www.alirezaafshar.org

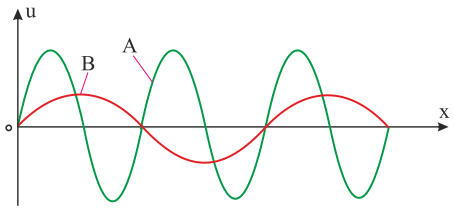
۱ در یک ساعت عقربه‌ای، طول عقربهٔ ساعت‌شمار $۶\ cm$ و طول عقربهٔ دقیقه‌شمار $۹\ cm$ است. تندی نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار چندبرابر تندی نوک عقربهٔ ساعت‌شمار است؟

۱) ۱۲
۲) ۲۴
۳) ۳۶
۴) ۱۸

۲ معادلهٔ تکانهٔ جسمی به جرم ۰/۵ کیلوگرم در SI به‌صورت $p = t^۲ - ۱۰t + ۲۰$ است. نیروی متوسط وارد بر جسم در بازه $t_۱ = ۵\ s$ تا $t_۲ = ۷\ s$ چند نیوتن است؟

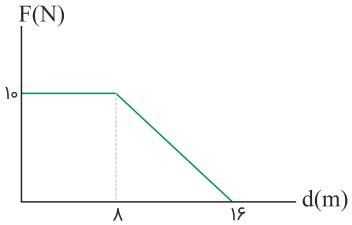
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳ مطابق شکل زیر، دو موج مکانیکی A و B در یک محیط منتشر می‌شوند. دوره و سرعت انتشار موج A به ترتیب چندبرابر دوره و سرعت انتشار موج B است؟



۱) ۲ و ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$ و ۱
۳) ۲ و $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۲}$ و ۲

۴ نمودار نیرو- مکان جسمی به جرم $۵kg$ که از حالت سکون شروع به حرکت کرده، مطابق شکل است. تکانهٔ جسم پس از $۱۶m$ جابه‌جایی چند کیلوگرم متر بر ثانیه است؟



۱) $۳۰\sqrt{۲}$
۲) ۴۸
۳) ۱۲۰
۴) $۲۰\sqrt{۳}$

۵ آسانسوری با شتاب ثابت و به‌صورت کندشونده به‌سمت پایین حرکت می‌کند. اگر شخصی به جرم $۸۰\,kg$ درون آسانسور ایستاده باشد و بعد از ۱۰ ثانیه سرعت آسانسور از $۵\,m/s$ به صفر برسد، نیرویی که کف آسانسور به شخص وارد می‌کند چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\,m/s^۲)$

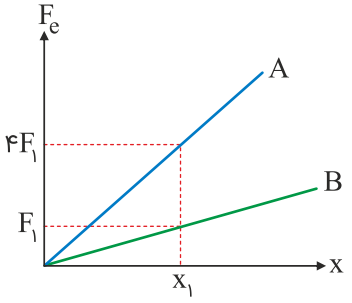
۱) $۸۰۰\,N$

۲) $۷۶۰\,N$

۳) $۸۴۰\,N$

۴) $۸۸۰\,N$

۶ نمودار نیروی کشسانی برحسب تغییر طول، برای دو فنر A و B کشیده شده و طول اولیهٔ هر دو فنر $۲۰\,cm$ است. اگر به فنر A جسمی به جرم $۵۰۰\,g$ و به فنر B جسمی به جرم m وصل کنیم، طول دو فنر یکسان می‌شود. m چند گرم است؟ $(g = ۱۰\,m/s^۲)$



۱) ۸۰

۲) ۱۵۰

۳) ۱۲۵

۴) ۱۷۵

۷ شخصی به وزن $۶۰۰N$ درون آسانسوری، روی یک ترازوی فنری ایستاده است و ترازو عدد $۴۸۰N$ را نشان می دهد. شتاب آسانسور چند متر بر مجذور ثانیه و به کدام جهت است؟ $(g = ۱۰m/s^۲)$

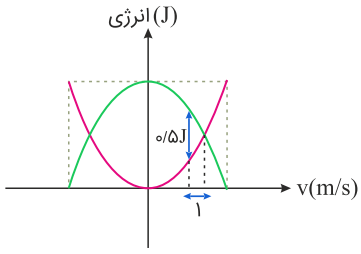
۱) ۲، پایین

۲) ۲، بالا

۳) $\frac{۱}{۲}$، پایین

۴) $\frac{۱}{۲}$، بالا

۸ نمودار انرژی‌های پتانسیل و جنبشی نوسانگری به جرم $۱۰۰\,g$ برحسب سرعت آن، مطابق شکل زیر است. بیشینهٔ سرعت نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟



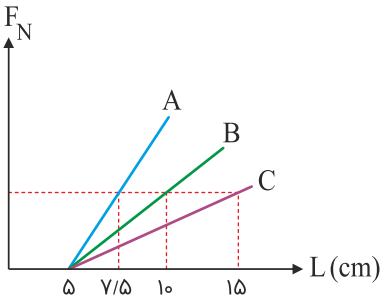
۱) $۲\sqrt{۲}$

۲) ۴

۳) $۳\sqrt{۲}$

۴) ۵

۹ نمودار نیروی وارد بر فنر برحسب طول آن برای سه فنر A و B و C به‌صورت زیر است. کدام گزینه در مورد ثابت این سه فنر درست است؟



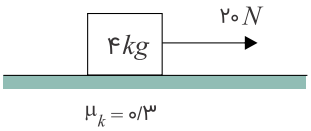
۱) $k_B = \frac{۱}{۲}k_C = ۲k_A$

۲) $k_A = ۲k_B = \frac{۱}{۲}k_C$

۳) $k_C = \frac{۱}{۲}k_B = \frac{۱}{۸}k_A$

۴) $k_B = \frac{۱}{۲}k_A = ۲k_C$

۱۰ در شکل مقابل، جسم از حال سکون، در مسیر افقی و در لحظهٔ $t = ۰$ تحت نیروی ثابت به حرکت درمی آید و بعد از ۳ ثانیه نخ بسته‌شده به جسم پاره می شود. کل مسافتی که جسم از شروع حرکت تا لحظهٔ ایستادن طی می کند، چند متر است؟ ($g = ۱۰m/s^۲$)



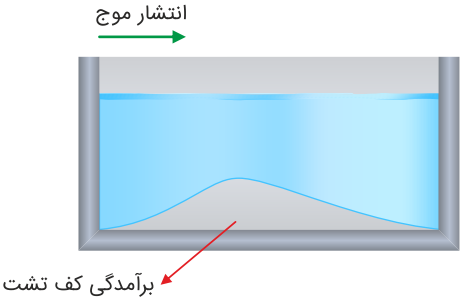
۱) ۹

۲) ۱۲

۳) ۱۵

۴) ۱۸

۱۱ مطابق شکل زیر موجی عرضی روی سطح آب کم‌عمق از چپ به راست در حال انتشار است. طول موج از چپ به راست چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ثابت می‌ماند.

۲) کاهش می‌یابد.

۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۴) ابتدا کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد.

۱۲ معادلهٔ حرکت نوسانگر ساده‌ای به جرم ۲۰ گرم در SI، به‌صورت $x = ۰/۰۴ \sin ۲۰۰t$ است. در لحظه‌ای که این نوسانگر از مکان $x = +۱\,cm$ می‌گذرد، انرژی مکانیکی آن چند ژول است؟

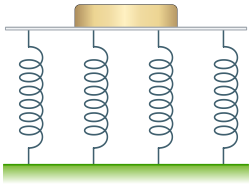
۱) ۰/۰۴

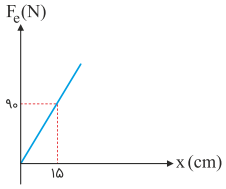
۲) ۰/۱۶

۳) ۶۶

۴) ۰/۶۴

۱۳ مطابق شکل چهار فنر کاملاً مشابه زیر صفحه‌ای فلزی به جرم $۲\,kg$ قرار دارند و وزنه‌ای به جرم $۴\,kg$ روی صفحه قرار گرفته و مجموعه کاملاً ساکن است. (سنگینی وزنه و کفه به‌طور یکنواخت روی فنرها توزیع می‌شود) تغییر طول هرکدام از فنرها چند سانتی‌متر بوده است؟ (نمودار نیروی فنر برحسب تغییر طول مربوط به هر یک از فنرها می‌باشد و $g = ۱۰\,N/kg$)





۱) ۲۰

۲) ۱۰

۳) ۲/۵

۴) ۵

۱۴ دو متحرک A و B هر کدام با تندی ثابت روی مسیرهای دایره ای حرکت یکنواخت انجام می‌دهند و شعاع مسیر متحرک A دو برابر شعاع مسیر متحرک B است. اگر دورهٔ متحرک A نصف دورهٔ متحرک B باشد، شتاب مرکزگرای A چندبرابر شتاب مرکزگرای B است؟

۱) ۴

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۳

۴) ۸

۱۵ شخصی درون یک آسانسور قرار دارد. اندازهٔ شتاب حرکت تندشونده و حرکت کند شوندهٔ این آسانسور برابراست. اگر در طی حرکت آسانسور، بیشینه نیرویی که شخص بر کف آسانسور وارد می‌کند، ۳ برابر کمینه نیرویی باشد که شخص بر کف آسانسور وارد می‌کند، کمینه نیرویی که شخص بر کف آسانسور وارد می‌کند، چندبرابر وزن شخص است؟

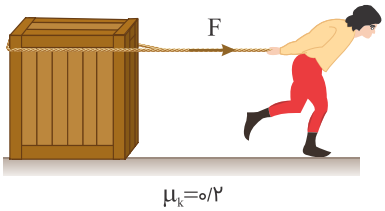
۱) ۰/۴

۲) ۰/۵

۳) ۰/۶

۴) ۰/۷

۱۶ مطابق شکل زیر شخصی نیروی افقی $F = ۸۰\,N$ را بر جسمی به جرم $۲۰\,kg$ وارد می‌کند و آن را از حال سکون بر روی سطح افقی به حرکت درمی‌آورد. توان متوسط شخص پس از گذشت $۱/۵\,s$ از شروع حرکت چند وات است؟ ($\mu_k = ۰/۲$ و $g = ۱۰\,N/kg$)



۱) ۱۲۰

۲) ۲۴۰

۳) ۱۶۰

۴) ۸۰

۱۷ در یک تصادف اتومبیل، سرعت اتومبیل از $۵۴\,km/h$ به صفر می رسد و زمان این حرکت کندشونده $۰/۳\,s$ است. در این تصادف، برای اینکه مسافری به جرم $۶۰\,kg$ از پشتی صندلی جدا نشود (به جلو پرت نشود)، بزرگی نیروی متوسطی که کمربند ایمنی باید بر او وارد کند، تقریباً چند نیوتون است؟

۱) ۳۶۰۰

۲) ۳۰۰۰

۳) ۶۰۰۰

۴) ۶۳۰۰

www.alirezaafshar.org

۱۸ کدام کمیت مربوط به موج رادیویی باند AM در مقایسه با امواج رادیویی باند FM بیشتر است؟

۱) طول موج
۲) بسامد
۳) سرعت انتشار در خلأ
۴) کوانتوم انرژی

۱۹ فنری به ضریب سختی $k = ۱۰۰\,N/m$ از سقف اتاقی به ارتفاع ۲/۵ متر آویزان است. در این حالت طول فنر ۹۰ سانتی‌متر است. اکنون اگر جسمی به جرم m را از فنر بیاویزیم و سپس رهایش کنیم تا به نوسان دربیاید، کمترین ارتفاع آن از زمین ۱/۵ متر می‌شود. m چند کیلوگرم است؟ $(g = ۱۰\,m/s^۲)$

۱) ۰/۵
۲) ۰/۷۵
۳) ۰/۲۵
۴) ۱

۲۰ در مجموعهٔ زیر، بسته از حالت سکون با شتاب $۱۰\,m/s^۲$ شروع به حرکت می‌کند. طی ۱۵ متر جابه‌جایی این بسته، کار انجام‌شده توسط نیروی عکس‌العمل سطح چند ژول است؟ $(g = ۱۰\,N/kg)$

۱) ۱۲۰
۲) -۱۲۰
۳) -۱۸۰
۴) صفر

۲۱ بر اساس سازگاری یکاها، در کدام گزینه یکاها نادرست انتخاب شده‌اند؟

۱) $\rho = \frac{m^{\nearrow g}}{V_{\searrow cm^۳}} \rightarrow \frac{kg}{m^۳}$
۲) $\rho = \frac{m^{\nearrow g}}{V_{\searrow cc}} \rightarrow \frac{g}{cm^۳}$
۳) $W = F_{\downarrow N} \cdot d^{\nearrow m} \rightarrow J$
۴) $P = \frac{F^{\nearrow N}}{A_{\searrow m^۲}} \rightarrow Pa$

۲۲ با استفاده از دو فلز طلا و نقره، قطعه آلیاژی به جرم $۲۰۴\,g$ و حجم $۱۵\,cm^۳$ ساخته‌ایم. اگر چگالی طلا و نقره به ترتیب $۱۹ \times ۱۰^۳\,kg/m^۳$ و $۱۰ \times ۱۰^۳\,kg/m^۳$ باشد، چند درصد حجم این قطعهٔ آلیاژ از نقره ساخته شده است؟ (درون قطعهٔ آلیاژ حفره‌ای وجود ندارد)

۱) ۶
۲) ۹
۳) ۴۰
۴) ۶۰

۲۳ $۲۰۰\,g$ از مایع A به همراه $۳۰۰\,g$ از مایع B، ظرفی را پر می‌کند. اگر $۳۰۰\,g$ از مایع B به همراه $۴۰۰\,g$ از مایع C این ظرف را پر کند، $\frac{\rho_A}{\rho_C}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۱

www.alirezaafshar.org

۲۴ مکعبی فلزی به جرم ۱/۴ کیلوگرم را درون ظرف پر از آبی می‌اندازیم و درنتیجه $۲۰۰\,\mathrm{cm}^۳$ آب از ظرف بیرون می‌ریزد. اگر مکعب دارای حفره‌ای داخلی به حجم $۲۵\,\mathrm{cm}^۳$ باشد، چگالی فلز چند واحد SI است؟

۱) ۸۰۰۰ ۲) ۸۰۰

۳) ۱۶۰۰ ۴) ۱۶۰

۲۵ طول چهار جسم توسط چهار دانش‌آموز به‌صورت گزینه‌های زیر اندازه‌گیری شده است. دقت کدام دانش‌آموز از همه کمتر بوده است؟ (دانش‌آموزان فراموش کردند که خطای اندازه‌گیری خود را اعلام کنند.)

۱) $۵۴/۱۹\,\mathrm{dm}$ ۲) $۰/۳۶\,\mathrm{m}$

۳) $۲۳\,\mathrm{mm}$ ۴) $۷/۴\,\mathrm{cm}$

۲۶ مساحت جسمی به صورت‌های زیر اندازه‌گیری شده است. کدام اندازه‌گیری بیشترین دقت را دارد؟

۱) $۴۵۰۰\,\mathrm{cm}^۲$ ۲) $۴/۵\,\mathrm{mm}^۲$

۳) $۰/۴۵ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{Mm}^۲$ ۴) $۰/۰۴۵ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{Gm}^۲$

۲۷ چند دقیقه طول می‌کشد تا باک یک اتومبیل به ظرفیت ۶۰ لیتر با آهنگ $۱۰۰\,\mathrm{cm}^۳/\mathrm{s}$ پر شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰

۳) ۵ ۴) ۱۵

۲۸ از یک شیلنگ، آب با آهنگ $۲۰۰\,\mathrm{cm}^۳/\mathrm{s}$ خارج می‌شود. آهنگ خروج آب از این شیلنگ چند لیتر بر دقیقه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲

۳) ۲۴ ۴) ۴

۲۹ اگر در اثر انبساط، حجم مقدار معینی گاز کامل ۶۰ درصد افزایش یابد، چگالی آن چند درصد کاهش می‌یابد؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۷/۵

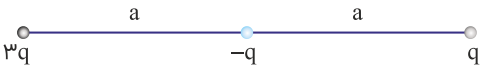
۳) ۴۰ ۴) ۴۷/۵

۳۰ اگر فاصلهٔ زمین تا خورشید را $۲ \times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{m}$ در نظر بگیریم، فاصلهٔ دو جرم آسمانی که $۲/۶ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{Tm}$ می‌باشد چند واحد نجومی (AU) است؟

۱) $۱/۳ \times ۱۰^{۶}$ ۲) $۱/۳ \times ۱۰^{۹}$

۳) $۱/۳ \times ۱۰^{۱۴}$ ۴) $۱/۳ \times ۱۰^{۱۶}$

۳۱ برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر بار نقطه‌ای q از طرف بارهای نقطه‌ای $-q$ و $3q$ برابر با F است. اگر جای بارهای $-q$ و $3q$ را باهم عوض کنیم، برآیند نیروهای وارد بر بار q چند F خواهد شد؟



۱) $\frac{3}{4}$

۲) $\frac{4}{3}$

۳) ۱۱

۴) $\frac{1}{11}$

۳۲ چند مورد از گزاره های زیر درست است؟

الف) گرده های گل به دلیل نیروی الکتریکی به زنبورهای عسل می چسبند و به نقاط دیگر منتقل می شوند.

ب) نیروی الکتریکی وارد بر بار مثبت، در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

ج) شتاب یک ذرهٔ باردار با جرم مشخص، در ناحیه ای از یک میدان غیریکنواخت بیشتر است که تراکم خطوط میدان در آن ناحیه بیشتر است.

د) تفاوت جرم ذرات معلق در گازهای خروجی کارخانجات، سبب جداشدن آن‌ها از یکدیگر در یک رسوب‌دهندهٔ الکترواستاتیکی می شود.

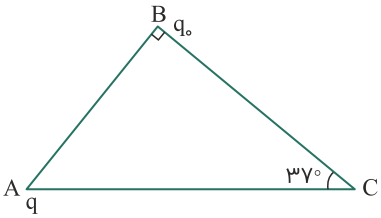
۱) ۲

۲) ۱

۳) ۳

۴) ۴

۳۳ در شکل زیر اندازهٔ نیروی الکتریکی که بار نقطه‌ای q به بار نقطه‌ای q_0 وارد می‌کند، برابر با F است. چنانچه بار نقطه‌ای q از نقطهٔ A به C منتقل شود، اندازهٔ نیروی الکتریکی که بر بار q_0 وارد می‌کند، چندبرابر F می‌شود؟ $(\sin 37^\circ = 0/6)$



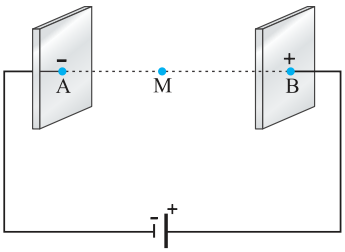
۱) $\frac{3}{4}$

۲) $\frac{3}{5}$

۳) $\frac{9}{25}$

۴) $\frac{9}{16}$

۳۴ در شکل زیر، میدان الکتریکی بین دو صفحه یکنواخت است. الکترونی از صفحهٔ منفی رها می شود و در نقطهٔ B به صفحهٔ مقابل می رسد. تندی الکترون در نقطهٔ B چند برابر تندی آن در نقطهٔ M (وسط فاصلهٔ AB) است؟



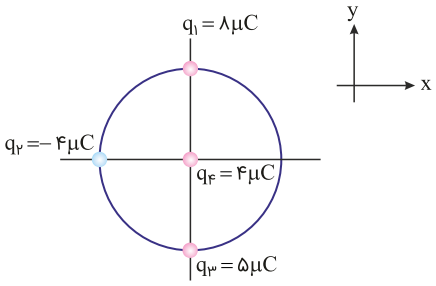
۱) $2\sqrt{2}$

۲) $\sqrt{2}$

۳) ۲

۴) ۴

۳۵ سه ذرهٔ باردار مطابق شکل بر محیط دایره‌ای به شعاع $۲۰\,cm$ ثابت شده‌اند، نیروی الکتریکی خالص وارد بر باری که در مرکز دایره قرار دارد در SI کدام است؟ $(k = ۹ \times ۱۰^۹\ N.m^۲/C^۲)$



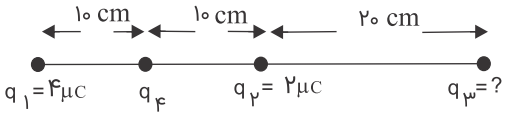
۱) $۷/۲\vec{i} - ۵/۴\vec{j}$

۲) $۳/۶\vec{i} - ۲/۷\vec{j}$

۳) $-۷/۲\vec{i} - ۵/۴\vec{j}$

۴) $-۳/۶\vec{i} - ۲/۷\vec{j}$

۳۶ در شکل، برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر بار $q_۴$ برابر صفر است. بار $q_۳$ چند میکروکولن است؟



۱) ۱۸

۲) ۸

۳) -۸

۴) -۱۸

۳۷ در شکل گلولهٔ فلزی بارداری از نخ آویزان است. کرهٔ فلزی خنثی را که دارای دستهٔ نارسانا است به گلوله نزدیک می‌کنیم. مشاهده می‌شود که گلوله ..... می‌شود وقتی تماس حاصل شد، کره را جدا می‌کنیم و دوباره به‌آرامی آن را به گلوله نزدیک می‌کنیم و ملاحظه می‌شود که گلوله ..... می‌شود.

۱) جذب - دفع

۲) دفع - جذب

۳) دفع - دفع

۴) جذب - جذب

۳۸ قسمتی از یک کرهٔ شیشه‌ای را با پارچهٔ پشمی مالش می‌دهیم. باری که در کرهٔ شیشه‌ای ایجاد می‌شود.....

۱) به زمین منتقل می‌شود.

۲) در همان قسمت داده‌شده می‌ماند.

۳) در تمام حجم کره به‌طور یکنواخت پخش می‌شود.

۴) در تمام سطح خارجی کره به‌طور یکنواخت پخش می‌شود.

