

۱ تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طولهای ۶ و $\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۲) $\frac{1}{4}$ و ۹

(۱) $\frac{1}{9}$ و ۴

(۴) ۴ و ۹

(۳) $\frac{1}{4}$ و ۴

۲ اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، آنگاه $f^{-1} \circ g^{-1}$ کدام است؟

(۲) $(1-x^2)^2$

(۱) $(1-x)^2 + 1$

(۴) x^2

(۳) $-x^2$

۳ معادله $\sqrt{x-1} = [x^2 - x - 1]$ چند جواب دارد؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

۴ اگر $f(x) = ax - b$ و $f^{-1}(x) = ax + 3$ باشد، $f^{-1}(x) - f(x)$ کدام است؟ ($a < 0$)

(۲) $x - 1$

(۱) x

(۴) صفر

(۳) ۱

۵ اگر $f(\sin x) = \tan^2 x + \cos^2 x$ باشد، $f\left(\frac{1}{3}\right)$ چقدر است؟

(۲) $2\frac{1}{\sqrt{2}}$

(۱) $2\frac{1}{\sqrt{3}}$

(۴) $1\frac{1}{\sqrt{2}}$

(۳) $1\frac{1}{\sqrt{3}}$

۶ اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = [x] + 2$ باشد، آنگاه $(f - g)(x)$ با دامنه $2 \leq x < 3$ کدام است؟

(۲) $-x + 4$

(۱) $-x + 3$

(۴) $x - 4$

(۳) $x - 3$

۷ توابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}$ و $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$ مفروض‌اند. حاصل $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$ کدام است؟

(۲) صفر

(۱) ۲

(۴) تعریف نشده

(۳) ۴



۸ اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$ باشد، $f(2) - f(2 + \sqrt{7})$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

۹ در چه تعداد از موارد زیر توابع f و g باهم مساوی‌اند؟

الف) $f(x) = \frac{1}{[x] + [-x]}$ و $g(x) = \frac{1}{[-\sin^2 \pi x]}$

ب) $f(x) = \sqrt{-x[x]}$ و $g(x) = \frac{[\sqrt{-x^2 + x}]}{x - 1}$

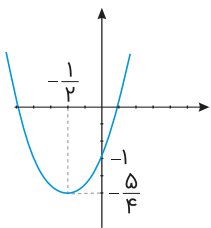
پ) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ و $g(x) = x^2 - 1$

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۱۰ حاصل $[0/3] + [1/8] + [-2/3]$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح)

- (۱) صفر
(۲) -۲
(۳) -۱
(۴) ۱

۱۱ $g \circ f(x) = x^2 - x^2 - 1$ و نمودار تابع g یک سهمی به شکل زیر است. ضابطه تابع $f(x)$ کدام است؟

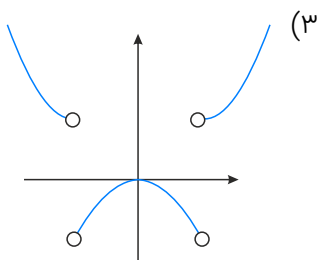
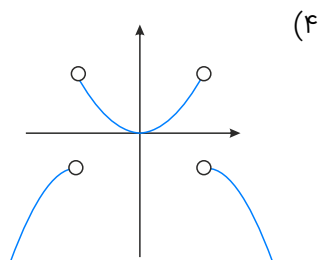
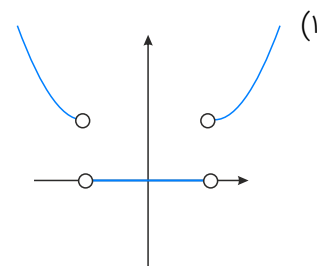
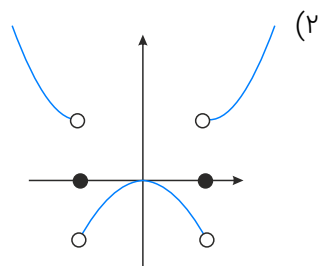


- (۱) x^2
(۲) $-x^2$
(۳) $-x^2 - 1$
(۴) $x^2 + 1$

۱۲ اگر $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ ، مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) $\sqrt{2}$

اگر $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، $g(x) = x^2 - 1$ و $h(x) = x^2$ باشد، نمایش هندسی $y = h(x) \circ (f \circ g)(x)$ در صفحه مختصات به کدام صورت است؟



اگر $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 3}$ باشد، مقدار $f(2 - \sqrt{3})$ کدام است؟

(۲) $-2 + \sqrt{3}$

(۱) $1 - \sqrt{3}$

(۴) $1 + \sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{3}$

برد تابع $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$ کدام است؟

(۲) $[0, +\infty)$

(۱) $[-1, +\infty)$

(۴) $[-1, 2]$

(۳) $(-\infty, 2]$

حاصل $A = [\sqrt{3}] + [1 - \sqrt{5}]$ کدام است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) -۲

(۳) -۱

کدام یک از توابع زیر وارون پذیرند؟

(۲) $g = \{(1, 2), (3, 4), (5, 2)\}$

(۱) $f = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$

(۴) $h = \{(4, 1), (5, 2), (6, 1)\}$

(۳) $k = \{(1, 1), (2, 5), (3, 6)\}$

در صورتی که $f = \{(1, -1), (2, 3), (5, 2)\}$ و $g(x) = \frac{1}{x+1}$ باشد، دامنه $f \circ g$ کدام است؟

(۲) $\{0, -\frac{4}{5}, -\frac{1}{2}\}$

(۱) $\{0, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}\}$

(۴) $\{-\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{2}\}$

(۳) $\{\frac{4}{5}, -\frac{1}{2}, 0\}$

۱۹ اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (5, 5)\}$ و $g = \{(3, 5), (2, 4), (1, 5)\}$ باشند، مقدار $g(f(1))$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) تعریف نشده است.

