(۱) زیر لایه P در لایه آخر اتم همه عنصرهای واسطه، خالی است.

(۲) برخی از عنصرهای واسطه مانند برخی عنصرهای اصلی، یک نوع ظرفیت شناخته شده دارند.

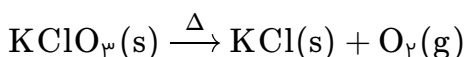
(۳) در آرایش الکترونی ۲ عنصر از عنصرهای واسطه دوره چهارم، ۵ الکترون با عدد کوانتومی $l = 2$ وجود دارد.

(۴) در فلزهای واسطه هر دوره، با افزایش عدد اتمی، شمار الکترون‌های لایه ظرفیت اتم و نیز ظرفیت فلز، افزایش می‌یابد.

کدام واکنش، انجام ناپذیر است؟ (M: فلز اصلی، X: نافلز)



مقداری پتاسیم کلرات ۸۰ درصد خالص به جرم $36/75$ گرم را حرارت می‌دهیم تا مطابق معادله موازنه نشده واکنش زیر تجزیه شود. اگر در پایان واکنش جرم جامد باقی‌مانده $29/55$ گرم باشد، چند درصد از پتاسیم کلرات در این واکنش تجزیه شده است؟ (خالصی‌ها در اثر حرارت تجزیه نمی‌شوند) ($O = 16$, $Cl = 35/5$, $K = 39$: $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

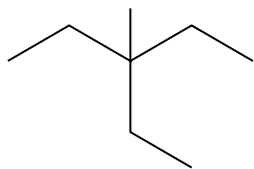


(۲) ۳۱/۲۵

(۱) ۶۲/۵

(۴) ۹۳/۷۵

(۳) ۵۰



- (۱) سوخت فندک، گاز پروپان است که تحت فشار پیر شده‌اند.
- (۲) نام ترکیب بالا ۳-متیل-۳-اتیل پنتان است.
- (۳) نفت سفید شامل آلکان‌هایی با ۸ تا ۱۰ اتم کربن است.
- (۴) هر ماده‌ای که ظرفیت گرمایی بالاتری داشته باشد، مقاومتش در برابر تغییر دما بیشتر است.

چند مقدار صحیح برای n وجود دارد که $2n + 13$ بر $n - 1$ بخش‌پذیر باشد؟

- (۱) ۶
- (۲) ۸
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۲

اگر در تقسیم اعداد طبیعی a و $a + 51$ بر عدد طبیعی b ، باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر ۷ و ۹ باشند، مجموع ارقام عدد b کدام است؟

- (۱) ۷
- (۲) ۹
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۳

اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح $x = 6^m \times 10^n$ ، 35 واحد از تعداد مقسوم‌علیه‌های $15x$ کمتر باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ممکن برای x ، کدام است؟

- (۱) ۱۲۹۶
- (۲) ۲۳۰۴
- (۳) ۶۴۰۰
- (۴) ۸۷۰۴

به ازای چند عدد صحیح n ، $1 | 2n - 1$ می‌باشد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۸

مجموع سه عدد زوج متوالی، ممکن است بر کدام عدد زیر بخش‌پذیر نباشد؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۶

باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۳ برابر ۴ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم a^2 بر ۱۳ کدام است؟

- (۱) ۱۶
- (۲) ۱۳
- (۳) ۳
- (۴) ۴



۷۷ اگر $2m - 3n \mid 9m - 5n$ ، آنگاه کدامیک از عبارتهای زیر بر $2m - 3n$ بخش پذیر است؟

- (۱) $17n$
 (۲) $17m$
 (۳) $16n$
 (۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۷۸ اگر $a^3 \mid b^2$ ، آنگاه کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

- (۱) $a \mid b$
 (۲) $a^6 \mid b^3$
 (۳) $a^2 \mid b$
 (۴) $a^6 \mid b^6$

۷۹ چند عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم آن اعداد بر 430 ، با مجذور خارج قسمت، برابر باشد؟

- (۱) ۴
 (۲) ۵
 (۳) ۶
 (۴) ۷

۸۰ کدام رابطه شرطی زیر خاصیت بازگشتی دارد؟

- (۱) $x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$
 (۲) $x \cdot y > 0 \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$
 (۳) $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a + b = c + d$
 (۴) $(a, b) = (c, d) \Rightarrow ab = cd$

۸۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & y \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ باشد، حاصل $x + 2y$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) -۱
 (۳) ۲
 (۴) -۲

۸۲ در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ که در آن $a_{ij} = 2^{i-j} + \frac{i}{j}$ ، حاصل $a_{21} + a_{32} - a_{11}$ کدام است؟

- (۱) $6/5$
 (۲) $8/5$
 (۳) $5/5$
 (۴) $7/5$

۸۳ کدام ماتریس سطری است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$
 (۲) $[1 \ 3 \ 5 \ 7]$
 (۳) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
 (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

۸۴ اگر $A_{3 \times 4}$ ، $B_{4 \times 2}$ و $C_{2 \times 3}$ سه ماتریس باشند، کدام ماتریس زیر تعریف نمی‌شود؟

- (۱) ABC
 (۲) CAB
 (۳) ACB
 (۴) BCA

۸۵ برای ماتریس‌های A و B داریم $A + B = I_2$. اگر A یک ماتریس قطری و حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس B برابر -2 باشد، حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس B^6 کدام است؟

- (۱) ۱۶
(۲) ۲
(۳) -16
(۴) -2

۸۶ اگر $A = [i^2 + 3j]_{3 \times 3}$ ، مجموع درایه‌های ستون دوم آن کدام است؟

- (۱) ۲۸
(۲) ۳۰
(۳) ۳۲
(۴) ۳۴

۸۷ اگر $a_{ij} = \begin{cases} \frac{xi}{jx + 2j} & ; i = j \\ \frac{x^i - 13x^j + 36}{x^i + x - 6} & ; i \neq j \end{cases}$ باشد و $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ ماتریس قطری باشد، x چند جواب دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۸۸ اگر ماتریس $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 7 \\ \frac{5}{2} & -5 & 9 \end{bmatrix}$ و $2B = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & -6 \\ 7 & -8 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی و فرعی ماتریس $2A - 3I$ کدام است؟

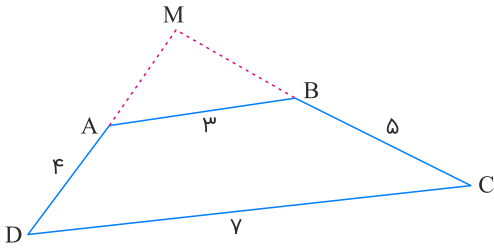
- (۱) ۴
(۲) صفر
(۳) ۸
(۴) ۱۲

۸۹ ماتریس‌های A و B برابر هستند، $A = \begin{bmatrix} x^2 + xy & 4 \\ 9 & y^2 + yx \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 28 & a^2 \\ z^2 & 21 \end{bmatrix}$ می‌باشد. کمترین مقدار $x + y + z + a$ کدام است؟

- (۱) -12
(۲) ۱۲
(۳) ۷
(۴) -9

۹۰ اگر اعضای روی قطر فرعی ماتریس $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha + 1 & \cos \alpha \\ \cos \beta - 1 & \sin \beta - 2 \end{bmatrix}$ صفر باشد، مجموع تمام ماتریس‌های این چینی به حالت فوق را ماتریس B می‌نامیم. حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی B کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) -8
(۳) -4
(۴) ۸



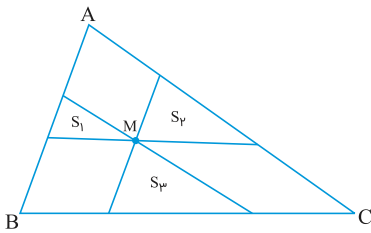
(۱) $9/5$

(۲) $9/75$

(۳) 10

(۴) 12

در شکل زیر از نقطه M خطوطی موازی با اضلاع مثلث ABC رسم شده است. اگر $S_1 = 8$, $S_2 = 18$ و $S_3 = 72$, آنگاه S_4 کدام است؟



(۱) 1

(۲) 2

(۳) 3

(۴) 4

درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد، اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

(۲) 1

(۱) $0/75$

(۴) $1/5$

(۳) $1/25$

نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{49}{128}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچک‌تر ۲۱ باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

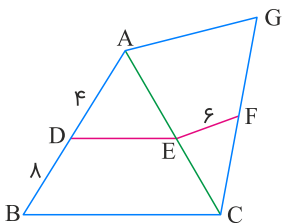
(۲) $21\sqrt{3}$

(۱) $21\sqrt{2}$

(۴) $24\sqrt{3}$

(۳) $24\sqrt{2}$

باتوجه به شکل زیر، اگر $DE \parallel BC$ و $EF \parallel AG$ باشند، اندازه ضلع AG چقدر است؟



(۱) $13/2$

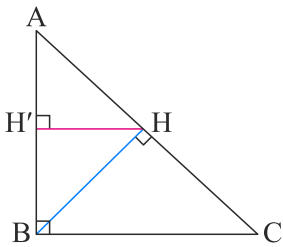
(۲) $15/2$

(۳) 9

(۴) 10

در شکل زیر $AH = 2$ و $AC = 5$. مقدار BH' کدام است؟

۹۶



(۱) $\sqrt{10}$

(۲) $\sqrt{6}$

(۳) $6\sqrt{10}$

(۴) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

۹۷

(۲) $2/5$

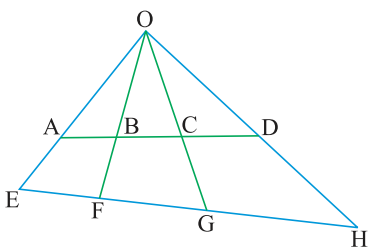
(۱) $2/25$

(۴) ۳

(۳) $2\sqrt{2}$

در شکل زیر $AB = BC = CD = 1$ ، $EF = 2$ و $FG = 3$. اندازه پاره خط GH کدام است؟

۹۸



(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۵

(۴) ۶

مثلث قائم‌الزاویه ABC به اضلاع قائم ۳ و ۴ با مثلث قائم‌الزاویه DEF متشابه است. اگر طول ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث DEF برابر ۱۲ باشد، نسبت تشابه دو مثلث کدام است؟

۹۹

(۲) $\frac{1}{5}$

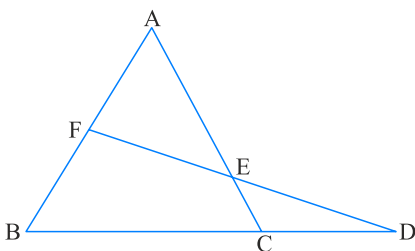
(۱) ۴

(۴) $\frac{12}{5}$

(۳) $\frac{1}{12}$

در شکل زیر، AE پنج برابر EC است و AF هم‌اندازه BF است. اگر $CD = 6$ باشد، اندازه BC چقدر است؟

۱۰۰



(۱) ۲۰

(۲) ۲۴

(۳) ۲۸

(۴) ۳۲

اگر وارون تابع $f(x) = \frac{1 - 2x - 2x^2}{x^2}$ به ازای $x > 1$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{a}{b\sqrt{x+c} + d}$ حاصل $ab - cd$ کدام است؟

۱۰۱

(۲) ۱

(۱) -۴

(۴) صفر

(۳) ۴

۱۰۲ مجموعه جواب معادله $-1 = [x^2 - 1]$ ، معادل کدام گزینه است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(0, 1)$
 (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۴) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

۱۰۳ اگر $f(x) = x - [x]$ ، آنگاه برد تابع $g(x) = f(2x - 3) - 2f(x)$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 0]$ (۲) $[0, 1]$
 (۳) $\{-1, 0\}$ (۴) $\{0, 1\}$

۱۰۴ معکوس تابع $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$ ، خط $y = x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱
 (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۵ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x - |x|}{\sqrt{2x - x^2 + 3}}$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 3]$ (۲) $(-1, 3)$
 (۳) $[0, 3)$ (۴) $(1, 3)$

۱۰۶ اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ بدانیم $2xf(x + 2) - xf(2 - x) = 2x^2 + 1$ مقدار $f(3)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{7}{3}$
 (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{9}{5}$

۱۰۷ در تابع خطی f ، اگر $f^{-1}(0) = f(0) \neq 0$ و $f^{-1}(2) = 7$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵
 (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۸ تابع $f(x) = x^2 + x + 3$ در بازه $(-\infty, a)$ یک‌به‌یک است. بیشترین مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) ۱ (۴) -۱

۱۰۹ اگر $f(x) = 2|x + a| - ax + 2$ یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $|a| > 1$ (۲) $|a| > 3$
 (۳) $|a| > 2$ (۴) $|a| > 4$

۱۱۰ معادله $۳x^2 + ([x] + [-x])x - ۲ = ۰$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) بی‌شمار

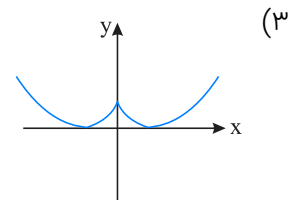
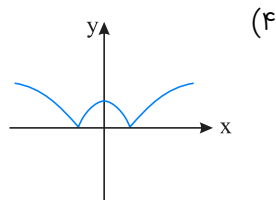
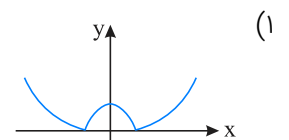
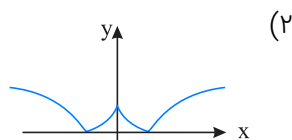
۱۱۱ اگر $x \neq [x]$ باشد، برد تابع $f(x) = ۳x^2 - ۳[x^2]$ شامل چند مقدار صحیح است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) بی‌شمار

۱۱۲ اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 + ۴x + ۱۲}$ باشد، $f(۲ + \sqrt{۷}) - f(۲)$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

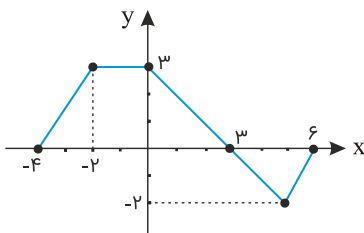
۱۱۳ نمودار تابع $y = |\sqrt{|x|} - ۱|$ به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟



۱۱۴ نمودار تابع $f(x) = |x - ۱| - ۲$ را سه واحد به سمت چپ و چهار واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم، شکل به دست آمده تابع f را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) بی‌شمار
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) صفر

۱۱۵ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(۳ - x)$ محور x ها را در کدام نقطه با طول منفی قطع می‌کند؟



- (۱) -۴
(۲) -۱
(۳) -۲
(۴) -۳

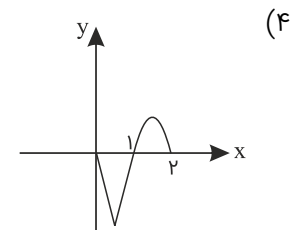
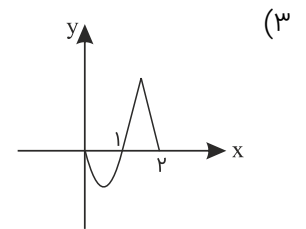
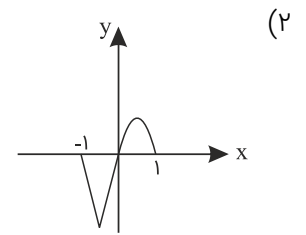
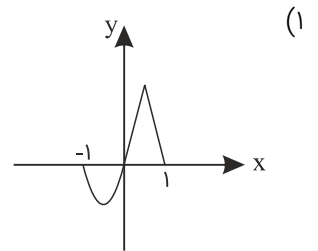
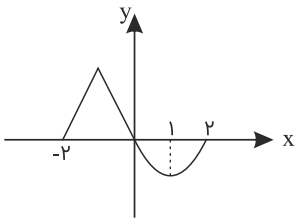
اگر نقطه $A(3, b-1)$ روی تابع $y = f(x) - 1$ قرار داشته باشد، آنگاه کدام نقطه زیر قطعاً روی تابع $g(x) = f\left(\frac{1-x}{3}\right)$ قرار دارد؟