۳۹ دو بار الکتریکی نقطه ای $q_۱ = ۲۰\ \mu c$ و $q_۲ = ۸\ \mu c$ در فاصلهٔ r از یکدیگر قرار دارند. چند درصد از بار الکتریکی $q_۱$ را به بار الکتریکی $q_۲$ باید منتقل کنیم تا نیروی الکتریکی که به یکدیگر وارد می کنند، بیشینه شود؟

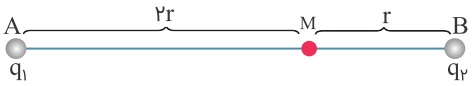
۱) ۲۸

۲) ۳۰

۳) ۷۰

۴) ۲۵

۴۰ در شکل زیر، بارهای $q_۱$ و $q_۲$ در نقاط A و B ثابت شده اند و میدان الکتریکی در نقطهٔ M برابر $\vec{E}$ است. اگر بار $q_۱$ به نقطهٔ B و بار $q_۲$ به نقطهٔ A منتقل شوند، میدان الکتریکی در نقطهٔ M برابر $۲\vec{E}$ می شود. $\frac{q_۱}{q_۲}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۴}{۳}$

۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۱ به ۲۰۰ میلی لیتر از محلول ۰/۰۲۵ مولار نمک وانادیم (V)، ۳۲۵ میلی گرم از فلز روی اضافه شده است. باتوجه‌به جدول زیر، رنگ نهایی محلول، کدام است؟ $(Zn = ۶۵ : g.mol^{-۱})$؛ واکنش در هر مرحله کامل انجام می‌شود.

$$V^{۵+}(aq) + Zn(s) \rightarrow ... + Zn^{۲+}(aq)$$

عدد اکسایش وانادیم	(V)	(IV)	(III)	(II)
رنگ محلول	زرد	آبی	سبز	بنفش

۱) بنفش

۲) آبی

۳) زرد

۴) سبز

۴۲ اگر در واکنش: $Zn(s) + ۲AgNO_۳(aq) \rightarrow Zn(NO_۳)_۲(aq) + ۲Ag(s)$ که با وارد کردن تیغهٔ فلز روی در ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار نقره نیترات انجام گرفته و کامل شده است، ۲/۴۱۶ گرم بر جرم تیغهٔ روی افزوده شده باشد، بازده درصدی واکنش (بر اساس جرم ذرات نقره جانشین شده بر سطح تیغهٔ روی)، کدام است؟ (حجم محلول ثابت فرض شود؛ $Zn = ۶۵\ ,\ Ag = ۱۰۸ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۶۰

۲) ۶۵

۳) ۸۰

۴) ۸۵

۴۳ چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) در سلول گالوانی انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.

ب) واکنش‌های اکسایش- کاهش در سلول‌های الکترولیتی غیرخودبه‌خودی هستند.

پ) واکنش‌های اکسایش- کاهش در سلول‌های گالوانی با کاهش سطح انرژی همراه هستند.

ت) E° سلول‌های گالوانی و الکترولیتی همواره عددی مثبت است.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۴۴ کدام عبارت‌ها در مورد سلول سوختی درست هستند؟

الف) نوعی سلول الکترولیتی است که شیمی‌دان‌ها برای گذر از تنگنای تأمین انرژی و کاهش آلودگی محیط‌زیست پیشنهاد می‌دهند.

ب) منبع انرژی سبز به شمار می‌روند و افزون بر کارایی بیشتر، ردپای کربن دی‌اکسید را کاهش می‌دهند.

پ) اکسایش گاز هیدروژن در این سلول بازدهی نزدیک به ۶۰ درصد دارد.

ت) مانند باتری‌ها می‌توانند انرژی شیمیایی را ذخیره کنند.

۱) الف - پ
۲) ب - پ
۳) ب - ت
۴) الف - ت

۴۵ چند مورد از عبارت‌های زیر نادرست هستند؟

الف) در باتری‌های لیتیمی از محلول آبی غلیظ لیتیم کلرید به‌عنوان الکترولیت استفاده می‌شود.

ب) سالانه از میلیاردها باتری لیتیمی درون دستگاه‌های الکترونیکی در سرتاسر جهان استفاده می‌شود.

پ) در هر تن آب دریاچهٔ قم بیش از ۲۰۰ گرم لیتیم وجود دارد.

ت) لیتیم دارای کمترین چگالی و E° بین فلزها است و همهٔ باتری‌های دگمه‌ای از نوع لیتیمی هستند.

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۱
۴) ۳

۴۶ در یک سلول سوختی از گاز متان به‌عنوان سوخت استفاده می‌شود. اگر در آند این سلول ۰/۴ مول متان اکسایش یابد، در مدار بیرونی چند مول الکترون انتقال یافته و در کاتد چند گرم اکسیژن مصرف می‌شود؟

۱) ۳/۲ مول ، ۲۵/۶ گرم
۲) ۱/۶ مول ، ۲۵/۶ گرم
۳) ۳/۲ مول ، ۱۲/۸ گرم
۴) ۱/۶ مول ، ۱۲/۸ گرم

۴۷ در سلول گالوانی روی- مس، یون ..... توانایی عبور از دیوارهٔ متخلخل را ندارد که مهم‌ترین دلیل آن ..... است.

۱) Zn^{2+}، اندازهٔ بزرگ این یون
۲) Cu^{2+}، اندازهٔ بزرگ این یون
۳) Zn^{2+}، ایجاد دافعه میان آن و کاتیون‌های محلول کاتدی
۴) Cu^{2+}، ایجاد دافعه میان آن و کاتیون‌های محلول آندی

۴۸ کدام واکنش، انجام‌ناپذیر است؟ (M: فلز اصلی، X: نافلز)

۱) $M_2O(s) + Cu(s) \xrightarrow{\Delta} CuO(s) + 2M(s)$
۲) $Mg(s) + 2HX(aq) \rightarrow MgX_2(aq) + H_2(g)$
۳) $2M(s) + 2H_2O(l) \rightarrow 2MOH(aq) + H_2(g)$
۴) $2Na(s) + X_2(g) \xrightarrow{\Delta} 2NaX(s)$

۴۹ از اتصال کدام دو نیم‌سلول زیر، سلول الکتروشیمیایی به‌وجود آمده، دارای بالاترین E° است؟

a) $Mn^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Mn(s)$ $\quad E^\circ = -1/18\,V$

b) $Zn^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Zn(s)$ $\quad E^\circ = -0/76\,V$

c) $Ni^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Ni(s)$ $\quad E^\circ = -0/25\,V$

d) $Sn^{4+}(aq) + 2e^- \rightarrow Sn^{2+}(aq)$ $\quad E^\circ = +0/15\,V$

۱) d و b
۲) c و b
۳) b و a
۴) d و a

۵۰ در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ کدام دو واکنش زیر، مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد به ترتیب بیشترین و کمترین است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید)

a) $Cr(s) + H_2SO_4(aq) \rightarrow Cr_2(SO_4)_3(aq) + SO_2(g) + H_2O(l)$
b) $Ag(s) + H_2SO_4(aq) \rightarrow Ag_2SO_4(aq) + SO_2(g) + H_2O(l)$
c) $H_3PO_4(aq) + Zn(OH)_2(s) \rightarrow Zn_3(PO_4)_2(s) + H_2O(l)$
d) $NH_3(g) + O_2(g) \rightarrow NO(g) + H_2O(l)$

۱) a , c
۲) b , d
۳) c , b
۴) d , a

۵۱ عنصر X هم‌دوره با عنصر $_{20}Ca$ و شمار الکترون لایهٔ ظرفیت آن برابر ۶ است. اگر ۵ الکترون در زیرلایهٔ $l = 2$ داشته باشد، عدد اتمی آن چند است؟

۱) ۳۲
۲) ۲۴
۳) ۲۵
۴) ۳۴

۵۲ در هر مول یون $_8O^{2-}$ چند مول الکترون وجود دارد؟

۱) ۲ مول
۲) ۴ مول
۳) ۱۰ مول
۴) ۱۲ مول

۵۳ مطابق نظریهٔ بور، انرژی و پایداری الکترون‌ها هرچه از هسته دور می‌شویم، چگونه تغییر می‌کند؟

۱) کمتر - کمتر
۲) بیشتر - کمتر
۳) کمتر - بیشتر
۴) بیشتر - بیشتر

۵۴ اگر تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها در یون $^{63}A^+$ برابر با ۶ باشد، شمار الکترون با $l = 0$ در اتم خنثی A کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

www.alirezaafshar.org

۵۵ عنصری دارای آرایش الکترونی $[{}_{18}Ar]3s^2 3p^4$ است. نام این عنصر ..... بوده و ..... زیرلایهٔ آن از الکترون پر است. اگر این عنصر دارای یک رادیوایزوتوپ باشد، احتمالاً هستهٔ آن دارای حداقل ..... نوترون است.

۱) اکسیژن ، ۴ ، ۲۴
۲) گوگرد ، ۴ ، ۲۴
۳) اکسیژن ، ۵ ، ۴۰
۴) گوگرد ، ۵ ، ۴۰

۵۶ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) اغلب هسته‌هایی که نسبت شمار پروتون‌ها به نوترون‌های آن‌ها برابر یا بیشتر از ۱/۵ باشد، ناپایدارند.

۲) درصد فراوانی ایزوتوپ ${}^{2}_{1}H$ در حد ۰/۱ درصد از کل ایزوتوپ‌های هیدروژن است.

۳) کمترین میزان پایداری در بین ایزوتوپ‌های هیدروژن متعلق به ${}^{6}_{1}H$ است.

۴) به ایزوتوپ‌های پرتوزا و ناپایدار، رادیوایزوتوپ گفته می‌شود.

۵۷ عنصر A دارای دو ایزوتوپ A_1 و A_2 است. اگر A_1 ۲۰ و به ازای هر ایزوتوپ A_1، سه ایزوتوپ A_2 در طبیعت یافت شود و عدد جرمی ایزوتوپ A_1 دو برابر عدد اتمی آن باشد و از طرف دیگر شمار نوترون ایزوتوپ A_2 از A_1، ۱۰ عدد بیشتر باشد، جرم اتمی میانگین عنصر A کدام است؟

۱) ۳۸/۷۵
۲) ۴۲/۵
۳) ۴۵/۷
۴) ۴۷/۵

۵۸ اگر در یون ${}^{56}X^{2+}$ اختلاف شمار نوترون و الکترون برابر ۶ باشد، این عنصر در چه گروهی از جدول تناوبی قرار دارد؟

۱) هفتم
۲) هشتم
۳) دوم
۴) ششم

۵۹ تعداد ایزوتوپ‌های پایدار در نمونهٔ طبیعی کدام عنصر بیشتر از سه عنصر دیگر است؟

۱) هیدروژن
۲) منیزیم
۳) کلر
۴) لیتیم

۶۰ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) نسبت حداکثر گنجایش الکترونی به تعداد زیرلایه‌ها، برای لایه‌های الکترونی ۳ و ۴ باهم برابر است.

۲) حداکثر گنجایش الکترون در زیرلایهٔ پنجم (در صورت وجود) برابر با تفاوت حداکثر گنجایش الکترون در لایهٔ چهارم و زیرلایهٔ چهارم است.

۳) در هنگام پر شدن زیرلایه‌ها از الکترون برخلاف خالی شدن، زیرلایهٔ ns نسبت به زیرلایهٔ $(n-1)d$ (در صورت وجود)، در اولویت قرار دارد.

۴) برای عنصرهایی که زیرلایهٔ در حال پر شدن آن‌ها حداکثر گنجایش ۶ الکترون را دارد، شمار الکترون‌های ظرفیت برابر با تعداد الکترون‌های زیرلایهٔ s در آخرین لایهٔ الکترونی است.

۶۱ در مقایسهٔ سیکلوهگزان و ۲-هگزن، کدام عبارت درست است؟

۱) فرمول مولکولی هر دو ترکیب یکسان است.

۲) واکنش‌پذیری سیکلوهگزان بیشتر از ۲-هگزن است.

۳) ۲-هگزن از نظر ساختار مولکولی شباهت زیادی به اتن دارد و یک ترکیب سیرشده است.

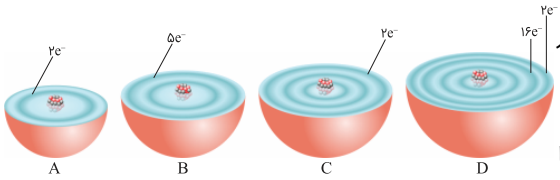
۴) در سیکلوهگزان مانند بنزن، اتم‌های کربن حلقهٔ شش‌ضلعی تشکیل می‌دهند و هر دو هیدروکربن سیرنشده‌اند.

۶۲ از سوختن ۱۷/۵ گرم یک نوع آلکن، ۸۸۱/۲۵ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. اگر آنتالپی سوختن آن برابر با ۱۴۱۰- کیلوژول بر مول باشد، فرمول شیمیایی آلکن موردنظر کدام است؟ $(C = ۱۲ \ , \ H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) $C_۲H_۴$ ۲) $C_۳H_۶$

۳) $C_۴H_۸$ ۴) $C_۵H_{۱۰}$

۶۳ هریک از شکل‌های زیر برشی از اتم یک عنصر را نشان می‌دهد. باتوجه‌به آن، کدام گزینه درست است؟



۱) روش مناسب و مقرون‌به‌صرفه برای تولید صنعتی عنصر A، تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع است.

۲) فرمول ترکیب عنصر B و C به‌صورت $C_۳B_۲$ است که در آن، یون‌ها آرایش الکترونی گاز آرگون را کسب کرده‌اند.

۳) شبکهٔ بلوری عنصر C برخلاف عنصر D شامل آرایش منظمی از کاتیون‌ها در دریایی از الکترون‌های غیرمستقر است.

۴) عنصر D در گروه دهم و دورهٔ چهارم جدول تناوبی قرار دارد. واکنش‌پذیری این عنصر از عنصر A بیشتر و از عنصر C کمتر است.

۶۴ چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

الف) اتم کربن به سه شکل می‌تواند تشکیل پیوند کووالانسی دهد.

ب) نفت خام به شکل مخلوطی از هیدروکربن‌ها است.

پ) نقش نخست نفت خام تأمین انرژی است.

ت) هیدروکربن‌های سازندهٔ نفت خام تنها به شکل راست‌زنجیر هستند.

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۶۵ اگر درصد جرمی کربن در پنتان ۵/۵۵ واحد کمتر از درصد جرمی کربن در یک آلکین باشد، فرمول مولکولی آلکین موردنظر کدام است؟ $(C = ۱۲ \ , \ H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) $C_۳H_۴$ ۲) $C_۴H_۶$

۳) $C_۵H_۸$ ۴) $C_۶H_{۱۰}$

www.alirezaafshar.org

۶۶ چند گرم پنتن را با ۲۵ گرم هپتان مخلوط کنیم تا درصد جرمی کربن در این مخلوط برابر ۸۵ شود؟ $(C = ۱۲ \ , \ H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۴
۲) ۳۰
۳) ۴۲
۴) ۳۵

۶۷ کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟

الف) معمولاً، هرچه واکنش‌پذیری فلزی بیشتر باشد، استخراج آن، دشوارتر است.

ب) واکنش‌پذیری هر عنصر، به‌معنای تمایل اتم آن به انجام واکنش شیمیایی است.

پ) در واکنش: $FeO(s)$ با $Na(s)$، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است.

ت) در واکنش: $Na_۲O(s)$ با $C(s)$، واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها از فراورده‌ها بیشتر است.

۱) الف - پ - ت
۲) ب - پ - ت
۳) الف - ب
۴) ب - ت

۶۸ کدام گزینهٔ زیر درست است؟

۱) نیتروژن همانند گوگرد و برخلاف نقره در طبیعت به شکل آزاد یافت می‌شود.

۲) فلز پلاتین را همانند طلا به شکل کلوخه‌هایی می‌توان در طبیعت یافت.

۳) فلز آهن تنها به شکل اکسید در طبیعت یافت می‌شود.

۴) بیشترین فلز مصرفی در جهان نیاز به فرآیند شناسایی و استخراج دارد.

۶۹ کدام گزینهٔ زیر درست است؟

۱) شرایط نگهداری عنصر سدیم از آلومینیم آسان‌تر است.

۲) تمایل تبدیل به حالت ترکیب مواد در عنصر سدیم بیشتر از پتاسیم است.

۳) واکنش‌پذیری فلزات قلیایی خاکی از واکنش‌پذیری فلزات قلیایی و واسطه بیشتر است.

۴) تمایل به کاتیون شدن در عنصر روی بیشتر از عنصر مس است.

۷۰ همهٔ گزینه‌های زیر درست هستند؛ به‌جز .....

۱) مواد اولیه مواد جدید ساخته‌شده اعم از سرامیک، شیشه، پلاستیک و ... را از پوستهٔ زمین به دست می‌آورند.

۲) پیشرفت صنعت الکترونیک مدیون مواد رسانا است.

۳) مواد به‌طورکلی به دو دستهٔ مواد طبیعی و ساختگی تقسیم می‌شوند.

۴) گسترش صنعت خودرو مدیون شناخت و دسترسی به فولاد است.

۷۱ اگر a و b دو عدد گنگ باشند، کدام گزینه همواره گنگ است؟

۱) $۲a - ۳b$
۲) a^b
۳) $\frac{a - ۱}{b}$
۴) $\frac{۶}{a}$

۷۲ به ازای چند عدد اول مانند p، عبارت $p+۹$ برابر مربع یک عدد طبیعی است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) هیچ مقدار

۷۳ می‌دانیم که گراف P_n، گرافی است که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده است. تعداد مسیرهای به طول ۳ در $P_۹$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

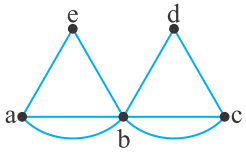
۷۴ گراف $P_۶$ چند مجموعهٔ احاطه‌گر حداقل ۴ عضوی دارد؟

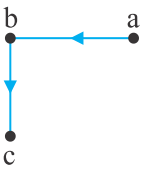
۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۰

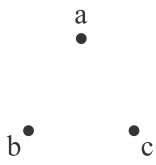
۷۵ باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۹^{۱۹}$ بر ۷ کدام است؟

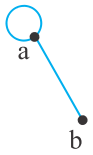
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۷۶ کدام‌یک از گراف‌های زیر، گراف ساده است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۷۷ عدد احاطه‌گری $P_۷$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۸ در کدام گراف زیر، فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم داریم؟

۱) $C_۶$
۲) $P_۶$
۳) ۲- منتظم ناهمبند از مرتبهٔ ۶
۴) $K_۵$

۷۹ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۳ و ۸ به ترتیب ۱ و ۷ می‌باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۲۴ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۱۵

۸۰ کدام‌یک از معادلات همنهشتی زیر، جواب ندارد؟

۱) $3x \overset{2}{\equiv} 4$
۲) $4x \overset{6}{\equiv} 18$
۳) $6x \overset{9}{\equiv} 11$
۴) $5x \overset{7}{\equiv} 1$

۸۱ از تقاطع یک صفحه با یک استوانهٔ توپر، چندتا از اشکال زیر تشکیل می‌شود؟ (تذکر: صفحه با استوانه مماس نیست.)
الف) دایره ب) بیضی پ) سهمی ت) هذلولی ث) خط راست

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۸۲ خط d اضلاع زاویهٔ xoy را در نقاط A و B قطع می‌کند. با حرکت خط d، محل برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ OAB و OBA چگونه حرکت می‌کند؟

۱) ثابت می‌ماند.
۲) روی یک خط راست حرکت می‌کند.
۳) روی یک دایره حرکت می‌کند.
۴) تمام نقاط داخل زاویه را می‌پوشاند.