۲۰ اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = x + 2$ ، آنگاه حاصل $\frac{f}{g}(3)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۳
(۴) -۳

۲۱ یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های $\frac{9}{2}$ و ۸ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله دورترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده بزرگ دوزنقه، کدام است؟

- (۱) ۹
(۲) $3 + 4\sqrt{2}$
(۳) ۸
(۴) $7/5$

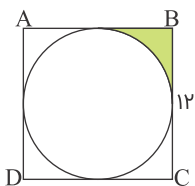
۲۲ چهار ضلعی ABCD محاط در یک دایره است. اگر AB دورترین وتر و BC نزدیکترین وتر نسبت به مرکز این دایره باشند، کدام رابطه بین زاویه‌ها ممکن است برقرار نباشد؟

- (۱) $\hat{D} > \hat{C}$
(۲) $\hat{B} > \hat{C}$
(۳) $\hat{A} > \hat{B}$
(۴) $\hat{B} > \hat{D}$

۲۳ بازتاب خط $y = 2x - 1$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم کدام است؟

- (۱) $y = -2x - 1$
(۲) $y = 2x + 1$
(۳) $x = 2y - 1$
(۴) $x = 2y + 1$

۲۴ مساحت قسمت رنگ شده کدام است؟ (ABCD مربع است) ($\pi \simeq 3$)



- (۱) ۳۶
(۲) ۹
(۳) ۱۶
(۴) ۱۰

۲۵ پاره خط AB تحت تبدیل غیرهمانی T روی خودش تصویر شده است. T کدام تبدیل زیر نمی‌تواند باشد؟

- (۱) بازتاب
(۲) انتقال
(۳) دوران
(۴) تجانس

۲۶ اگر $A'B'$ تصویر پاره خط $AB = 5\text{cm}$ در دوران به مرکز مبدأ و زاویه 45° بوده و $A''B''$ تصویر پاره خط $A'B'$ در تجانس به مرکز مبدأ و نسبت تجانس ۴ باشد، اندازه $A''B''$ کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۲۰
(۳) ۴۰
(۴) ۸۰

۲۷ نیمسازهای داخلی B و A از مثلث ABC ، نیمساز خارجی C را در نقاط B' و A' قطع می‌کنند. کدام گزینه در مورد چهار ضلعی $ABA'B'$ درست است؟

- (۱) محیطی است.
(۲) دوزنقه است.
(۳) محاطی است.
(۴) مستطیل است.

۲۸ دایره $C(O, 1 - 2a)$ تحت انتقال به دایره $C'(O', 4 - a^2)$ تصویر شده است. اگر C'' مجانس C' به مرکز تجانس O و ضریب a باشد و بدانیم C و C' مماس بیرونی هستند، آنگاه اندازه مماس مشترک داخلی C' و C'' کدام گزینه است؟

- (۱) $6\sqrt{3}$
(۲) $6\sqrt{2}$
(۳) $3\sqrt{3}$
(۴) $3\sqrt{2}$

۲۹ در رسم بزرگ‌ترین مربع ممکن داخل مثلث ABC به طوری که یک ضلع مربع منطبق بر ضلع BC باشد، از کدام تبدیل هندسی استفاده می‌شود؟

- (۱) انتقال
(۲) تجانس
(۳) بازتاب
(۴) دوران

۳۰ دو خط متقاطع d و d' و پاره خط AB غیرموازی با d و d' ، در صفحه آن‌ها مفروض است. برای رسم پاره خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب
(۲) انتقال
(۳) دوران
(۴) تجانس

۳۱ اگر تساوی $(x^2 - y^2, 8) = (x + y, 16)$ برقرار باشد، مقدار $2x - 3y$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) -۴
(۴) ۴

۳۲ در ظرفی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف ۲ مهره از ظرف بدون رؤیت خارج شده است. از ۵ مهره باقی‌مانده یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

- (۱) $\frac{12}{35}$
(۲) $\frac{3}{7}$
(۳) $\frac{16}{35}$
(۴) $\frac{4}{7}$

۳۳ اگر $A = \{102, 104, \dots, 202\}$ و $B = \{103, 106, 109, \dots, 202\}$ باشد، آنگاه مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ چند عضو مشترک دارند؟

- (۱) ۲۵۶
(۲) ۲۸۹
(۳) ۱۶
(۴) ۱۷

۳۴ ظرف A شامل ۵ مهره با شماره‌های یک‌رقمی فرد و ظرف B دارای ۴ مهره با شماره‌های یک‌رقمی زوج غیرصفر است. از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال حاصل ضرب آن‌ها از ۱۰ بیشتر است؟

- (۱) $0/6$
(۲) $0/65$
(۳) $0/7$
(۴) $0/75$

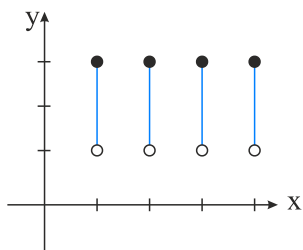
۳۵ به کمک ارقام ۴، ۵، ۴، ۳، ۷ و به تصادف، عددی سه‌رقمی ساخته‌ایم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای کدام است؟

- (۱) ۵۸
(۲) ۵۹
(۳) ۶۰
(۴) ۶۱

۳۶ پنج نفر زن و هفت نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده‌اند و فقط امکان استخدام سه نفر وجود دارد. احتمال آنکه سه نفر هم‌جنس باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{44}$
(۲) $\frac{12}{21}$
(۳) $\frac{9}{22}$
(۴) $\frac{9}{11}$

۳۷ نمودار شکل زیر، مربوط به کدام مجموعه است؟



- (۱) $[1, 4) \times [1, 3)$
(۲) $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3\}$
(۳) $\{1, 2, 3, 4\} \times (1, 3]$
(۴) $[1, 4) \times \{1, 2, 3\}$

۳۸ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نا درست است؟

- (۱) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
(۲) اگر $A \times B = \emptyset$ ، آنگاه $A = \emptyset$ و $B = \emptyset$.
(۳) اگر $A \times B = B \times A$ ، آنگاه $A = B$ یا $B = \emptyset$ یا $A = \emptyset$.
(۴) اگر $A \times B \neq \emptyset$ ، آنگاه $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$.

۳۹ می‌دانیم $n(A \times B) = 48$ و $n(C \times A) = 28$ می‌باشد. بیشترین تعداد عضو مجموعه A کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۱۲
(۳) ۲۸
(۴) ۱۴

۴۰ اگر A مجموعه اعداد اول یک رقمی و B مجموعه اعداد فرد یک رقمی باشد، مجموعه $(A \times B) \cap (B \times A)$ چند عضوی است؟

(۲) ۴

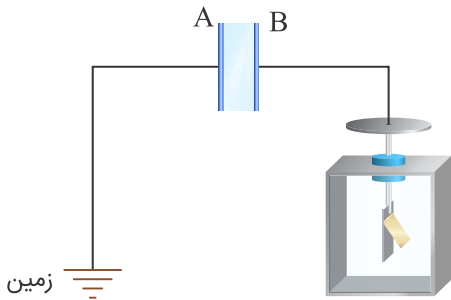
(۱) ۱

(۴) ۱۶

(۳) ۹

۴۱ در شکل زیر دو صفحه A و B فلزی و باهم موازی اند. صفحه A به زمین و صفحه B به یک الکتروسکوپ که صفحات آن باز هستند وصل شده است. اگر یک صفحه شیشه‌ای بدون بار را بین صفحات خازن وارد کنیم، انحراف ورقه‌های الکتروسکوپ

.....