- (۱) $(\lambda, -b)$ (۲) $(-\lambda, b)$
 (۳) (λ, b) (۴) $(-\lambda, -b)$

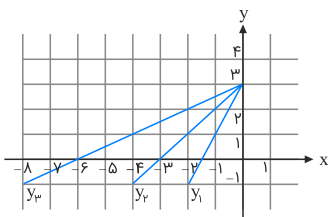
اگر $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$ باشد، در این صورت دامنه تابع f^{-1} کدام است؟

- (۱) $x \leq 1$ (۲) $x \geq 1$
 (۳) $x \geq 0$ (۴) $x \leq 0$

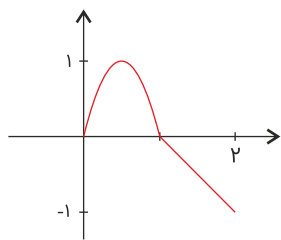
نمودار تابع $y = f(1-x)$ به شکل زیر است. نمودار تابع $f(2x-1)$ کدام است؟



نمودار مربوط به توابع $f(x)$ ، $f(2x)$ و $f\left(\frac{x}{2}\right)$ را رسم کرده‌ایم. کدام گزینه صحیح است؟



- (۱) $y_1 = f(2x)$
 (۲) $y_2 = f\left(\frac{x}{2}\right)$
 (۳) $y_3 = f(2x)$
 (۴) $y_1 = f(x)$



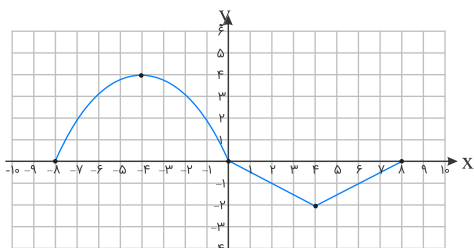
(۱) $y = f(1 - 2x)$

(۲) $y = |f(x) - 1| - 1$

(۳) $y = f(|x| - 1)$

(۴) $y = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|)$

شکل زیر، مربوط به نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ است. تابع $y = f(-x + 1)$ در کدام فاصله زیر یک به یک است؟



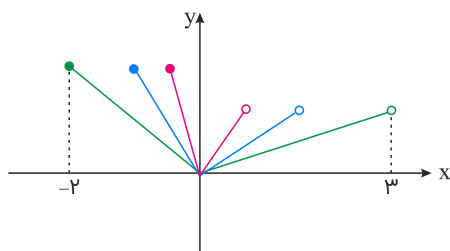
(۱) $[-3, 1]$

(۲) $[-1, 3]$

(۳) $[0, 4]$

(۴) $[2, 4]$

شکل زیر نمودار مربوط به توابع $y = f(x)$ ، $y = f(2x)$ و $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y = f(3x)$ کدام است؟



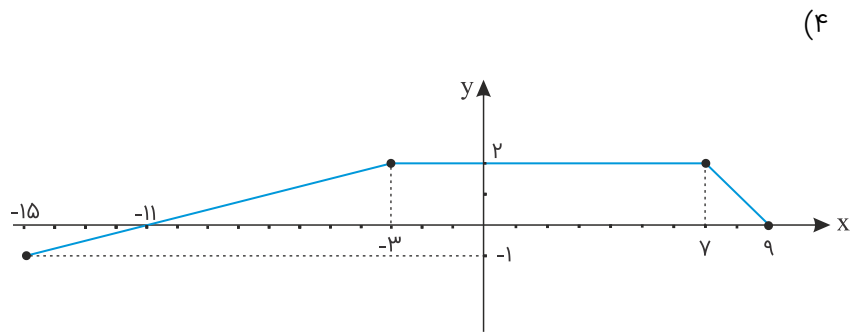
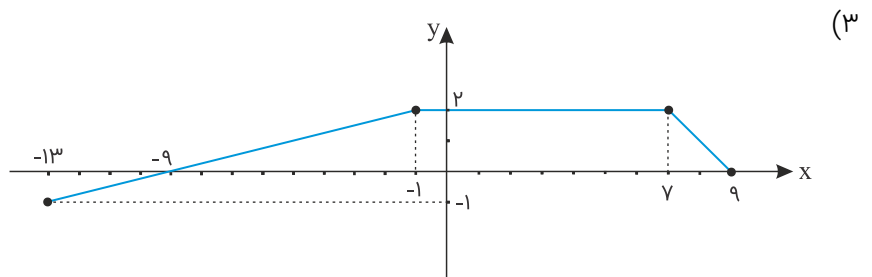
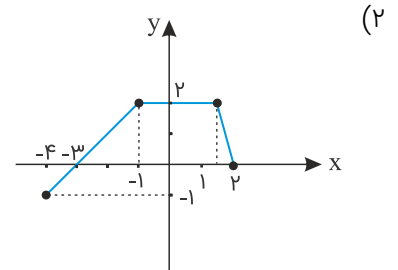
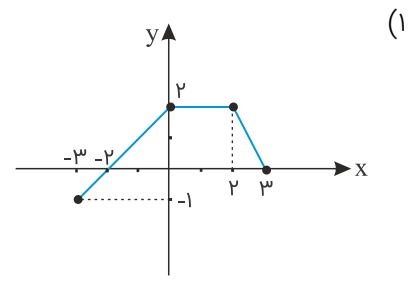
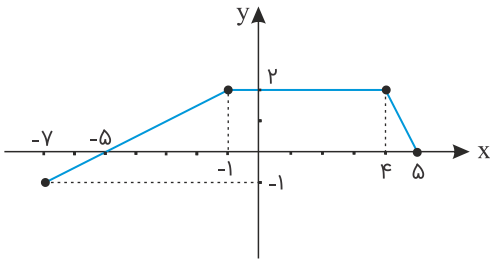
(۱) $[-4, 6]$

(۲) $\left[-\frac{4}{3}, 2\right]$

(۳) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

(۴) $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$





اگر نقطه $A(2, 5)$ روی تابع $y = g(x)$ قرار داشته باشد، در این صورت کدام نقطه زیر، روی تابع $f(x) = g(2x + 1)$ قرار می‌گیرد؟

(۲) $(\frac{1}{2}, 5)$

(۱) $(\frac{1}{2}, 4)$

(۴) $(2, 11)$

(۳) $(5, 5)$

نمودار تابع $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

(۲) دوم

(۱) اول

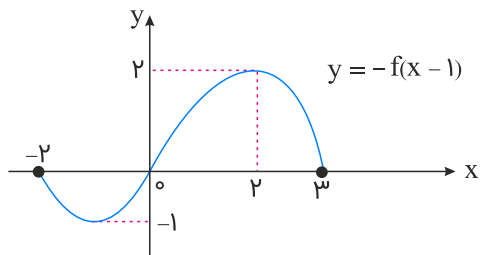
(۴) چهارم

(۳) سوم



شکل زیر مربوط به تابع $y = -f(x-1)$ است. در این صورت دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱۲۶



(۱) $[-1, 0]$

(۲) $[0, 1]$

(۳) $[-1, 0] \cup \{-3, 2\}$

(۴) $[0, 1] \cup \{-3, 2\}$

اگر $x = -3$ محور تقارن $y = f(x+4)$ باشد، محور تقارن $y = f(4-x)$ کدام است؟

۱۲۷

(۲) $x = 1$

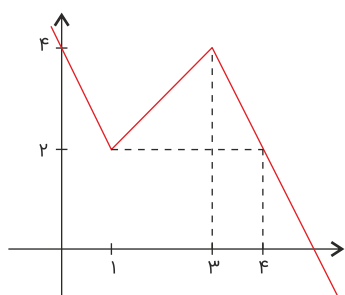
(۱) $x = -3$

(۴) $x = 3$

(۳) $x = -1$

شکل زیر، نمودار تابع $g(x) = 2 + 2f(3-x)$ است. مجموع ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

۱۲۸



(۱) ۱۱

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۱۱

نمودار منحنی $y = \sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $2-k$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی به دست‌آمده با محور x ها، کدام است؟

۱۲۹

(۲) -۳

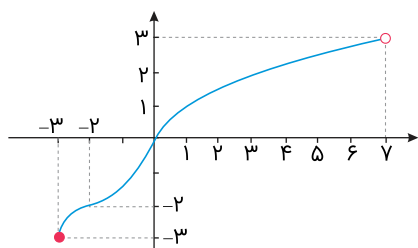
(۱) -۴

(۴) ۲

(۳) ۱

اگر نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{p} + 1\right)$ به شکل زیر باشد، دامنه تابع $y = 1 - f(x)$ کدام است؟

۱۳۰



(۱) $[1, 3]$

(۲) $[-8, 12]$

(۳) $[-3, 7]$

(۴) $\left[-\frac{1}{p}, \frac{9}{p}\right]$



استاد علیرضا افشار

”همایش ها“

@hamayesh_dr_afshar



گزینه ۱

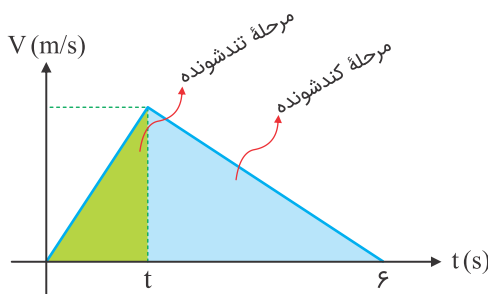
۱

سرعت متوسط خودرو با توجه به تعریف آن (نسبت جابه‌جایی به مدت زمان) مشخص می‌کند که متحرک به طور متوسط در هر بازه زمانی (ساعت یا ثانیه) چه مقدار جابه‌جا شده است. از طرفی این کمیت اطلاعاتی در مورد نقاط میانی مسیر حرکت مشخص می‌کند؛ یعنی تندی لحظه‌ای می‌تواند برای یک متحرک کوچک‌تر، بزرگ‌تر یا برابر با سرعت لحظه‌ای باشد. همان‌طور که در صورت سؤال قید شده است مسیر حرکت مستقیم است، یعنی تندی متوسط و سرعت متوسط نیز با هم برابر هستند.

گزینه ۲

۲

کل مسافت طی شده 300m است. بنابراین مساحت کل زیر نمودار نیز باید 300m باشد.



$$\frac{v \times 6}{2} = 300 \Rightarrow v = 100$$

مسافت طی شده در مرحله اول (تندشونده) را x در نظر می‌گیریم پس مسافت طی شده در مرحله دوم (کندشونده) $2x$ است.

$$x + 2x = 300 \Rightarrow x = 100\text{m}$$

مساحت زیر نمودار در مرحله اول باید 100m باشد.

$$\frac{v \times t}{2} = 100 \Rightarrow \frac{100 \times t}{2} = 100 \Rightarrow t = 2\text{s}$$

شتاب مرحله اول، برابر با شیب خط است.

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100}{2} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

نمودار مکان- زمان به صورت یک سهمی است؛ پس حرکت با شتاب ثابت است. با توجه به نمودار، سرعت در لحظه $t = ۴s$ صفر است؛ پس داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow ۲۴ = \frac{1}{2}a \times ۴^2 + ۴v_0 \Rightarrow ۲۴ = ۲a + ۴v_0 \quad (۱)$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v=0 \text{ m/s}} 0 = ۴a + v_0 \Rightarrow v_0 = -۴a \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲) \Rightarrow (۱)} ۲۴ = ۲a - ۱۶a \Rightarrow a = -۳ \text{ m/s}^2 \quad (۳)$$

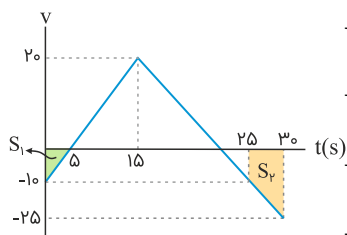
$$\xrightarrow{(۳) \Rightarrow (۲)} v_0 = -۴ \times -۳ = ۱۲ \text{ m/s} \quad (۴)$$

حال با داشتن شتاب و سرعت اولیه می‌توانیم معادله سرعت- زمان متحرک را بنویسیم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -۳t + ۱۲$$

$$\xrightarrow{t=۶s} v = -۳ \times ۶ + ۱۲ = -۶ \text{ m/s}$$

بهترین روش رسم نمودار سرعت- زمان است.



$$v_{۱۵} = at + v_0$$

$$v_{۱۵} = ۲ \times ۱۵ - ۱۰ \Rightarrow v_{۱۵} = ۲۰ \text{ m/s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = ۲t + (-۱۰) \Rightarrow t = ۵s$$

$$v_{۲۵} = at + v_0$$

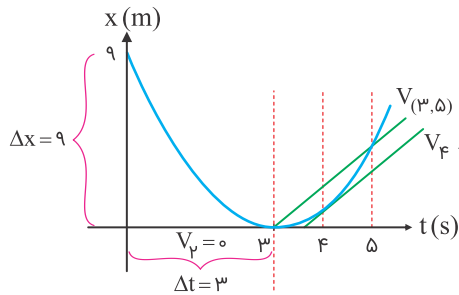
$$v_{۲۵} = -۳ \times ۱۰ + ۲۰ = -۱۰ \text{ m/s}$$

$$v_{۳۰} = -۳ \times ۱۵ + ۲۰ = -۲۵ \text{ m/s}$$

$$\frac{S_2 \text{ ثانیه ششم}}{S_1 \text{ ثانیه اول}} = \frac{\frac{۲۵ + ۱۰}{۲} \times ۵}{\frac{۱۰ \times ۵}{۲}} = \frac{۳۵}{۱۰} = ۳/۵$$

مخالف بودن علامت بردارهای مکان و سرعت یعنی متحرک یا با سرعت منفی در X‌های مثبت است یا با سرعت مثبت در X‌های منفی است که در هر دو صورت در حال نزدیک شدن به $(x = 0)$ است و از طول بردار مکان کاسته می‌شود.

سهمی را از محور آن جدا می‌کنیم و سمت چپ را بررسی می‌کنیم.

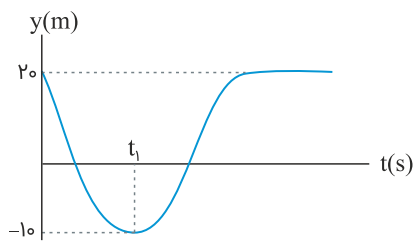


$$V_F \Delta x = -\frac{1}{2} a \Delta t^2 + v_F \Delta t \Rightarrow -9 = -\frac{1}{2} (a)(9) + 0 \Rightarrow a = 2$$

سرعت متوسط در بازه (۳, ۵) برابر با سرعت در لحظه $t = ۴s$ است. این بار سمت راست رأس سهمی را بررسی می‌کنیم:

$$v_F = a \Delta t + v_1 \Rightarrow v_F = 2(1) + 0 = 2 \frac{m}{s}$$

متحرک از لحظه $t = 0$ تا $t = t_1$ خلاف جهت محور y حرکت کرده است. مسافت طی شده در این مدت برابر با ۳۰ متر است.