۸۳ سهمی به کانون $F(-2, 0)$ و خط هادی $x = 2$ از کدام‌یک از نقاط زیر عبور می‌کند؟

۱) $(-1, 3)$
۲) $(-1, 4)$
۳) $(-2, 4)$
۴) $(-2, 5)$

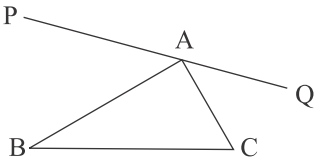
۸۴ دایرهٔ C و دایرهٔ $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$ دارای سه مماس مشترک هستند. اگر طول یکی از این مماس‌ها، $4\sqrt{2}$ باشد، اندازهٔ شعاع دایرهٔ C کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸۵ خط d در نقطهٔ M بر بیضی به کانون‌های F و F' مماس است. از F' خطی موازی MF چنان رسم کرده‌ایم تا خط d را در N قطع کند. اگر طول قطر بزرگ برابر ۶ و $MF = 2$، طول پاره‌خط NF' کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۳
۴) ۵

۸۶ در شکل زیر، اگر رأس A از مثلث ABC روی پاره‌خط PQ حرکت کند، مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ABC کدام است؟ $(PQ \not\parallel BC)$



۱) پاره‌خطی موازی BC

۲) پاره‌خطی موازی PQ

۳) کمانی از دایره به مرکز M

۴) کمانی از دایره به مرکز وسط PQ

۸۷ در بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F'، نقاط A و A' رئوس کانونی و B و B' رئوس غیرکانونی هستند. اگر مساحت مثلث OAB سه برابر مساحت مثلث FBF' باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۸۸ وتر مشترک دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۴y + ۷ = ۰$ و دایرهٔ C به مرکز $(-۱, -۶)$ عمودمنصف خط‌المرکزین این دو دایره است. معادلهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره کدام گزینه است؟

۱) $۳y - ۴x = ۹$ ۲) $۳y - ۴x = ۱۹$

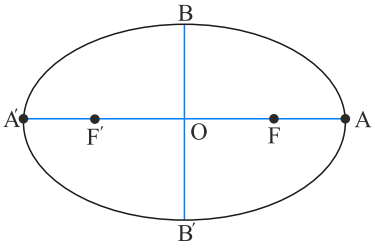
۳) $۳y - ۴x = -۹$ ۴) $۳y - ۴x = -۱۴$

۸۹ در یک بیضی نسبت اقطار برابر $\sqrt{۵}$ است. خروج از مرکز بیضی چند برابر $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ است؟

۱) ۲ ۲) ۱

۳) ۴ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۹۰ در بیضی زیر قطر بزرگ دو برابر قطر کوچک است. زاویهٔ BFB' کدام است؟



۱) ۱۵۰°

۲) ۶۰°

۳) ۹۰°

۴) ۱۲۰°

۹۱ دایره‌ای به مرکز کانون سهمی $(y + ۳)^۲ = ۱۲(x - ۱)$ رسم می‌کنیم به‌گونه‌ای‌که بر خط هادی سهمی مماس است. اگر این دایره سهمی را در نقاط A و B قطع کند، طول AB کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۴

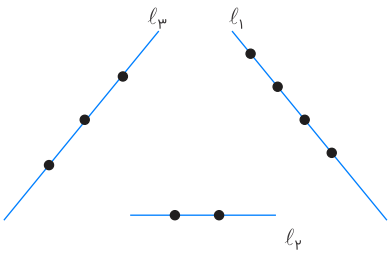
۹۲ یک تاس همگن (سالم) را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه هیچ دو عدد روشده شبیه هم نباشند کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$
۲) $\frac{۴}{۹}$
۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$
۴) $\frac{۱۱}{۳۶}$

۹۳ دو تاس را باهم می‌ریزیم با کدام احتمال مجموع دو عدد روشده بیشتر از ۹ است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۹}$
۴) $\frac{۵}{۳۶}$

۹۴ ۳ نقطه به‌تصادف از نقاط روی شکل انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی نقاط انتخاب‌شده تشکیل مثلث خواهند داد؟



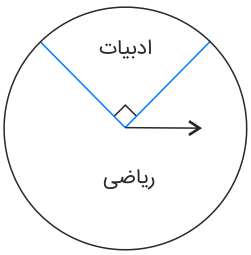
۱) $\frac{۷۹}{۸۴}$
۲) $\frac{۵۳}{۸۴}$
۳) $\frac{۵۵}{۸۴}$
۴) $\frac{۳۷}{۸۴}$

۹۵ جدول زیر تحقیقات سازمان حمایت از حقوق مصرف‌کنندگان از ۵۰ مرکز سرویس مجاز می‌باشد. فردی یکی از مراکز را انتخاب می‌کند و متوجه می‌شود که سرویس خوبی ارائه می‌دهد. احتمال آنکه آن مرکز از مراکز مجاز با سابقهٔ بیش از ۱۰ سال باشد، کدام است؟

نوع سرویس ← سابقه ↓	سرویس خوب	سرویس ضعیف	جمع
سابقهٔ بیش از ۱۰ سال	۱۶	۴	۲۰
سابقهٔ کمتر از ۱۰ سال	۱۰	۲۰	۳۰
جمع	۲۶	۲۴	۵۰

۱) $\frac{۸}{۲۵}$
۲) $\frac{۱۲}{۲۵}$
۳) $\frac{۸}{۱۳}$
۴) $\frac{۷}{۱۳}$

۹۶ سامان در مسابقه‌ای شرکت کرده است. اگر بستهٔ سؤال ادبیات را بگیرد، به احتمال ۶۰٪ و اگر بستهٔ سؤال ریاضی را بگیرد، ۹۰٪ برنده خواهد شد. درصورتی‌که با چرخاندن عقربه به او نوع سؤالی که می‌دهند مشخص شود، او به چه احتمالی برنده می‌شود؟



۱) $\frac{۱۷}{۲۰}$
۲) $\frac{۳۳}{۴۰}$
۳) $\frac{۹}{۱۰}$
۴) $\frac{۳۵}{۴۰}$

۹۷ اگر A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای باشند، در کدام حالت $P(B-A)=P(B)-P(A)$ درست است؟

۱) $A \subset B$
۲) همواره
۳) $A \cap B = \varnothing$
۴) $P(A) < P(B)$

۹۸ اگر $P(A \cup B') = ۰/۶$، $P(A' \cup B) = ۰/۷$ و $P(A' \cup B') = ۰/۸$ باشد، حاصل $P(A' \cap B')$ کدام است؟

۱) ۰/۱
۲) ۰/۲
۳) ۰/۳
۴) ۰/۴

۹۹ در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۳ سیاه و در کیسه‌ای دیگر ۴ مهرهٔ سفید و ۲ سیاه داریم. تاسی را پرتاب می‌کنیم؛ اگر مضرب ۳ آمد، از کیسهٔ اول و در غیراین‌صورت از کیسهٔ دوم ۲ مهره برمی‌داریم. با کدام احتمال این ۲ مهره همرنگ نیستند؟

۱) $\frac{۶۷۳}{۱۲۶۰}$
۲) $\frac{۵۹۳}{۱۲۶۰}$
۳) $\frac{۱۶۸}{۳۱۵}$
۴) $\frac{۱۶۷}{۳۱۵}$

۱۰۰ در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رؤیت خارج می‌کنیم، سپس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر، سفید است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$
۲) $\frac{۲}{۱۱}$
۳) $\frac{۴}{۱۱}$
۴) $\frac{۵}{۲۲}$

۱۰۱ تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد روشده یک عدد فرد است، احتمال اینکه لااقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۷}{۱۲}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

www.alirezaafshar.org

۱۰۲ مساحت بین مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{۲x-\sqrt{x^۲-۱}}{۲x+\sqrt{x^۲+x+۲}}$ و محور yها کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۹}$
۲) $\frac{۸}{۳}$
۳) $\frac{۴۰}{۹}$
۴) $\frac{۱۶}{۳}$

۱۰۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos x(\cos x-\sin x)=۱$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$
۲) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$
۳) $k\pi-\frac{\pi}{۸}$
۴) $k\pi+\frac{\pi}{۸}$

۱۰۴ نمودار تابع $f(x)=\frac{|x^۲-۱|}{x^۲-۱}+\sqrt{\frac{۱}{x-۲}}$ چه مجانب‌هایی دارد؟

۱) یک قائم، یک افقی
۲) سه قائم، دو افقی
۳) یک قائم، دو افقی
۴) سه قائم، یک افقی

۱۰۵ مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{x}{\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x-۲}}$ کدام است؟

۱) $x=۲$
۲) $x=۱$
۳) $x=\frac{۳}{۲}$
۴) $x=۰$

۱۰۶ کدام خط، مجانب تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-\sqrt{۴x^۲-۳}}$ نیست؟

۱) $y=-۲$
۲) $y=\frac{۲}{۳}$
۳) $x=-۱$
۴) $x=۱$

۱۰۷ حاصل حد $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۱+۴x^۲}-\sqrt[۳]{۱+۳x^۲}}{۲x-\sqrt[۳]{۳-x^۳}}$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۳}$
۲) صفر
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{-۲}{۳}$

۱۰۸ اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=-۱$، آنگاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x=-۲$ کدام است؟

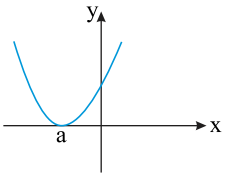
۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

www.alirezaafshar.org

۱۰۹ خط $y = \frac{۱}{۲}$، نمودار تابع $y = \tan x$ را در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۱۱۰ اگر نمودار $f(x)$ به‌صورت شکل زیر باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{x}{f(x)}$ کدام است؟



۱) a
۲) صفر
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

۱۱۱ دوره تناوب تابع $y = \frac{\tan^۲\theta - \sin^۲\theta}{\tan^۵\theta(\cot^۲\theta - \cos^۲\theta)}$ کدام است؟

۱) π
۲) ۲π
۳) $\frac{\pi}{۳}$
۴) $\frac{\pi}{۲}$

۱۱۲ معادلهٔ $\tan x + \cot x = \frac{-۳}{۲}$ در یک دورهٔ تناوب چند جواب دارد؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۱۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos^۲x + ۲\sin x \cos x = ۱$، به کدام صورت است؟

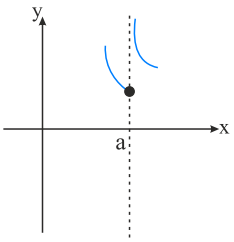
۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

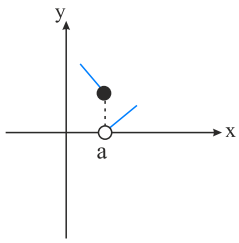
۱۱۴ حاصل $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right]$ کدام است؟

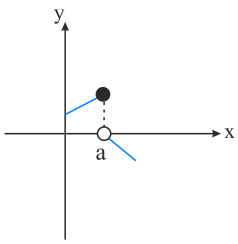
۱) صفر
۲) ۱
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

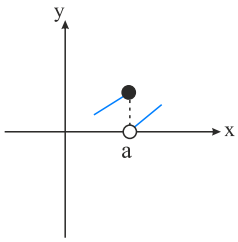
www.alirezaafshar.org

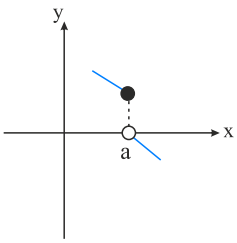
۱۱۵ اگر شکل زیر بخشی از نمودار تابع f باشد، نمودار $\frac{۱}{f}$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟



۱)


۲)


۳)


۴)


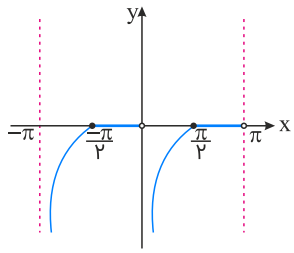
استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

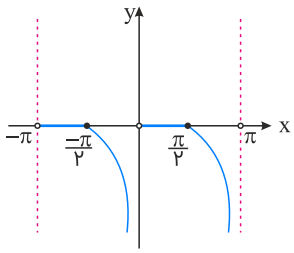
۱۱۶ اگر $\frac{۳\pi}{۴} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{۴}$ باشد، آنگاه $\tan\alpha$ برابر با کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

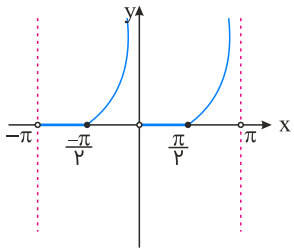
۱) ۲
۲) -۲
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) -۱

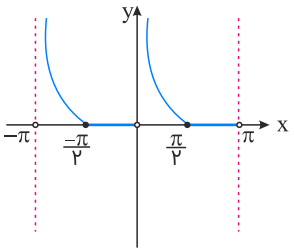
www.alirezaafshar.org

۱۱۷ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\cot x + |\cot x|}{۲}$ در بازهٔ $(-\pi , \pi)$ کدام است؟

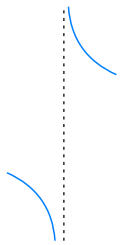
۱)


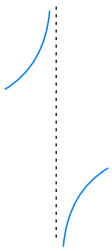
۲)


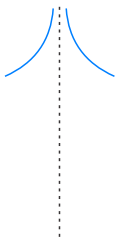
۳)


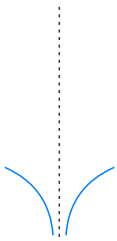
۴)


۱۱۸ نمودار تابع $f(x) = \frac{۴^x}{۲^x - ۳^x}$ در اطراف مجانب قائم خود کدام است؟

۱)


۲)


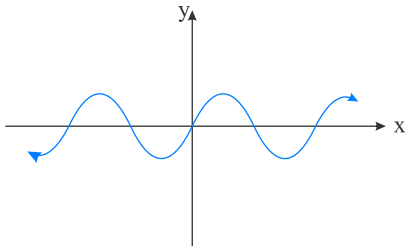
۳)


۴)


۱۱۹ حد عبارت $\left[\frac{۱}{x}\right]$ x در کدام حالت متناهی نیست؟

۱) $x \to ۰^-$
۲) $x \to ۰^+$
۳) $x \to -\infty$
۴) $x \to +\infty$

۱۲۰ حدود m کدام باشد تا تابع $y = (۴ - m)\sin(mx)$ شبیه نمودار زیر باشد؟



۱) $(۱, ۶)$
۲) $(۴, +\infty)$
۳) $(-۱, ۲)$
۴) $(۰, ۴)$

۱۲۱ اگر بازه $(۲a+۳\ ,\ a+۱۷)$ همسایگی عدد حقیقی ۱۰ باشد، آنگاه حدود a کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲} < a < ۷$
۲) $a > -۷$
۳) $a < \frac{۷}{۲}$
۴) $-۷ < a < \frac{۷}{۲}$

۱۲۲ اگر تابع $f(x) = a[۳\sqrt{۲}\sin x] + [\sqrt{۲}\cos ۳x]$ در $x = \frac{\pi}{۴}$ حد داشته باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۶
۴) -۵

۱۲۳ حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{۲}{۳})^-}[\frac{-۲}{x}]$ کدام است؟

۱) -۳
۲) -۴
۳) ۳
۴) حاصل حد موجود نیست.

۱۲۴ مجموع حد راست و چپ تابع $y = [x] + [۲x]$ وقتی $x \to \frac{-۱}{۲}$ کدام است؟

۱) -۴
۲) -۶
۳) -۵
۴) -۳

۱۲۵ اگر f و g در $x = -۲$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to-۲}\frac{-f(x)}{g(x)+۲} = ۱$ و $\lim\limits_{x\to-۲}\frac{f(x)-g(x)}{۲} = -۱$، حاصل حد $\lim\limits_{x\to-۲}\frac{g(x)}{f^۲(x)+۳}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۲
۴) -۲

۱۲۶ تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x^۲ & ;x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z} \\ ۳ & ;x\in\mathbb{Z} \end{cases}$ روی بازهٔ $(-۳,۳)$ در چند نقطه با طول صحیح حد ندارد؟

۱) ۵ نقطه
۲) ۲ نقطه
۳) ۳ نقطه
۴) هیچ نقطه

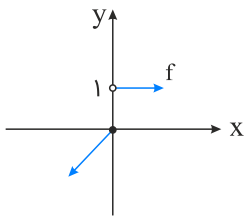
۱۲۷ مجموع حد راست و حد چپ تابع $y = [x] + [۲x]$ وقتی $x \to \frac{-۱}{۲}$ کدام است؟

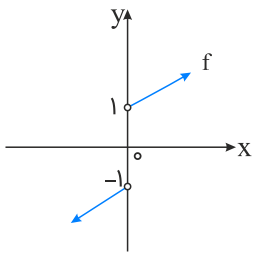
۱) -۴
۲) -۶
۳) -۵
۴) -۳

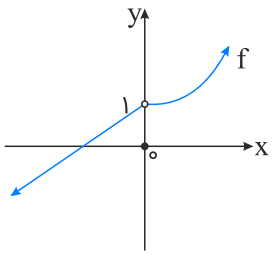
۱۲۸ در تابع $f(x) = (۲[-x]+۵)([x]-۴)$ حاصل $\lim\limits_{x\to۲^+}f(x) - \lim\limits_{x\to۲^-}f(x)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است)

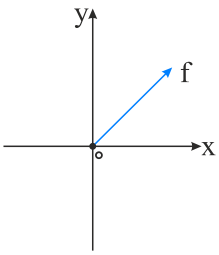
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۳

۱۲۹ کدام‌یک از توابع زیر، در $x = ۰$ حد دارد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۳۰ حاصل کدام حد موجود است؟

۱) $\lim\limits_{x \to ۱^-} \log [x]$

۲) $\lim\limits_{x \to ۰^+} \cot [x]$

۳) $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{۱}{[x] - ۲}$

۴) $\lim\limits_{x \to ۰^+} \dfrac{[x]}{|x|}$

استاد علیرضا افشار
”همایش ها“
@hamayesh_dr_afshar

www.alirezaafshar.org

۱ گزینه ۴

دورهٔ تناوب عقربهٔ ساعت شمار $۱۲\,h$ و دورهٔ تناوب عقربهٔ دقیقه‌شمار یک ساعت است. حالا از رابطهٔ $v = \frac{۲\pi r}{T}$ داریم:

$$\frac{v_m}{v_h} = \frac{r_m}{r_h} \times \frac{T_h}{T_m} = \frac{۹}{۶} \times \frac{۱۲}{۱} = ۱۸$$

۲ گزینه ۲

گام اول

الف) جسمی به جرم $m = ۰/۵\,kg \leftarrow ۰/۵\,kg$

ب) نیروی متوسط وارد بر جسم در بازه $t_۱ = ۵\,s$ تا $t_۲ = ۷\,s$ چند نیوتن است؟ $\leftarrow \Delta t = ۲\,s,\ \vec{F} = ?$

گام دوم

تکانه را در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ محاسبه کرده و در رابطهٔ $\vec{F}_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ جایگذاری می‌کنیم:

$$p = t^۲ - ۱۰t + ۲۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۵\,s: & p_۱ = (۵)^۲ - ۱۰(۵) + ۲۰ = -۵\,kg.m/s \\ t_۲ = ۷\,s: & p_۲ = (۷)^۲ - ۱۰(۷) + ۲۰ = -۱\,kg.m/s \end{cases}$$
$$\vec{F}_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_۲ - p_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{(-۱) - (-۵)}{۲} = ۲\,N$$

۳ گزینه ۲

همان‌طور که در نمودار صورت سؤال مشخص شده است، به ازای یک موج کامل B، دو موج کامل A داریم، بنابراین:

$$f_A = ۲f_B \Rightarrow T_A = \frac{۱}{۲}T_B$$

چون هر دو موج در یک محیط منتشر می‌شوند، سرعت انتشار آن‌ها باهم مساوی است.

$$v_A = v_B$$

۴ گزینه ۴

در نمودار $F - d$ مساحت بین نمودار و محور d کار کل انجام‌شده روی جسم را نشان می‌دهد که طبق قضیهٔ کار و انرژی برابر با تغییر انرژی جنبشی جسم است.

$$W_t = K - K_۰ \xrightarrow{v_۰ = ۰} W_t = K$$
$$K = \frac{۱۶ + ۸}{۲} \times ۱۰ = ۱۲۰J$$

حالا از رابطهٔ $K = \frac{۱}{۲}\frac{p^۲}{m}$ می‌توانیم تکانهٔ جسم را پس از $۱۶m$ جابه‌جایی به دست آوریم:

$$p^۲ = ۱۲۰ \times ۲ \times ۵ = ۱۲۰۰ \Rightarrow p = ۲۰\sqrt{۳}\,kg.m/s$$

www.alirezaafshar.org

۵ گزینه ۳

برای حل این مسئله ابتدا باید شتاب فرد را محاسبه کنیم:

$$|a| = \frac{|\Delta V|}{\Delta t} \Rightarrow \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}\,m/s^۲$$

به دلیل اینکه حرکت کندشونده بوده، جهت حرکت خلاف جهت شتاب است و این یعنی شتاب به‌سمت بالا است.

$$\uparrow a = ۰/۵\,m/s^۲$$

$$f_N - mg = ma \xrightarrow[g=۱۰\,m/s^۲]{m=۸۰\,kg\,,\,a=۰/۵\,m/s^۲} f_N - ۸۰۰ = ۴۰ \Rightarrow f_N = ۸۴۰$$

نیروی عمودی سطح در این مسئله به‌سمت بالا است.

۶ گزینه ۳

باتوجه‌به رابطهٔ $F_e = kx$، شیب نمودار $F_e - x$ برابر با سختی فنر (k) است؛ پس داریم:

$$k_A = ۴k_B$$

ازطرفی می‌دانیم اگر جسمی متصل به فنر باشد، وزن جسم برابر با نیروی فنر خواهد بود و چون طول اولیه و ثانویهٔ فنرها یکسان است، پس تغییر طول فنر A و B نیز یکسان است.

$$mg = kx \Rightarrow \begin{cases} ۰/۵ \times ۱۰ = k_A x \\ m \times ۱۰ = k_B x \end{cases} \xrightarrow{\text{با تقسیم ۲ رابطه خواهیم داشت}} \frac{۵}{۱۰m} = ۴$$

$$\Rightarrow ۴۰m = ۵ \Rightarrow m = \frac{۱}{۸}\,kg = ۱۲۵\,g$$

۷ گزینه ۱

گام اول

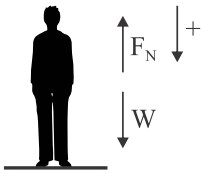
الف) شخصی به وزن $۶۰۰N$ $\leftarrow$ $W = ۶۰۰N$

ب) ترازو عدد $۴۸۰N$ را نشان می‌دهد. $\leftarrow$ $f_N = ۴۸۰N$

ج) شتاب آسانسور چند متر بر مجذور ثانیه و به کدام جهت است؟ $\leftarrow$ $a = ?$

گام دوم

ازآنجاکه شتاب شخص با شتاب آسانسور برابر است، شتاب شخص را با استفاده از قانون دوم نیوتن به دست می‌آوریم (جهت مثبت را روبه پایین در نظر می‌گیریم).

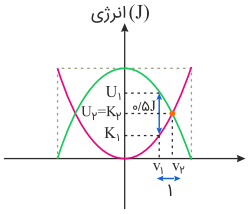


$$\begin{cases} \sum F = ma \\ W = ۶۰۰N \Rightarrow m = ۶۰kg \end{cases} \Rightarrow W - f_N = ma \Rightarrow ۶۰۰ - ۴۸۰ = ۶۰ \times a \Rightarrow a = \frac{۱۲۰}{۶۰} = +۲m/s^۲$$

بنابراین آسانسور با شتاب $۲m/s^۲$ و هم‌جهت با جهت در نظر گرفته‌شده؛ یعنی رو به پایین در حال حرکت است.