(۱) کم می‌شود.

(۲) زیاد می‌شود.

(۳) تغییر نمی‌کند.

(۴) ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود.

۴۲ اختلاف پتانسیل بین دو صفحه خازن را $1/5$ برابر می‌کنیم. در نتیجه $20 \mu C$ بر بار ذخیره شده در آن اضافه می‌شود و انرژی آن نیز $200 \mu J$ افزایش می‌یابد. ظرفیت خازن چند میکرو فاراد است؟

(۲) ۱۰

(۱) ۵

(۴) ۲۰

(۳) ۱۵

۴۳ فاصله بین صفحات خازن شارژ شده‌ای که از باتری جدا است را دو برابر می‌کنیم و فضای خالی بین صفحات آن را با دی‌الکتریک $K = 4$ پر می‌کنیم. انرژی ذخیره شده در خازن و میدان الکتریکی بین صفحات خازن به ترتیب از راست به چپ چند برابر می‌شود؟

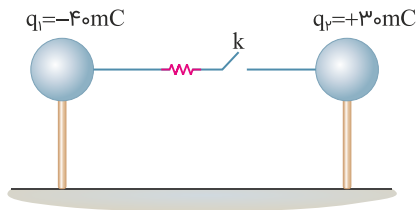
(۲) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

۴۴ دو صفحه خازنی به باتری متصل است. اگر فاصله دو صفحه را سه برابر کنیم، انرژی ذخیره شده در خازن و اندازه میدان الکتریکی بین دو صفحه هر کدام چند برابر می‌شود؟

(۲) $U: 3$ برابر - $E: 3$ برابر(۱) $U: \frac{1}{3}$ برابر - $E: \frac{1}{3}$ برابر(۴) $U: \frac{1}{3}$ برابر - $E: 3$ برابر(۳) $U: 3$ برابر - $E: \frac{1}{3}$ برابر

مطابق شکل دو کره رسانای مشابه روی پایه‌های عایقی قرار دارند. سیم رسانای به‌کاررفته در اتصال دو کره دارای طول $5/0$ متر، مقاومت ویژه $4 \times 10^{-5} \Omega \cdot m$ و سطح مقاومت 2 mm^2 است. اگر کلید k برای مدت زمان 70 ms وصل شود، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو کره چند ولت خواهد شد؟

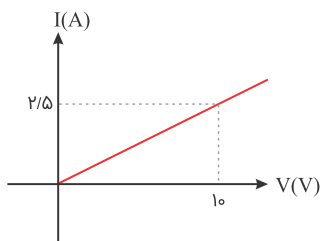
۴۵



- (۱) $\frac{25}{V}$
- (۲) $1/4$
- (۳) $\frac{5}{V}$
- (۴) 5

نمودار جریان گذرنده از یک رسانا برحسب اختلاف پتانسیل دو سر آن مانند شکل زیر است. مقاومت الکتریکی آن چند اهم است؟

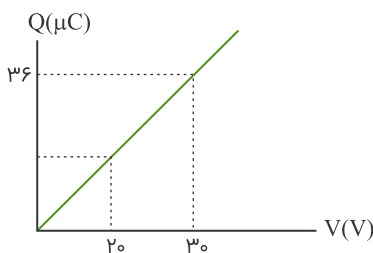
۴۶



- (۱) 25
- (۲) 4
- (۳) $0/25$
- (۴) $12/5$

نمودار بار ذخیره‌شده در خازن برحسب ولتاژ بین صفحه‌های آن مطابق شکل زیر است. اگر ولتاژ خازن را از 20 V به 30 V افزایش دهیم انرژی ذخیره‌شده در خازن چند میکروژول افزایش می‌یابد؟

۴۷



- (۱) 150
- (۲) 200
- (۳) 250
- (۴) 300

خازنی به یک باتری که ولتاژ آن قابل تنظیم است، متصل است. اگر ولتاژ دو سر خازن از 5 V به 6 V برسد، انرژی خازن چند درصد افزایش می‌یابد؟

۴۸

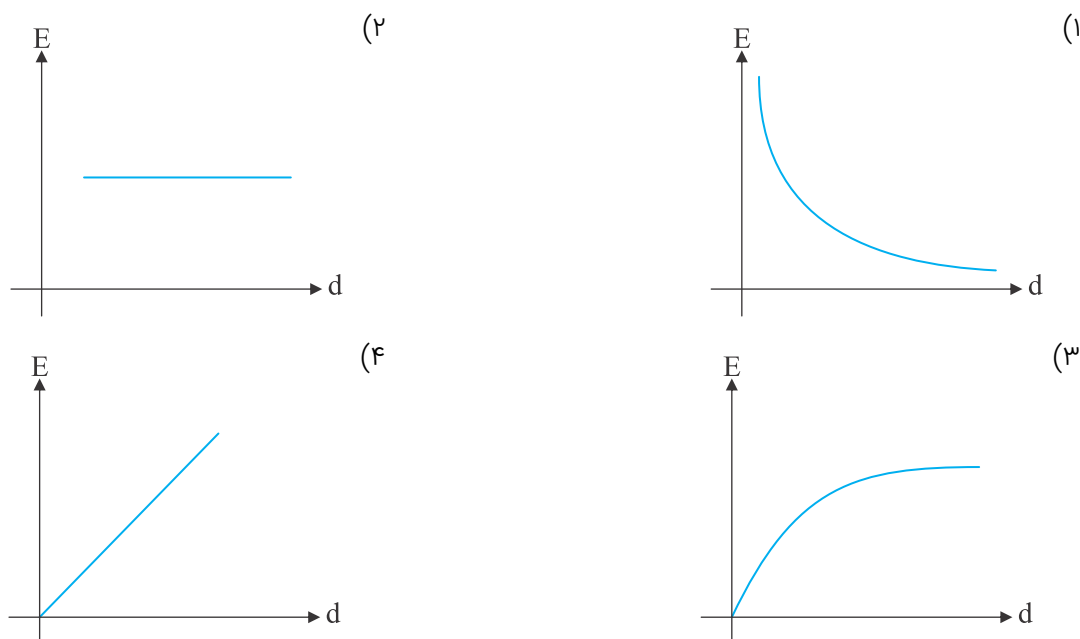
- (۱) 20
- (۲) 44
- (۳) 25
- (۴) 56

مقاومت الکتریکی یک رسانا در دمای 20°C برابر با $R_1 = 50 \Omega$ است و مقدار مقاومت آن در دمای 70°C برابر $R_2 = 50/5 \Omega$ می‌شود. اگر مقاومت الکتریکی یک قطعه از همین جنس رسانا در دمای 30°C برابر 150Ω باشد، مقاومت الکتریکی آن در دمای 110°C چند اهم می‌شود؟ (از تغییر ابعاد رسانا صرف‌نظر کنید)