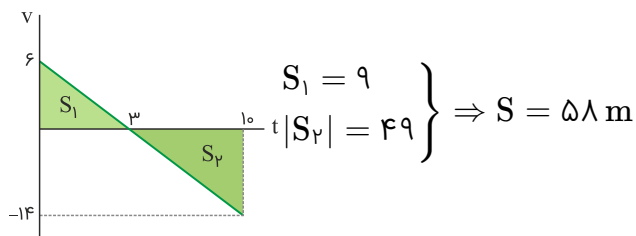
باتوجه به ماکزیمم سهمی می‌توانیم سرعت اولیه و شتاب حرکت را محاسبه کنیم:

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t$$

$$۳۶ - ۲۷ = \frac{0 + v_0}{2} \times ۳ \Rightarrow v_0 = ۶ \text{ m/s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = a \times ۳ + ۶ \Rightarrow a = -۲ \text{ m/s}^2$$

کافی است نمودار سرعت- زمان را رسم کنیم:

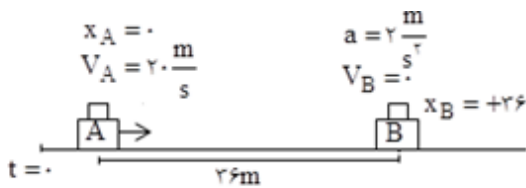


گام اول

- الف) اتومبیل با سرعت 20 m/s در حرکت است $\leftarrow v_A = 20 \text{ m/s}$
 ب) 36 متر جلوتر اتومبیل دیگری با شتاب ثابت $2 \text{ m/s}^2 \leftarrow x_B = +36$ ، $a_B = 2 \text{ m/s}^2$
 پ) از حال سکون و در همان جهت به راه می افتد $\leftarrow (v_0)_B = 0$ ، $v_B > 0$
 ج) اتومبیل ها دو بار از هم سبقت می گیرند $\leftarrow x_A = x_B$
 د) فاصله زمانی این دو سبقت چند ثانیه است؟ $\Delta t = ?$

گام دوم

مکان شروع به حرکت اتومبیل A که عقب تر از اتومبیل B است را مبدأ مکان در نظر می گیریم سپس با نوشتن معادله حرکت برای هر دو اتومبیل و مساوی قرار دادن دو معادله با هم می توانیم زمان های سبقت را به دست آوریم:



ابتدا معادله حرکت (با سرعت ثابت) اتومبیل A را می نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t_A + (x_0)_A \\ (x_0)_A = 0 \end{cases} \Rightarrow x_A = 20t$$

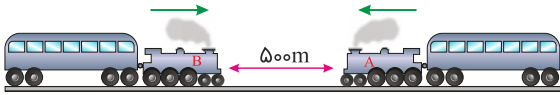
حالا معادله حرکت (با شتاب ثابت) اتومبیل B را می نویسیم:

$$\begin{cases} x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + (v_0)_B t + (x_0)_B \\ (x_0)_B = +36 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow x_B = \frac{1}{2} \times 2 \times t^2 + 0 + 36 = t^2 + 36$$

با مساوی قرار دادن دو معادله حرکت اتومبیل های A و B ، زمان های سبقت دو اتومبیل از یکدیگر را به دست می آوریم.

$$x_B = x_A \Rightarrow 20t = t^2 + 36 \Rightarrow t^2 - 20t + 36 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 18) = 0 \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 18$$

پس اختلاف زمانی دو سبقت برابر 16 s است $\Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = 18 - 2 = 16 \text{ s}$.



سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر با جابه‌جایی است.
بنابراین جابه‌جایی هر دو متحرک را در مدت ۱۰s که متحرک A متوقف شده است، محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta x_A = S_A = \frac{10 \times 30}{2} = 150 \text{ m}$$

شیب نمودار سرعت- زمان برابر با شتاب متحرک B است:

$$a_B = -\frac{40}{16} = -\frac{10}{4} \text{ m/s}^2$$

$$\Delta x_B = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t = \frac{1}{2} \left(-\frac{10}{4}\right) \times 10^2 + 40 \times 10 = 275 \text{ m}$$

$$B, A \text{ فاصله } d = 500 - (\Delta x_A + \Delta x_B) = 500 - (150 + 275) \Rightarrow d = 75 \text{ m}$$

دقت شود: اگر علامت منفی را برای شتاب متحرک B در نظر نگیریم، مسافت پیموده شده این متحرک برابر با ۵۲۵ m به دست می‌آید که تفاضل آن با ۵۰۰ m برابر با ۲۵ m می‌شود و به گزینه (۱) می‌رسیم که اشتباه است.

در حرکت با شتاب ثابت معادله سرعت متوسط برحسب زمان را می‌توان به صورت $v_{av} = \frac{1}{2} a t + v_0$ نوشت. در این صورت شیب نمودار سرعت متوسط- زمان با نصف شتاب حرکت برابر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{1}{2} a t + v_0 \Rightarrow v_{av} = \frac{1}{2} (-2) t + v_0 = -t + v_0$$

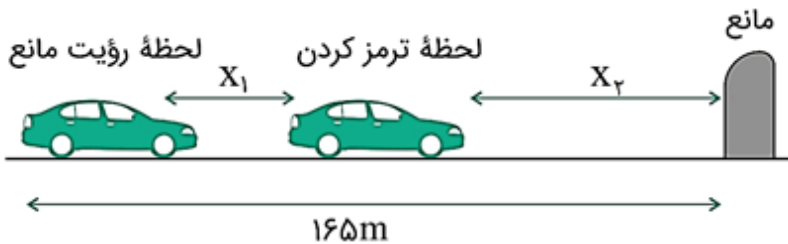
باتوجه به نمودار، در لحظه $t = 10 \text{ s}$ داریم:

$$v_{av} = -t + v_0 \xrightarrow{t=10 \Rightarrow v_{av}=0} 0 = -10 + v_0 \Rightarrow v_0 = 10 \text{ m/s}$$



الف) اتومبیلی روی خط راست با سرعت 108 km/h در حال حرکت است. $v_0 = 108 \text{ km/h} = \frac{108}{3.6} = 30 \text{ m/s}$
 ب) راننده با دیدن مانعی در فاصله 165 m ← 165 m فاصله اتومبیل از مانع در لحظه دیدن آن
 ج) با شتاب ثابت 3 m/s^2 ترمز می‌کند و جلوی مانع می‌ایستد ← $a = -3 \text{ m/s}^2$

باتوجه به شکل زیر و معادله سرعت- زمان خواهیم داشت:



$$x_r = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-(30)^2}{-2 \times 3} = 150 \text{ m}$$

$$x_1 = 165 - x_r = 165 - 150 = 15 \text{ m}$$

$$v = \frac{x_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$v = at_r + v_0 \Rightarrow 0 = -3 \times t_r + 30 \Rightarrow t_r = 10 \text{ s}$$

$$\frac{t_r}{t_1} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_A = \frac{V_{30} - x_{oA}}{40}, \quad v_B = \frac{V_{00} - x_{oB}}{40}$$

$$\Rightarrow v_A - v_B = \frac{V_{30} - x_{oA}}{40} - \frac{V_{00} - x_{oB}}{40} = \frac{V_{30} - V_{00} + \overbrace{(x_{oB} - x_{oA})}^{250}}{40} = \frac{280}{40} = 7 \text{ m/s}$$

$$v_0 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{av} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow \frac{20}{2} = \frac{v + 15}{2} \Rightarrow v = 5 \text{ m/s} = 18 \text{ km/h}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}a_2 t_2^2$$

متحرکی که شتاب بیشتری دارد ۴ ثانیه زودتر به مقصد می‌رسد (متحرکی که شتاب بیشتری دارد ۴ ثانیه زودتر به مقصد می‌رسد)

$$\Rightarrow t = \frac{2}{3}(t + 4) \Rightarrow t = \frac{2}{3}t + \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{t}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow t = 8 \text{ s}$$

ت = ۸ + ۴ = ۱۲ s متحرکی که دیرتر به مقصد می‌رسد

محاسبه زمان عبور کامل قطار از روی پل:

$$\Delta x = \overset{\text{تندی قطار}}{v} t_1 \Rightarrow 300 + 200 = 25 t_1 \Rightarrow t_1 = 20 \text{ s}$$

↓
طول پل + طول قطار

محاسبه زمان واقع شدن کامل قطار روی پل:

$$\Delta x = v t_2 \Rightarrow 300 - 200 = 25 t_2 \Rightarrow t_2 = 4 \text{ s}$$

↓
طول قطار - طول پل

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{20}{4} = 5$$

می‌دانیم در لحظه $t = 2 \text{ s}$ سرعت متحرک برابر با صفر است. در نتیجه به علت تقارن روی شکل سهم، تندی متحرک در لحظه $t = 4 \text{ s}$ برابر با همان تندی اولیه متحرک است.

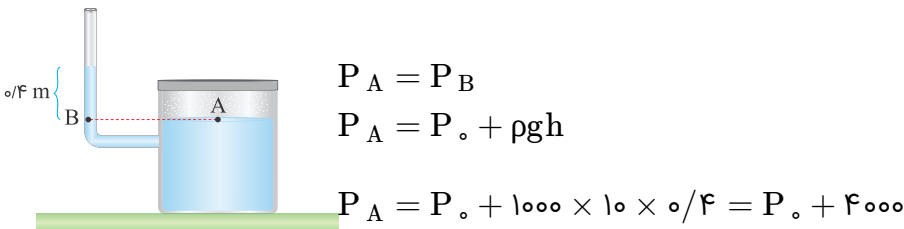
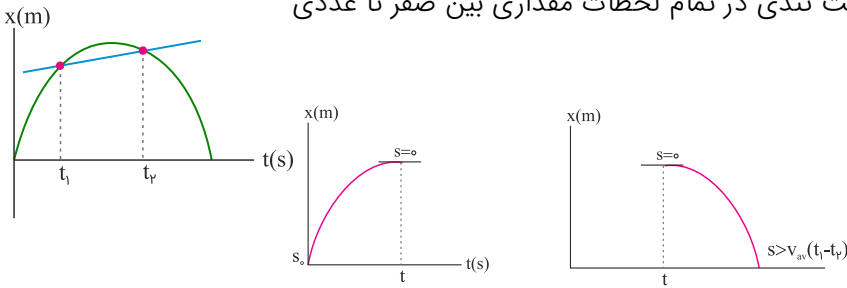
$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} t$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{0 + v_0}{2} \times 2 \Rightarrow v_0 = 8 \text{ m/s} \Rightarrow v_{t=4} = 8 \text{ m/s}$$

اگر متحرک تغییر جهت ندهد اندازه جابه‌جایی و مسافت طی‌شده یکسان خواهد بود. می‌دانیم متحرک در نمودار مکان - زمان در رئوس سهمی تغییر جهت می‌دهد پس فقط در بازه t_2 تا t_4 اندازه جابه‌جایی و مسافت طی‌شده یکسان نیست.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{5s} - v_{2s}}{5 - 2} \xrightarrow{\Delta v = 0} a_{av} = 0$$

شیب خط بین دو لحظه t_1 و t_2 برابر با سرعت متوسط در این بازه است. اگر نمودار را به دو قسمت تقسیم کنیم، در هر قسمت تندی در تمام لحظات مقداری بین صفر تا عددی بیشتر از سرعت متوسط بازه $(t_1 - t_2)$ است. بنابراین در هر قسمت یک لحظه یافت می‌شود که در آن تندی با سرعت متوسط در بازه $(t_1 - t_2)$ برابر است و در مجموع در دو لحظه تندی با سرعت متوسط در بازه $(t_1 - t_2)$ برابر است.



$$P_A = P_B$$

$$P_A = P_0 + \rho gh$$

$$P_A = P_0 + 1000 \times 10 \times 0.4 = P_0 + 4000$$

فشار هوای محبوس: $P_1 = P_0 + 4000$

فشار هوای بیرون: $P_2 = P_0$

اختلاف فشار بالا و پایین سقف مخزن $\Delta P = 4000 \text{ Pa}$

$$\Delta F = \Delta P \cdot A = 4000 \times 70 \times 10^{-2} = 28 \text{ N}$$



فشار هوای محبوس بیشتر از هوای بیرون است؛ پس نیروی برآیند به سمت بالا است.

گزینه ۲ صحیح است.

فشار وارده از جسم روی سطح افقی ناشی از نیروی وزن آن است؛ بنابراین با توجه به اینکه فشار با مساحت سطح تماس بین جسم و سطح رابطه وارون دارد می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} P_{\max} &= \frac{W}{A_{\min}} \\ P_{\min} &= \frac{W}{A_{\max}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{P_{\max}}{P_{\min}} = \frac{A_{\max}}{A_{\min}} = \frac{50 \times 20}{20 \times 10} = 5$$

$$V = Ah \Rightarrow V = \pi r^2 h \Rightarrow ۴۵۰ = ۳ \times ۲۵ \times h \Rightarrow h = \frac{۴۵۰}{۳ \times ۲۵} = ۶ \text{ cm}$$

$$\rho h = \rho_{Hg} h_{Hg} \Rightarrow ۱ \times ۶ = ۱۳/۶ \times h_{Hg} \Rightarrow h_{Hg} = ۰/۴۴$$

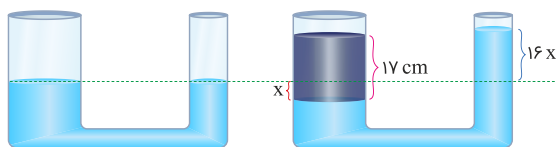
$$P_{\text{کل}} = P_{Hg} + P_0 = ۰/۴۴ + ۷۵ = ۷۵/۴۴ \text{ cmHg}$$

$$P_1 = P_0 + \rho_1 g h_1 = ۱۰^5 + (۱۲۰۰ \times ۱۰ \times \frac{۲}{۱۰}) = ۱۰۲۴۰۰ \text{ Pa}$$

$$P_2 = P_1 + ۰/۰۴ P_1 = \underbrace{P_0 + \rho_1 g h_1}_{P_1} + \underbrace{\rho_2 g h_2}_{۰/۰۴ P_1} \Rightarrow ۱۶۰۰ \times ۱۰ \times \frac{h_2}{۱۰۰} = \frac{۴}{۱۰۰} \times ۱۰۲۴۰۰$$

$$\Rightarrow h_2 = ۲۵/۶ \text{ cm}$$

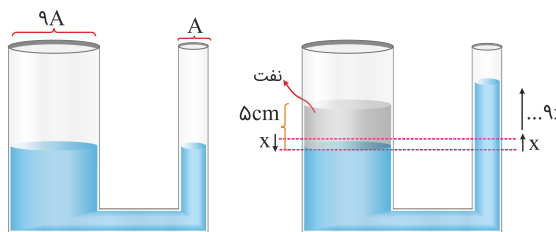
$$V = Ah = ۲ \times ۲۵/۶ = ۵۱/۲ \text{ cm}^3$$



$$\rho_{\text{نفت}} g h_{\text{نفت}} = \rho_{\text{آب}} g h_{\text{آب}} \Rightarrow ۰/۸ \times ۱۷ = ۱ \times ۱۷x \Rightarrow x = ۰/۸$$

توجه شود $۱۷x$ اختلاف ارتفاع آب در دو لوله است، چون وقتی آب به اندازه x در لوله سمت چپ پایین می‌رود، در لوله سمت راست به اندازه $۱۶x$ بالا رفته است.

$$۱۶x = ۱۶ \times ۰/۸ = ۱۲/۸ \text{ cm}$$



$$\rho_{\text{نفت}} g h_{\text{نفت}} = \rho_{\text{آب}} g h_{\text{آب}} \Rightarrow ۰/۸ \times ۵ = ۱ \times ۱۰x \Rightarrow x = ۰/۴$$

$۱۰x$ اختلاف ارتفاع آب در دو لوله است، چون وقتی آب به اندازه x در لوله سمت چپ پایین می‌رود در لوله سمت راست به اندازه $۹x$ بالا رفته و اختلاف ارتفاع $۱۰x$ است.

سؤال $۹x$ (یعنی افزایش ارتفاع نسبت به قبل) را خواسته است:

$$۹x = ۹ \times ۰/۴ = ۳/۶ \text{ cm}$$

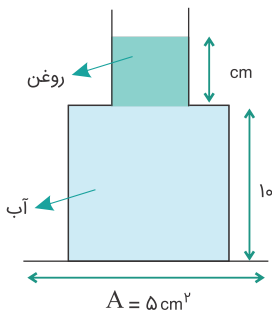
اگر فشار کم شود، سطح آب در شاخه سمت راست به اندازه x پایین می‌آید و در شاخه سمت چپ به اندازه x بالا می‌رود. در این حالت اختلاف سطح آب در دو طرف برابر $h - 2x$ می‌شود.

$$P_{\text{مخزن}} - 600 = P_0 + \rho_{\text{آب}}g(h - 2x) \Rightarrow P_0 + \rho_{\text{آب}}gh - 600 = P_0 + \rho_{\text{آب}}g(h - 2x)$$

$$\rho_{\text{آب}}gh - \rho_{\text{آب}}g(h - 2x) = 600 \Rightarrow \rho_{\text{آب}}gh - \rho_{\text{آب}}gh + \rho_{\text{آب}}g2x = 600 \Rightarrow \rho_{\text{آب}}g2x = 600$$

$$\Rightarrow 1000 \times 10 \times 2x = 600 \Rightarrow x = \frac{3}{100} = 3 \text{ cm}$$

ابتدا فشار ناشی از مایعات در کف ظرف را محاسبه کرده و سپس طبق رابطه $P = \frac{F}{A}$ نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع‌ها را به دست می‌آوریم:



$$\begin{aligned} \rho_{\text{روغن}} &= 0.8 \text{ g/cm}^3 \\ \rho_{\text{آب}} &= 1 \text{ g/cm}^3 \\ P &= P_{\text{روغن}} + P_{\text{آب}} = \rho_{\text{روغن}}gh_{\text{روغن}} + \rho_{\text{آب}}gh_{\text{آب}} \\ &= 800 \times 10 \times 0.05 + 1000 \times 10 \times 0.1 = 1400 \text{ Pa} \end{aligned}$$

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow 1400 = \frac{F}{5 \times 10^{-3}} \Rightarrow F = 7 \text{ N}$$

با دمیدن در بالای نی قائم، تندی هوا در بالای نی، افزایش می‌یابد. طبق اصل برنولی فشار هوای بالای نی کاهش می‌یابد؛ بنابراین آب درون نی شروع به بالا رفتن می‌کند و سطح آب داخل نی بالا می‌آید.