۸ گزینه ۳

گام اول: مطابق شکل زیر، مقادیر سرعت و انرژی‌های پتانسیل و جنبشی را برای دو نقطهٔ موردنظر مشخص می‌کنیم و سپس قانون بقا، انرژی مکانیکی را برای دو نقطه می‌نویسیم:



$$v = v_۱ \Rightarrow \begin{matrix} U_۱ - K_۱ = ۰/۵ \Rightarrow U_۱ = K_۱ + ۰/۵ \\ E = K_۱ + U_۱ = K_۱ + (K_۱ + ۰/۵) \Rightarrow E = ۲K_۱ + ۰/۵ \quad (I) \end{matrix}$$

$$v = v_۲ \Rightarrow \begin{matrix} U_۲ = K_۲ \\ E = K_۲ + U_۲ = K_۲ + K_۲ \Rightarrow E = ۲K_۲ \quad (II) \end{matrix}$$

گام دوم: در ادامه باتوجه‌به رابطه‌های (I) و (II)، داریم:

$$۲K_۱ + ۰/۵ = ۲K_۲ \Rightarrow ۲ \times \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + ۰/۵ = ۲ \times \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ \xrightarrow{(m=۰/۱kg)} ۰/۱v_۱^۲ + ۰/۵ = ۰/۱v_۲^۲$$

$$\Rightarrow v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۵ \quad (III)$$

گام سوم: باتوجه‌به نمودار فوق خواهیم داشت:

$$v_۲ - v_۱ = ۱ \quad (IV)$$

$$(III): \quad v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۵ \Rightarrow (v_۲ - v_۱)(v_۲ + v_۱) = ۵ \Rightarrow ۱ \times (v_۲ + v_۱) = ۵ \Rightarrow v_۲ + v_۱ = ۵ \quad (V)$$

با استفاده از دو رابطهٔ (IV) و (V) داریم:

$$v_۱ = ۲\,m/s \quad , \quad v_۲ = ۳\,m/s$$

گام چهارم: در پایان خواستهٔ تست را با استفاده از رابطهٔ (I) به دست می‌آوریم:

$$E = ۲K_۱ + ۰/۵ = \cancel{۲} \times \frac{۱}{\cancel{۲}}mv_۱^۲ + ۰/۵ = ۰/۱ \times (۲)^۲ + ۰/۵ = ۰/۹$$

$$E = \frac{۱}{۲}mv_{max}^۲ \Rightarrow ۰/۹ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۱ \times v_{max}^۲ \Rightarrow v_{max}^۲ = ۱۸ \Rightarrow v_{max} = ۳\sqrt{۲}\,m/s$$

۹ گزینه ۴

می‌دانیم شیب نمودار $F - L$ برابر با ثابت فنر (k) است.

$$k_A = \frac{F}{۲/۵}, k_B = \frac{F}{۵}, k_c = \frac{F}{۱۰} \Rightarrow k_B = \frac{۱}{۲}k_A = ۲k_c$$

۱۰ گزینه ۳

گام اول

الف) جسم از حال سکون $\leftarrow v_۰ = ۰$

ب) تحت نیروی ثابت $\leftarrow$ شتاب ثابت

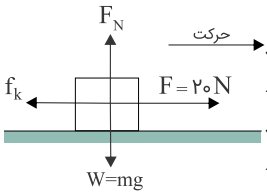
ج) بعد از ۳ ثانیه نخ بسته‌شده به جسم پاره می‌شود $\leftarrow t = ۳s$ ، تنها نیرویی که به جسم وارد می‌شود از این به بعد، نیروی اصطکاک است.

د) کل مسافتی که جسم از شروع حرکت تا لحظهٔ ایستادن طی می‌کند چند متر است؟ $\leftarrow v = ۰, \Delta x = ?$

گام دوم

حرکت جسم از دو بخش تشکیل‌شده است. بخش اول حرکت با شتاب ثابت تحت تأثیر نیروهای $F = ۲۰N$ و نیروی اصطکاک و بخش دوم، حرکت با شتاب ثابت (کند شونده) تحت تأثیر نیروی اصطکاک. پس باید مقدار مسافت طی شده در هر بخش را با استفاده از معادلهٔ مکان آن به دست آوریم:

بخش اول)

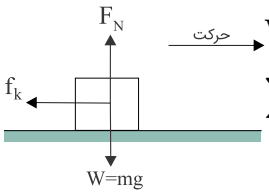


$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_N - mg = ۰ \Rightarrow F_N = mg = ۴ \times ۱۰ = ۴۰N$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F - f_k = ma \xrightarrow{f_k = \mu_k . F_N} ۲۰ - \frac{۳}{۱۰} \times ۴۰ = ۴ \times a \Rightarrow a = ۲m/s^۲$$

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times (۳)^۲ + ۰ = ۹m$$

بخش دوم) ابتدا سرعت در لحظهٔ $t = ۳s$، (لحظهٔ اولیه بخش دوم) را به دست آورده و درنهایت شتاب و جابه‌جایی را محاسبه می‌کنیم:



$$v_۰' = at + v_۰ \rightarrow v_۰' = ۲ \times ۳ + ۰ = ۶m/s$$

$$\sum F'_x = ma' \Rightarrow ۰ - f_k = ma' \Rightarrow -\frac{۳}{۱۰} \times ۴۰ = ۴ \times a \Rightarrow a = -۳m/s^۲$$

با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان داریم:

$$v^۲ - v_۰'^۲ = ۲a'\Delta x' \Rightarrow ۰ - (۶)^۲ = ۲ \times -۳ \times \Delta x' \Rightarrow \Delta x' = ۶m$$

درنهایت جابه‌جایی کل برابر است با:

$$\Delta x_T = \Delta x + \Delta x' = ۹ + ۶ = ۱۵m$$

۱۱ گزینه ۴

تندی انتشار امواج سطحی آب با کاهش عمق آب کم می‌شود و با افزایش عمق، افزایش می‌یابد و طبق رابطهٔ $v = \frac{\lambda}{f}$ به دلیل ثابت بودن چشمه، پس بسامد موج ثابت است و λ مطابق v تغییر می‌کند.

۱۲ گزینه ۴

انرژی مکانیکی نوسانگر در همهٔ مکان‌ها، یکسان است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{۱}{۲}kA^۲ = \frac{۱}{۲}m\omega^۲A^۲ = ۲\pi^۲mA^۲f^۲$$

$$\Rightarrow E = \frac{۱}{۲} \times m\omega^۲A^۲ = \frac{۱}{۲} \times (۲۰ \times ۱۰^{-۳}) \times (۲۰۰)^۲ \times (۰/۰۴)^۲$$

$$= ۱۰^{-۲} \times (۴ \times ۱۰^۴) \times (۱۶ \times ۱۰^{-۴}) = ۰/۶۴ (J)$$

۱۳ گزینه ۳

$mg_{\text{صفحه}} + mg_{\text{وزنه}} = ۶۰\,N \Rightarrow$ نیروی واردشده به هر فنر $= ۱۵\,N$

$$k = \frac{۹۰}{۱۵} = ۶\,N/cm \Rightarrow F_e = kx \Rightarrow ۱۵ = ۶ \times x \Rightarrow x = ۲/۵\,cm$$

۱۴ گزینه ۴

با استفاده از رابطهٔ $a = r\omega^۲$ می توان نوشت:

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{r_A}{r_B} \times \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^۲ = \frac{۲r_B}{r_B} \times \left(\frac{T_B}{\frac{۱}{۲}T_B}\right)^۲ = ۸$$

۱۵ گزینه ۲

وضعیت نیروهای وارد بر شخص درون آسانسور به شکل زیر است به کمک قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_net = ma$$

$$\xrightarrow[\text{جهت شتاب روبه‌بالا}]{\text{حالت (۱)}} F_{N_۱} - mg = ma \Rightarrow F_{N_۱} + m(g + a)$$

$$\xrightarrow[\text{جهت شتاب روبه‌پایین}]{\text{حالت (۲)}} mg - F_{N_۲} = ma \Rightarrow F_{N_۲} + m(g - a)$$

بیشترین نیرویی که شخصی به کف آسانسور وارد می‌کند $F_{N_۱}$ و کمترین نیرویی که وارد می‌کند $F_{N_۲}$ است، درنتیجه طبق اطلاعات تست می‌توان نوشت:

$$\frac{F_{max}}{F_{min}} = ۳ \Rightarrow \frac{F_{N_۱}}{F_{N_۲}} = ۳ \Rightarrow \frac{m(g + a)}{m(g - a)} = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{g + a}{g - a} = ۳ \Rightarrow a = \frac{g}{۲}$$

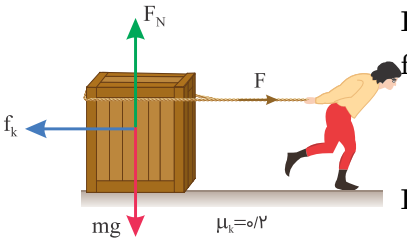
حالا شتاب آسانسور را محاسبه کردیم، می‌توان، F_{min} را محاسبه کرد:

$$F_{min} = F_{N_۲} = m(g - a) \xrightarrow{a=\frac{g}{۲}} F_{min} = m(g - \frac{g}{۲}) = \frac{mg}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{min}}{mg} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

۱۶ گزینه ۱

گام اول: نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح را محاسبه می‌کنیم:



$$F_N - mg = ۰ \Rightarrow F_N = mg = ۲۰ \times ۱۰ = ۲۰۰\,N$$
$$f_k = \mu_k F_N = ۰/۲ \times ۲۰۰ = ۴۰\,N$$

گام دوم: شتاب جسم را به کمک قانون دوم نیوتون به دست می‌آوریم:

$$F - f_k = ma \Rightarrow ۸۰ - ۴۰ = ۲۰a \Rightarrow a = ۲\,m/s^۲$$

گام سوم: معادلهٔ سرعت زمان جسم را نوشته و سرعت جسم را پس از ۱/۵ s محاسبه می‌کنیم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۲ \times ۱/۵ = ۳\,m/s$$

گام چهارم: سرعت متوسط جسم را طی این مدت به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{v + v_۰}{۲} = \frac{۳ + ۰}{۲} = ۱/۵\,m/s$$

گام پنجم: از معادلهٔ $P_{av} = F\,v_{av}$ توان متوسط شخص را محاسبه می‌کنیم:

$$P_{av} = F\,v_{av} = ۸۰ \times ۱/۵ = ۱۲۰\,W$$

۱۷ گزینه ۲

گام اول

الف) در یک تصادف سرعت اتومبیل از ۵۴km/h به صفر می‌رسد. $v_۲ = ۰$ ، $v_۱ = ۵۴km/h = ۱۵m/s$ ←

ب) زمان این حرکت کندشونده، ۰/۳s ← $t = ۰/۳s$

ج) مسافری به جرم ۶۰kg ← $m = ۶۰kg$

د) بزرگی نیروی متوسط کمربند ایمنی به مسافر تا به جلو پرت نشود؟← $|F_{av}| = ?$

گام دوم

روش اول:

بااستفاده از روابط تکانه، زیر داریم:

$$\Delta p = m\Delta v = ۶۰ \times ۱۵$$
$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{۶۰ \times ۱۵}{۰/۳} = ۳۰۰۰N$$

روش دوم:

نیرویی که باعث پرت شدن مسافر به جلو می‌شود همان نیرویی است که شتاب متوقف‌کنندهٔ اتومبیل را به وجود می‌آورد.

ابتدا با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان، شتاب حرکت کند شونده را به دست می آوریم:

$$v_۲ = at + v_۱ \Rightarrow ۰ = a \times ۰/۳ + ۱۵ \Rightarrow a = -۵۰\,m/s^۲$$

حالا به کمک قانون دوم نیوتن، نیرویی را که کمربند باید به این مسافر وارد کند، تا به جلو پرت نشود، محاسبه می‌کنیم:

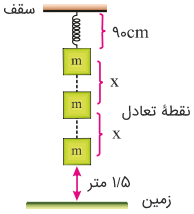
$$\left|\sum F\right| = m\,|a| \Rightarrow |F_{av}| = ۶۰ \times |-۵۰| = ۳۰۰۰N$$

۱۸ گزینه ۱

باند AM در گسترهٔ بسامدی ۵۴۰ تا ۱۶۰۰ کیلوهرتز و باند FM در گسترهٔ بسامدی ۸۸ تا ۱۰۸ مگاهرتز است. درنتیجه موج رادیویی AM بسامد کوتاه‌تر و طول موج بلندتری دارد $(\lambda \propto \frac{1}{f})$.

۱۹ گزینه ۱

ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم و برآیند نیروهای وارد بر جسم را در نقطهٔ تعادل می‌نویسیم:



$$F - mg = ma \xrightarrow{\text{در نقطهٔ تعادل شتاب صفر است}} F - mg = ۰ \qquad (I)$$

میزان کشیدگی فنر را که برابر همان دامنهٔ نوسان است از معادلهٔ (I) می‌یابیم:

$$F - mg = ۰ \Rightarrow kx - mg = ۰ \Rightarrow ۱۰۰x - ۱۰m = ۰ \Rightarrow x = \frac{m}{۱۰}\ \text{متر}$$

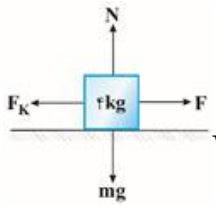
ارتفاع سقف را به‌صورت مجموع فواصل داده‌شده در شکل نوشته و x را می‌یابیم:

$$۹۰ + ۲x + ۱۵۰ = ۲۵۰ \Rightarrow x = ۵\,cm = ۰/۰۵\,m$$

$$x = \frac{m}{۱۰}\ \text{متر} \Rightarrow ۰/۰۵ = \frac{m}{۱۰} \Rightarrow x = ۰/۵\,kg$$

۲۰ گزینه ۳

نیروی عکس‌العمل سطح دو مؤلفه دارد.



۱- نیروی عکس‌العمل عمودی سطح در راستای عمود بر سطح جسم وارد می‌شود. (N)

$$W_N = N\,d\cos ۹۰^\circ = ۰$$

۲- نیروی اصطکاک که در نقطهٔ تماس جسم با سطح در خلاف جهت حرکت به جسم وارد می‌شود. (f_k)

$$\begin{cases} f - f_k = m\,.\,a \Rightarrow f_k = ۵۲ - (۴ \times ۱۰) = ۱۲\,N \\ W_{f_k} = f_k\,d\cos ۱۸۰^\circ = (۱۲ \times ۱۵)(-۱) = -۱۸۰\,J \end{cases}$$

۲۱ گزینه ۱

cc همان cm^3 است؛ بنابراین در گزینهٔ "۲" واحدها سازگار هستند. تنها در گزینهٔ "۱"، cm^3 و m^3 باهم سازگار نیستند. وقتی جرم برحسب g و حجم cm^3 انتخاب می‌شود، یکای چگالی باید g/cm^3 در نظر گرفته شود.

۲۲ گزینه ۴

با استفاده از رابطهٔ چگالی آلیاژ می‌توان نوشت (اندیس (۱) مربوط به طلا و اندیس (۲) مربوط به نقره است):

$$\rho = \frac{m_۱ + m_۲}{V_۱ + V_۲} \Rightarrow \frac{m}{V} = \frac{\rho_۱ V_۱ + \rho_۲ V_۲}{V_۱ + V_۲}$$

$$\xrightarrow[\rho_۲ = ۱۰\ g/cm^۳]{\rho_۱ = ۱۹\ g/cm^۳} \frac{۲۰۴}{۱۵} = \frac{۱۹V_۱ + ۱۰V_۲}{۱۵} \Rightarrow ۱۹V_۱ + ۱۰V_۲ = ۲۰۴$$

همان‌طور که در بالا دیدید مجموع حجم طلا و نقره برابر با حجم آلیاژ است؛ بنابراین دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۱۹V_۱ + ۱۰V_۲ = ۲۰۴ \\ V_۱ + V_۲ = ۱۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{با کمی محاسبه}} V_۱ = ۶\ cm^۳ \ , \ V_۲ = ۹\ cm^۳$$

بنابراین درصد نقرهٔ به‌کاررفته در آلیاژ برابر است با:

$$\text{درصد نقره} = \frac{V_۲}{V_۱} \times ٪۱۰۰ = \frac{۹}{۱۵} \times ٪۱۰۰ = ٪۶۰$$

۲۳ گزینه ۱

حجم ظرف برابر با حجم دو مایع است. چون در هر دو حالت حجم و جرم مایع B ثابت است، پس حجم دو مایع A و B که در ظرف ریخته شده است باهم برابر است بنابراین:

$$V_A = V_C \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_C} = \frac{m_A}{m_C} \times \frac{V_C}{V_A} = \frac{۲۰۰}{۴۰۰} \times ۱ = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۲۴ گزینه ۱

حجم واقعی مکعب برابر است با: تفاضل حجم ظاهری مکعب (= حجم آب بیرون ریخته از ظرف) از حجم حفرهٔ داخل آن.

$$\text{حجم واقعی مکعب} = ۲۰۰ - ۲۵ = ۱۷۵\ cm^۳$$

$$\text{چگالی فلز} = \frac{\text{جرم مکعب}}{\text{حجم واقعی مکعب}} = \frac{۱۴۰۰}{۱۷۵} = ۸ g/cm^۳ = ۸۰۰۰\ kg/m^۳$$

۲۵ گزینه ۲

(۱) گزینهٔ : $۵۴/۱۹\ dm = ۵۴/۱۹ \times (\frac{۱۰^{-۱}}{۱}) m = ۵/۴۱۹\ m$

(۲) گزینهٔ : $۰/۳۶\ m$

(۳) گزینهٔ : $۲۳\ mm = ۲۳ \times (\frac{۱۰^{-۳}}{۱}) = ۰/۰۲۳\ m$

(۴) گزینهٔ : $۷/۴\ cm = ۷/۴ \times (\frac{۱۰^{-۲}}{۱}) = ۰/۰۷۴\ m$

باتوجه‌به گزینه‌ها، تعداد رقم اعشار گزینه (۲) از بقیه کمتر است. پس دقت دانش‌آموزی که این عدد را گزارش کرده، از بقیه کمتر بوده است.

۲۶ گزینه ۲

بررسی دقت‌های اندازه‌گیری در گزینه‌ها:

"۱" گزینهٔ : $۱ \times (۱۰^{-۲})^{۲}\ \mathrm{m}^{۲} = ۱ \times ۱۰^{-۴}\ \mathrm{m}^{۲} = ۱۰^{-۴}\ \mathrm{m}^{۲}$

"۲" گزینهٔ : $۱۰^{-۱} \times (۱۰^{-۳})^{۲}\ \mathrm{m}^{۲} = ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{m}^{۲} = ۱۰^{-۷}\ \mathrm{m}^{۲}$

"۳" گزینهٔ : $۱۰^{-۲} \times ۱۰^{-۳} \times (۱۰^{۶})^{۲}\ \mathrm{m}^{۲} = ۱۰^{-۵} \times ۱۰^{۱۲}\ \mathrm{m}^{۲} = ۱۰^{۷}\ \mathrm{m}^{۲}$

"۴" گزینهٔ : $۱۰^{-۳} \times ۱۰^{-۶} \times (۱۰^{۹})^{۲}\ \mathrm{m}^{۲} = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{-۶} \times ۱۰^{+۱۸} = ۱۰^{۹}\ \mathrm{m}^{۲}$

۲۷ گزینه ۱

$$\text{آهنگ تغییرات حجم} = \frac{\text{تغییرات حجم}}{\text{زمان}} \Rightarrow ۱۰۰ \times ۱۰^{-۶} = \frac{۶۰ \times ۱۰^{-۳}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta t = ۶۰۰\,\mathrm{s} = ۱۰\ \mathrm{min}$$

۲۸ گزینه ۲

هر لیتر (با نماد L) برابر ۱۰۰۰ سانتی‌متر مکعب است.

هرگاه تغییرات یک کمیت فیزیکی را باگذشت زمان بررسی کنیم، می‌گوییم آهنگ تغییرات آن را بررسی کرده‌ایم. در مورد خروج آب از شلنگ، حجم آب بیرون ریخته باگذشت زمان موردتوجه است. با استفاده از تبدیل زنجیره‌ای، می‌توان گفت:

$$۲۰۰\ \frac{\mathrm{cm}^{۳}}{\mathrm{s}} = ۲۰۰\ \frac{\mathrm{cm}^{۳}}{\mathrm{s}} \times (۱) \times (۱) = ۲۰۰\ \frac{\cancel{\mathrm{cm}^{۳}}}{\cancel{\mathrm{s}}} \times \underbrace{\left(\frac{۱\,\mathrm{L}}{۱۰۰۰\,\cancel{\mathrm{cm}^{۳}}}\right)}_{\downarrow} \times \underbrace{\left(\frac{۶۰\,\cancel{\mathrm{s}}}{۱\ \mathrm{min}}\right)}_{\downarrow} = ۱۲\ \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}}$$

$$۱\,\mathrm{Lit} = ۱۰۰۰\,\mathrm{cm}^{۳} \Rightarrow \frac{۱\,\mathrm{L}}{۱۰۰۰\,\mathrm{cm}^{۳}} = ۱\ ,\ ۱\ \mathrm{min} = ۶۰\,\mathrm{s} \Rightarrow \frac{۶۰\,\mathrm{s}}{۱\ \mathrm{min}} = ۱$$

۲۹ گزینه ۲

توجه: برای پاسخگویی به سؤالاتی که تغییرات برحسب درصد داده یا خواسته شده است، بهتر است حالت اول آن کمیت را برابر با ۱۰۰ در نظر بگیریم و تغییرات یا حالت دوم آن کمیت را پیدا کنیم. اگر به‌عنوان‌مثال حالت دوم ۱۴۵ باشد، می‌گوییم ۴۵ درصد افزایش داشته است و یا اگر حالت دوم ۷۰ باشد، می‌گوییم ۳۰ درصد کاهش پیدا کرده است.

هرگاه در اثر انبساط، حجم جسمی تغییر کند، جرم آن ثابت می‌ماند و خواهیم داشت:

$$\frac{\rho_{۲}}{\rho_{۱}} = \frac{V_{۱}}{V_{۲}} \xrightarrow[\rho_{۱}\ ,\ \rho_{۲}=۱۰۰]{V_{۱}=۱۰۰\ ,\ V_{۲}=۱۶۰} \frac{\rho_{۲}}{۱۰۰} = \frac{۱۰۰}{۱۶۰}$$

$$\Rightarrow \rho_{۲} = \frac{۱۰۰۰۰}{۱۶۰} = ۶۲/۵ \Rightarrow ۱۰۰ - ۶۲/۵ = ۳۷/۵$$

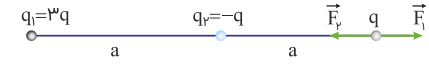
یعنی چگالی ۳۷/۵ درصد کم شده است.