۴۹

- (۱) $151/6$
- (۲) $151/4$
- (۳) $152/4$
- (۴) $152/1$

خازن تختی با دی‌الکتریک هوا را پس از برداشتن، از مولد جدا کرده و فاصله دو صفحه‌اش را تغییر می‌دهیم. کدام گزینه تغییرات بزرگی میدان الکتریکی بین دو صفحه را برحسب فاصله دو صفحه، بهتر نشان می‌دهد؟



مقاومت یک قطعه سیم به طول L برابر 24Ω است. این سیم را آن قدر می‌کشیم تا قطر مقطع آن نصف شود. چه کسری از طول سیم جدید را ببریم و کنار بگذاریم تا مقاومت قطعه سیم باقی‌مانده برابر 48Ω شود؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
 (۲) $\frac{1}{4}$
 (۳) $\frac{3}{4}$
 (۴) $\frac{7}{8}$

جرم دو سیم مسی A و B با هم برابر است. اگر قطر مقطع سیم B ، $\sqrt{3}$ برابر قطر مقطع سیم A باشد، مقاومت الکتریکی سیم A چندبرابر مقاومت الکتریکی سیم B است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
 (۲) 3
 (۳) 9
 (۴) $\frac{1}{9}$

خازن تختی با عایقی با ثابت دی‌الکتریک 2 ، دارای ظرفیت $4 \times 10^{-2} \mu F$ و به اختلاف پتانسیل 200 ولت وصل است. اگر در این وضعیت عایق از بین دو صفحه خازن خارج شود، ظرفیت و بار خازن به ترتیب برابر است با:

- (۱) $4 \mu C$ ، $2 \times 10^{-2} \mu F$
 (۲) $4 \mu C$ ، $4 \times 10^{-2} \mu F$
 (۳) $8 \mu C$ ، $4 \times 10^{-2} \mu F$
 (۴) $8 \mu C$ ، $16 \times 10^{-2} \mu F$

میدان الکتریکی بین صفحات خازن تختی که به یک باتری متصل است E_1 است. همچنان که خازن به باتری متصل است فاصله بین صفحات خازن را 2 برابر می‌کنیم. سپس خازن را از باتری جدا می‌کنیم و باز هم فاصله صفحات را 2 برابر می‌کنیم. بزرگی میدان الکتریکی بین صفحات چند برابر E_1 می‌شود؟

- (۱) 1
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) 4

مطابق شکل بار نقطه‌ای q در بین صفحات خازن مسطحی که فضای بین آن‌ها خلأ است به حالت تعادل قرار دارد. اگر فضای بین دو صفحه را با هوا پرکنیم، چه وضعیتی برای بار q پیش می‌آید؟



(۱) ثابت می‌ماند.

(۲) به سمت بالا حرکت می‌کند.

(۳) به سمت پایین حرکت می‌کند.

(۴) بسته به شرایط هر سه مورد ممکن است.

خازنی را به اختلاف پتانسیل 20 V وصل می‌کنیم و بار $8\text{ }\mu\text{C}$ - بر روی یکی از صفحه‌های آن ذخیره می‌شود. ظرفیت خازن چند میکروفاراد است و اگر این خازن را به اختلاف پتانسیل 12 V وصل کنیم چند میکروکولن بار در آن ذخیره می‌شود؟

(۱) $4/8 - 0/4$

(۲) $3/6 - 0/4$

(۳) $4/8 - 2/5$

(۴) $3/6 - 2/5$

در پدیده ابررسانایی، مقاومت ویژه جسم با کاهش دما:

(۱) با شیب ثابتی به صفر می‌رسد و در دماهای پایین‌تر نیز صفر می‌ماند.

(۲) کاهش می‌یابد و در دمای خاصی، ناگهان به مقدار زیادی افزایش می‌یابد.

(۳) در دمای خاصی به صورت ناگهانی به صفر افت می‌کند و با ادامه کاهش دما، دوباره افزایش می‌یابد.

(۴) در دمای خاصی به صورت ناگهانی به صفر افت می‌کند و در دماهای پایین‌تر، همچنان صفر می‌ماند.

بین صفحه‌های یک خازن تخت با دی الکتریکی دایره شکل به ثابت $k = 4$ پر شده است. محیط دی الکتریک دایره‌ای، 6 cm و فاصله صفحات خازن از یکدیگر 18 mm است. حداکثر باری که می‌توان بر روی صفحه‌های خازن ذخیره کرد، بدون این که دچار فروریزش الکتریکی شود، تقریباً چند میکروکولن است؟ خاصیت نارسایی دی الکتریک مذکور در میدان الکتریکی (N/C) 12×10^6 شکسته می‌شود. ($\pi = 3$ و $\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\text{ F/m}$)

(۱) $0/3$

(۲) $0/6$

(۳) $0/12$

(۴) $0/13$

دو سیم رسانای فلزی a و b دارای مقاومت، جرم و طول یکسان هستند، اگر مقاومت ویژه سیم a ، دو برابر مقاومت ویژه سیم b باشد، چگالی سیم a چندبرابر چگالی سیم b است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) 4

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) 2

مقاومت الکتریکی یک سیم رسانا در اثر 50°C افزایش دما 10% افزایش می‌یابد. ضریب دمایی مقاومت ویژه سیم در SI کدام است؟

(۱) 5×10^{-3}

(۲) 2×10^4

(۳) 5×10^{-4}

(۴) 2×10^{-3}

۶۱ از سوختن کامل ۴/۳ گرم از آلکانی مجهول، ۱۳/۲ گرم کربن دی‌اکسید تولید شده است. کدام یک از گزینه‌های زیر می‌توان نام این آلکان باشد؟ ($H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

- (۱) ۲، ۳- دی‌متیل بوتان
 (۲) متیل پروپان
 (۳) ۳- اتیل- ۳- متیل پنتان
 (۴) متیل بوتان

۶۲ نوع نیروهای بین‌مولکولی در کدام ترکیب، متفاوت از ترکیب‌های داده‌شده دیگر است؟

- (۱) پلی‌اتن
 (۲) پروپان
 (۳) نفتالن
 (۴) ویتامین C

۶۳ اگر به‌جای همه اتم‌های هیدروژن مولکول بنزن، گروه متیل قرار گیرد، کدام مورد درست است؟

- (۱) فراریت آن کاهش می‌یابد.
 (۲) خاصیت آروماتیکی آن، از بین می‌رود.
 (۳) فرمول مولکولی آن، مانند فرمول مولکولی نفتالن می‌شود.
 (۴) گشتاور دوقطبی مولکول، افزایش چشمگیری پیدا می‌کند.