گام اول

الف) چند درصد از بار کره بزرگتر به کره کوچکتر منتقل شود؟ $\left| \frac{q'_B - q_B}{q_B} \right| \times 100 = ?$
 ب) تا نسبت بار کره‌ها برابر نسبت شعاع آن‌ها شود $\frac{q'_B}{q'_A} = \frac{r_B}{r_A}$

گام دوم

ابتدا بررسی می‌کنیم که قبل از انتقال بار، نسبت بار کره‌ها به چه صورت است:

$$\begin{cases} q = \sigma \cdot 4\pi r^2 \\ \sigma_B = 2\sigma_A \\ r_B = 2r_A \end{cases} \Rightarrow \frac{q_B}{q_A} = \frac{\sigma_B \cdot 4\pi r_B^2}{\sigma_A \cdot 4\pi r_A^2} = \frac{2\sigma_A \times 4\pi \times (2r_A)^2}{\sigma_A \times 4\pi \times r_A^2} = 8 \Rightarrow q_A = \frac{q_B}{8}$$

حال می‌خواهیم نسبت بار کره‌ها برابر نسبت شعاع کره‌ها شود. بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{q'_B}{q'_A} = \frac{r_B}{r_A} \\ r_B = 2r_A \end{cases} \Rightarrow \frac{q'_B}{q'_A} = 2 \Rightarrow q'_A = \frac{q'_B}{2}$$

طبق قانون پایستگی بار الکتریکی داریم:

$$\begin{cases} q_A + q_B = q'_A + q'_B \\ q'_A = \frac{q'_B}{2} \\ q_A = \frac{q_B}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{q_B}{8} + q_B = \frac{q'_B}{2} + q'_B \Rightarrow \frac{q'_B}{q_B} = \frac{3}{4}$$

حالا می‌توانیم درصد انتقال بار را محاسبه کنیم:

$$\left| \frac{q'_B - q_B}{q_B} \right| \times 100 = \left| \frac{q'_B}{q_B} - 1 \right| \times 100 = \left| \frac{3}{4} - 1 \right| \times 100 = 25\%$$

ابتدا اندازه بار الکتریکی را به دست می‌آوریم:

$$q = ne = 1/5 \times 10^{19} \times 1/6 \times 10^{-19} = 2/4 \text{ C}$$

حال جریان الکتریکی گذرنده در سیم را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{2/4}{60} = 0.04 \text{ A}$$

از طرفی جهت جریان الکتریکی طبق قرارداد خلاف جهت شارش الکترون‌ها یعنی از B به A است.

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2} \times (0.4 \times 10^{-3}) \times (0 - 4) = -8 \times 10^{-4} \text{ J}$$

انرژی جنبشی ذره $8 \times 10^{-4} \text{ J}$ کاهش یافته، پس باتوجه به پایستگی انرژی، انرژی پتانسیل الکتریکی آن به همین اندازه افزایش می‌یابد؛ یعنی:

$$\Delta U = +8 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{8 \times 10^{-4}}{-8 \times 10^{-6}} = -100 \text{ V} \Rightarrow \Delta V = V_B - V_A = -100$$

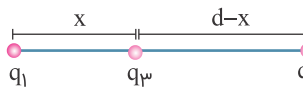
$$\Rightarrow V_B - 30 = -100 \Rightarrow V_B = -70 \text{ V}$$

میدانی که بار q_1 در محل بار q_2 ایجاد می‌کند عبارت است از:

$$E_1 = \frac{F_{12}}{q_2} = k \frac{q_1}{d^2} \Rightarrow 100 \times 10^3 = 9 \times 10^9 \frac{q_1}{(0.6)^2}$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{100 \times 10^3 \times 36 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} = 4 \times 10^{-6} \text{ C} = 4 \mu\text{C}$$

از طرفی جهت میدان حاصل از بار q_1 به سمت خارج از خط واصل دو بار است. پس جهت نیرو نیز در همان سمت بوده و درمی‌یابیم نیروی بین دو بار q_1 و q_2 رانشی است. پس دو بار همنام هستند. برای اینکه برآیند نیروهای وارد بر بار q_3 صفر شود، باید بین دو بار q_1 و q_2 و نزدیک به بار کوچک‌تر قرار گیرد.



$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow \frac{kq_1q_3}{x^2} = \frac{kq_2q_3}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{x^2}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{4}{16} = \left(\frac{x}{d-x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{x}{d-x} \Rightarrow 2d - 2x = 4x \Rightarrow 2d = 6x$$

$$\Rightarrow d = 3x \Rightarrow x = \frac{d}{3} = \frac{60}{3} = 20 \text{ cm}$$

دقت کنید که بار q_2 از q_3 در فاصله 40 cm قرار دارد.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{90 \times 10^{-3}}{30} = 3 \times 10^{-3} = 0.003 \text{ A}$$



انرژی پتانسیل الکتریکی بار در نقطه A را U_A در نظر می‌گیریم. چون بار منفی است با حرکت در مسیر AB که در خلاف جهت میدان است، انرژی پتانسیل الکتریکی بار کاهش و با حرکت در مسیر AC که در جهت میدان است، انرژی پتانسیل الکتریکی بار افزایش می‌یابد؛ بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی بار در نقاط B و C برابر است با:

$$\begin{cases} \Delta U_{AB} = U_B - U_A \Rightarrow -3 = U_B - U_A \Rightarrow U_B = U_A - 3 \\ \Delta U_{AC} = U_C - U_A \Rightarrow +2 = U_C - U_A \Rightarrow U_C = U_A + 2 \end{cases}$$

گام دوم: باتوجه به نتایج گام اول، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار در جابه‌جایی فرضی از B تا C برابر است با:

$$U_B - U_C = (U_A - 3) - (U_A + 2) = -5 \text{ J}$$

گام سوم: با استفاده از رابطه $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ ، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_B - V_C = \frac{U_B - U_C}{q} \Rightarrow V_B - V_C = \frac{-5}{-2 \times 10^{-3}} \\ &\Rightarrow V_B - V_C = 2500 \text{ V} = 2/5 \text{ kV} \end{aligned}$$

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار q برابر است با:

$$\Delta U = -W_{\text{میدان}} = -5 \times 10^{-5} \text{ J}$$

باتوجه به رابطه زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B را به دست می‌آوریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \xrightarrow{q=+2 \times 10^{-6} \text{ C}} \Delta V = \frac{-5 \times 10^{-5}}{+2 \times 10^{-6}} = -25 \text{ V}$$

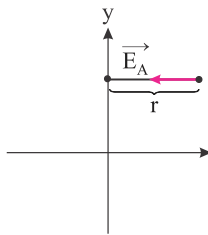
بار q_1 مثبت و بار q_2 منفی است؛ زیرا خط‌های میدان از q_1 خارج می‌شوند و به q_2 وارد می‌شوند. در عین حال تراکم خطوط میدان در نزدیکی بار q_2 بیشتر است؛ لذا اندازه q_2 بزرگ‌تر از q_1 است.

گام اول: ابتدا محل بار q را تعیین می‌کنیم. چون بار منفی است، جهت میدان به سمت بار است. پس بار الکتریکی باید روی محور y و در قسمت مثبت محور y باشد، اگر فاصله بار تا مبدأ را r در نظر بگیریم، داریم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow 2 \times 10^5 = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6}}{r^2} \Rightarrow r = 0.3 \text{ m}$$

پس بار q در نقطه $M \left(0, \frac{0.3}{\text{m}} \right)$ قرار دارد.

گام دوم: با توجه به شکل میدان بار q در نقطه A برابر است با:



$$E_A = k \frac{q}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6}}{(0.3)^2} = 18 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_A = -1/8 \times 10^6 \vec{i} \text{ (N/C)}$$

طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که بار q_2 به q_1 وارد می‌کند، هم‌اندازه با نیرویی است که بار q_1 به q_2 وارد می‌کند و در خلاف جهت آن، پس:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \Rightarrow -(-0.4 \text{ N})\vec{i} = (+0.4 \text{ N})\vec{i}$$

طبق رابطه $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ، میدان الکتریکی بار q_2 در محل بار q_1 برابر است با:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{21}}{q_1} = \frac{(+0.4 \text{ N})\vec{i}}{-2 \times 10^{-6}} = (-2 \times 10^5 \text{ N/C})\vec{i}$$



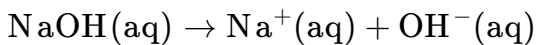
$$? \text{ mol NaOH} = 80 \text{ mg NaOH} \times \frac{1 \text{ g NaOH}}{1000 \text{ mg NaOH}} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{40 \text{ g NaOH}} = 0.002 \text{ mol NaOH}$$

$$[\text{NaOH}] = \frac{\text{مول حل شونده}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{0.002 \text{ mol}}{0.2 \text{ L}} = 0.01 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pOH}(\text{NaOH}) = -\log(\text{M.n.}\alpha) = -\log(0.01 \times 1 \times 1) = -\log 10^{-2} = 2$$

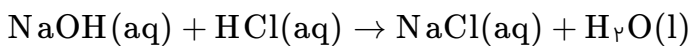
$$\text{pH} = 14 - \text{pOH} = 14 - 2 = 12$$

باتوجه به معادله تفکیک NaOH در آب، غلظت OH⁻ نیز 10⁻² مولار است؛ زیرا نسبت استوکیومتری NaOH به OH⁻ برابر ۱ به ۱ است.



$$[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{H}^+] \times 10^{-2} = 10^{-14} \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}^+]} = \frac{10^{-2}}{10^{-12}} = 10^{10} \text{ برابر}$$



$$10 \text{ mL NaOH} \times \frac{0.01 \text{ mol NaOH}}{1000 \text{ mL NaOH}} \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol NaOH}} \times \frac{1000 \text{ mL HCl}}{0.002 \text{ mol HCl}} = 50 \text{ mL HCl(aq)}$$

برای محاسبه مقدار اسیدی که با این مقدار NaOH خنثی می‌شود می‌توان از این رابطه نیز استفاده کرد:

$$n_a M_a V_a = n_b M_b V_b \begin{cases} n : \text{تعداد عامل اسید یا باز} \\ M : \text{غلظت مولار اسید یا باز} \\ V : \text{حجم اسید یا باز} \end{cases}$$

در رابطه فوق، به خاطر داشته باشید که کافی است حجم‌ها برحسب یک واحد باشند و لزومی ندارد حتماً برحسب لیتر بیان شوند. (به عنوان مثال در این سؤال حجم را برحسب میلی‌لیتر جاگذاری می‌کنیم)
HCl و NaOH اسید و باز یک عاملی هستند، پس:

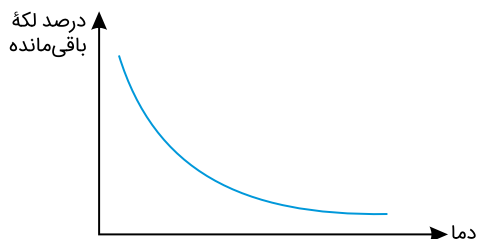
$$n_a = n_b = 1 \Rightarrow 1 \times M_a \times V_a = 1 \times M_b \times V_b \Rightarrow 0.002 \times V_a = 0.01 \times 10 \Rightarrow V_a = \frac{0.01 \times 10}{0.002} = 50 \text{ mL}$$

تنها مورد "پ" نادرست است.

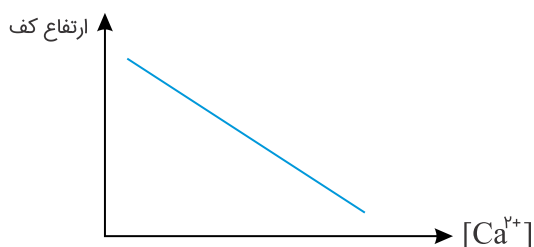
پاک‌کننده‌های صابونی به راحتی لکه‌های چربی را از روی پارچه‌های نخی پاک می‌کنند.

بررسی سایر عبارت‌ها:

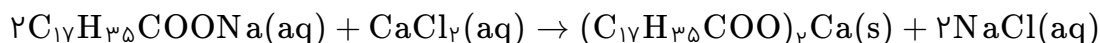
الف) درست. با افزایش دما، قدرت پاک‌کنندگی یک صابون افزایش می‌یابد و ارتفاع کف حاصل تا یک حدی بالا می‌رود و بعد ثابت می‌ماند. ارتباط بین افزایش دما و قدرت پاک‌کنندگی صابون (درصد لکه باقی‌مانده) به صورت زیر است:



ب) درست. با افزایش غلظت یون Ca^{2+} در آب سخت، قدر پاک‌کنندگی صابون کاهش یافته و ارتفاع کف حاصل نیز کاهش می‌یابد. ارتباط بین ارتفاع کف حاصل با غلظت یون Ca^{2+} موجود در آب در نمودار زیر نشان داده شده است:



ت) درست. معادله واکنش صابون با کلسیم کلرید به صورت زیر است:



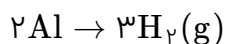
$$\text{جرم مولی } \text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa} = (17 \times 12) + (35 \times 1) + (2 \times 16) + 23 = 306 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{جرم مولی رسوب } (\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COO})_2\text{Ca} = 2 \times [(17 \times 12) + (35 \times 1) + (2 \times 16)] + 40 = 606 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$10/2 \text{ g } \text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa} \times \frac{1 \text{ mol } \text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa}}{306 \text{ g } \text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa}} \times \frac{1 \text{ mol } (\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COO})_2\text{Ca}}{2 \text{ mol } \text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa}}$$

$$\times \frac{606 \text{ g } (\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COO})_2\text{Ca}}{1 \text{ mol } (\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COO})_2\text{Ca}} = 10/1 \text{ g } (\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COO})_2\text{Ca}$$





$$30 \text{ g Al} \times \frac{90}{100} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{3 \text{ mol H}_2}{2 \text{ mol Al}} \times \frac{2 \text{ g H}_2}{1 \text{ mol H}_2} = 3 \text{ g}$$

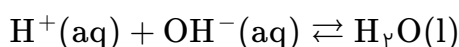
$$60 = \frac{x}{3 \text{ g}} \times 100 \Rightarrow x = 1/8 \text{ g عملی مقدار}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 1/2 = \frac{1/8 \text{ g}}{V} \Rightarrow V = 1/5 \text{ L H}_2$$

ویژگی‌های این سه مخلوط در جدول زیر مقایسه شده است:

محلول	کلوئیدها	سوسپانسیون	نوع مخلوط ویژگی
نور را عبور می‌دهد	نور را پخش می‌کند	نور را پخش می‌کند	رفتار در برابر نور
همگن	ناهمگن	ناهمگن	همگن بودن
پایدار	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود	ناپایدار	پایداری
یون‌ها یا مولکول‌های مجزا	توده‌های یونی و مولکولی	ذره‌های ریز ماده	ذره‌های سازنده

همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، HY یک اسید قوی است که کاملاً یونیده شده و به یون‌های H^+ و Y^- تفکیک شده است. واکنش خنثی شدن اسید و باز به صورت زیر می‌باشد:



پس تعداد یون‌های Na^+ و Y^- دست‌نخورده باقی می‌ماند، پس گزینه "۱" اشتباه است.

از طرفی چون H^+ و OH^- داریم، پس از واکنش $8\text{H}_2\text{O}$ تولید شده و ۲ یون OH^- باقی می‌ماند، یعنی گزینه "۴".