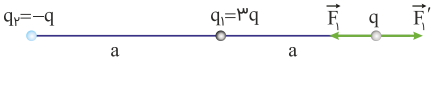
۳۰ گزینه ۱

$$۱\,\mathrm{AU} = ۲ \times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{m}$$

$$\mathrm{d} = ۲/۶ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{Tm} \times \frac{۱۰^{۱۲}\,\mathrm{m}}{۱\,\mathrm{Tm}} \times \frac{۱\,\mathrm{AU}}{۲ \times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{m}} = ۱/۳ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{AU}$$

۳۱ گزینه ۳





$$\begin{cases} F_۱ = k\dfrac{|q_۱||q|}{(۲a)^۲} = k\dfrac{۳q\times q}{۴a^۲} = \dfrac{۳}{۴}k\dfrac{q^۲}{a^۲} \\ F_۲ = k\dfrac{|q_۲||q|}{a^۲} = k\dfrac{q\times q}{a^۲} = k\dfrac{q^۲}{a^۲} \end{cases} \Rightarrow F_T = F_۲ - F_۱ = \dfrac{۱}{۴}k\dfrac{q^۲}{a^۲}$$

در حالت دوم جای بارها را تغییر می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F'_۱ = k\dfrac{|q_۱||q|}{a^۲} = k\dfrac{۳q\times q}{a^۲} = ۳k\dfrac{q^۲}{a^۲} \\ F'_۲ = k\dfrac{|q_۲||q|}{(۲a)^۲} = k\dfrac{q\times q}{۴a^۲} = \dfrac{۱}{۴}k\dfrac{q^۲}{a^۲} \end{cases} \Rightarrow F' = F'_۱ - F'_۲ = ۳k\dfrac{q^۲}{a^۲} - \dfrac{۱}{۴}k\dfrac{q^۲}{a^۲} = \dfrac{۱۱}{۴}k\dfrac{q^۲}{a^۲}$$

$$\Rightarrow \dfrac{F'}{F} = \dfrac{\frac{۱۱}{۴}k\frac{q^۲}{a^۲}}{\frac{۱}{۴}k\frac{q^۲}{a^۲}} = ۱۱$$

۳۲ گزینه ۱

بررسی گزینه‌های نادرست:

ب) نیروی الکتریکی وارد بر بار مثبت، در جهت میدان الکتریکی است.

د) در یک رسوب‌دهندهٔ الکترواستاتیکی، نیروی الکتریکی عامل مؤثر در جداسازی ذرات معلق در گازهای خروجی است نه تفاوت جرم!

۳۳ گزینه ۴

چون اندازهٔ بارها ثابت است و فقط فاصلهٔ بین آن‌ها تغییر می‌کند، با استفاده از رابطهٔ مقایسه‌ای قانون کولن داریم:

$$F = k\dfrac{q_۱q_۲}{r^۲} \Rightarrow \dfrac{F'}{F} = \left(\dfrac{r}{r'}\right)^۲ = \left(\dfrac{AB}{BC}\right)^۲ = (\tan ۳۷^\circ)^۲ = \left(\dfrac{۳}{۴}\right)^۲ = \dfrac{۹}{۱۶}$$

۳۴ گزینه ۲

برای حل تست‌های ترکیبی حرکت‌شناسی و الکتریسیتهٔ ساکن معمولاً از قضیهٔ کار- انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم. مطابق این قضیه، کار برآیند نیروهای وارد بر یک جسم برابر تغییر انرژی جنبشی آن است.

$$W_{\text{کل}} = \Delta K$$

در مرحلهٔ اول:
کار نیروی الکتریکی F_E در جابه جایی بار q و به اندازهٔ d در راستای خطوط میدان از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$W_E = F_E d\cos\theta = |q|Ed\cos\theta$$

اگر بار به‌خودی‌خود رها شود و در جهت نیروی الکتریکی به حرکت درآید، آنگاه:

$$\theta = ۰ \Rightarrow \cos\theta = ۱ \Rightarrow W_E = |q|Ed$$

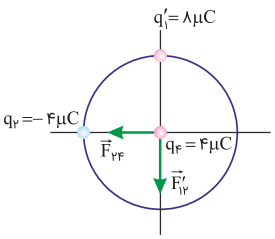
و درنهایت بر اساس رابطه‌های بالا داریم:

$$\begin{cases} W_{AB} = K_B - K_A \Rightarrow |q|E(\overline{AB}) = \frac{۱}{۲}mv_B^۲ \\ W_{AM} = K_M - K_A \Rightarrow |q|E(\overline{AM}) = \frac{۱}{۲}mv_M^۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = (\frac{v_B}{v_M})^۲$$

$$\Rightarrow ۲ = (\frac{v_B}{v_M})^۲ \Rightarrow \frac{v_B}{v_M} = \sqrt{۲}$$

۳۵ گزینه ۴

گام اول: چون فاصله بار $q_۴$ از بارهای $q_۳$, $q_۱$ یکسان است، $q_۳$ را حذف کرده و به جای $q_۱$ بار $q'_۱ = ۸ - ۵ = ۳\,\mu C$ را قرار می‌دهیم.
گام دوم: جهت و اندازهٔ نیروهایی که بارهای $q'_۱$ و $q_۲$ به بار $q_۴$ وارد می‌کنند را مشخص می‌کنیم:



$$F'_{۱۴} = ۹۰\frac{|q'_۱||q_۴|}{r^۲} = ۹۰\frac{۳\times۴}{۲۰\times۲۰} = ۲/۷\,N$$

$$F_{۲۴} = ۹۰\frac{|q_۲||q_۴|}{r^۲} = ۹۰\frac{۴\times۴}{۲۰\times۲۰} = ۳/۶\,N$$

گام سوم: باتوجه‌به اندازه نیروهای به‌دست‌آمده و جهت هر یک از آن‌ها بردار نیروی وارد بر بار $q_۴$ را می‌نویسیم:

$$\vec{F} = -۳/۶\vec{i} - ۲/۷\vec{j}$$

www.alirezaafshar.org

۳۶ گزینه ۱

گام اول

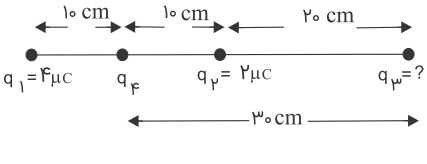
الف) برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۴$ برابر صفر است $\leftarrow \vec{F}_{۱,۴}+\vec{F}_{۲,۴}+\vec{F}_{۳,۴}=۰$

ب) بار $q_۳$ چند میکروکولن است؟ $\leftarrow q_۳=?\mu C$

گام دوم

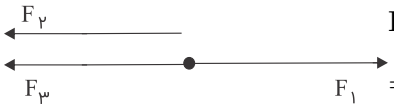
راه‌حل اول:

طبق شکل برای تعیین جهت نیروی الکتریکی ناشی از بار $q_۳$ وارد بر بار $q_۴$، اندازهٔ نیروهای $F_{۱۴}$ و $F_{۲۴}$ را مقایسه می‌کنیم.



$$\begin{cases}|F_{۱۴}|=\left|k\frac{q_۱q_۴}{r_۱^۲}\right|=\frac{۹\times۱۰^۹\times۴\times۱۰^{-۶}\times q_۴}{(۱۰^{-۱})^۲}=۳/۶\times۱۰^۶\times q_۴\,(N/C)\\ |F_{۲۴}|=\left|k\frac{q_۲q_۴}{r_۲^۲}\right|=\frac{۹\times۱۰^۹\times۲\times۱۰^{-۶}\times q_۴}{(۱۰^{-۱})^۲}=۱/۸\times۱۰^۶\times q_۴\,(N/C)\end{cases}\Rightarrow |E_۱|>|E_۲|$$

طبق نتایج به‌دست‌آمده، جهت نیروی الکتریکی ناشی از بار $q_۳$ هم‌جهت با $F_{۲۴}$ باید باشد تا بردار $F_{۱۴}$ را خنثی کند. بنابراین بار $q_۳$ مثبت است و اندازهٔ آن برابر است با:



$$F_{۳۴}+F_{۲۴}=F_{۱۴}\Rightarrow F_{۳۴}+۱/۸\times۱۰^۶\times q_۴=۳/۶\times۱۰^۶\times q_۴$$
$$\Rightarrow F_{۳۴}=۱/۸\times۱۰^۶\times q_۴$$

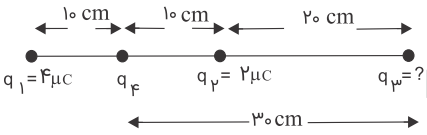
درنتیجه بار $q_۳$ برابر است با:

$$|F_{۳۴}|=\left|k\frac{q_۳q_۴}{r_۳^۲}\right|\Rightarrow ۱/۸\times۱۰^۶\times \cancel{q_۴}=\frac{۹\times۱۰^۹\times q_۳\times \cancel{q_۴}}{(۳\times۱۰^{-۱})^۲}$$
$$\Rightarrow q_۳=۱/۸\times۱۰^{-۵}=۱۸\mu C$$

راه‌حل دوم:

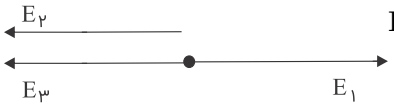
می‌توان از طریق مقایسهٔ میدان‌ها نیز به پاسخ رسید:

کافی است طبق شکل برای تعیین جهت بردار ناشی از میدان الکتریکی بار $q_۳$، اندازهٔ میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ را محاسبه و مقایسه می‌کنیم.



$$|E|=\left|k\frac{q}{r^۲}\right|\Rightarrow\begin{cases}|E_۱|=\left|k\frac{q_۱}{r_۱^۲}\right|=\frac{۹\times۱۰^۹\times۴\times۱۰^{-۶}}{(۱۰^{-۱})^۲}=۳/۶\times۱۰^۶ N/C\\ |E_۲|=\left|k\frac{q_۲}{r_۲^۲}\right|=\frac{۹\times۱۰^۹\times۲\times۱۰^{-۶}}{(۱۰^{-۱})^۲}=۱/۸\times۱۰^۶ N/C\end{cases}\Rightarrow |E_۱|>|E_۲|$$

طبق نتایج به‌دست‌آمده، جهت میدان ناشی از بار $q_۳$ هم‌جهت با $E_۲$ باید باشد تا بردار $E_۱$ را خنثی کند. بنابراین بار $q_۳$ مثبت است و اندازهٔ آن برابر است با:



$$E_۳+E_۲=E_۱\Rightarrow E_۳+۱/۸\times۱۰^۶=۳/۶\times۱۰^۶\Rightarrow E_۳=۱/۸\times۱۰^۶$$

درنتیجه بار $q_۳$ برابر است با:

$$|E_۳|=\left|k\frac{q_۳}{r_۳^۲}\right|\Rightarrow ۱/۸\times۱۰^۶=\frac{۹\times۱۰^۹\times q_۳}{(۳\times۱۰^{-۱})^۲}$$
$$\Rightarrow q_۳=۱/۸\times۱۰^{-۵}=۱۸\mu C$$

۳۷ گزینه ۱

در حالت اول هنگامی‌که گلوله را نزدیک می‌کنیم پدیدهٔ القا صورت می‌گیرد و یکدیگر را جذب می‌کنند. اما وقتی باهم تماس پیدا می‌کنند بار مثبت گلوله بین گلوله و کره توزیع می‌شود و بار هر دو مثبت می‌شود و یکدیگر را دفع می‌کنند.

۳۸ گزینه ۲

کرهٔ شیشه‌ای جسم نارسانا است؛ بنابراین بار الکتریکی داده‌شده در همان قسمت ارائهٔ بار می‌ماند و به سایر نقاط منتقل نمی‌شود.

۳۹ گزینه ۲

نیروی الکتریکی بین دو بار الکتریکی هنگامی بیشینه است که اندازه هر دو بار الکتریکی با یکدیگر برابر باشند یعنی:

$$q'_۱ = q'_۲ = q = \frac{q_۱ + q_۲}{۲} = \frac{۲۰ + ۸}{۲} = ۱۴\ \mu C$$

یعنی $۶\ \mu C\ (= ۲۰ - ۱۴)$ باید از بار الکتریکی $q_۱$ به بار الکتریکی $q_۲$ منتقل شود.

$$\frac{\Delta q}{q_۱} \times ۱۰۰ = \frac{۶}{۲۰} \times ۱۰۰ = \%۳۰$$

۴۰ گزینه ۴

میدان حاصل از بار $q_۱$ را با $\vec{E}_۱$ و میدان حاصل از بار $q_۲$ را با $\vec{E}_۲$ نشان می‌دهیم:

$$\vec{E} = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ \quad (I)$$

طبق رابطهٔ $E = k\frac{q}{r^۲}$، بزرگی میدان حاصل از بار q در هر نقطه با مجذور فاصلهٔ آن نقطه از بار نسبت عکس دارد. بنابراین وقتی $q_۱$ در نقطهٔ B قرار می‌گیرد، فاصله‌اش از نقطهٔ M نصف و بزرگی میدان آن در نقطهٔ M، ۴ برابر می‌شود.

$$\frac{E'_۱}{E_۱} = \left(\frac{r_۱}{r'_۱}\right)^۲ = \left(\frac{۲r}{r}\right)^۲ \Rightarrow E'_۱ = ۴E_۱$$

به همین ترتیب، وقتی بار $q_۲$ در نقطهٔ A قرار می‌گیرد، بزرگی میدان آن $\frac{۱}{۴}$ برابر می‌شود.

$$\frac{E'_۲}{E_۲} = \left(\frac{r_۲}{r'_۲}\right)^۲ = \left(\frac{r}{۲r}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow E'_۲ = \frac{۱}{۴}E_۲$$

اگر بخواهیم بردارها را در حالت‌های اولیه و ثانویه باهم مقایسه کنیم، باید به این موضوع توجه کنیم که با جابه‌جایی هر بار میدان حاصل از آن در نقطهٔ M تغییر جهت می‌دهد؛ پس:

$$\vec{E}'_۱ = -۴\vec{E}'_۱ \ , \ \vec{E}'_۲ = -\frac{۱}{۴}\vec{E}_۲$$
$$\vec{E}' = \vec{E}'_۱ + \vec{E}'_۲ = ۲\vec{E} \Rightarrow -۴\vec{E}_۱ - \frac{۱}{۴}\vec{E}_۲ = ۲\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -۲\vec{E}_۱ - \frac{۱}{۸}\vec{E}_۲ \quad (II)$$
$$(I)\ ,\ (II) = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ = -۲\vec{E}_۱ - \frac{۱}{۸}\vec{E}_۲ \Rightarrow ۳\vec{E}_۱ = -\frac{۹}{۸}\vec{E}_۲ \Rightarrow \vec{E}_۱ = -\frac{۳}{۸}\vec{E}_۲$$

چون $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ در خلاف جهت یکدیگرند، بارهای $q_۱$ و $q_۲$ همنام هستند و $q_۱q_۲ > ۰$ است (اگر بارها در یک طرف M بودند، میدان‌هایشان هم‌جهت می‌شد)

$$\frac{E_۱}{E_۲} = \left(\frac{q_۱}{q_۲}\right)\left(\frac{r_۲}{r_۱}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۸} = \left(\frac{q_۱}{q_۲}\right) \times \left(\frac{r}{۲r}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۸} = \frac{q_۱}{q_۲} \times \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{q_۱}{q_۲} = \frac{۳}{۲}$$

۴۱ گزینه ۴

ابتدا شمار الکترون‌های تولیدشده در نیم‌واکنش اکسایش را حساب می‌کنیم:

$$Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$$

شمار الکترون‌های تولیدشده در نیم‌واکنش اکسایش برابر است با:

$$0/325\,g\,Zn \times \frac{1\,mol\,Zn}{65\,g\,Zn} \times \frac{2\,mol\,e^-}{1\,mol\,Zn} = 0/01\,mol\,e^-$$

این مقدار الکترون در نیم‌واکنش کاهش مصرف شده است.

$$V^{5+}(aq) + ne^- \rightarrow V^{(5-n)+}$$

$$\text{شماره مول‌های } V^{5+} = 200\,mL \times \frac{1\,L}{1000\,mL} \times \frac{0/025\,mol}{1\,L} = 0/005\,mol\,V^{5+}$$

$$n = \frac{\text{شمار مول الکترون‌ها}}{\text{شمار مول } V^{5+}} = \frac{0/01}{0/005} = 2$$

$$\Rightarrow V^{5+}(aq) + 2e^- \rightarrow V^{3+}(aq)$$

بنابراین رنگ نهایی محلول سبز است.

۴۲ گزینه ۳

$$Zn(s) + 2AgNO_3(aq) \rightarrow Zn(NO_3)_2(aq) + 2Ag(s)$$

باتوجه‌به معادلهٔ واکنش و ضریب استوکیومتری مواد، به‌ازای هر ۲ مول $AgNO_3$، ۱ مول Zn $(65\,g)$ و ۲ مول نقره $(2 \times 108 = 216\,g)$ تولید می‌شود (البته با فرض ۱۰۰٪ در نظر گرفتن بازده واکنش) بنابراین ضمن انجام واکنش ۱۵۱ گرم به جرم تیغهٔ روی افزوده می‌شود:

$$\text{افزایش جرم تیغهٔ روی} = 216 - 65 = 151\,g$$

بنابراین:

روش اول (کسر تبدیل):

$$200\,mL\,AgNO_3(aq) \times \frac{0/2\,mol\,AgNO_3}{1000\,mL\,AgNO_3(aq)} \times \frac{151\,g\ \text{جرم (افزایش))}}{2\,mol\,AgNO_3} \times \underbrace{\frac{x}{100}}_{\substack{\text{بازده درصدی} \\ \text{واکنش}}} = 2/416\,g \Rightarrow x = \%80$$

روش دوم (تناسب):

$$\frac{\overbrace{M \times V\,(mL)}^{AgNO_3}}{\text{ضریب} \times 1000} = \frac{mol\,Zn}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0/2 \times 200}{2 \times 1000} = \frac{x\,mol\,Zn}{1} \Rightarrow x = 0/02\,mol\,Zn$$

$$\begin{matrix} 1\,mol\,Zn & \sim & 151\,g\ (\text{تغییر جرم}) \\ 0/02\,mol & & x \end{matrix} \Rightarrow x = 3/02\,g\ (\text{مقدار نظری})$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{2/416}{3/02} \times 100 = \%80$$

www.alirezaafshar.org

۴۳ گزینه ۳

تمامی عبارت‌های مطرح‌شده به‌جز عبارت "ت" درست هستند.

بررسی عبارت نادرست:

ت) E° سلول‌های گالوانی عددی مثبت و E° سلول‌های الکترولیتی عددی منفی است.

۴۴ گزینه ۲

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست. سلول سوختی نوعی سلول گالوانی است.

ب) درست. سلول‌های سوختی افزون بر کارایی بیشتر می‌توانند ردپای کربن دی‌اکسید را کاهش دهند و منبع انرژی سبز به شمار می‌روند.

پ) درست. سوزاندن گاز هیدروژن در موتور درون‌سوز بازدهی نزدیک به ۲۰ درصد دارد درحالی‌که اکسایش آن در سلول سوختی بازده را تا سه برابر یعنی نزدیک به ۶۰ درصد افزایش می‌دهد.

ت) نادرست. سلول‌های سوختی انرژی شیمیایی را ذخیره نمی‌کنند؛ اما باتری‌ها می‌توانند انرژی شیمیایی را ذخیره نمایند.

۴۵ گزینه ۴

عبارت‌های "الف"، "پ" و "ت" نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) لیتیم فلز بسیار واکنش‌پذیری است و با آب به‌شدت واکنش می‌دهد؛ بنابراین در باتری لیتیمی از محلول آبی به‌عنوان الکترولیت نمی‌توان استفاده کرد.

ب) درست.

پ) در هر تن نمک دریاچهٔ قم بیش از ۲۰۰ گرم لیتیم وجود دارد.

ت) همهٔ باتری‌های دگمه‌ای از نوع لیتیمی نیستند؛ مانند باتری دگمه‌ای روی- نقره که واکنش زیر در آن انجام می‌شود.

$$Zn(s) + Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s) + 2Ag(s)$$

۴۶ گزینه ۱

معادلهٔ واکنش انجام‌شده در این سلول به‌صورت زیر است:

$$\underset{-4}{CH_4(g)} + 2O_2(g) \rightarrow \underset{+4}{CO_2(g)} + 2H_2O(g) \qquad 8\uparrow$$

تغییر عدد اکسایش کربن در این واکنش نشان می‌دهد که به ازای اکسایش هر مول متان، ۸ مول الکترون از طریق مدار بیرونی از آند به کاتد منتقل می‌شود.

$$\text{الکترون منتقل‌شده از طریق مدار بیرونی} = 0/4\ \text{mol}\ CH_4 \times \frac{8\ \text{mol}\ e^-}{1\ \text{mol}\ CH_4} = 3/2\ \text{mol}\ e^-$$

$$\text{جرم اکسیژن مصرفی} = 0/4\ \text{mol}\ CH_4 \times \frac{2\ \text{mol}\ O_2}{1\ \text{mol}\ CH_4} \times \frac{32\ \text{g}\ O_2}{1\ \text{mol}\ O_2} = 25/6\ \text{g}\ O_2$$

۴۷ گزینه ۴

محلول آندی به دلیل ورود یون‌های Zn^{2+} جداشده از تیغهٔ روی از پتانسیل مثبت برخوردار می‌شود. ازاین‌رو کاتیون‌های Cu^{2+} به دلیل دافعه توانایی عبور از دیوارهٔ متخلخل و حرکت به‌سمت محل آندی را ندارند.

همچنین یون‌هایی مانند سولفات یا نیترات که توانایی عبور از دیوارهٔ متخلخل از سمت محلول کاتدی به محلول آندی را دارند، در جهت عکس نمی‌توانند جابه‌جا شوند که دلیل آن نیز دافعه میان محلول کاتدی با پتانسیل منفی و این یون است.

۴۸ گزینه ۱

طبق فرض سوال، عنصر M یک فلز اصلی از جدول دوره‌ای است. از طرف دیگر فرمول اکسید این عنصر $(M_۲O)$ نشان می‌دهد که عنصر M یک فلز یک‌ظرفیتی از گروه اول (فلزهای قلیایی) است. ازآنجاکه فلزهای قلیایی واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به عنصرهای واسطه (مانند مس) دارند؛ بنابراین در واکنش مربوط به گزینهٔ "۱"، فلز مس نمی‌تواند جایگزین فلز سدیم در اکسید این ترکیب شده و آن را آزاد کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۲: HX، فرمول عمومی هیدروهالیک اسید (HF، HCl، HBr و HI) است. فلزهایی با E° منفی (مانند Mg)، ضمن واکنش با اسیدها جایگزین هیدروژن اسید شده و آن را به‌صورت گاز هیدروژن آزاد می‌کنند.

گزینهٔ ۳: M یک فلز قلیایی است. فلزهای قلیایی به شدت با آب واکنش داده، هیدروکسید فلز و گاز هیدروژن تولید می‌کنند.

گزینهٔ ۴: در معادلهٔ داده‌شده، NaX، هالید فلز سدیم (مانند $NaCl$ و $NaBr$) و $X_۲$ عنصر هالوژن است (مانند $Cl_۲$ و $Br_۲$) فلزهای قلیایی (به‌عنوان واکنش‌پذیرترین فلزها) با هالوژن‌ها (به‌عنوان واکنش‌پذیرترین نافلزها)، واکنش داده و هالید فلز قلیایی تولید می‌کنند.