۶۴ چه تعداد از مقایسه‌های زیر درست انجام شده است؟

(الف) نقطه جوش: $C_6H_{14} < C_9H_{20}$

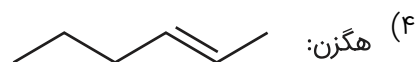
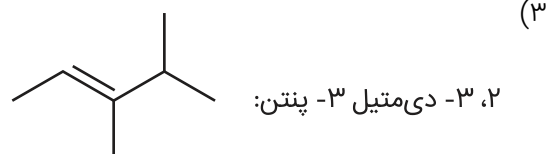
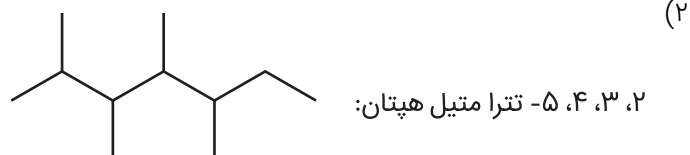
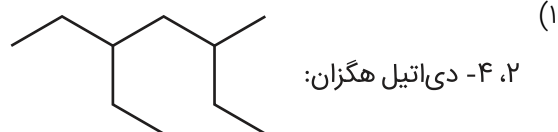
(ب) فرار بودن: $C_7H_{16} > C_{12}H_{26}$

(پ) نیروی بین‌مولکولی: $C_5H_{12} < C_7H_{16}$

(ت) گرانی: $C_8H_{18} > C_{16}H_{34}$

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

۶۵ نام کدام ترکیب صحیح نوشته شده است؟



کدام مورد از عبارتهای زیر در رابطه با دما و گرما درست است؟

الف) تغییر دما باعث مبادله گرما می‌شود.

ب) با استفاده از گرما می‌توان، یک نمونه ماده را توصیف کرد.

پ) انجام فرآیند می‌تواند باعث تغییر دما شود.

ت) برای افزایش دمای ۲۰۰ گرم آب و ۲۰۰ گرم روغن زیتون از 50°C به 75°C گرمای یکسانی نیاز است.

الف - ب (۱) پ - ت (۲)

پ (۳) ب - پ - ت (۴)

در ساختار ۲، ۳، تری‌متیل‌هگزان، چند پیوند کووالانسی ساده کربن - کربن وجود دارد؟

۶ (۱) ۷ (۲)

۸ (۳) ۹ (۴)

برای خنثی کردن کامل ۸۸/۰ گرم از کربوکسیلیک اسیدی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به $462/5$ میلی‌گرم کلسیم هیدروکسید

۸۰ درصد خالص نیاز است. شمار اتم‌های کربن در زنجیر هیدروکربنی آن کدام است؟

($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16, \text{Ca} = 40 : \text{g.mol}^{-1}$)

۳ (۱) ۴ (۲)

۵ (۳) ۶ (۴)

سامانه‌ای حاوی ۶۰ گرم آب 50°C درجه سلسیوس را در محیطی با دمای اتاق قرار می‌دهیم. کدام گزینه در مورد این سامانه درست

نیست؟

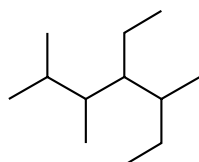
(۱) با گذشت زمان میانگین انرژی جنبشی ذرات سازنده سامانه کاهش می‌یابد.

(۲) گرمای ویژه سامانه در مرور زمان ثابت است.

(۳) به دلیل اختلاف در میزان انرژی گرمایی سامانه و محیط، میانگین تندی ذرات سازنده سامانه و محیط پس از مدتی برابر خواهد شد.

(۴) با مبادله گرما انرژی از سامانه به محیط منتقل می‌شود.

نام آیوپاک ترکیب زیر چیست؟



(۱) ۲ و ۳-دی‌اتیل، ۴ و ۵-دی‌متیل‌هگزان

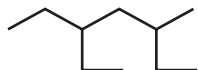
(۲) ۲ و ۳-دی‌متیل، ۴ و ۵-دی‌اتیل‌هگزان

(۳) ۴-اتیل، ۳ و ۵ و ۶-تری‌متیل‌هپتان

(۴) ۴-اتیل، ۲ و ۳ و ۵-تری‌متیل‌هپتان

پاسخ درست پرسش‌های زیر در کدام گزینه آمده است؟

- (الف) برای به دام انداختن گاز گوگرد دی‌اکسید خارج شده از نیروگاه‌ها، گازهای خروجی را از روی چه ماده‌ای عبور می‌دهند؟
 (ب) دو مورد از کاربردهای تیتانیم کدام است؟
 (پ) نام هیدروکربن با فرمول نقطه-خط زیر چیست؟



- (۱) منیزیم اکسید - ساخت موتور جت و پروانه کشتی اقیانوس‌پیما - ۲ و ۴ - دی‌اتیل هگزان
 (۲) کلسیم اکسید - استفاده در بدنه دوچرخه و ساخت پروانه کشتی اقیانوس‌پیما - ۲ و ۴ - دی‌اتیل هگزان
 (۳) منیزیم اکسید - ساخت موتور جت و ساخت پروانه کشتی اقیانوس‌پیما - ۳ - اتیل - ۵ - متیل هپتان
 (۴) کلسیم اکسید - استفاده در بدنه دوچرخه و ساخت موتور جت - ۳ - اتیل - ۵ - متیل هپتان

اگر آنتالپی فروپاشی شبکه NaCl ، $800 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ باشد، گرمای آزاد شده به ازای تشکیل 234 g NaCl گرم NaCl از یون‌های سازنده حدوداً چند کیلوگرم آب 68°C را می‌توان به جوش آورد؟ $(c_{\text{H}_2\text{O}} = 4/2 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^\circ \text{C}^{-1})$
 $(\text{Na} = 23, \text{Cl} = 35/5 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$

- (۱) $23/8 \times 10^3$
 (۲) $23/8$
 (۳) $32/8 \times 10^3$
 (۴) $32/8$

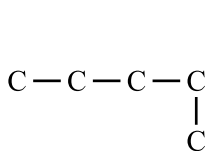
اگر به گاز حاصل از تجزیه کامل 200 g گرم کلسیم کربنات با خلوص 90% درصد، 1394 ژول گرما دهیم دمای آن از 23°C به 45°C می‌رسد، ظرفیت گرمایی ویژه گاز کربن دی‌اکسید چند $\text{J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^\circ \text{C}^{-1}$ است؟
 $(\text{C} = 12, \text{Ca} = 40, \text{O} = 16 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$