بررسی عبارت‌ها:

(الف) درست است؛ زیرا نسبت حاصل ضرب غلظت تعادلی یون‌های موجود در محلول به غلظت تعادلی اسید همان K_a یا ثابت یونش اسیدی نامیده می‌شود که در دمای ثابت تغییر نمی‌کند. (فقط به دما وابسته است)
 (ب) با رقیق شدن محلول غلظت یون‌ها در محلول دوم کمتر از محلول اول می‌شود و در پی این عمل، روشنایی لامپ کاهش می‌یابد. (نادرست)

(ج) باتوجه به اضافه کردن آب به محلول اسیدی و کاهش غلظت یون هیدرونیوم، pH محلول افزایش می‌یابد نه کاهش! (نادرست)
 (د) در اسیدهای ضعیف با رقیق شدن محلول، درجه یونش اسید افزایش می‌یابد؛ بنابراین نسبت مول‌های یونیده نشده به کل مول‌های حل‌شده در محلول دوم (محلول رقیق‌شده) نسبت به محلول اول کمتر است. (نادرست)
 (ه) خاصیت اسیدی به غلظت یون‌های $[H_3O^+]$ محلول بستگی دارد و جمله درست است.

فقط عبارت دوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول) جوهر نمک خاصیت اسیدی دارد و کاغذ pH (نه هر شناساگر دیگر!) را به رنگ قرمز درمی‌آورد.
 عبارت دوم) کاغذ pH در حضور صابون به رنگ آبی و در محلول سود به رنگ بنفش درمی‌آید. تغییر رنگ کاغذ pH به آبی یا بنفش دلالت بر خاصیت بازی محلول دارد.
 عبارت سوم) اگر چه سرکه و هیدروکلریک اسید هر دو خاصیت اسیدی دارند اما تغییر رنگ کاغذ pH در آن‌ها کاملاً یکسان نیست.
 کاغذ pH در محلول هیدروکلریک اسید به رنگ قرمز و در محلول سرکه به رنگ نارنجی درمی‌آید.
 عبارت چهارم) در واکنش سدیم هیدروکسید با رسوبات چربی، گازی تولید نمی‌شود در این شرایط سدیم هیدروکسید به‌عنوان یک پاک‌کننده خورنده با رسوبات چربی واکنش داده و آن‌ها را به فرآورده‌های محلول در آب (نمک اسید چرب یا صابون) تبدیل می‌کند.
 عبارت پنجم) جوهر نمک (HCl) یک ترکیب کووالانسی قطبی و سود (NaOH) یک ترکیب کاملاً یونی است. بنابراین این دو ترکیب مانند صابون دارای دو بخش قطبی و ناقطبی نیستند.

پاسخ درست پرسش‌ها به صورت زیر است:
 (الف) بازی (ب) $pH < 7$ (پ) خیر



بررسی عبارت‌ها:

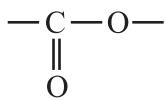
عبارت اول: شکل B الگویی برای نمایش یک استر سنگین است (نه سبک!).

عبارت دوم: نیروی بین‌مولکولی غالب در A و B از نوع واندروالسی است. در هر دو مولکول بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه دارد و هر دو مولکول در مجموع ناقطبی هستند.

عبرت سوم: چربی‌ها، مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلند زنجیر (با جرم مولی زیاد) هستند. بنابراین در ساختار چربی هر دو مولکول A و B وجود دارند.

عبارت چهارم، بخش دایره‌ای شکل در مولکول B (که یک استر سنگین است)، بخش قطبی است که شامل گروه عاملی استری می‌باشد. در مولکول A (که یک اسید چرب است)، بخش قطبی گروه عاملی کربوکسیل ($-\text{COOH}$) است.

عبارت پنجم: هم مولکول A و هم مولکول B ناقطبی است. بنابراین هر دو مولکول در آب (حلال قطبی) نامحلولند.

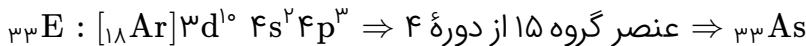
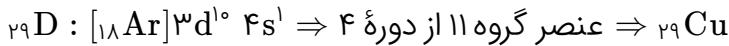


عامل استری

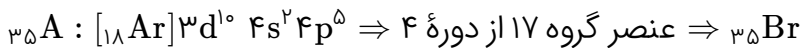


عبارت‌های اول، دوم و سوم درست هستند.

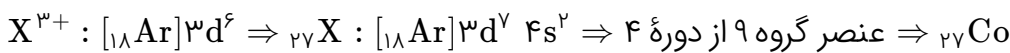
آرایش اتم خنثی D و E را به راحتی از روی عدد اتمی آن می‌توانیم بنویسیم:



شمار الکترون‌های لایه آخر در یون A^- نشان می‌دهد این عنصر در حالت خنثی، در لایه ظرفیت خود ۷ الکترون داشته است (عنصر گروه ۱۷ از دوره ۴) و در نهایت با گرفتن یک الکترون به آرایش هشت‌تایی پایدار رسیده است؛ بنابراین آرایش الکترونی اتم A به صورت زیر خواهد بود:

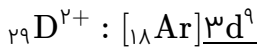
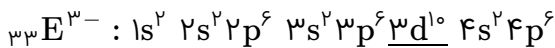


کاتیون‌های فلزهای واسطه (به جز یون اسکاندیم) دوره ۴، همگی به زیرلایه 3d ختم می‌شوند و زیرلایه 4s در آن‌ها، از الکترون خالی شده است. از آنجا که مطابق جدول داده‌شده، یون X^{3+} ، ۶ الکترون در زیرلایه 3d دارد؛ بنابراین آرایش الکترونی اتم X به صورت زیر خواهد بود:



بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: درست. $l = 2$ ، عدد کوانتومی فرعی مربوط به زیرلایه d است. در یون E^{3-} و D^{2+} به ترتیب ۱۰ و ۹ الکترون در زیرلایه 3d وجود دارد؛ بنابراین a و b در سطر دوم جدول داده‌شده، به ترتیب برابر ۱۰ و ۹ خواهد بود.



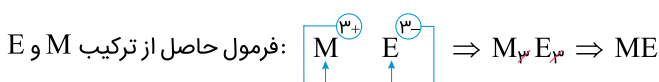
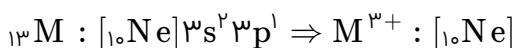
$$35 = 6 + 10 + 9 + 10 = \text{مجموع عددهای ردیف دوم جدول ارائه‌شده در سوال}$$

بنابراین مجموع عددهای ردیف دوم جدول با عدد اتمی عنصر A ($Z = 35$) برابر است.

عبارت دوم: درست. عدد اتمی عنصر X از دوره ۴ برابر ۲۷ و عدد اتمی فلز قلیایی همین دوره، برابر ۱۹ است (${}_{19}\text{K}$).

$$27 - 19 = 8 : \text{تفاوت عدد اتمی}$$

عبارت سوم: درست. عنصر ${}_{13}\text{M}$ ، همان عنصر Al است که با از دست دادن ۳ الکترون و تشکیل یون Al^{3+} به آرایش پایدار گاز نجیب می‌رسد.

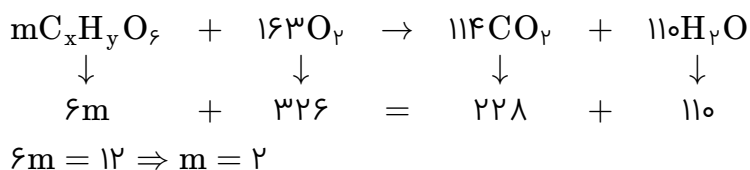


عبارت چهارم: نادرست. عنصر ${}_{29}\text{D}$ ، همان فلز مس است. این عنصر در ترکیب‌ها به صورت کاتیون Cu^+ و Cu^{2+} وجود دارد. عنصری با عدد اتمی ۳۱، همان فلز گالیم است که در گروه ۱۳ قرار داشته و مانند آلومینیم فقط می‌تواند یون سه بار مثبت تشکیل دهد. ملاحظه می‌کنید که هیچ‌کدام از این فلزها، یونی با بار یکسان ایجاد نمی‌کنند.

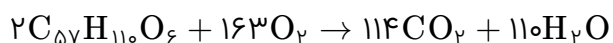
بررسی سایر عبارت‌ها:

الف) نادرست. خواص شیمیایی عناصر در یک گروه مشابه هم هستند نه در یک دوره.
ت) نادرست. دو عنصر C و E هر دو می‌توانند یون دو بار منفی ایجاد کنند.

ابتدا بر اساس قانون پایستگی جرم و باتوجه به برابر بودن شمار اتم‌های اکسیژن سمت چپ و راست معادله، ضریب m را به دست می‌آوریم:



بنابراین باتوجه به شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در سمت راست معادله و برای برقراری قانون پایستگی جرم، x و y باید به ترتیب برابر با ۵۷ و ۱۱۰ باشد.



پاسخ بخش اول مسئله:

$$89 \text{ g } C_{57}H_{110}O_6 \times \frac{1 \text{ mol } C_{57}H_{110}O_6}{890 \text{ g}} \times \frac{163 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } C_{57}H_{110}O_6} \times \frac{25 \text{ L } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 203/75 \text{ L } O_2$$

پاسخ بخش دوم مسئله:

$$89 \text{ g } C_{57}H_{110}O_6 \times \frac{1 \text{ mol } C_{57}H_{110}O_6}{890 \text{ g}} \times \frac{114 \text{ mol } CO_2}{2 \text{ mol } C_{57}H_{110}O_6} = 5/7 \text{ mol } CO_2$$

فرمول شیمیایی ترکیبات داده شده به صورت زیر است:

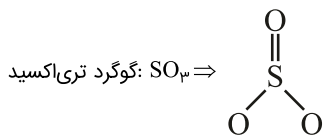
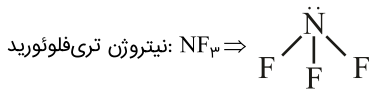
الف) NF_3 (ب) $SiBr_4$ (پ) P_4O_6 (ت) NO

شمار اتم‌های ترکیب (ب) $SiBr_4$ برابر ۵ است که $1/25 = \frac{5}{4}$ برابر شمار اتم‌های ترکیب (الف) NF_3 (۴ عدد) است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست. مرگ یک ستاره با یک انفجار بزرگ همراه است که سبب پخش شدن عنصرهای تشکیل شده آن در فضا می‌شود.
گزینه ۲: نادرست. درون ستاره‌ها همانند خورشید در دماهای بسیار بالا و ویژه، واکنش‌های هسته‌ای رخ می‌دهد.
گزینه ۳: نادرست. منیزیم دارای سه ایزوتوپ ^{24}Mg ، ^{25}Mg و ^{26}Mg است.

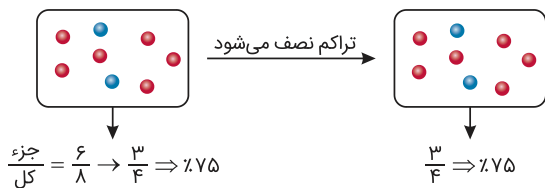
باتوجه به ساختارهای رسم شده تمامی عبارت‌ها به جز "الف" درست هستند.



بررسی عبارت نادرست:

الف) باتوجه به ساختارهای رسم شده، NF_3 دارای جفت‌الکترون پیوندی است.

سطح انرژی حالت برانگیخته به نسبت حالت پایه بیشتر است، زیرا برای جابه‌جایی میان حالت پایه و برانگیخته باید حالت پایه انرژی بگیرد. که در این صورت فاصله الکترون از هسته بیشتر می‌شود. در سازوکار برانگیخته شدن الکترون تنها با تغییر انرژی الکترون، جابه‌جایی رخ می‌دهد و تعداد الکترون‌ها ثابت می‌ماند.



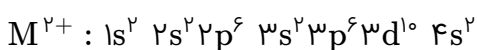
هنگامی که تراکم مولکول‌ها در یک نمونه گاز کم می‌شود، تعداد ذرات گازهای تشکیل‌دهنده گاز به یک نسبت کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال اگر تراکم نصف شود، تعداد ذرات تشکیل‌دهنده همه گازها نصف می‌شود، از این رو درصد حجمی تغییری نمی‌کند.

$$\text{درصد} = \frac{\text{فراوانی نمونه}}{\text{فراوانی کل}} \times 100 = \frac{6}{8} \times 100 \Rightarrow \frac{3}{4} \times 100 \Rightarrow 75\%$$

$$\begin{cases} N + Z = 72 \\ Z = 0.8N \end{cases} \Rightarrow N + 0.8N = 72 \Rightarrow N = \frac{72}{1.8} = 40$$

$$\Rightarrow Z = 0.8N \Rightarrow Z = 0.8(40) = 32$$

عنصر M در دوره چهارم قرار دارد (دوره چهارم عنصرهای با عدد اتمی ۱۹ تا ۳۶ را شامل می‌شود) و با A هم‌دوره است.



در یون M^{2+} سه لایه از الکترون پر شده است. (لایه چهارم اشغال شده ولی پر نیست)

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: نادرست. فراوانی این ایزوتوپ در مخلوط طبیعی اورانیم کمتر از ۷٪ درصد است.

گزینه ۳: نادرست. راه تبدیل عناصر دیگر به طلا کشف شده، اما صرفه اقتصادی ندارد.

گزینه ۴: نادرست. پسماند راکتورهای اتمی پرتوزا هستند.

$$\text{CaCO}_3 \text{ مولی جرم} = 40 + 12 + 3(16) = 100$$

$$? \text{ L CO}_2 = 40 \text{ g CaCO}_3 \times \frac{100}{100} \times \frac{1 \text{ mol CaCO}_3}{100 \text{ g CaCO}_3} \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol CaCO}_3} \times \frac{22.4 \text{ L}}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{75}{100} \approx 5/4 \text{ L CO}_2$$

بررسی عبارت‌ها:

(الف) نادرست. حدود نیمی از نفتی که از چاه‌های نفت بیرون کشیده می‌شود به‌عنوان سوخت در وسایل نقلیه استفاده می‌شود.

(ب) نادرست. هیدروکربن‌های سیرشده زنجیری دارای $2n + 1$ پیوند اشتراکی و هیدروکربن‌های سیرشده حلقوی دارای $3n$ پیوند اشتراکی هستند.

(پ)

$$\text{C}_{18}\text{H}_{38} \text{ گریس تقریبی} \Rightarrow \text{جرم مولی تقریبی} = 254 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{C}_{25}\text{H}_{52} \text{ وازلین تقریبی} \Rightarrow \text{جرم مولی تقریبی} = 352 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{تفاوت جرم مولی تقریبی گریس و وازلین} = 352 - 254 = 98 \text{ g.mol}^{-1}$$

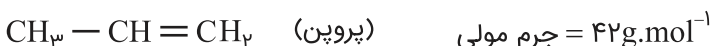
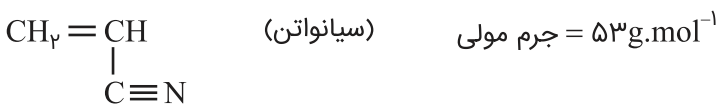
(ت) درصد نفت کوره در چهار نوع نفت خام

نفت برنت دریای شمال > نفت سبک کشورهای عربی > نفت سنگین ایران > نفت سنگین کشورهای عربی

از پلیمرشدن کلرواتن یا وینیل کلرید، پلی‌وینیل کلرید به دست می‌آید که در ساخت کیسه خون کاربرد دارد.

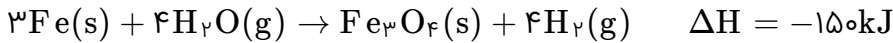
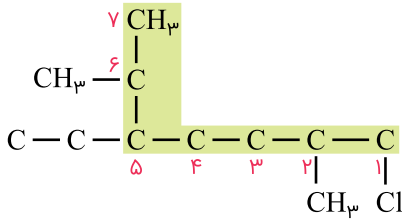
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱:



گزینه ۲: فرمول مولکولی ۲ - هگزن (C_6H_{12}) و سیکلوهگزان (C_6H_{12}) یکسان است.