۴۹ گزینه ۴

$$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}}$$

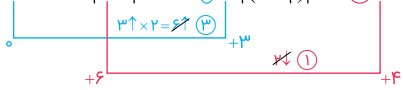
باتوجه‌به پتانسیل‌های الکترودی داده شده، اختلاف پتانسیل کاهشی استاندارد میان نیم‌واکنش‌های a و d بیشتر از بقیه است و از اتصال این دو نیم‌سلول بالاترین E° به‌دست می‌آید.

$$E^\circ(Mn-Sn) = E^\circ_{Sn} - E^\circ_{Mn} = ۰/۱۵ - (-۱/۱۸) = ۱/۳۳\ V$$

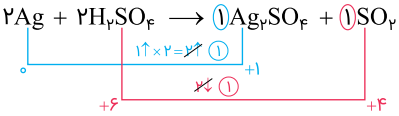
۵۰ گزینه ۲

واکنش‌های a و b از روش وارسی موازنه نمی‌شوند؛ بنابراین برای موازنه این واکنش از روش تغییر عدد اکسایش عنصرها استفاده می‌کنیم:

a) $۲Cr + ۶H_۲SO_۴ \longrightarrow ①Cr_۲(SO_۴)_۳ + ③SO_۲ + ۶H_۲O$



b) $۲Ag + ۲H_۲SO_۴ \longrightarrow ①Ag_۲SO_۴ + ①SO_۲ + ۲H_۲O$



c) $۲H_۳PO_۴ + ۳Zn(OH)_۲ \rightarrow Zn_۳(PO_۴)_۲ + ۶H_۲O$

d) $۴NH_۳ + ۵O_۲ \rightarrow ۴NO + ۶H_۲O$

مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ d، بیشترین (برابر ۱۹) و در معادلهٔ b، کمترین (برابر ۸) است.

۵۱ گزینه ۲

باتوجه‌به توضیحات داده‌شده، عنصر X در دورهٔ چهارم جدول تناوبی جای دارد حال شروع به نوشتن آرایش الکترونی این عنصر می‌کنیم:

$$X = ۱s^۲\ ۲s^۲۲p^۶\ ۳s^۲۳p^۶\ \underbrace{۳d^۵}_{\substack{۵\text{ الکترون}\\ \text{با } l=۲}}\ \ ۴s^۱$$

بنابراین عدد اتمی عنصر X برابر ۲۴ است.

۵۲ گزینه ۳

$$_۸O \xrightarrow{+۲e} {}_۸O^{۲-} \qquad e = ۸ + ۲ = ۱۰$$

www.alirezaafshar.org

۵۳ گزینه ۲

با فاصله گرفتن از هسته، انرژی الکترون‌ها افزایش و به‌تبع پایداری آن‌ها کاهش می‌یابد.

۵۴ گزینه ۲

$$^{۶۳}A^{+}: \begin{cases} n+p=۶۳ \\ n-e=۶ \\ e=p-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+p=۶۳ \\ n-p=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=۳۴ \\ p=۲۹ \end{cases}$$

$$^{۲۹}A: ۱s^{۲}\ ۲s^{۲}۲p^{۶}\ ۳s^{۲}۳p^{۶}۳d^{۱۰}\ ۴s^{۱} \Rightarrow l=۰ \text{ با } \text{شمار الکترون} = ۷$$

۵۵ گزینه ۲

عنصری که در تناوب ۳ و گروه ۱۶ باشد، گوگرد است:

$$^{۱۶}S: \underline{۱s^{۲}}\ \underline{۲s^{۲}}\underline{۲p^{۶}}\ \underline{۳s^{۲}}۳p^{۴}$$

باتوجه‌به آرایش الکترونی رسم‌شده، تعداد ۴ زیرلایهٔ این عنصر از الکترون پر است؛ اما اگر تعداد زیرلایه‌های اشغال‌شده از الکترون را بخواهند، ۵ زیرلایه می‌شود.

اگر عنصری بخواهد پرتوزا باشد، اغلب $N \geq ۱/۵Z$ برای آن صادق است:

$$N = \frac{۳}{۲} \times ۱۶ = ۲۴$$

۵۶ گزینه ۴

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. اغلب هسته‌هایی که نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌های آن‌ها برابر یا بیشتر از ۱/۵ باشد، ناپایدارند.

گزینهٔ ۲: نادرست. $^{۲}_{۱}H$، درصد فراوانی برابر با ۰/۰۱۱۴ درصد در طبیعت دارد.

گزینهٔ ۳: نادرست. در بین ایزوتوپ‌های هیدروژن کمترین میزان پایداری متعلق به $^{۷}_{۱}H$ است.

۵۷ گزینه ۴

$$A_۱ \rightarrow A_۱ \text{ عدد جرمی} = ۲ \times A_۱ \text{ عدد اتمی} = ۲ \times ۲۰ = ۴۰$$

$$A_۲ \text{ شمار نوترون} = A_۱ \text{ شمار نوترون} + ۱۰ = ۲۰ + ۱۰ = ۳۰$$

$$^{۲۰}A_۲ \rightarrow \begin{cases} A_۲ \text{ عدد اتمی} = A_۱ \text{ عدد اتمی} = ۲۰ \\ A_۲ \text{ عدد جرمی} = A_۱ \text{ عدد اتمی} + A_۲ \text{ شمار نوترون} = ۲۰ + ۳۰ = ۵۰ \end{cases}$$

باتوجه‌به اینکه به ازای هر ایزوتوپ $A_۱$، سه ایزوتوپ $A_۲$ در طبیعت یافت می‌شود؛ یعنی اگر فراوانی ایزوتوپ $A_۱$ را برابر x فرض کنیم، فراوانی ایزوتوپ $A_۲$ ، $۳x$ خواهد بود.

$$x + ۳x = ۴x = ۱۰۰ \Rightarrow F_۱ = x = ۲۵ \ , \ F_۲ = ۳x = ۷۵$$

$$\text{جرم اتمی میانگین} = \frac{F_۱M_۱ + F_۲M_۲}{F_۱ + F_۲} = \frac{۲۵ \times ۴۰ + ۷۵ \times ۵۰}{۱۰۰} = ۴۷/۵$$

۵۸ گزینه ۲

$$^{۵۶}X^{۲+}: \begin{cases} p+n=۵۶ \\ p=e+۲ \\ n-e=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+e=۵۴ \\ n-e=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=۳۰ \\ p=۲۶ \\ e=۲۴ \end{cases}$$

پس عنصر X همان $_{۲۶}Fe$ است. با نوشتن آرایش الکترونی آن می‌توان به جایگاه آن در جدول تناوبی و به‌تبع، گروه آن دست یافت.

$$_{۲۶}Fe: ۱s^۲\ ۲s^۲۲p^۶\ ۳s^۲۳p^۶\underbrace{۳d^۶\ ۴s^۲} \Rightarrow \text{گروه هشتم}$$

۵۹ گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: هیدروژن دارای سه ایزوتوپ طبیعی است ولی ایزوتوپ $^{۳}_{۱}H$ ناپایدار است.

گزینهٔ ۲: منیزیم دارای سه ایزوتوپ طبیعی و پایدار است.

گزینهٔ ۳: کلر دارای دو ایزوتوپ طبیعی و پایدار است.

گزینهٔ ۴: لیتیم دارای دو ایزوتوپ طبیعی و پایدار است.

۶۰ گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست.

$$\text{حداکثر گنجایش الکترونی برای هر لایه با عدد کوانتومی اصلی } n = ۲ \times n^۲$$
$$\text{تعداد زیرلایه برای لایه‌ای با عدد کوانتومی اصلی } n = n$$

$$(n=۳)\ \text{حداکثر گنجایش الکترون برای لایهٔ سوم} = ۲ \times ۳^۲ = ۱۸$$
$$(n=۳)\ \text{تعداد زیرلایه برای لایهٔ سوم} = ۳ \Rightarrow \frac{۱۸}{۳} = ۶$$
$$(n=۴)\ \text{حداکثر گنجایش الکترون برای لایهٔ چهارم} = ۲ \times ۴^۲ = ۳۲$$
$$(n=۴)\ \text{تعداد زیرلایه برای لایهٔ چهارم} = ۴ \Rightarrow \frac{۳۲}{۴} = ۸$$

گزینهٔ ۲: درست.

$$\text{حداکثر گنجایش الکترون برای یک زیرلایه با عدد کوانتومی فرعی } l = ۴l + ۲$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (n=۴)\ \text{حداکثر گنجایش الکترون در لایهٔ چهارم} = ۲ \times ۴^۲ = ۳۲ \\ (l=۳)\ \text{حداکثر گنجایش الکترون در زیرلایهٔ چهارم} = ۴ \times (۳) + ۲ = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow ۳۲ - ۱۴ = ۱۸$$
$$(l=۴)\ \text{حداکثر گنجایش الکترون در زیرلایهٔ پنجم} = ۴ \times (۴) + ۲ = ۱۸$$

گزینهٔ ۳: نادرست. در هنگام پر شدن زیرلایه‌ها از الکترون، زیرلایهٔ ns نسبت به زیرلایهٔ $(n-۱)d$ (در صورت وجود) زودتر پر می‌شود (زیرا مقدار انرژی کمتری دارد و پایدارتر است). همچنین در هنگام خالی شدن آن‌ها از الکترون نیز زیرلایهٔ ns زودتر خالی می‌شود، زیرا پس از گرفتن الکترون در فاصلهٔ دورتری نسبت به هسته قرار می‌گیرد.

گزینهٔ ۴: نادرست. زیرلایه‌ای که حداکثر گنجایش آن برابر ۶ الکترون است، زیرلایهٔ p می‌باشد و برای اتمی که آرایش الکترونی آن به زیرلایهٔ s ختم شود، شمار الکترون‌های لایهٔ ظرفیت برابر مجموع تعداد الکترون‌های زیرلایهٔ p و s در آخرین لایهٔ الکترونی است.

www.alirezaafshar.org

۶۱ گزینه ۱

به‌طور کلی سیکلو آلکان‌ها و آلکن‌های هم‌کربن با یکدیگر ایزومر می‌باشند. در مورد سیکلو هگزان و ۲- هگزن می‌توان گفت هر دوی آن‌ها دارای فرمول مولکولی C_6H_{12} می‌باشند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۲: باتوجه‌به اینکه ۲-هگزن ترکیبی سیرنشده و سیکلوهگزان ترکیبی سیرشده است، واکنش‌پذیری ۲-هگزن بیشتر است.

گزینهٔ ۳: هر دو مولکول آلکن بوده و در ساختار خود پیوند دوگانه دارند و ترکیب سیرنشده محسوب می‌شوند.

گزینهٔ ۴: هر چند در سیکلوهگزان و بنزن، اتم‌های کربن حلقهٔ شش‌ضلعی تشکیل می‌دهند اما بنزن برخلاف سیکلوهگزان سیرنشده است.

۶۲ گزینه ۱

فرمول عمومی آلکن‌ها به‌صورت C_nH_{2n} است.

$$\text{جرم مولی} = 12n + 2n = 14n$$

$$\frac{\overbrace{17/5}^{\text{گرم آلکن}}}{14n} = \frac{88/25}{\underbrace{1410}_{\text{گرمای آزادشده}}} \Rightarrow n = \frac{1410 \times 17/5}{14 \times 88/25} = 2 \Rightarrow C_2H_4$$

۶۳ گزینه ۴

آرایش الکترونی هریک از این عناصر به‌صورت زیر است:

$A: 1s^2$ $\quad$ $B: 1s^2 2s^2 2p^3$

$C: 1s^2\ 2s^2 2p^6\ 3s^2$ $\quad$ $D: 1s^2\ 2s^2 2p^6\ 3s^2 3p^6 3d^8\ 4s^2$

عنصر D یک عنصر واسطه از دورهٔ ۴ و گروه ۱۰ جدول تناوبی است. واکنش‌پذیری این عنصر از عنصر A (که گاز نجیب هلیم است) بیشتر و از عنصر C (که یک فلز قلیایی خاکی است) کمتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: عنصر A همان گاز نجیب هلیم است. مقدار ناچیزی از آن در هوا و مقدار بیشتری در لایه‌های زیرین پوستهٔ زمین وجود دارد. ازاین‌رو منابع زمینی آن از هواکره سرشارتر و برای تولید هلیم در مقیاس صنعتی مناسب‌ترند.

گزینهٔ ۲: یون پایدار عنصر B به‌صورت B^{3-} و یون پایدار C به‌صورت C^{2+} است. هریک از این یون‌ها آرایش الکترونی گاز نئون را کسب کرده‌اند (نه گاز آرگون!) و فرمول ترکیب این دو عنصر به‌صورت C_3B_2 است.

گزینهٔ ۳: عنصر C و D هر دو فلز هستند؛ بنابراین شبکهٔ بلوری آن‌ها شامل آرایش منظمی از کاتیون‌ها در دریایی از الکترون‌های غیرمستقر است.

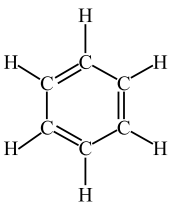
۶۴ گزینه ۳

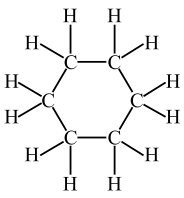
بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) اتم کربن به چهار صورت زیر می‌تواند تشکیل پیوند کووالانسی دهد.

$$-C\equiv\ ,\ =C=\ ,\ -\overset{\|}{C}-\ ,\ -\overset{|}{\underset{|}{C}}-$$

ت) ساختارهای حلقوی زیر هم از جمله هیدروکربن‌های سازندهٔ نفت خام هستند.





۶۵ گزینه ۲

اول درصد جرمی کربن را در پنتان (C_5H_{12}) حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی کربن} = \frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم پنتان}} \times ۱۰۰ = \frac{۵ \times ۱۲}{۷۲} \times ۱۰۰ = \frac{۶۰}{۷۲} \times ۱۰۰ = \%\frac{۶۰۰۰}{۷۲}$$

درصد جرمی کربن در آلکین موردنظر ۵/۵۵ واحد بیشتر از این عدد است. ازآنجاکه می‌دانیم $\frac{a}{۹} = ۰/\bar{a}$، پس می‌توانید عدد ۵/۵۵ را به‌صورت $۰/۵۵۵ \times ۱۰^{+۱}$ یا $\frac{۵}{۹} \times ۱۰^{۱}$ یا $\frac{۵۰}{۹}$ در نظر بگیریم.

بنابراین درصد جرمی کربن در آلکین برابر است با:

$$\frac{۶۰۰۰}{۷۲} + \frac{۵۰}{۹} = \frac{۶۰۰۰}{۷۲} + \frac{\overbrace{۵۰ \times ۸}^{۴۰۰}}{\underbrace{۹ \times ۸}_{۷۲}} = \frac{۶۴۰۰}{۷۲}$$

ازطرفی می‌دانیم درصد جرمی کربن در آلکین $C_nH_{۲n-۲}$ برابر است با:

$$\text{درصد جرمی کربن در } C_nH_{۲n-۲} = \frac{۱۲n}{۱۴n - ۲} \times ۱۰۰$$

بنابراین با مساوی قرار دادن این دو می‌توانیم n را بیابیم:

$$\frac{۱۲n}{۱۴n-۲} \times \cancel{۱۰۰} = \frac{\overset{۶۴}{\cancel{۶۴۰۰}}}{۷۲} \Rightarrow \frac{\overset{۹}{\cancel{۷۲}}}{} \times \frac{\overset{۳}{\cancel{۱۲}}n}{} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۶۴}}}{}(۱۴n - ۲) \Rightarrow ۲۷n = ۲۸n - ۴ \Rightarrow n = ۴$$

بنابراین فرمول آلکین موردنظر $C_۴H_۶$ است.

۶۶ گزینه ۴

گام ۱: فرمول مولکولی پنتن و هپتان، $C_5H_{۱۰}$ و $C_۷H_{۱۶}$ است و جرم مولی آن‌ها به ترتیب ۷۰ و ۱۰۰ گرم بر مول می‌باشد. فرمول درصد جرمی کربن در مخلوط هم به شکل زیر است:

$$\text{درصد جرمی } C = \frac{(\text{درصد جرمی } C \text{ در هپتان} \times \text{جرم هپتان}) + (\text{درصد جرمی } C \text{ در پنتن} \times \text{جرم پنتن})}{\text{جرم هپتان} + \text{جرم پنتن}}$$

گام ۲: جای‌گذاری اعداد به جای مولفه‌های خود:

$$\text{درصد جرمی } C = \frac{(m \times \frac{۵ \times ۱۲ \times ۱۰۰}{۷۰}) + (۲۵ \times \frac{۷ \times ۱۲}{۱۰۰} \times ۱۰۰)}{۲۵ + m} = ۸۵ \Rightarrow \frac{\frac{۶۰۰}{۷}m + ۲۱۰۰}{۲۵ + m} = ۸۵ \Rightarrow m = ۳۵$$

۶۷ گزینه ۳

بررسی عبارت‌ها:

الف) درست. هرچه واکنش‌پذیری فلزی بیشتر باشد، استخراج آن فلز دشوارتر است.

ب) درست.

پ) نادرست. به‌طورکلی در هر واکنش شیمیایی که به‌طور طبیعی انجام می‌شود واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کمتر است. ازآنجاکه واکنش FeO با Na به‌طور طبیعی انجام می‌شود بنابراین واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کمتر است.

$$FeO(s) + ۲Na(s) \xrightarrow{\Delta} Na_۲O(s) + Fe(s)$$

ت) نادرست. واکنش $Na_۲O(s)$ و $C(s)$ به‌طور طبیعی انجام نمی‌شود بنابراین واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها از فراورده‌ها کمتر است.

$$Na_۲O(s) + C(s) \xrightarrow{\Delta} \text{واکنش نمی‌دهد}$$

۶۸ گزینه ۴

فلز آهن در سطح جهان بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد. شناسایی و استخراج آن از سطح زمین موضوع با اهمیتی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. وجود نمونه‌هایی از فلز نقره در طبیعت گزارش شده است.

گزینهٔ ۲: نادرست. تنها فلز طلا به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های زرد لابه‌لای خاک یافت می‌شود.

گزینهٔ ۳: نادرست. آهن اغلب در طبیعت به شکل اکسید یافت می‌شود.

۶۹ گزینه ۴

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. واکنش‌پذیری عنصر سدیم از آلومینیم بیشتر است، لذا شرایط نگهداری دشوارتری نیز دارد.

گزینهٔ ۲: نادرست. واکنش‌پذیری پتاسیم بیشتر از سدیم است، لذا تمایل به تبدیل شدن به ترکیب در پتاسیم بیشتر از سدیم است.

گزینهٔ ۳: نادرست. واکنش‌پذیری فلزات قلیایی (گروه اول جدول تناوبی) از فلزات قلیایی خاکی (گروه دوم جدول تناوبی) بیشتر است.

۷۰ گزینه ۲

پیشرفت صنعت الکترونیک بر اجزایی مبتنی است که از موادی به نام نیمه‌رساناها ساخته می‌شوند.

۷۱ گزینه ۴

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\frac{۶}{a}$ عددی گویا باشد، آنگاه $a = \frac{۶}{\frac{۶}{a}}$ هم عددی گویا است، اما می‌دانیم a عددی گنگ است. از این تناقض نتیجه می‌گیریم $\frac{۶}{a}$ عددی گنگ است. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه "۱":

$$a = ۳\sqrt{۲} \quad , \quad b = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲a - ۳b = ۶\sqrt{۲} - ۶\sqrt{۲} = ۰ \quad \times$$

گزینه "۲":

$$a = ۲^{\sqrt{۲}} \quad , \quad b = \sqrt{۲} \Rightarrow a^b = (۲^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = ۲^۲ = ۴ \quad \times$$

گزینه "۳":

$$a = \sqrt{۲} + ۱ \quad , \quad b = \sqrt{۲} \Rightarrow \frac{a-۱}{b} = \frac{\sqrt{۲}+۱-۱}{\sqrt{۲}} = ۱ \quad \times$$

۷۲ گزینه ۱

فرض کنید a عددی طبیعی باشد به‌طوری‌که $p + ۹ = a^۲$. در این صورت:

$$p = a^۲ - ۹ \Rightarrow p = (a-۳)(a+۳)$$

$$\xrightarrow[a+۳>۱]{p \text{ اول است}} \begin{cases} a-۳ = ۱ \\ p = a+۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ p = ۷ \end{cases}$$

بنابراین $p + ۹$ فقط به ازای $p = ۷$ برابر مربع یک عدد طبیعی است.

www.alirezaafshar.org

۷۳ گزینه ۲

گراف P_9 به شکل زیر است:

نکته: تعداد مسیرهای به طول m در گراف P_n برابر است با: "$n-m$"

بنابراین تعداد مسیرهای به طول ۳ در P_9 برابر ۶ خواهد بود.

این مسیرها عبارت‌اند از:

۱) v_1, v_2, v_3, v_4 ۲) v_2, v_3, v_4, v_5

۳) v_3, v_4, v_5, v_6 ۴) v_4, v_5, v_6, v_7

۵) v_5, v_6, v_7, v_8 ۶) v_6, v_7, v_8, v_9

۷۴ گزینه ۴

مطابق نمودار گراف P_6 داریم:

هر ۶ عضو و ۵ عضوی که از مجموعه رئوس P_6 انتخاب شود، کل شکل را احاطه می‌کند. پس تعداد آن‌ها به‌صورت زیر است:

۱) تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر ۶ عضوی برابر است با: $\binom{6}{6} = 1$

۲) تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر ۵ عضوی برابر است با: $\binom{6}{5} = 6$

۳) همچنین هر ۴ عضوی که انتخاب کنیم نیز کل شکل را احاطه می‌کند، مگر در دو حالت $\{a,b,c,d\}$ و $\{f,e,d,c\}$. پس تعداد کل مجموعه‌های احاطه‌گر ۴ عضوی برابر است با: $\binom{6}{4} - 2 = 13$

بنابراین در کل تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر حداقل ۴ عضوی برابر است با: $1 + 6 + 13 = 20$

۷۵ گزینه ۴

روش اول:

ابتدا باقی‌ماندهٔ ۱۹ بر ۷، یعنی ۵ را برای پایه در نظر می‌گیریم:

$$19^{19} \overset{7}{\equiv} 5^{19} \overset{7}{\equiv} ?$$

$$(5^2 \overset{7}{\equiv} 4 \overset{7}{\equiv} 2^2)^9 \Rightarrow 5^{18} \overset{7}{\equiv} 2^{18} \xrightarrow{\times 5} 5^{19} \overset{7}{\equiv} 5 \times 2^{18}$$

$$(2^3 \overset{7}{\equiv} 1)^6 \Rightarrow 2^{18} \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 5} 5 \times 2^{18} \overset{7}{\equiv} 5$$

و این یعنی باقی‌ماندهٔ 5^{19} بر ۷ برابر ۵ است.