(g) گاز کربن دی‌اکسید + (s) کلسیم اکسید \rightarrow (s) کلسیم کربنات

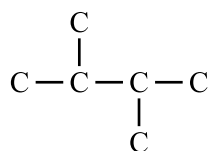
- (۱) $0/7$
 (۲) $0/75$
 (۳) $0/8$
 (۴) $0/85$

چه تعداد از مقایسه‌های زیر به درستی انجام نشده است؟

- (الف) مجموع شمار الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی: کربن دی‌اکسید = اتان
 (ب) وجود پیوند سه‌گانه بین دو اتم یکسان در هیدروژن سیانید و اتین
 (پ) شاخه‌دار بودن آلکان‌های "شکل ۱" و "شکل ۲"
 (ت) شمار جفت‌الکترون ناپیوندی: اتان > اتین



شکل ۱



شکل ۲

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

کدام یک از گزینه‌های زیر پیرامون شکل داده شده، نادرست است؟



۲۰۰g روغن زیتون (۷۵°C) → ۱۹۷۰J (۲۵°C)



۲۰۰g آب (۷۵°C) → ۴۱۸۰J (۲۵°C)

(۱) نیروهای بین مولکولی در روغن زیتون قوی‌تر از آب است.

(۲) اگر یک تخم‌مرغ در روغن زیتون و یک تخم‌مرغ در آب انداخته شود، تخم‌مرغ موجود در آب می‌پزد.

(۳) ظرفیت گرمایی ویژه آب تقریباً ۲/۱۲ برابر ظرفیت گرمایی ویژه روغن زیتون است.

(۴) به دلیل ظرفیت گرمایی بیشتر آب، با دادن گرمای یکسان، دمای آب کمتر افزایش می‌یابد.

شمار پیوندهای اشتراکی در کدام دو ترکیب زیر یکسان است؟

(الف) ۳، ۴، ۵- تری‌متیل هپتان (ب) ۲- برم-۴- کلرو-۳- اتیل پنتان
(پ) ۳- متیل هگزان (ت) ۲- کلرو-۳- متیل پنتان

(۱) ب - پ

(۲) الف - ب

(۳) الف - ت

(۴) ب - ت

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- با سرد شدن هوا، شدت رنگ گاز آلاینده NO_2 در شهرها، کاهش می‌یابد.
- در تبدیل $\text{CO}_2(\text{s}) \rightarrow \text{CO}_2(\text{g})$ ، میانگین تندی و انرژی جنبشی ذرات، ثابت است.
- علامت ΔH در واکنش شیمیایی انجام شده در فتوسنتز (در گیاهان سبز)، مثبت است.
- تغییر نوع آلوتروپ در واکنش‌هایی که عنصرهای خالص تولید یا مصرف می‌شوند، تأثیری بر ΔH واکنش ندارد.

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

چند مورد از مطالب زیر صحیح هستند؟

- بنزن ساده‌ترین ترکیب آروماتیک با فرمول C_6H_{12} است.
- ترکیبی که مدت‌ها به‌عنوان ضد بید برای نگهداری فرش و لباس کاربرد داشته است، دارای ۲۴ پیوند کووالانسی است.
- در نفت سبک نسبت به نفت سنگین درصد نفت کوره کمتر است.
- آلکان‌ها بخش عمده هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را تشکیل می‌دهند و به دلیل واکنش‌پذیری کم اغلب به‌عنوان سوخت به کار می‌روند.

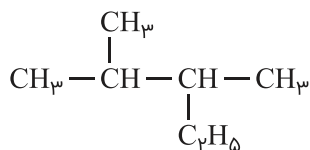
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

باتوجه به ترکیب X که دارای ساختار زیر است، پاسخ کدام گزینه جای خالی جمله زیر را به درستی کامل می‌کند؟
 "آلکان‌های تا (A) کربن گازی شکل هستند و هیدروکربن‌ها گشتاور دوقطبی در حدود (B) دارند؛ پس مولکول‌های این نوع مواد ناقطبی است."



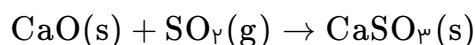
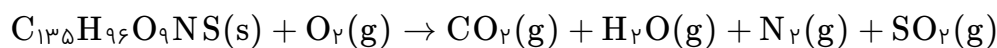
(۱) اختلاف تعداد پیوندهای کووالانسی آن با تعداد اتم‌های کربن گریس برابر با A است و همچنین اختلاف اتم‌های هیدروژن ترکیب X با مجموع اتم‌های گاز فندک برابر با B است.

(۲) اختلاف تعداد اتم‌های کربن در گریس با مجموع اتم‌های ترکیب X برابر با A است. همچنین تعداد گروه‌های اتیل در ترکیب X برابر با B است.

(۳) تعداد گروه‌های متیل در ترکیب X برابر با A است و اختلاف تعداد اتم‌های اتیل با تعداد اتم‌های کربن ترکیب X برابر با B است.

(۴) مجموع اعداد به کاررفته در نام‌گذاری ترکیب X برابر با A است و اختلاف تعداد کربن ترکیب X با مجموع تعداد اتم‌ها در سیکلوهگزان برابر با B است.

یک نیروگاه سوختن فسیلی از سوخت زغال‌سنگ با فرمول کلی $\text{C}_{135}\text{H}_{96}\text{O}_9\text{NS}$ استفاده می‌کند. اگر کربن دی‌اکسید آزاد شده در واکنش سوختن کامل زغال‌سنگ در یکی از قسمت‌های این نیروگاه با جذب 11880 کیلوژول گرما، 10°C افزایش دما داشته باشد، چند کیلوگرم کلسیم اکسید با خلوص 70% نیاز است تا نصف SO_2 تولیدشده را قبل از ورود به هواکره به دام بیندازد؟ (گرمای ویژه کربن دی‌اکسید را $1.0^\circ\text{C}^{-1} \cdot \text{J} \cdot \text{g}^{-1}$ در نظر بگیرید و واکنش‌ها موازنه شوند) ($\text{Ca} = 40$, $\text{O} = 16$, $\text{C} = 12$: $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



۱۰ (۲)

۷ (۱)

۱۴ (۴)

۲۰ (۳)

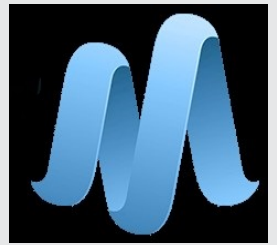




استاد علیرضا افشار

”همایش ها“

@hamayesh_dr_afshar



گزینه ۲

۱

$$f(6) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 6 \\ g(x) = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = 6 \\ x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

حال هریک از معادلات بالا را حل می‌کنیم:

$$x - \sqrt{x} - 6 = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}>0} t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) = 0 \xrightarrow{t>0} t = 3 \xrightarrow{x=t^2} x = 9$$

$$x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}>0} t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \xrightarrow{x=t^2} x = \frac{1}{4}$$

بنابراین نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را در نقاطی به طول ۹ و $\frac{1}{4}$ قطع می‌کند.