گزینه ۴: فرمول مولکولی ۱ و ۲ - دی‌برمواتان $\text{C}_2\text{H}_4\text{Br}_2$ و فرمول تجربی آن (ساده شده فرمول مولکولی) CH_2Br است.



$$\text{گرمای مورد نیاز برای بالا بردن دمای آب} = mc\Delta T = 300 \times 4/2 \times 40 \Rightarrow Q = 50400\text{J} = 50/4\text{kJ}$$

$$? \text{L H}_2 = 50/4 \text{kJ} \times \frac{4 \text{ mol H}_2}{150 \text{kJ}} \times \frac{25 \text{ L H}_2}{1 \text{ mol H}_2} = 33/6 \text{ L H}_2$$

الف) نادرست. برخی فلزها مانند اکسیژن، نیتروژن، گوگرد و ... به شکل آزاد در طبیعت وجود دارند ولی عنصر فسفر (P) به دلیل واکنش پذیری زیاد در طبیعت به صورت ترکیب وجود دارد.

ب) درست. به دلیل آنکه یکی از فرآورده‌ها به صورت گازی شکل $\text{CO}_2(g)$ از مخلوط واکنش خارج می‌شود، جرم مخلوط جامد با گذشت زمان کاهش می‌یابد.

پ) نادرست. به دلیل صرفه اقتصادی بیشتر از کربن به جای سدیم استفاده می‌کنند.

ت) نادرست. در هر واکنش شیمیایی که به طور طبیعی انجام می‌شود، واکنش پذیری فرآورده‌ها نسبت به واکنش دهنده‌ها کمتر است.

ث) درست. در میان فلزها، تنها طلا به شکل کلوخه یا رگه‌های زرد لابه‌لای خاک یافت می‌شود.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: در عناصر واسطه زیرلایه d پر می‌شود. لایه ظرفیت عناصر واسطه به $(n-1)d$, ns ختم می‌شود.

گزینه ۲: برخی عناصر واسطه دارای یک نوع ظرفیت مشخص هستند مانند Ag^+ و Sc^{3+} که تک ظرفیتی هستند.

گزینه ۳: در دوره چهارم جدول تناوبی، دو عنصر ^{24}Cr و ^{25}Mn در آرایش خود ۵ الکترون در زیرلایه d دارند که عدد کوانتومی فرعی آن‌ها برابر ۲ است:



گزینه ۴: عناصر واسطه ظرفیت‌های متفاوتی دارند که ارتباطی به افزایش عدد اتمی آن‌ها ندارد. ولی با افزایش عدد اتمی شمار الکترون‌های لایه ظرفیت اتم فلز واسطه افزایش می‌یابد. به عنوان مثال Zn با ظرفیت ۲ دارای ۱۲ الکترون در لایه ظرفیت خود است.

طبق فرض سوال، عنصر M یک فلز اصلی از جدول دوره‌ای است. از طرف دیگر فرمول اکسید این عنصر (M_2O) نشان می‌دهد که عنصر M یک فلز یک‌ظرفیتی از گروه اول (فلزهای قلیایی) است. از آنجا که فلزهای قلیایی واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به عنصرهای واسطه (مانند مس) دارند؛ بنابراین در واکنش مربوط به گزینه "۱"، فلز مس نمی‌تواند جایگزین فلز سدیم در اکسید این ترکیب شده و آن را آزاد کند.

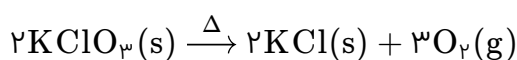
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: HX ، فرمول عمومی هیدروهالیک اسید (HF, HCl, HBr, HI) است. فلزهایی با E° منفی (مانند Mg)، ضمن واکنش با اسیدها جایگزین هیدروژن اسید شده و آن را به صورت گاز هیدروژن آزاد می‌کنند.

گزینه ۳: M یک فلز قلیایی است. فلزهای قلیایی به شدت با آب واکنش داده، هیدروکسید فلز و گاز هیدروژن تولید می‌کنند.

گزینه ۴: در معادله داده‌شده، NaX ، هالید فلز سدیم (مانند $NaCl$ و $NaBr$) و X_2 عنصر هالوژن است (مانند Cl_2 و Br_2) فلزهای قلیایی (به‌عنوان واکنش‌پذیرترین فلزها) با هالوژن‌ها (به‌عنوان واکنش‌پذیرترین نافلزها)، واکنش داده و هالید فلز قلیایی تولید می‌کنند.

مطابق قانون پایستگی جرم، مجموع جرم مواد شرکت‌کننده در واکنش ثابت است، پس $7/2$ گرم کاهش جرم در نمونه جامد مربوط به تولید گاز O_2 و خروج آن است. معادله موازنه‌شده واکنش:



$$? g O_2 = 36/75 g KClO_3 \times \frac{80 g KClO_3}{100 g KClO_3} \times \frac{1 mol KClO_3}{122/5 g KClO_3} \times \frac{3 mol O_2}{2 mol KClO_3} \times \frac{32 g O_2}{1 mol O_2} = 11/52 g O_2$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار فراورده عملی}}{\text{مقدار فراورده نظری}} \times 100 \Rightarrow \text{بازده درصدی} = \frac{7/2}{11/52} \times 100 = 62/5\%$$

طبق رابطه $Q = C\Delta\theta$ هر ماده‌ای که ظرفیت گرمایی بالاتری داشته باشد برای تغییر دمای یکسان، نیاز به گرمای بیشتری دارد؛ پس مقاومتش در برابر تغییر دما بیشتر است.

می‌دانیم خارج‌قسمت تقسیم $13 + 2n$ بر $n - 1$ مقداری صحیح است؛ یعنی:

$$\frac{2n + 13}{n - 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2n - 2 + 15}{n - 1} = 2 + \frac{15}{n - 1} \Rightarrow \frac{15}{n - 1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n - 1 \in \{x \mid x \text{ مقسوم‌علیه ۱۵ است}\} \Rightarrow n - 1 \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$$

بنابراین ۸ مقدار صحیح برای n وجود دارد.

$$\begin{cases} a = bq + 7 \\ a + 51 = bq' + 9 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 51 = b(q' - q) + 2 \Rightarrow b(q' - q) = 49$$

$$\Rightarrow b|49 \xrightarrow{b \in \mathbb{N}} b = 1 \text{ یا } b = 7 \text{ یا } b = 49$$

طبق شرط الگوریتم تقسیم می‌دانیم $b > 9$ است، بنابراین تنها $b = 49$ قابل قبول است. مجموع ارقام آن برابر $4 + 9 = 13$ است.

$$x = 2^m \times 3^m \times 2^n \times 5^n \Rightarrow 2^{m+n} \times 3^m \times 5^n$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد مقسوم علیه های صحیح}} (m+n+1)(m+1)(n+1)$$

$$15x = 2^{m+n} \times 3^m \times 5^n \times 5 \times 3 = 2^{m+n} \times 3^{m+1} \times 5^{n+1}$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد مقسوم علیه های صحیح}} (m+n+1)(m+2)(n+2)$$

$$\Rightarrow (m+n+1)(m+2)(n+2) - (m+n+1)(m+1)(n+1) = 35$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از } (m+n+1)} (m+n+1)[(m+2)(n+2) - (m+1)(n+1)] = 35$$

$$\Rightarrow (m+n+1)[m+n+3] = 35$$

$$\Rightarrow m+n=4 \Rightarrow \begin{cases} m=4, n=0 \\ m=3, n=1 \\ m=2, n=2 \\ m=1, n=3 \\ m=0, n=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8704 \xrightarrow{\text{اختلاف}} 10000 : \text{ بیشترین} , 1296 : \text{ کمترین}$$

از رابطه $n^2 - 1 | 2n - 1$ (فرض مسئله) و $n^2 - 1 | n^2 - 1$ (بازتابی) ضرب n را در سمت راست حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} n^2 - 1 | 2n^2 - n \\ n^2 - 1 | 2n^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow n^2 - 1 | (2n^2 - 2) - (2n^2 - n)$$

$$\Rightarrow n^2 - 1 | n - 2 \Rightarrow n^2 - 1 | 2n - 4 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow n^2 - 1 | 3$$

پس $n^2 - 1$ یکی از مقسوم‌علیه‌های ۳ است، لذا $\pm 1, \pm 3$ و $n^2 - 1 = \pm 1$ و در نتیجه در مجموعه عددهای صحیح داریم:

$$\begin{cases} n = 0 \quad \checkmark \\ n = 2 \quad \checkmark \\ n = -2 \quad \times \text{ (در } 1 | 2n - 1 \text{ صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

روش اول: سه عدد زوج متوالی به صورت $۲k - ۲$, $۲k$, $۲k + ۲$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$(۲k - ۲) + (۲k) + (۲k + ۲) = ۶k$$

ممکن است مضرب ۴ نباشد.

روش دوم: سه عدد زوج متوالی دلخواه مثال می‌زنیم. مثلاً ۸ و ۶ و ۴. مجموع این سه عدد برابر ۱۸ است که ۱۸ بر ۴ بخش‌پذیر نیست، بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$a = ۱۳q + ۴ \xrightarrow{\text{به توان } ۲} a^۲ = ۱۳^۲q^۲ + ۱۰۴q + ۱۶$$

$$\Rightarrow a^۲ = \underbrace{۱۳(۱۳q^۲) + ۱۳(۸q) + ۱۳ + ۳}_{\text{فاکتور}}$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۱۳(\underbrace{۱۳q^۲ + ۸q + ۱}_{q'}) + ۳ \Rightarrow a^۲ = ۱۳q' + ۳$$

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$(۱) \begin{cases} \text{طبق فرض: } ۲m - ۳n | ۹m - ۵n \Rightarrow ۲m - ۳n | ۱۸m - ۱۰n \\ \text{از طرفی: } ۲m - ۳n | -۲m + ۳n \Rightarrow ۲m - ۳n | -۱۸m + ۲۷n \end{cases} \xrightarrow{+} ۲m - ۳n | ۷n$$

$$(۲) \begin{cases} \text{طبق فرض: } ۲m - ۳n | ۹m - ۵n \Rightarrow ۲m - ۳n | ۲۷m - ۱۵n \\ \text{از طرفی: } ۲m - ۳n | -۲m + ۳n \Rightarrow ۲m - ۳n | -۱۰m + ۱۵n \end{cases} \xrightarrow{+} ۲m - ۳n | ۷m$$

پس گزینه ۴ صحیح است.



به بررسی تک تک گزینه ها می پردازیم:

گزینه ۱: اگر $a^3 | b^2$ آنگاه $a | b$

$$a^3 | b^2 \Rightarrow a \times a^2 | b^2 \Rightarrow a^2 | b^2 \Rightarrow a | b (*)$$

گزینه ۲: اگر $a^3 | b^2$ آنگاه $a^f | b^3$

با استفاده از گزینه ۱ (*) داریم:

$$\begin{cases} a^3 | b^2 \\ a | b (*) \end{cases} \Rightarrow a^f | b^3$$

گزینه ۳: اگر $a^3 | b^2$ آنگاه $a^2 | b$

$$\text{اگر } a = 4, b = 8 \Rightarrow a^3 | b^2 \text{ (} 64 | 64 \text{)}$$

ولی $(16/8) = a^2/b$ ، بنابراین این گزینه نادرست است.

گزینه ۴: اگر $a^3 | b^2$ آنگاه $a^f | b^f$

$$a^3 | b^2 \xrightarrow{\text{به توان دو}} a^6 | b^4$$

عدد طبیعی مورد نظر را a فرض می کنیم. این عدد باید به صورت $9k$ باشد. رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$a = 430q + r ; 0 \leq r < 430$$

$$9k = 430q + q^2 ; 0 \leq q^2 < 430 \Rightarrow 0 \leq q < \sqrt{430} \Rightarrow 0 \leq q < 20/7$$

یعنی q عددی بین ۰ تا ۲۰ است که باتوجه به رابطه فوق، باید بر ۹ بخش پذیر باشد؛ پس:

$$q = 9, 18$$

درضمن باید دقت شود که عدد a یعنی $9k$ ، به صورت زیر نیز نوشته می شود:

$$9k = q(430 + q)$$

ممکن است عبارت $430 + q$ نیز بر ۹ بخش پذیر باشد که ۲۰، ۱۱، ۲ این حالت را ایجاد می کند.

حالت دیگری که می ماند مربوط به زمانی است که q مضرب ۳ و $430 + q$ نیز مضرب ۳ باشد. البته این حالت رخ نمی دهد. پس پنج عدد طبیعی وجود دارد.

اگر $x > 0, y > 0$ باشند می توان نوشت:

$$(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy$$

چون xy عدد مثبت است می توان از طرفین نامساوی جذر گرفت $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ در هر یک از نتیجه گیری ها عمل عکس برقرار است پس خاصیت بازگشتی دارد. ولی با مثال نقض معلوم می شود که سه گزینه بعد خاصیت بازگشتی ندارند.

طبق فرض، داریم:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \Rightarrow A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2 \Rightarrow BA = AB$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6+x & 15+xy \\ 0 & -5+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2x+10 \\ 3-y & x+2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + 2y = -5 + 6 = 1$$

گزینه ۳

۸۲

$$\left. \begin{aligned} a_{21} &= 2^{2-1} + \frac{2}{1} = 2 + 2 = 4 \\ a_{32} &= 2^{3-2} + \frac{3}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \\ a_{11} &= 2^{1-1} + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 + \frac{7}{2} - 2 = \frac{11}{2} = 5.5$$

گزینه ۲

۸۳



می‌دانیم هر ماتریس از چند سطر و چند ستون تشکیل شده است.
 در ماتریس سطری همواره یک سطر و چند ستون داریم.
 گزینه ۱: ماتریس یک ستون و ۳ سطری از مرتبه 3×1 است.
 گزینه ۲: ماتریس یک سطر و چهار ستون دارد، مرتبه آن 1×4 .
 گزینه ۳: ماتریس مربعی از مرتبه 2×2 است.
 گزینه ۴: ماتریس ۲ سطر و ۳ ستون دارد. مرتبه آن، 2×3 است.
 پس گزینه ۲ صحیح است.
 نکته: ماتریس سطری، همواره از مرتبه $1 \times n$ است (یک سطر و n ستون).

گزینه ۳

۸۴

باتوجه به اینکه ضرب دو ماتریس $U_{m \times n}$ در $V_{m' \times n'}$ (یعنی UV) زمانی امکان‌پذیر است که $n = m'$ باشد، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1) ABC = A_{3 \times 4} B_{4 \times 2} C_{2 \times 3} \quad \checkmark$$

$$2) CAB = C_{2 \times 3} A_{3 \times 4} B_{4 \times 2} \quad \checkmark$$

$$3) ACB = A_{3 \times 4} C_{2 \times 3} B_{4 \times 2} \quad \times$$

$$4) BCA = B_{4 \times 2} C_{2 \times 3} A_{3 \times 4} \quad \checkmark$$

بنابراین حاصلضرب گزینه ۳ تعریف نمی‌شود.

A یک ماتریس قطری است و I_2 ، 2×2 می‌باشد. از آنجایی که $B = I_2 - A$ ، بنابراین B هم یک ماتریس قطری 2×2 است.

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad a \times b = -2$$

$$B^f = \begin{bmatrix} a^f & 0 \\ 0 & b^f \end{bmatrix} \quad a^f \times b^f = (ab)^f = (-2)^f = 16$$

ستون دوم ماتریس A :

$$\begin{bmatrix} 1^2 + 3(2) \\ 2^2 + 3(2) \\ 3^2 + 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ستون دوم: $7 + 10 + 15 = 32$



چون A ماتریس قطری است، پس تمام درایه‌های خارج قطر اصلی صفر است. پس باید هر جا $i \neq j$ باشد، درایه‌ها صفر شود. بنابراین:

$$\frac{x^f - 13x^2 + 36}{x^2 + x - 6} = 0 \Rightarrow x^f - 13x^2 + 36 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$$

پس $x = \pm 2$ و $x = \pm 3$. همچنین ریشه‌های مخرج نباید در جواب‌ها باشد. اگر $x^2 + x - 6 = 0$ باشد، $x = 2$ و $x = -3$ است؛ پس فقط $x = 3$ و $x = -2$ قابل قبول است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

در حالت $i = j$ داریم:

$$a_{ij} = \frac{x_i}{j(x+2)}$$

چون $i = j$ ، پس تمام درایه‌های قطر اصلی به صورت $\frac{x}{x+2}$ می‌شود که در این صورت $x = -2$ نیز چون مخرج را صفر می‌کند، قابل قبول نیست. پس فقط $x = 3$ قابل قبول است و داریم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا باید ماتریس‌های A و B را به دست آوریم چون:

$$2B = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & -6 \\ 7 & -8 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3/5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

پس:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 7 \\ 5/2 & -5 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 7 \\ 5/2 & -5 & 9 \end{bmatrix} - B$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 7 \\ 5/2 & -5 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3/5 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 10 \\ -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس $2A - 3I$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} 2A - 3I &= 2 \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 10 \\ -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ -8 & -2 & 20 \\ -2 & -2 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & -2 \\ -8 & -5 & 20 \\ -2 & -2 & 17 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی و قطر فرعی این ماتریس می‌شود: ۲ و -۸ و ۲۰ و -۲ که مجموع آن‌ها ۱۲ می‌شود، پس گزینه ۴ صحیح است.