روش دوم:

طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$(5^6 \overset{7}{\equiv} 1)^3 \Rightarrow 5^{18} \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 5} 5^{19} \overset{7}{\equiv} 5$$

۷۶ گزینه ۳

در گراف ساده بین دو رأس بیشتر از یک یال وجود ندارد، روی یال‌ها جهت نداریم و هیچ رأسی دارای طوقه نیست. لذا گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ ساده نیستند.

۷۷ گزینه ۳

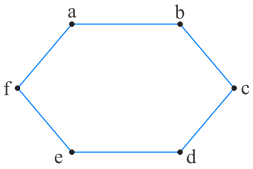
گراف $P_۷$ به‌صورت زیر است، در گراف $P_۷$ مقدار $p = ۷$ و $\Delta = ۲$ است؛ لذا $\gamma \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta + ۱} \right\rceil$ داریم: $\gamma \geq \left\lceil \frac{۷}{۲ + ۱} \right\rceil = ۳$

ازطرفی مجموعهٔ $D = \{V_۲, V_۴, V_۶\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس $\gamma \leq ۳$ است؛ پس باتوجه‌به $\gamma \geq ۳$ و $\gamma \leq ۳$ مقدار $\gamma = ۳$ به دست می‌آید؛ یعنی عدد احاطه‌گری $P_۷$ برابر با ۳ خواهد بود.

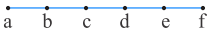
۷۸ گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

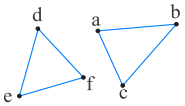
گزینهٔ "۱": گراف $C_۶$ بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد. به‌طورمثال: $\{b, e\}$، $\{a, d\}$ و ...



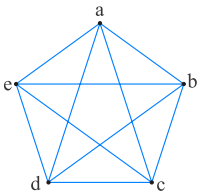
گزینهٔ "۲": در گراف $P_۶$ مطابق شکل، فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم داریم و آن مجموعه $\{b, e\}$ است.



گزینهٔ "۳": گراف ۲- منتظم ناهمبند مرتبهٔ ۶، بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد. مانند: $\{b, e\}$، $\{a, d\}$ و ...



گزینهٔ "۴": گراف کامل $K_۵$ نیز بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد. مانند: $\{a\}$، $\{b\}$ و ...



۷۹ گزینه ۳

بنابر فرض:

$$\begin{cases} a = ۳q_۱ + ۱ \\ a = ۸q_۲ + ۷ \end{cases}$$

اکنون می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ۸a = ۲۴q_۱ + ۸ \\ ۳a = ۲۴q_۲ + ۲۱ \end{cases}$$

با کم کردن برابری‌های بالا به دست می‌آید:

$$۵a = ۲۴(q_۱ - q_۲) - ۱۳ = ۲۴(q_۱ - q_۲) - ۱۳ + ۲۴ - ۲۴$$

$$= ۲۴(\underbrace{q_۱ - q_۲ - ۱}_{q}) - ۱۳ + ۲۴ = ۲۴q + ۱۱$$

چون سمت چپ برابری $۵a = ۲۴q + ۱۱$ بر ۵ بخش‌پذیر است، پس سمت راست هم باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد، لذا q به فرم $۵k + ۱$ است:

$$۵a = ۲۴(۵k + ۱) + ۱۱ = ۲۴ \times ۵k + ۳۵ \Rightarrow a = ۲۴k + ۷$$

یعنی باقی‌ماندهٔ a بر ۲۴ برابر ۷ است.

۸۰ گزینه ۳

معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a\ ,\ m)|b$. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱ : $۳x \overset{۲}{\equiv} ۴\ ,\ (۳\ ,\ ۲) = ۱|۴ \Rightarrow$ جواب دارد.

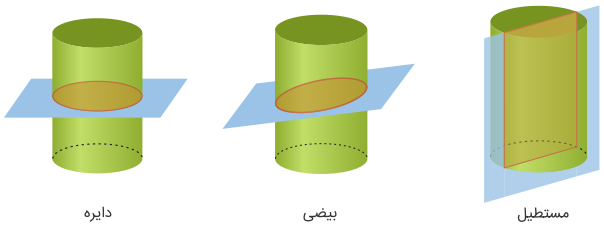
گزینهٔ ۲ : $۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۸\ ,\ (۴\ ,\ ۶) = ۲|۱۸ \Rightarrow$ جواب دارد.

گزینهٔ ۳ : $۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۱\ ,\ (۶\ ,\ ۹) = ۳\not|\ ۱۱ \Rightarrow$ جواب ندارد.

گزینهٔ ۴ : $۵x \overset{۷}{\equiv} ۱\ ,\ (۵\ ,\ ۷) = ۱|۱ \Rightarrow$ جواب دارد.

۸۱ گزینه ۱

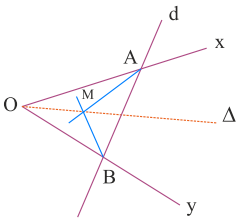
از تقاطع یک صفحه با استوانه مطابق شکل‌های زیر، دایره، بیضی یا مستطیل ساخته می‌شود:



بنابراین تنها دوتا از شکل‌های گفته‌شده ساخته می‌شوند.

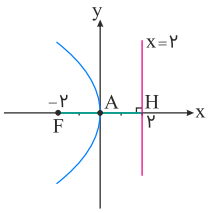
۸۲ گزینه ۲

فرض می‌کنیم نیمسازهای دو زاویهٔ OAB و OBA یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند.



می‌دانیم نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرس‌اند؛ بنابراین نقطهٔ M روی نیمساز زاویهٔ O نیز است؛ پس مکان هندسی نقطهٔ M خط Δ نیمساز زاویهٔ xoy است.

۸۳ گزینه ۳



اولاً از آنجا که خط هادی قائم است، سهمی افقی می‌باشد. از F خطی را بر هادی عمود می‌کنیم تا نقطهٔ H به دست آید. نقطهٔ A یعنی رأس سهمی وسط FH است، پس مطابق شکل $A(۰,۰)$ و درنتیجه فاصلهٔ کانونی سهمی $a = AF = AH = ۲$. چون دهانهٔ سهمی روبه‌چپ باز می‌شود، داریم:

$$y^۲ = -۴ax \Rightarrow y^۲ = -۸x$$

حال مختصات گزینه‌ها را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم.
از بین گزینه‌ها فقط مختصات $(-۲,۴)$ در این معادله صدق می‌کند. زیرا:

$$(۴)^۲ = -۸(-۲) \Rightarrow ۱۶ = ۱۶$$

۸۴ گزینه ۲

نکته: در معادلهٔ گسترده دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$، مرکز دایره برابر با $O(\frac{-a}{۲}, \frac{-b}{۲})$ و شعاع دایره برابر با $r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}$ است.

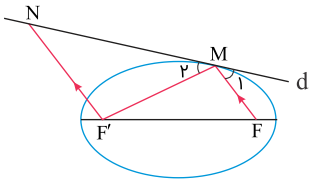
$$x^۲ + y^۲ - ۴y - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O'(۰, ۲) \\ r' = ۴ \end{cases}$$

دو دایره، سه مماس مشترک دارند، پس مماس خارجی هستند و $۴\sqrt{۲}$ اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها است:

$$۴\sqrt{۲} = \sqrt{۴rr'} \Rightarrow ۴\sqrt{۲} = \sqrt{۱۶r} \Rightarrow ۴\sqrt{۲} = ۴\sqrt{r} \Rightarrow r = ۲$$

۸۵ گزینه ۱

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. چون d در نقطهٔ M مماس بر بیضی است، پس:



$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \quad (1)$$

ازطرف‌دیگر $MF \| NF'$ و NM مورب است، پس:

$$\hat{N} = \hat{M}_1 \quad (2)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$\hat{N} = \hat{M}_2 \Rightarrow \text{مثلث } F'MN \text{ متساوی‌الساقین است.} \Rightarrow MF' = NF' \quad (3)$$

ازطرف‌دیگر $MF + MF' = 2a$، $AA' = 2a = 6$ و $MF = 2$، بنابراین:

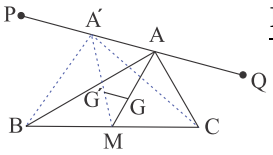
$$2 + MF' = 6 \Rightarrow MF' = 4 \quad (4)$$

از برابری‌های (۳) و (۴) به دست می‌آید:

$$NF' = 4$$

۸۶ گزینه ۲

میانهٔ AM را رسم کرده و فرض می‌کنیم نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث ABC است. پس $AG = 2GM$. حال اگر نقطهٔ A به نقطهٔ A' منتقل شود، $A'M$ میانهٔ مثلث $A'BC$ و G' مرکز ثقل آن است، به‌طوری‌که $A'G' = 2G'M$.



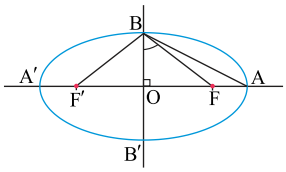
$$\frac{MG}{GA} = \frac{MG'}{G'A'} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} GG' \| AA' \Rightarrow GG' \| PQ$$

پس مکان هندسی نقطهٔ G، پاره‌خطی به موازات PQ است.

تذکر: طول پاره‌خطِ مکان هندسیِ نقطهٔ G، $\frac{1}{3}$ طول پاره‌خط PQ است.

۸۷ گزینه ۳

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر فرض مسئله: $\frac{S_{OAB}}{S_{FBF'}} = ۳$



دو مثلث OAB و FBF' در ارتفاع OB مشترک هستند، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{FBF'}} = \frac{a}{۲c} = ۳ \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۶}$$

یعنی $e = \frac{۱}{۶}$.

۸۸ گزینه ۳

نکته: در معادلهٔ گسترده دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$، مرکز دایره برابر با $O(\frac{-a}{۲}, \frac{-b}{۲})$ و شعاع دایره برابر با $r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}$ است.

زمانی که وتر مشترک عمودمنصف خط‌المرکزین باشد، دو دایره، شعاع‌های هم‌اندازه دارند. پس مماس مشترک خارجی دو دایره با خط‌المرکزین موازی است و فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر شعاع می‌باشد.

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۴y + ۷ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O'(۲, -۲) \\ r' = ۱ = r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ خط‌المرکزین} : \begin{cases} O'(۲, -۲) \\ O(-۱, -۶) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-۲ + ۶}{۲ + ۱} = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow y + ۲ = \frac{۴}{۳}(x - ۲) \Rightarrow ۳y + ۶ = ۴x - ۸ \Rightarrow ۳y - ۴x = -۱۴$$

پس معادلهٔ مماس‌های مشترک خارجی به‌صورت $۳y - ۴x = k$ است که فاصلهٔ آن‌ها از خط‌المرکزین باید عدد ۱ باشد. درنتیجه:

$$۱ = \frac{|-k - ۱۴|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} \Rightarrow |k + ۱۴| = ۵ \Rightarrow \begin{cases} k = -۹ \\ k = -۱۹ \end{cases}$$

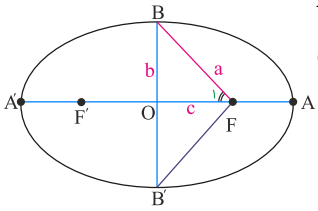
$$\Rightarrow \text{معادلهٔ مماس‌های مشترک خارجی} : \begin{cases} ۳y - ۴x = -۹ \\ ۳y - ۴x = -۱۹ \end{cases}$$

۸۹ گزینه ۱

$$\frac{|AA'|}{|BB'|} = \sqrt{۵} \Rightarrow \frac{۲a}{۲b} = \sqrt{۵} \Rightarrow (\frac{a}{b})^۲ = ۵ \Rightarrow (\frac{b}{a})^۲ = \frac{۱}{۵}$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{۱ - (\frac{b}{a})^۲} = \sqrt{۱ - \frac{۱}{۵}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = ۲ \times \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

۹۰ گزینه ۲



$$AA' = ۲BB' \Rightarrow ۲a = ۲(۲b) \Rightarrow a = ۲b \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{OBF} : \sin \hat{F}_۱ = \frac{OB}{BF} \Rightarrow \sin \hat{F}_۱ = \frac{b}{a}$$

$$\xrightarrow{(۱)} \sin \hat{F}_۱ = \frac{b}{۲b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{F}_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow B\hat{F}B' = ۲\hat{F}_۱ = ۶۰^\circ$$

۹۱ گزینه ۱

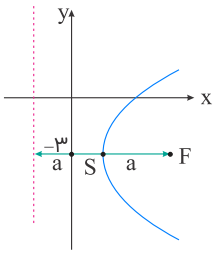
راه‌حل اول:

ابتدا مختصات کانون و فاصلهٔ کانونی سهمی را می‌یابیم.

$$(y+۳)^۲ = ۱۲(x-۱)$$
$$S(۱,-۳) \quad , \quad ۴a = ۱۲ \Rightarrow a = ۳$$

باتوجه‌به معادلهٔ سهمی دهانهٔ آن به‌سمت راست است. برای مختصات کانون از رأس به‌اندازهٔ ۳ واحد به‌سمت راست حرکت می‌کنیم.

$$S(۱,-۳) \Rightarrow F(۴,-۳)$$



مرکز دایرهٔ موردنظر $(۴,-۳)$ و شعاع آن $۲a = ۶$ است. معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x-۴)^۲ + (y+۳)^۲ = ۶^۲$$

برای به دست آوردن محل تلاقی، دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

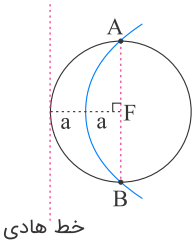
$$\begin{cases} (y+۳)^۲ = ۱۲(x-۱) \\ (x-۴)^۲ + (y+۳)^۲ = ۶^۲ \end{cases} \Rightarrow (x-۴)^۲ + ۱۲(x-۱) = ۶^۲$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۴x - ۳۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \quad ✓ \\ x = -۸ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$x = ۴ \Rightarrow (y+۳)^۲ = ۱۲(۴-۱) \Rightarrow \begin{cases} y+۳ = ۶ \Rightarrow y = ۳ \\ y+۳ = -۶ \Rightarrow y = -۹ \end{cases}$$
$$A(۴,۳), B(۴,-۹) \Rightarrow AB = ۱۲$$

راه‌حل دوم:

در شکل زیر AB وتر کانون است و می‌دانیم:

$$AB = ۴a \Rightarrow AF = ۲a$$



فاصلهٔ کانون تا خط هادی نیز برابر $۲a$ است، پس دایره‌ای به مرکز کانون سهمی و مماس بر خط هادی آن، سهمی را در نقاط A و B قطع می‌کند. بنابراین:

$$(y+۳)^۲ = ۱۲(x-۱)$$
$$۴a = ۱۲ \Rightarrow a = ۳$$
$$AB = ۴a = ۱۲$$

۹۲ گزینه ۱

بار اول آزاد است که هر عددی بیاید اما بار دوم باید عددی متفاوت از بار اول بیاید که احتمال آن $\frac{۵}{۶}$ است و بار سوم باید عددی متفاوت با دو بار اول بیاید که احتمال آن $\frac{۴}{۶}$ است:

$$P = ۱ \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۴}{۶} = \frac{۵}{۹}$$

۹۳ گزینه ۲

در پرتاب دو تاس تعداد فضای نمونه‌ای برابر ۳۶ است فضای مساعد به‌صورت جفت‌های زیر است:

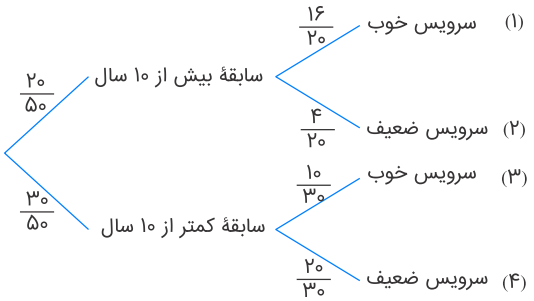
$$A = \{(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶),(۵,۵),(۵,۶),(۴,۶)\}$$

پس: $P = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

۹۴ گزینه ۱

$$P(\text{ساختن مثلث}) = ۱ - P(\text{مثلثی ساخته نشود}) = ۱ - \frac{\binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = ۱ - \frac{۵}{۸۴} = \frac{۷۹}{۸۴}$$

۹۵ گزینه ۳

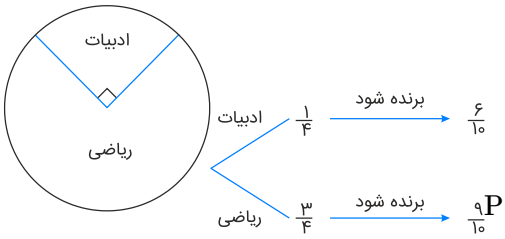


$$P = \frac{P(\text{شاخهٔ ۱})}{P(\text{شاخهٔ ۱}) + P(\text{شاخهٔ ۳})} = \frac{\frac{۲۰}{۵۰} \times \frac{۱۶}{۲۰}}{\frac{۲۰}{۵۰} \times \frac{۱۶}{۲۰} + \frac{۳۰}{۵۰} \times \frac{۱۰}{۳۰}}$$

$$= \frac{\frac{۱۶}{۵۰}}{\frac{۲۶}{۵۰}} = \frac{۸}{۱۳}$$

۹۶ گزینه ۲

احتمال اینکه عقربه ریاضی را نشان بدهد، $\frac{۳}{۴}$ و احتمال اینکه ادبیات را نشان بدهد، $\frac{۱}{۴}$ است.



$$P(\text{برنده}) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۶}{۱۰} + \frac{۳}{۴} \times \frac{۹}{۱۰} = \frac{۶ + ۲۷}{۴ \times ۱۰} = \frac{۳۳}{۴۰}$$

۹۷ گزینه ۱

اگر $A \subset B$، آنگاه $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

۹۸ گزینه ۱

راه‌حل اول:

$$P(A' \cup B') = ۰/۸ \Rightarrow P((A \cap B)') = ۰/۸ \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۲$$

$$P(A \cup B') = ۰/۶ \Rightarrow P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + P(B') - P(A) + P(A \cap B) = ۰/۶$$

$$\Rightarrow P(B') + ۰/۲ = ۰/۶ \Rightarrow P(B') = ۰/۴ \Rightarrow P(B) = ۰/۶$$

$$P(A' \cup B) = ۰/۷ \Rightarrow P(A') + P(B) - P(B \cap A') = ۰/۷$$

$$\Rightarrow P(A') + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = ۰/۷$$

$$\Rightarrow P(A') + ۰/۲ = ۰/۷ \Rightarrow P(A') = ۰/۵ \Rightarrow P(A) = ۰/۵$$

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = ۱ - P(A \cup B)$$

$$= ۱ - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = ۱ - (۰/۵ + ۰/۶ - ۰/۲) = ۰/۱$$

راه‌حل دوم:

$$P(B \cap A') = ۱ - P(B' \cup A) = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴$$

$$P(A \cap B') = ۱ - P(A' \cup B) = ۱ - ۰/۷ = ۰/۳$$

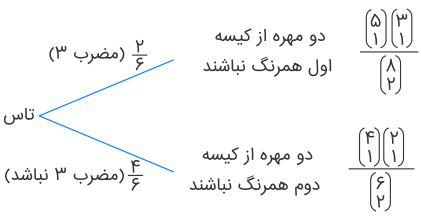
$$P(A \cap B) = ۱ - P(A' \cup B') = ۱ - ۰/۸ = ۰/۲$$

$$P(A' \cap B') = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - [P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)]$$

$$= ۱ - [۰/۳ + ۰/۴ + ۰/۲] = ۰/۱$$

www.alirezaafshar.org

۹۹ گزینه ۱



$$P = \frac{۲}{۶} \times \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۲}} + \frac{۴}{۶} \times \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۵ \times ۳}{۲۸} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۴ \times ۲}{۱۵}$$

$$= \frac{۵}{۲۸} + \frac{۱۶}{۴۵} = \frac{۲۲۵ + ۴۴۸}{۱۲۶۰} = \frac{۶۷۳}{۱۲۶۰}$$

۱۰۰ گزینه ۲

مهرهٔ اول در حل مسئله تأثیری ندارد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}} = \frac{\frac{۵ \times ۴}{۲}}{\frac{۱۱ \times ۱۰}{۲}} = \frac{۲}{۱۱}$$

۱۰۱ گزینه ۱

فرض می‌کنیم A پیشامد آمدن مجموع فرد در پرتاب سه تاس و B پیشامد آمدن حداقل یک ۲ باشد، پس می‌خواهیم $P(B|A)$ را حساب کنیم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

ابتدا $P(A)$ را حساب می‌کنیم. برای اینکه مجموع فرد شود، لازم است هر سه تاس فرد بیاید و یا دو تاس زوج و یکی فرد باشد؛ پس:

$$P(A) = \frac{(۳ \times ۳ \times ۳) + (\binom{۳}{۲} \times \binom{۳}{۱} \times ۳! + \binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \frac{۳!}{۲!})}{۲۱۶}$$

$$= \frac{۲۷ + (۵۴ + ۲۷)}{۲۱۶} = \frac{۱۰۸}{۲۱۶}$$

برای محاسبهٔ $P(A \cap B)$ یعنی احتمال مجموع فرد و حداقل یک تاس ۲، هرکدام از حالات یک ۲ و یا دو عدد ۲ را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$P(A \cap B) = \frac{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۳! + ۱ \times ۳ \times ۳}{۲۱۶} = \frac{۴۵}{۲۱۶}$$

پس:

$$P(B|A) = \frac{\frac{۴۵}{۲۱۶}}{\frac{۱۰۸}{۲۱۶}} = \frac{۵}{۱۲}$$

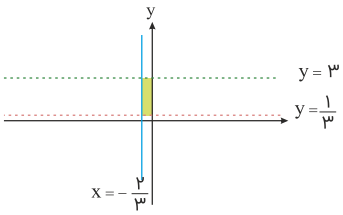
۱۰۲ گزینه ۱

با صفر قرار دادن مخرج، مجانب‌های قائم را می‌یابیم:

$$۲x+\sqrt{x^۲+x+۲}=۰\Rightarrow\sqrt{x^۲+x+۲}=-۲x\xrightarrow{x\le ۰}$$
$$x^۲+x+۲=۴x^۲\Rightarrow ۳x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=۱\ \text{و}\ x=-\frac{۲}{۳}\xrightarrow{x\le ۰}x=-\frac{۲}{۳}$$ مجانب قائم

برای تعیین مجانب افقی از تابع در $x\to\pm\infty$ حد می‌گیریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-\sqrt{x^۲}}{۲x+\sqrt{x^۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-|x|}{۲x+|x|}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x-|x|}{۲x+|x|}=\dfrac{۲x-x}{۲x+x}=\dfrac{۱}{۳}\Rightarrow y=\dfrac{۱}{۳}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲x-|x|}{۲x+|x|}=\dfrac{۲x+x}{۲x-x}=۳\Rightarrow y=۳\end{cases}$$ مجانب افقی



مساحت مستطیل برابر با:

$$S=\frac{۲}{۳}(۳-\frac{۱}{۳})=\frac{۱۶}{۹}$$

گزینهٔ ۱ درست است.