گزینه ۴

۲

ابتدا ضابطه $f^{-1}(x)$ و $g^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم، سپس $f^{-1}(g^{-1}(x))$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - y \Rightarrow x = (1 - y)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (1 - x)^2$$

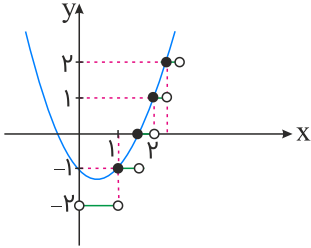
$$g(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow y = \sqrt{x-1} \Rightarrow y^2 = x-1 \Rightarrow x = y^2 + 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(x^2 + 1) = (1 - (x^2 + 1))^2 = (-x^2)^2 = x^4$$

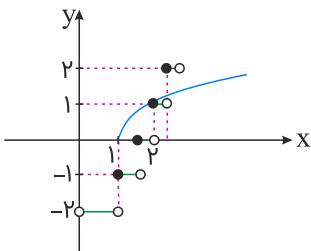


نمودار $[x^2 - x - 1]$ را رسم می‌کنیم.
رأس سهمی $y = x^2 - x - 1$ برابر است با:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$



حال نمودار دو تابع را هم‌زمان رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینیم معادله فقط یک جواب دارد. $(x = 2)$

$$f(x) = y = ax - b \Rightarrow ax = y + b \Rightarrow x = \frac{y + b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$$

$$\frac{1}{a} = a \Rightarrow a^2 = 1 \xrightarrow{a < 0} a = -1$$

$$\frac{b}{a} = 3 \xrightarrow{a = -1} b = -3 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x + 3, f(x) = -x + 3$$

$$f^{-1}(x) - f(x) = 0$$

$$f(\sin x) = \tan^2 x + \cos^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} + 1 - \sin^2 x$$

حال کافی است به جای $\sin x$ عدد $\frac{1}{3}$ قرار دهیم:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} + 1 - \frac{1}{9} = \frac{1}{8} + \frac{8}{9} = \frac{9 + 64}{72} = \frac{73}{72} = 1\frac{1}{72}$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ به ازای $x \geq 0$ به صورت $y = x$ است، پس به ازای $2 \leq x < 3$ هم که زیرمجموعه‌ای از $x > 0$ می‌باشد، برابر $f(x) = x$ است.

تابع $[x]$ به ازای $2 \leq x < 3$ به صورت $[x] = 2$ در می‌آید، در نتیجه:

$$g(x) = 2 + 2 = 4 \Rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = x - 4$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-2) = \frac{f(-2)}{g(-2)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{-2} = \frac{-2}{0}$$

بنابراین تعریف نشده است.

اول: عبارت $-x^2 + 4x + 12$ را کمی ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 12 &= -(x^2 - 4x - 12) = -\underbrace{(x^2 - 4x + 4 - 16)}_{(x-2)^2} \\ &= -\left((x-2)^2 - 16\right) = -(x-2)^2 + 16 \\ f(x) &= \sqrt{-(x-2)^2 + 16} \xrightarrow{x=2+\sqrt{7}} f(2+\sqrt{7}) = \sqrt{-(2+\sqrt{7}-2)^2 + 16} \\ &= \sqrt{-(\sqrt{7})^2 + 16} = \sqrt{-7 + 16} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

برای پیدا کردن $f(2)$ در ضابطه $f(x)$ به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{-x^2 + 4x + 12} \xrightarrow{x=2} f(2) = \sqrt{-4 + 8 + 12} = \sqrt{16} = 4 \\ f(2+\sqrt{7}) - f(2) &= 3 - 4 = -1 \end{aligned}$$

بررسی موارد:

مورد "الف":

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}, f(x) = -1$$

$$-\sin^y \pi x \neq 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} -1 \leq -\sin^y \pi x < 0 \Rightarrow [-\sin^y \pi x] = -1 \Rightarrow g(x) = -1$$

$$\Rightarrow D_f = D_g, f(x) = g(x) \Rightarrow f = g$$

مورد "ب":

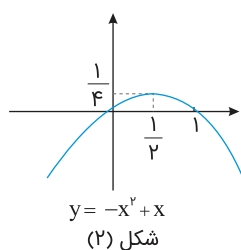
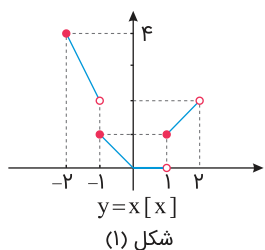
$$-x[x] \geq 0 \Rightarrow x[x] \leq 0 \xrightarrow{\text{شکل ۱}} 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_f = [0, 1), f(x) = 0$$

$$\begin{cases} -x^y + x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow D_g = [0, 1)$$

$$y = -x^y + x = -(x - \frac{1}{y})^y + \frac{1}{y} \xrightarrow{\text{شکل ۲}} 0 \leq y \leq \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{y} \leq \frac{1}{y} \Rightarrow [\sqrt{y}] = 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

$$\Rightarrow D_f = D_g, f(x) = g(x) \Rightarrow f = g$$



مورد "پ":

$$f(x) = \sqrt{x^f - 2x^y + 1} = \sqrt{(x^y - 1)^2} = |x^y - 1|$$

$$\Rightarrow f(x) \neq g(x) \Rightarrow f \neq g$$

تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ ، عدد صحیح k را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند.

$$k \leq x < k+1 \Rightarrow [x] = k$$

$$\left. \begin{array}{l} -3 \leq -2/3 < -2 \Rightarrow [-2/3] = -3 \\ 1 \leq 1/8 < 2 \Rightarrow [1/8] = 1 \\ 0 \leq 0/3 < 1 \Rightarrow [0/3] = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow [-2/3] + [1/8] + [0/3]$$

$$= -3 + 1 + 0 = -2$$

باتوجه به نمودار داده شده نمودار g به صورت $g(x) = a(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ است، باتوجه به اینکه $g(0) = -1$ است مقدار a برابر ۱ به دست می‌آید. پس:

$$g(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = x^2 + x - 1$$

حال داریم:

$$\begin{cases} g \circ f(x) = f^2(x) + f(x) - 1 \\ g \circ f(x) = x^f - x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow f^2(x) + f(x) - 1 = x^f - x^2 - 1$$

$$\Rightarrow f^2(x) + f(x) - x^f + x^2 = 0$$

$$\Rightarrow (f(x) + x^2)(f(x) - x^f + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = -x^2 \\ f(x) = x^f - 1 \end{cases}$$



ابتدا $f(-1)$ و سپس با داشتن مقدار آن $f(\sqrt{2})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2 - x - x^2} \Rightarrow f(-1) = \sqrt{2 - (-1) - (-1)^2} = \sqrt{2 + 1 - 1} = \sqrt{2}$$

برای رسیدن به جواب تست باید حاصل $f(\sqrt{2})$ را محاسبه کنیم:

$$f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2} - 2} = \sqrt{-\sqrt{2}}$$

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد، پس حاصل $f(f(-1))$ تعریف نشده است.