چون ماتریس A و B برابر هستند، پس درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها باید برابر باشند.
تذکر: ۲ ماتریس برابر همواره هم‌مرتب‌ه هستند:

$$\forall i, j \quad a_{ij} = b_{ij} \Rightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$$

پس:

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2 + xy & 4 \\ 9 & y^2 + yx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & a^2 \\ z^2 & 21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ z^2 = 9 \Rightarrow z = \pm 3 \end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 28 \\ y^2 + yx = 21 \end{cases} \xrightarrow{+} x^2 + y^2 + 2xy = 49 \Rightarrow (x+y)^2 = 7^2 \Rightarrow x+y = \pm 7$$

پس کمترین مقدار $x + y + z + a$ زمانی رخ می‌دهد که $x, y, z, a < 0$ باشند پس:

$$\text{Min}(x + y + z + a) = -12$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

اعضای روی قطر فرعی ماتریس A ، $\cos \alpha$ و $\cos \beta - 1$ می‌باشد، پس:

$$\begin{cases} \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos \beta - 1 = 0 \Rightarrow \cos \beta = 1 \Rightarrow \beta = \dots, -2\pi, 0, 2\pi, \dots \Rightarrow \beta = 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{اگر } \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ باشد، } \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 1 & ; \text{ زوج } k \\ -1 & ; \text{ فرد } k \end{cases} \text{ است.}$$

$$A = \begin{bmatrix} \sin \alpha + 1 & 0 \\ 0 & \sin \beta - 2 \end{bmatrix} \text{ پس}$$

در ضمن اگر $\beta = 2k\pi$ باشد، پس $\sin \beta = 0$ است؛ لذا برای A ، ۲ حالت داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

پس ماتریس B برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

پس اعضای روی قطر اصلی ماتریس B می‌شود ۲ و -4 . پس حاصل ضرب آن‌ها (-8) می‌شود. لذا گزینه ۲ صحیح است.

در ذوزنقه $ABCD$ می‌دانیم: $AB \parallel DC$
 دو مثلث AMB و DMC متشابه‌اند.

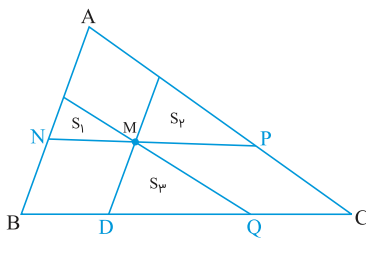
$$\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{MC} = \frac{3}{7}$$

$AM = x$ و $BM = y$ در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow \frac{x}{4+x} = \frac{y}{5+y} = \frac{3}{7} \Rightarrow \begin{cases} 7x = 12 + 3x \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3 \\ 7y = 15 + 3y \Rightarrow 4y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{4} = 3/75 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta_{AMB} \text{ محیط} = 3 + 3 + 3/75 = 9/75$$

مثلث ABC با مثلث‌های (S_1) و (S_2) و (S_3) متشابه است. همچنین چهار ضلعی‌های $BDMN$ و $CPMQ$ متوازی‌الاضلاع هستند و داریم:



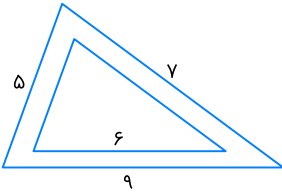
$$\left. \begin{aligned} (S_1) \sim \Delta ABC &\Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S_{ABC}}} = \frac{MN}{BC} = \frac{BD}{BC} \\ (S_2) \sim \Delta ABC &\Rightarrow \sqrt{\frac{S_2}{S_{ABC}}} = \frac{PM}{BC} = \frac{CQ}{BC} \\ (S_3) \sim \Delta ABC &\Rightarrow \sqrt{\frac{S_3}{S_{ABC}}} = \frac{DQ}{BC} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{72}} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{72}} = \frac{BD + CQ + DQ}{BC} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_1} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{S_1} = \sqrt{2} \Rightarrow S_1 = 2$$



طبق توضیحات صورت سؤال، شکلی به صورت زیر رسم می‌کنیم:



چون اضلاع دو مثلث موازی یکدیگرند، پس دو مثلث متشابه هستند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن‌ها است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ تر}}{\text{مساحت مثلث کوچک تر}} = \frac{S}{S'} = \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

نسبت مساحت محدود به این دو مثلث به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S - S'}{S'} = \frac{S}{S'} - \frac{S'}{S'} = \frac{S}{S'} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1/25$$

$$\text{نسبت مساحت‌ها کوچک به بزرگ} = k^2 = \frac{49}{128} \Rightarrow k = \frac{7}{8\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ضلع مثلث کوچک‌تر}}{\text{ضلع مثلث بزرگ‌تر}} = \frac{7}{8\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{21}{x} = \frac{7}{8\sqrt{2}} \Rightarrow x = 24\sqrt{2}$$

$$\triangle ABC \text{ در تالس در } \frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle ACG \text{ در تالس در } \frac{CE}{AC} = \frac{EF}{AG} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{6}{AG} \Rightarrow AG = 9$$

طبق نکات کتاب درسی داریم:

$$\begin{cases} AB^2 = AH \cdot AC & (1) \\ BH^2 = AH \cdot CH & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق (1)}} AB^2 = 2 \times 5 \Rightarrow AB = \sqrt{10}$$

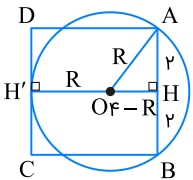
$$\xrightarrow{\text{طبق (2)}} BH^2 = 2 \times (5 - 2) \Rightarrow BH^2 = 6$$

همچنین:

$$BH^2 = AB \cdot BH' \Rightarrow 6 = \sqrt{10} \times BH'$$

$$\Rightarrow BH' = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

گزینه ۲

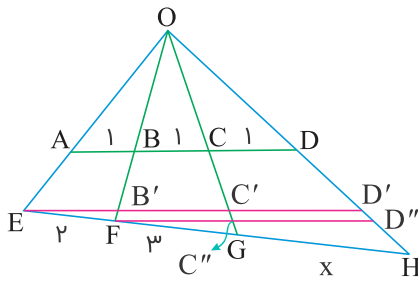
باتوجه به شکل، $OH = 4 - R$ است. داریم:

$$\triangle OAH : OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow R^2 = 2^2 + (4 - R)^2 \Rightarrow R^2 = 4 + 16 - 8R + R^2$$

$$\Rightarrow 8R = 20 \Rightarrow R = 2/5$$



از E و F دو خط موازی AD رسم می‌کنیم:

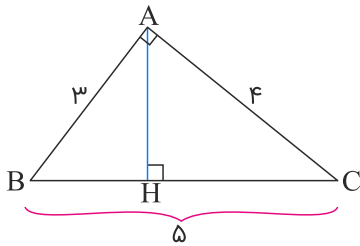


$$\frac{B'E}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} \Rightarrow \frac{B'E}{1} = \frac{B'C'}{1} = \frac{C'D'}{1} \Rightarrow B'E = B'C' = C'D'$$

$$\frac{B'C'}{FC''} = \frac{C'D'}{C''D''} \xrightarrow{B'C'=C'D'} FC'' = C''D''$$

$$\triangle GEC' : FC'' \parallel EC' \Rightarrow \frac{FC''}{EC'} = \frac{GF}{GE} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{FD''}{\frac{2}{3}ED'} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{FD''}{ED'} = \frac{4}{5}$$

$$\triangle EHD' : FD'' \parallel ED' \Rightarrow \frac{FD''}{ED'} = \frac{FH}{EH} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{x+3}{x+5} \Rightarrow 4x+20 = 5x+15 \Rightarrow x=5$$



در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AB \times AC = BC \times AH$$

پس:

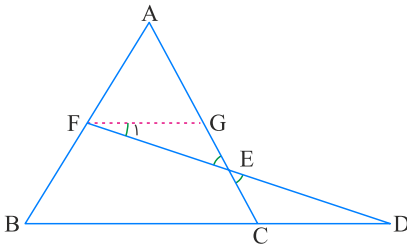
$$3 \times 4 = 5 \times AH$$

$$AH = \frac{12}{5} \text{ بنابراین}$$

می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌های نظیر با نسبت تشابه برابر است، پس داریم:

$$k = \text{نسبت ارتفاع‌ها} = \frac{12}{5} = \frac{1}{5}$$

از خط FG موازی BD رسم می‌کنیم.



قرار دهیم: $CE = x \Rightarrow AE = 5x, AC = 6x$

$FG \parallel BC \Rightarrow AG = CG = 3x, GE = 2x$

$FG \parallel BD \Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{D}$
 \hat{E} متقابل به رأس $\left. \vphantom{\hat{E}} \right\} \Rightarrow \triangle FGE \sim \triangle ECD$

نسبت تشابه: $\frac{CE}{GE} = \frac{CD}{FG}$

$$\Rightarrow \frac{x}{2x} = \frac{6}{FG} \Rightarrow FG = 12$$

تالس: $\frac{AG}{AC} = \frac{FG}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{12}{BC} \Rightarrow BC = 24$



$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 2 = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 3 \Rightarrow y + 3 = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{y+3} = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$$

$$\xrightarrow{x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < 0} \sqrt{y+3} = -\left(\frac{1}{x} - 1\right) \Rightarrow -\sqrt{y+3} + 1 = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{-\sqrt{y+3} + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{-\sqrt{x+3} + 1}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -1, c = 3, d = 1 \Rightarrow ab - cd = -4$$

$$[x^2 - 1] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 1 < 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

ضابطه $f(x)$ را داریم. باتوجه به آن حاصل $f(2x - 3)$ را به دست می‌آوریم؛ سپس تابع $g(x)$ را تشکیل داده و با استفاده از ویژگی‌های جزء صحیح، برد آن را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) &= x - [x] \Rightarrow f(2x - 3) = 2x - 3 - [2x - 3] \\ \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{[x+k]=[x]+k} f(2x - 3) &= 2x - 3 - [2x] + 3 = 2x - [2x] \\ g(x) &= f(2x - 3) - 2f(x) = 2x - [2x] - 2(x - [x]) \\ &= 2x - [2x] - 2x + 2[x] = 2[x] - [2x] \end{aligned}$$

از ویژگی‌های جزء صحیح به خاطر داشته باشید: $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$
بنابراین تابع $g(x)$ برابر است با:

$$g(x) = 2[x] - [x] - [x + \frac{1}{2}] = [x] - [x + \frac{1}{2}]$$

قسمت اعشاری عدد x را با p نشان می‌دهیم. باتوجه به مقدار p ، دو حالت برای $g(x)$ اتفاق می‌افتد:

$$g(x) = [x] - [x + \frac{1}{2}] = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq p < \frac{1}{2} \\ -1 & ; \frac{1}{2} \leq p < 1 \end{cases}$$

بنابراین برد تابع $g(x)$ برابر $\{-1, 0\}$ می‌شود.

در مورد تقاطع f^{-1} و $y = x$ سؤال شده است. کافی است خود f را با $y = x$ تلاقی دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{2x - 1}{x - 2} = x &\Rightarrow x^2 - 2x = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \\ \Rightarrow \Delta &= 16 - 4 > 0 \end{aligned}$$

دو ریشه دارد.

در تابع مفروض کافی است که سه جمله‌ای زیر رادیکال مثبت باشد.

$$2x - x^2 + 3 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$$

پس دامنه تابع بازه $(-1, 3)$ است.

اول: یک بار x را برابر (۱) و یک بار برابر (-1) می‌گذاریم:

$$2f(x+2) - xf(2-x) = 2x^2 + 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 2f(3) - f(1) = 2 + 1 = 3$$

$$x = -1 \Rightarrow 2f(1) + f(3) = 2 + 1 = 3$$

دوم: با حل دستگاه زیر مقدار $f(3)$ را به دست می‌آوریم:

$$\times 2 \begin{cases} 2f(3) - f(1) = 3 \\ 2f(1) + f(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4f(3) - 2f(1) = 6 \\ 2f(1) + f(3) = 3 \end{cases}$$

طرفین معادلات فوق را باهم جمع می‌کنیم.

$$5f(3) = 6 + 3 = 9 \Rightarrow f(3) = \frac{9}{5}$$

ضابطه وارون تابع خطی $f(x) = ax + b$ را می‌نویسیم:

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \Rightarrow \text{عوض کردن جای } y \text{ و } x \Rightarrow y = \frac{x-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

دو تساوی داده شده را با f و f^{-1} به دست آمده می‌نویسیم: (از $f(0) \neq 0$ نتیجه می‌گیریم $b \neq 0$)

$$f^{-1}(0) = f(0) \Rightarrow \frac{-b}{a} = b \xrightarrow{\times \frac{1}{b}} \frac{-1}{a} = 1 \Rightarrow a = -1$$

تا این جا داریم: $f^{-1}(x) = f(x) = -x + b$

$$f^{-1}(2) = 7 \Rightarrow -2 + b = 7 \Rightarrow b = 9$$

$$\Rightarrow f(x) = -x + 9 \Rightarrow f(4) = -4 + 9 = 5$$

بیشترین مقدار a طول رأس سهمی است پس $a = -\frac{1}{p}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+a) - ax + 2 & ; x \geq -a \\ -2(x+a) - ax + 2 & ; x < -a \end{cases} = \begin{cases} (2-a)x + 2a + 2 & ; x \geq -a \\ (-2-a)x - 2a + 2 & ; x < -a \end{cases}$$

اگر یکی از شیب‌های خط‌های دو ضابطه بالا منفی و دیگری مثبت باشد آنگاه تابع یک‌به‌یک نخواهد بود چون نمودار به صورت \vee یا \wedge می‌شود؛ پس شیب دو خط ضابطه‌های f هم‌علامت هستند.

$$\Rightarrow (2-a)(-2-a) > 0 \Rightarrow (a-2)(a+2) > 0 \Rightarrow a^2 > 4 \Rightarrow |a| > 2$$

به دلیل وجود $[x] + [-x]$ در معادله در دو حالت $x \in \mathbb{Z}$ و $x \notin \mathbb{Z}$ معادله را حل می‌کنیم.

$$x \in \mathbb{Z} : [x] + [-x] = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

جواب‌های به‌دست‌آمده باید صحیح باشند، پس $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ قابل قبول نیستند.

$$x \notin \mathbb{Z} : [x] + [-x] = -1 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{3+(-1)+(-2)=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

در این مرحله باید جواب‌ها غیر صحیح باشند پس تنها $x = -\frac{2}{3}$ قابل قبول است.

چون $x \notin \mathbb{Z}$ است، نتیجه می‌گیریم که x عددی صحیح نمی‌باشد (یعنی $x \notin \mathbb{Z}$). حال برای تعیین برد تابع f ، ابتدا از عدد ۳ فاکتورگیری کرده و به راحتی شکل $u - [u]$ را در ضابطه f می‌سازیم. عبارت $u - [u]$ همواره در بازه $(0, 1]$ تغییر می‌کند (تابع جزء اعشاری). زمانی $u - [u]$ برابر صفر می‌شود که $u = x^2$ عددی صحیح شود. دقت کنید می‌توانیم عدد غیر صحیحی را به توان ۲ برسانیم و $u = x^2$ مقدار صحیحی به خود بگیرد (به عنوان مثال $x = \sqrt{2}$ ، عبارت $u = x^2$ را صحیح می‌کند). پس عبارت $[x^2] - x^2$ کل بازه $(0, 1]$ را می‌تواند به خود اختصاص دهد، پس داریم:

$$f(x) = 3x^2 - 3[x^2] = 3(x^2 - [x^2])$$

$$0 \leq x^2 - [x^2] < 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq f(x) < 3 \Rightarrow R_f = [0, 3)$$

پس برد تابع f شامل سه عدد صحیح ۰، ۱، ۲ است.