۱۰۳ گزینه ۲

$$۲\cos x(\cos x-\sin x)=۱\Rightarrow ۲\cos^۲x-۲\cos x\sin x-۱=۰$$
$$\Rightarrow ۲\cos x\sin x=۲\cos^۲x-۱\Rightarrow\sin ۲x=\cos ۲x\Rightarrow\tan ۲x=۱$$
$$\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{\div ۲}x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$$

۱۰۴ گزینه ۱

ریشه‌های مخرج $x=۲$ و $x=\pm۱$ است ولی $x=\pm۱$ ریشه‌های صورت هستند و مجانب قائم نخواهند بود، پس تابع f یک مجانب قائم دارد.
باتوجه‌به دامنهٔ تابع که برابر $(۲,+\infty)$ است، مجانب افقی را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=۱+۰\Rightarrow y=۱$$ مجانب افقی

دقت کنید $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ وجود ندارد.

۱۰۵ گزینه ۳

تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{\frac{x-۲+x-۱}{(x-۱)(x-۲)}}=\frac{x}{\frac{۲x-۳}{(x-۱)(x-۲)}}\Rightarrow f(x)=\frac{x(x-۱)(x-۲)}{۲x-۳}$$

درنتیجه $x=\frac{۳}{۲}$ مجانب قائم تابع f است. گزینهٔ ۳ درست است.

۱۰۶ گزینه ۳

برای یافتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$x - \sqrt{۴x^۲ - ۳} = ۰ \Rightarrow x = \sqrt{۴x^۲ - ۳}$$

$$\xrightarrow{x \geq ۰} x^۲ = ۴x^۲ - ۳ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow x = ۱$$ مجانب قائم

باید توجه کرد $x = -۱$ ریشهٔ معادله نیست، چون در آن صدق نمی‌کند.

برای تعیین مجانب افقی، از تابع در $x = \pm\infty$ حد می‌گیریم و از قاعدهٔ پرتوان استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x + ۱}{x - \sqrt{۴x^۲ - ۳}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x}{x - \sqrt{۴x^۲}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x}{x - ۲|x|} \Rightarrow \begin{matrix} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{۲x}{-x} = -۲ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{۲x}{۳x} = \frac{۲}{۳} \end{matrix}$$

درنتیجه خطوط $y = -۲$ و $y = \frac{۲}{۳}$ مجانب افقی تابع هستند، پس "گزینهٔ ۳" درست است.

۱۰۷ گزینه ۴

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{۱ + ۴x^۲} - \sqrt[۳]{۱ + ۳x^۲}}{۲x - \sqrt[۳]{۳ - x^۳}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|۲x|}{۲x + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-۲x}{۳x} = \frac{-۲}{۳}$$

۱۰۸ گزینه ۴

ابتدا حاصل حد تابع $f(x) = \frac{|x^۲ - ۴|}{ax^۲ - x + ۲}$ را وقتی $x \to +\infty$ برابر -۱ قرار داده و مقدار a را محاسبه می کنیم. وقتی $x \to +\infty$ عبارت $x^۲ - ۴$ مثبت بوده و می توان از قدرمطلق چشم پوشی کرد. برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x \to (-۲)^+} f(x)$ ابتدا تکلیف قدرمطلق را روشن می کنیم و سپس حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|x^۲ - ۴|}{ax^۲ - x + ۲} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^۲ - ۴}{ax^۲ - x + ۲} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^۲}{ax^۲} = \frac{۱}{a} = -۱$$

$$\Rightarrow a = -۱ \Rightarrow f(x) = \frac{|x^۲ - ۴|}{-x^۲ - x + ۲}$$

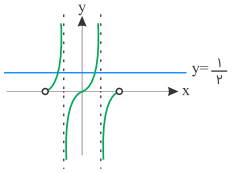
برای به دست آوردن $\lim\limits_{x \to (-۲)^+} f(x)$ ، ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین می کنیم:

$$x \to (-۲)^+ \Rightarrow x > -۲ \Rightarrow x^۲ < ۴ \Rightarrow x^۲ - ۴ < ۰ \Rightarrow |x^۲ - ۴| = -(x^۲ - ۴)$$

$$\lim_{x \to (-۲)^+} f(x) = \lim_{x \to (-۲)^+} \frac{-(x^۲ - ۴)}{-x^۲ - x + ۲} = \lim_{x \to (-۲)^+} \frac{-(x - ۲)(x + ۲)}{-(x + ۲)(x - ۱)}$$

$$= \lim_{x \to (-۲)^+} \frac{x - ۲}{x - ۱} = \frac{-۲ - ۲}{-۲ - ۱} = \frac{-۴}{-۳} = \frac{۴}{۳}$$

۱۰۹ گزینه ۳



۱۱۰ گزینه ۴

$a < ۰ \ , \ f(x) \geq ۰ \ , \ f(a) = ۰$

$\lim\limits_{x \to a^+} \frac{\text{عدد منفی}}{۰^+} = -\infty$

۱۱۱ گزینه ۱

$$y = \frac{\tan^۲\theta - \sin^۲\theta}{\tan^۵\theta(\cot^۲\theta - \cos^۲\theta)} = \frac{\frac{\sin^۲\theta - \sin^۲\theta\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}}{\tan^۵\theta(\frac{\cos^۲\theta - \sin^۲\theta\cos^۲\theta}{(\sin^۲\theta)})} = \frac{\frac{\sin^۲\theta(۱ - \cos^۲\theta)}{\cos^۲\theta}}{\tan^۵\theta(\frac{\cos^۲\theta(۱ - \sin^۲\theta)}{\sin^۲\theta})}$$

$$= \frac{\frac{\sin^۴\theta}{\cos^۲\theta}}{\tan^۵\theta(\frac{\cos^۴\theta}{\sin^۲\theta})} = \frac{\frac{\sin^۶\theta}{\cos^۶\theta}}{\tan^۵\theta} = \frac{\tan^۶\theta}{\tan^۵\theta} = \tan\theta$$

دوره تناوب $y = \tan\theta$ برابر است با $T = \pi$.

روش دوم: نکته:

$$\begin{cases} \tan^۲\theta - \sin^۲\theta = \tan^۲\theta\sin^۲\theta \\ \cot^۲\theta - \cos^۲\theta = \cot^۲\theta\cos^۲\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ y = \frac{\tan^۲\theta\sin^۲\theta}{\tan^۵\theta(\cot^۲\theta\cos^۲\theta)} = \frac{\tan^۲\theta\sin^۲\theta}{\tan^۳\theta\cos^۲\theta} = \tan\theta$$

۱۱۲ گزینه ۱

باتوجه‌به اینکه می‌دانیم:

$$\begin{cases} a > ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \\ a < ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{a} \leq -۲ \end{cases}$$

پس اگر $\tan x = a$ در نظر بگیریم امکان ندارد که $a + \frac{۱}{a} = -\frac{۳}{۲}$ شود؛ بنابراین این معادله جواب ندارد.

۱۱۳ گزینه ۱

به فرمول های ۲α توجه کنید:

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha, \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$$

$$۲\cos^۲x + ۲\sin x\cos x = ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲x - ۱ = -۲\sin x\cos x \Rightarrow \cos ۲x = -\sin ۲x$$

$$\xrightarrow[\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)]{-\sin\alpha = \sin(-\alpha)} \sin(\frac{\pi}{۲} - ۲x) = \sin(-۲x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{۲} - ۲x = ۲k\pi - ۲x \Rightarrow \frac{\pi}{۲} = ۲k\pi \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ \frac{\pi}{۲} - ۲x = ۲k\pi + \pi - (-۲x) \Rightarrow -۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\div(-۴)} x = \frac{-k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته: چون $k \in \mathbb{Z}$ است پس $-k$ را همان k در نظر می‌گیریم.

www.alirezaafshar.org

۱۱۴ گزینه ۳

ابتدا وقتی $x \to -\infty$، حاصل $\left[\frac{۱}{x}\right]$ را به دست می آوریم. با داشتن مقدار $\left[\frac{۱}{x}\right]$ حاصل حد را محاسبه می کنیم.

$$x \to -\infty \Rightarrow \frac{۱}{x} \to ۰^- \Rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right] = [۰^-] = -۱$$

$$\lim_{x \to -\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right] = (-\infty)(-۱) = +\infty$$

۱۱۵ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل داریم:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

(عدد b فرضی است)

حال به بررسی تابع $\frac{۱}{f}$ در اطراف $x = a$ می‌پردازیم:

زمانی‌که $x \to a^+$ برود، $\frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{+\infty} \to ۰^+$.

زمانی‌که $x \to a^-$ برود، $\frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{b^+} \to (\frac{۱}{b})^-$.

یعنی در تابع $\frac{۱}{f}$، وقتی $x \to a^+$، نمودار از سمت راست باید به صفر میل کند (گزینهٔ ۱ و ۳ درست هستند).

وقتی $x \to a^-$، تابع $\frac{۱}{f}$ از چپ به عدد $\frac{۱}{b}$ میل می‌کند، پس گزینهٔ ۳ درست است.

۱۱۶ گزینه ۳

اگر $\frac{\pi}{۴} \le \alpha < \frac{\pi}{۲}$ آنگاه $\tan\alpha \ge ۱$ است.

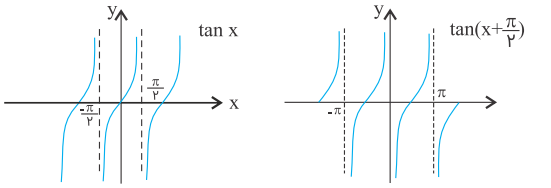
اگر $\frac{۳\pi}{۴} \le \alpha < \frac{\pi}{۲}$ آنگاه $\tan\alpha \le -۱$ می‌شود، بنابراین برد تابع $y = \tan\alpha$ وقتی $\frac{\pi}{۴} \le \alpha \le \frac{۳\pi}{۴}$ برابر با $\mathbb{R} - (-۱,۱)$ است و هیچ‌وقت $-\frac{۱}{۲}$ نمی‌شود.

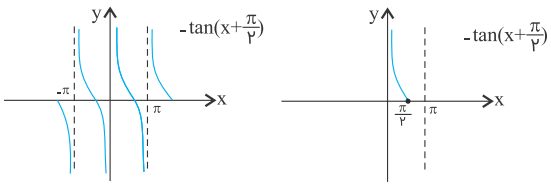
۱۱۷ گزینه ۴

برای رسم تابع f باید قدر مطلق را برداریم. برای این منظور باید علامت $\cot x$ را در بازهٔ $(-\pi , \pi)$ مشخص کنیم. داریم:

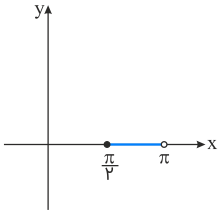
$$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\cot x > 0]{x \in \text{ربع اول}} f(x) = \frac{\cot x + \cot x}{2} = \frac{2\cot x}{2} = \cot x$$

باتوجه‌به اینکه $\cot x = -\tan(\frac{\pi}{2} + x)$ است، برای رسم $\cot x$ باید نمودار تانژانت را $\frac{\pi}{2}$ سمت چپ ببریم و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه کنیم، در آخر در بازهٔ $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ تابع را رسم می‌کنیم:

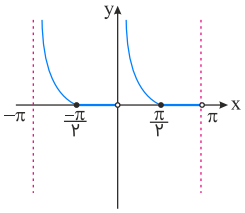




$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \xrightarrow[\cot x < 0]{x \in \text{ربع دوم}} f(x) = \frac{\cot x - \cot x}{2} = 0$$



پس نمودار تابع f به‌صورت زیر خواهد بود. داریم:

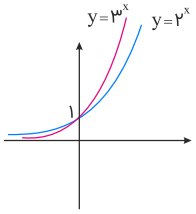


۱۱۸ گزینه ۲

ابتدا ریشهٔ مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$۲^x - ۳^x = ۰ \Rightarrow ۲^x = ۳^x \Rightarrow x = ۰$$

حال باید اطراف $x = ۰$ از تابع حدگیری کنیم. باتوجه‌به نمودار تابع $y = ۲^x$ و $y = ۳^x$ در زیر داریم:



$$\begin{cases} x \to ۰^+ : ۳^x > ۲^x \\ x \to ۰^- : ۳^x < ۲^x \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to ۰} \frac{۴^x}{۲^x - ۳^x} \Rightarrow \begin{matrix} \lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{۴^x}{۲^x - ۳^x} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{۴^x}{۲^x - ۳^x} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty \end{matrix}$$

پس "گزینهٔ ۲" درست است.

۱۱۹ گزینه ۳

نکته: اگر عبارت داخل جزء صحیح به سمت بی نهایت میل کند، می‌توان نتیجه گرفت جزء صحیح با عبارت داخل آن هم‌ارز است.

بررسی گزینهٔ اول:

$$x \to ۰^- \Rightarrow \frac{۱}{x} \to -\infty \Rightarrow \lim_{x \to ۰^-} x \left[\frac{۱}{x}\right] = \lim_{x \to ۰^-} x(\frac{۱}{x}) = ۱$$

بررسی گزینهٔ دوم:

$$x \to ۰^+ \Rightarrow \frac{۱}{x} \to +\infty \Rightarrow \lim_{x \to ۰^+} x \left[\frac{۱}{x}\right] = \lim_{x \to ۰^+} x(\frac{۱}{x}) = ۱$$

بررسی گزینهٔ سوم:

$$x \to -\infty \Rightarrow \frac{۱}{x} \to ۰^- \Rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right] = -۱$$
$$\lim_{x \to -\infty} x \left[\frac{۱}{x}\right] = (-\infty)(-۱) = +\infty$$

پس حاصل حد تابع وقتی $x \to -\infty$ متناهی نیست.

بررسی گزینهٔ چهارم:

$$x \to +\infty \Rightarrow \frac{۱}{x} \to ۰^+ \Rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right] = ۰$$
$$\lim_{x \to +\infty} x \left[\frac{۱}{x}\right] = (+\infty)(۰) = ۰$$

۱۲۰ گزینه ۴

این تابع به‌فرم $a\sin bx$ است که a و b هم‌علامت‌اند:

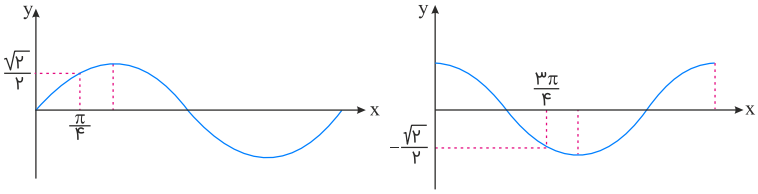
$$m(۴-m)>۰ \Rightarrow ۰<m<۴$$

۱۲۱ گزینه ۴

$$۲a+۳<۱۰<a+۱۷ \Rightarrow \begin{cases} ۲a+۳<۱۰ \\ ۱۰<a+۱۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<\frac{۷}{۲} \\ a>-۷ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۷<a<\frac{۷}{۲}$$

۱۲۲ گزینه ۱

باتوجه‌به نمودار $y=\sin x$ و $y=\cos x$، حد راست و چپ تابع f در $x=\frac{\pi}{۴}$ را حساب می‌کنیم:



$$\text{حد راست}: \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^{+}} (a[۳\sqrt{۲}\sin x]+[\sqrt{۲}\cos ۳x])$$

$$=a[۳\sqrt{۲}\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{+}]+[\sqrt{۲}\times(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})^{-}]$$

$$=a[۳^{+}]+[(-۱)^{-}]=۳a-۲$$

$$\text{حد چپ}: \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^{-}} (a[۳\sqrt{۲}\sin x]+[\sqrt{۲}\cos ۳x])$$

$$=a[۳\sqrt{۲}\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{-}]+[\sqrt{۲}\times(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})^{+}]$$

$$=a[۳^{-}]+[(-۱)^{+}]=۲a-۱$$

برای آنکه f در $x=\frac{\pi}{۴}$ حد داشته باشد باید حد چپ و راست آن باهم برابر باشند:

$$۳a-۲=۲a-۱ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow f(x)=[۳\sqrt{۲}\sin x]+[\sqrt{۲}\cos ۳x]$$

و داریم:

$$f(\frac{\pi}{۳})=[۳\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}]+[\sqrt{۲}\times(-۱)]=[\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}]+[-\sqrt{۲}]=۳+(-۲)=۱$$

۱۲۳ گزینه ۲

می‌دانیم اگر $f(x)=\frac{-۲}{x}$ باشد، آنگاه $f(\frac{۲}{۳})=\frac{-۲}{\frac{۲}{۳}}=-۳$ می‌شود. سؤال اینجاست که اگر $x\to(\frac{۲}{۳})^{-}$ آنگاه حاصل $\frac{-۲}{x}$ از ۳- بیشتر می‌شود و یا کمتر؟

$$x\to(\frac{۲}{۳})^{-} \Rightarrow x<\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{x}>\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{-۲}{x}<-۳$$

بنابراین چون $\frac{-۲}{x}<-۳$، پس $\frac{-۲}{x}\to(-۳)^{-}$:

$$\lim_{x\to(\frac{۲}{۳})^{-}}[\frac{-۲}{x}]=[\frac{-۲}{(\frac{۲}{۳})^{-}}]=[(-۳)^{-}]=-۴$$

۱۲۴ گزینه ۳

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+} y = [(\frac{-۱}{۲})^+] + [۲\times(\frac{-۱}{۲})^+] = -۱ + [(-۱)^+] = -۱-۱ = -۲$$

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^-} y = [(\frac{-۱}{۲})^-] + [۲\times(\frac{-۱}{۲})^-] = -۱ + [(-۱)^-] = -۱-۲ = -۳$$

مجموع حد راست و چپ $= -۲-۳ = -۵$

۱۲۵ گزینه ۲

فرض می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-۲} f(x) = L_۱ \ , \ \lim_{x\to-۲} g(x) = L_۲$$

در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \frac{-L_۱}{L_۲+۲} = ۱ \Rightarrow L_۱ + L_۲ = -۲ \\ \frac{L_۱ - L_۲}{۲} = -۱ \Rightarrow L_۱ - L_۲ = -۲ \end{cases} \Rightarrow L_۱ = -۲ \ , \ L_۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-۲} \frac{g(x)}{f^۲(x)+۳} = \frac{L_۲}{L_۱^۲+۳} = ۰$$

۱۲۶ گزینه ۴

حد تابع در تمام نقاط بازهٔ $(-۳,۳)$ (حتی نقاط صحیح این بازه) با ضابطهٔ $y = ۳x^۲$ محاسبه می‌شود (زیرا اگر $x \to n$ و $n \in \mathbb{Z}$ آنگاه x بر n منطبق نمی‌گردد و در همسایگی محذوف نقطهٔ $x = n$ قرار می‌گیرد)؛ بنابراین در تمام نقاط بازهٔ $(-۳,۳)$ ازجمله نقاط صحیح این بازه حد دارد؛ به‌عبارت‌دیگر نقطه‌ای در بازهٔ $(-۳,۳)$ وجود ندارد که تابع f در آن فاقد حد باشد.

$$n \in \mathbb{Z} : \lim_{x\to n} f(x) = \lim_{x\to n} ۳x^۲ = ۳n^۲$$

۱۲۷ گزینه ۳

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+} ([x] + [۲x]) = [(-\frac{۱}{۲})^+] + [(-۱)^+] = -۱ + (-۱) = -۲$$

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^-} ([x] + [۲x]) = [(\frac{-۱}{۲})^-] + [(-۱)^-] = -۱ + (-۲) = -۳$$

مجموع حد چپ و راست برابر ۵- است.

۱۲۸ گزینه ۲

$$\lim_{x\to۲^+} f(x) = (۲[-(۲^+)] + ۵)([۲^+] - ۴) = (۲(-۳) + ۵)(۲ - ۴)$$
$$= (-۶ + ۵)(-۲) = (-۱)(-۲) = ۲$$

$$\lim_{x\to۲^-} f(x) = (۲[-(۲^-)] + ۵)([۲^-] - ۴) = (-۴ + ۵)(۱ - ۴) = -۳$$

$$\lim_{x\to۲^+} f(x) - \lim_{x\to۲^-} f(x) = ۲ - (-۳) = ۵$$

۱۲۹ گزینه ۳

یک تابع زمانی در یک نقطه حد دارد که حد چپ و راست آن در آن نقطه باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = ۱$$

۱۳۰ گزینه ۴

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \log[x] = \log[۱^-] = \log ۰ \Rightarrow$ تعریف نشده

گزینهٔ ۲) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \cot[x] = \cot[۰^+] = \cot ۰ \Rightarrow$ تعریف نشده

گزینهٔ ۳) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{۱}{[x]-۲}$ تعریف نشده

$\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{۱}{۱-۲} = -۱$ $\Rightarrow$ حد راست موجود نیست.

گزینهٔ ۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{[x]}{|x|} = \frac{[۰^+]}{x} = ۰ \Rightarrow$ حاصل حد موجود است.