اول: عبارت $-x^2 + 4x + 12$ را کمی ساده می‌کنیم:

$$-x^2 + 4x + 12 = -(x^2 - 4x - 12) = -\underbrace{(x^2 - 4x + 4 - 16)}_{(x-2)^2}$$

$$= -((x-2)^2 - 16) = -(x-2)^2 + 16$$

$$f(x) = \sqrt{-(x-2)^2 + 16} \xrightarrow{x=2+\sqrt{y}} f(2+\sqrt{y}) = \sqrt{-(2+\sqrt{y}-2)^2 + 16}$$

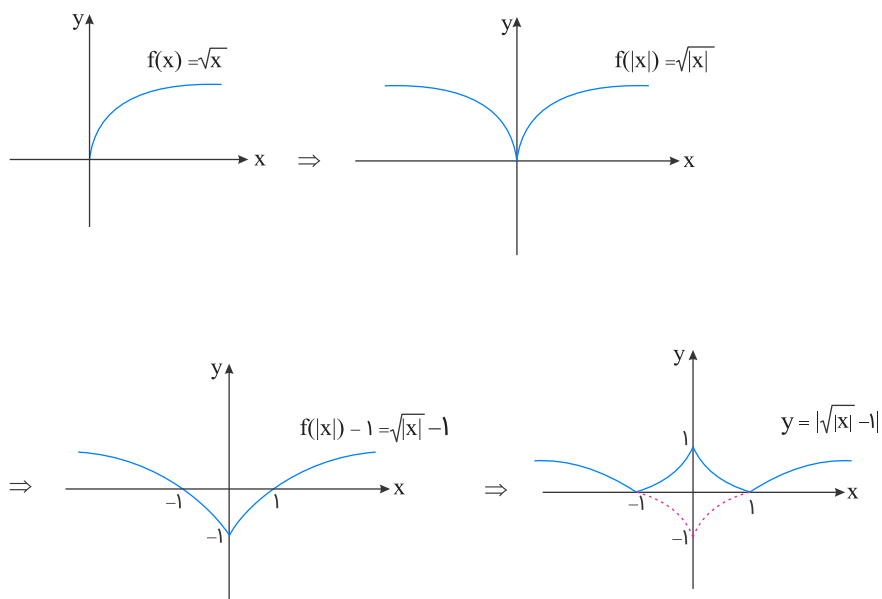
$$= \sqrt{-(\sqrt{y})^2 + 16} = \sqrt{-y + 16} = \sqrt{9} = 3$$

برای پیدا کردن $f(2)$ در ضابطه $f(x)$ به جای x ، عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

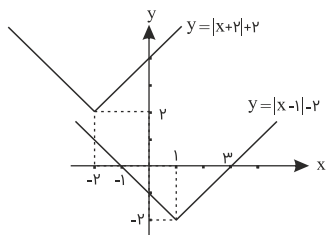
$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12} \xrightarrow{x=2} f(2) = \sqrt{-4 + 8 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$f(2+\sqrt{y}) - f(2) = 3 - 4 = -1$$

ابتدا تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم. داریم:



$$f(x) = |x - 1| - 2 \xrightarrow{\text{سه واحد انتقال به چپ}} |x + 3 - 1| - 2 = |x + 2| - 2 \xrightarrow{\text{چهار واحد انتقال به بالا}} |x + 2| + 2$$



همانطور که از شکل مشخص است، این دو نمودار در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



راه حل اول:

نمودار تابع $f(x)$ را ابتدا سه واحد به سمت چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(3 - x)$ حاصل شود:

شکل

نمودار حاصل، سمت منفی محور x ها را در نقطه‌ای به طول $3 -$ قطع می‌کند.

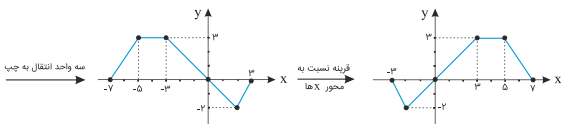
راه حل دوم:

$y = f(3 - x)$ نمودار $f(x)$ را 3 واحد به سمت چپ برده و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کند. از آنجا که $f(3 - x)$ فقط تغییرات روی محور x ها است، کافی است تغییرات (انتقال) را روی نقاط با عرض صفر بررسی کنیم:

$$x = 6 \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} x = 3 \xrightarrow{\text{قرینه}} x = -3$$

$$x = 3 \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} x = 0 \xrightarrow{\text{قرینه}} x = 0$$

$$x = -4 \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} x = -7 \xrightarrow{\text{قرینه}} x = 7$$



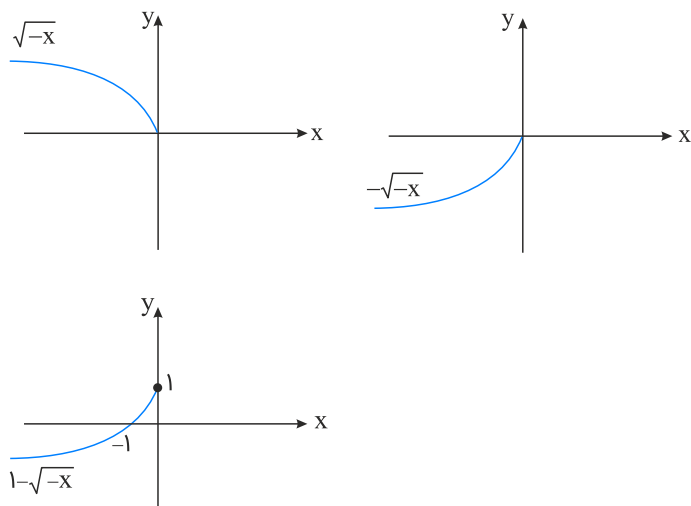
$$y = f(x) - 1 \xrightarrow{(3, b-1)} b - 1 = f(3) - 1 \Rightarrow f(3) = b$$

$$\frac{1-x}{3} = 3 \Rightarrow 1-x = 9 \Rightarrow x = -8 \Rightarrow g(-8) = f(3) = b$$

$$\Rightarrow g(-8) = b \Rightarrow (-8, b) \in g$$

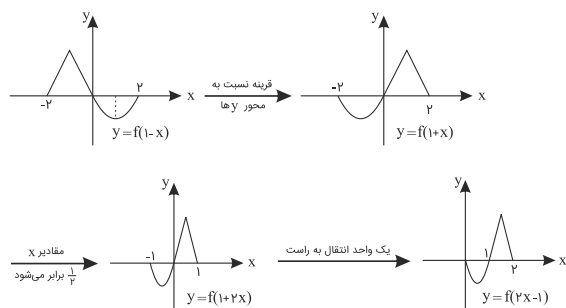


دامنه f^{-1} همان برد f است. برای پیدا کردن برد f ، نمودار آن را رسم می‌کنیم:

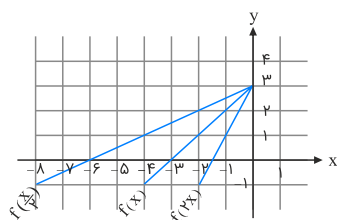


مطابق شکل، برد تابع $y = 1 - \sqrt{-x}$ برابر با $(-\infty, 1]$ است.

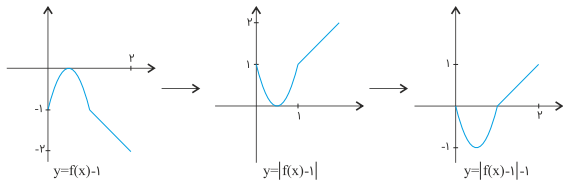
$y = f(1 - x)$ $\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}}$ $y = f(1 + x)$ $\xrightarrow{\text{طول نقاط تقسیم بر دو}}$ $y = f(1 + 2x)$
 $\xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به راست}}$ $y = f(1 + 2(x - 1)) = f(2x - 1)$



برای رسم $f(2x)$ باید دامنه را $\frac{1}{2}$ برابر و برای رسم $f(\frac{x}{2})$ باید دامنه را ۲ برابر کنیم.



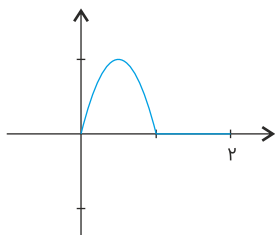
در گزینه‌های ۱ و ۳، عملیات انجام شده مربوط به تغییرات دامنه است و برد تابع تغییری نمی‌کند. در گزینه ۲، ابتدا نمودار f را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، سپس قسمت‌های زیر محور x را به سمت بالا قرینه می‌کنیم و در آخر، نمودار را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم:



پس برد در گزینه ۲ نیز همان بازه $[-1, 1]$ می‌ماند.
در گزینه ۴:

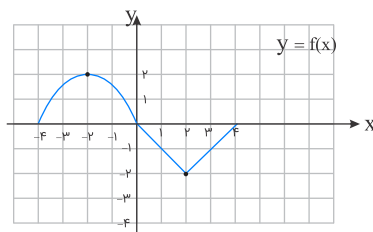
$$y = \frac{1}{\psi}(f(x) + |f(x)|) = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ 0 & ; f(x) \leq 0 \end{cases}$$

شکل تابع به صورت زیر است:

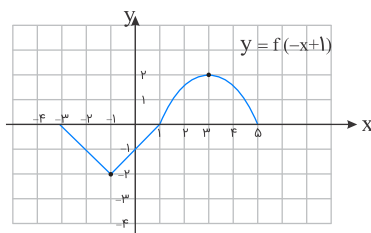


که برد آن بازه $[0, 1]$ است، پس گزینه ۴ درست است.

نمودار رسم شده مربوط به $y = f\left(\frac{x}{\psi}\right)$ است. برای رسم تابع $f(x)$ کافی است طول نقاط را نصف کنیم.



برای رسم $y = f(-x+1)$ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

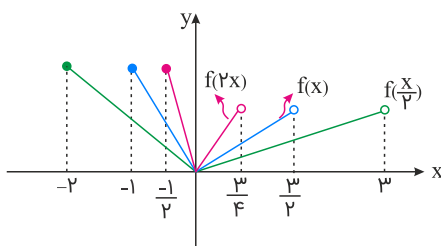


باتوجه به شکل، تابع $y = f(-x+1)$ در بازه $[-1, 3]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

اگر نمودار را تکمیل کنیم به شکل زیر می‌رسیم.

پس دامنه تابع $f(x)$ برابر $\left[-1, \frac{3}{\psi}\right]$ است. می‌دانیم نمودار $y = f(\psi x)$ ، ψ برابر نسبت

به $f(x)$ جمع‌تر می‌شود. پس دامنه آن برابر است با: $\left[-\frac{1}{\psi}, \frac{1}{\psi}\right]$



برای رسم این نمودار، نقاط مشخص شده نمودار f را یک واحد به سمت چپ برده و سپس طول آن‌ها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم؛ درواقع اگر $A(x_0, y_0)$ یک نقطه از f باشد، آنگاه $A'(\frac{x_0-1}{2}, y_0)$ نقطه متناظر آن روی نمودار g است. پس با انتقال نقطه $(5, 0)$ به جواب سوال می‌رسیم:

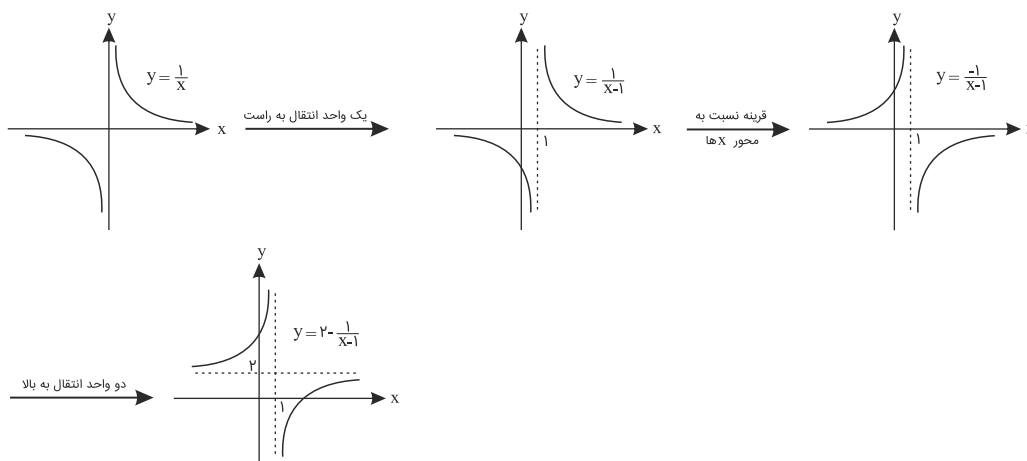
$$A(5, 0) \Rightarrow A'(\frac{5-1}{2}, 0) \Rightarrow A'(2, 0)$$

اگر نقطه $A(x_0, y_0)$ روی تابع $y = g(x)$ قرار گیرد یعنی $g(x_0) = y_0$ ، آنگاه نقطه $A(\frac{x_0-1}{2}, y_0)$ روی تابع $f(x) = g(2x+1)$ قرار می‌گیرد، چون:

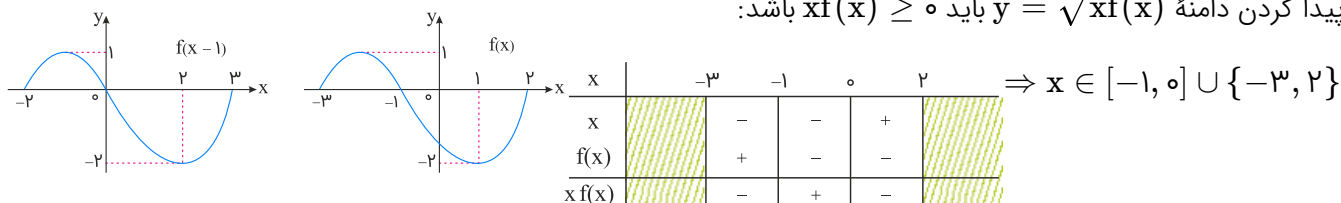
$$y_0 = g(2(\frac{x_0-1}{2}) + 1) = g(x_0)$$

چون نقطه $(2, 5)$ روی $g(x)$ قرار دارد، پس نقطه $(\frac{2-1}{2}, 5)$ روی تابع $g(2x+1)$ قرار می‌گیرد، در نتیجه جواب مسئله $(\frac{1}{2}, 5)$ است.

$$y = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2x-2-1}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}$$



سعی می‌کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کنیم؛ برای پیدا کردن دامنه $\sqrt{xf(x)}$ باید $y = \sqrt{xf(x)} \geq 0$ باشد:



$$y = f(x + ۴) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}]{x \rightarrow -x} y = f(۴ - x)$$

$$x = -۳ \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}]{x \rightarrow -x} x = ۳$$

$$g(x) = ۲ + ۲f(۳ - x) \Rightarrow f(۳ - x) = \frac{g(x) - ۲}{۲}$$

به سادگی دیده می‌شود اگر تابع g ، ۲ واحد به پایین انتقال یابد، در نقاط $x = ۴$ و $x = ۱$ محور طول‌ها را قطع می‌کند و تابع $\frac{g(x) - ۲}{۲}$ نیز در همین نقاط، صفر می‌شود، پس:

$$x = ۴ \Rightarrow f(۳ - x) = \frac{g(x) - ۲}{۲} \Rightarrow f(۳ - ۴) = ۰ \Rightarrow f(-۱) = ۰$$

$$x = ۱ \Rightarrow f(۳ - x) = \frac{g(x) - ۲}{۲} \Rightarrow f(۲) = ۰$$

در نتیجه ریشه‌های f دو عدد -۱ و ۲ هستند، پس گزینه ۲ درست است.

$$y = \sqrt{۴ - (x - k + ۲)} + k = \sqrt{-x + k + ۲} + k$$

$$A(۱, ۱) \in y \Rightarrow \sqrt{۱ + k} + k = ۱ \Rightarrow k = ۰$$

$$g(x) = y - ۱ \Rightarrow \sqrt{-x + ۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

بهرتر بود که جهت حرکت را اعلام می‌کرد.

$$D_y = D_{f(x)} \quad , \quad -۳ \leq x < ۷$$

$$\Rightarrow \frac{-۱}{۲} \leq \frac{x}{۲} + ۱ < \frac{۹}{۲} \Rightarrow D_f = \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۹}{۲}\right)$$