ابتدا fog را می‌سازیم:

$$y = f(g(x) = x^2 - 1) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1} = \begin{cases} 1 & ; x^2 - 1 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \text{ یا } x > 1 \\ -1 & ; x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{cases}$$

حال $h(x) = x^2$ را در این تابع ضرب می‌کنیم:

$$y = h(x) f(g(x)) = \begin{cases} x^2 & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ -x^2 & ; -1 < x < 1 \end{cases}$$

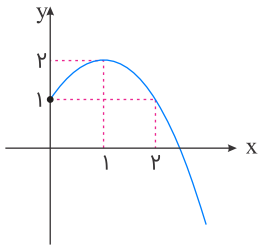
که در بازه $(-1, 1)$ قرینه x^2 نسبت به محور x ها است و در خارج از این بازه همان x^2 است. در $x = \pm 1$ هم که مخرج $y = f(g(x)) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1}$ تعریف نشده است، تابع y تعریف نمی‌شود.

$$\begin{aligned} f(2 - \sqrt{3}) &= \frac{2(2 - \sqrt{3})^2 + 2}{(2 - \sqrt{3})^2 - 3} = \frac{2(4 - 4\sqrt{3} + 3) + 2}{(4 - 4\sqrt{3} + 3) - 3} = \frac{8 - 8\sqrt{3} + 6 + 2}{4 - 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{16 - 8\sqrt{3}}{4 - 4\sqrt{3}} = \frac{8(2 - \sqrt{3})}{4(1 - \sqrt{3})} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}} \\ &\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{\underbrace{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}_{\text{اتحاد مزدوج}}} \\ &= \frac{2[2 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3]}{1^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{2(-1 + \sqrt{3})}{-2} = -(-1 + \sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

اگر $t = \sqrt{x+1}$ را متغیری جدید در نظر بگیریم، در نتیجه $x = t^2 - 1$ خواهد بود و داریم:

$$y = 2t - (t^2 - 1) = 1 + 2t - t^2$$

برد سهمی بالا با دامنه $t \geq 0$ ، برد تابع f است. سهمی موردنظر در شکل زیر رسم شده است:



پس برد f بازه $(-\infty, 2]$ است.

می‌دانیم که $\sqrt{3} \simeq 1/7$ و $\sqrt{5} \simeq 2/2$ بنابراین:

$$1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow [\sqrt{3}] = 1$$

$$2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -2 > -\sqrt{5} > -3$$

$$\xrightarrow{+1} -1 > 1 - \sqrt{5} > -2 \Rightarrow [1 - \sqrt{5}] = -2$$

$$A = [\sqrt{3}] + [1 - \sqrt{5}] = 1 + (-2) = -1$$

تابعی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد. در حالت زوج مرتب نیز تابعی یک‌به‌یک است که مولفه دوم یکسان نداشته باشد.

خروجی‌ها از $f(x)$ و ورودی‌ها از $g(x)$ خواهد بود.

$$\frac{1}{x+1} = 1 \Rightarrow x+1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{1}{x+1} = 2 \Rightarrow x+1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x+1} = 5 \Rightarrow x+1 = \frac{1}{5} \Rightarrow x = -\frac{4}{5}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ 0, -\frac{4}{5}, -\frac{1}{2} \right\}$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow g(f(1)) = g(2) = 4$$

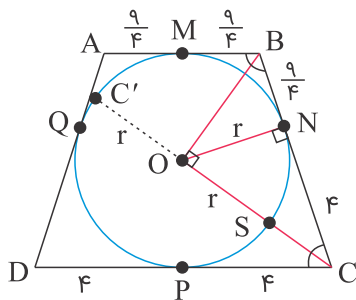
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4, D_f = \mathbb{R} \\ g(x) = x + 2, D_g = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x - 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 2 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(3) = 3 - 2 = 1$$

اولاً نیمسازهای زاویه‌های B و C بر هم عمودند و در مرکز دایره، هم‌رسانند. ثانیاً می‌دانیم طول مماس‌های رسم‌شده از نقاط B و C بر دایره، یکسان است. حال طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه BOC ، داریم:



$$ON^2 = BN \cdot NC = \left(\frac{9}{4}\right)(4) = 9 \Rightarrow ON = 3 \Rightarrow r = 3$$

$$OC^2 = CN \cdot CB = 4\left(4 + \frac{9}{4}\right) = (4)\left(\frac{25}{4}\right) = 25 \Rightarrow OC = 5$$

C را به O وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در C' قطع کند. نقطه C' دورترین نقطه دایره نسبت به نقطه C است و داریم:

$$CC' = CO + OC' = 5 + 3 = 8$$



نکته: در یک دایره، هرچه فاصله یک وتر از مرکز آن بیشتر شود، طول وتر کوچکتر می‌شود. بنابراین در چهار ضلعی ABCD قطعاً AB کوچکترین ضلع و BC بزرگترین ضلع خواهد بود، پس ترتیب اضلاع این چهار ضلعی یکی از دو حالت زیر خواهد بود:

$$AB < CD < DA < BC \quad \text{یا} \quad AB < DA < CD < BC$$

می‌دانیم اندازه هر کمان یک دایره کاملاً متناسب با اندازه وتر آن کمان است؛ بنابراین ترتیب کمان‌های این دایره هم یکی از دو حالت بالا خواهد بود. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: گزینه ۱: صحیح است.

$$\hat{D} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2} > \frac{\widehat{AB} + \widehat{DA}}{2} = \frac{\widehat{DAB}}{2} = \hat{C}$$

گزینه ۲: صحیح است.

$$\hat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{2} > \frac{\widehat{AB} + \widehat{DA}}{2} = \frac{\widehat{DAB}}{2} = \hat{C}$$

گزینه ۳: صحیح است.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD}}{2} > \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{ADC}}{2} = \hat{B}$$

گزینه ۴: لزوماً صحیح نیست:

$$\hat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{2} \quad (\text{نامشخص}), \quad \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \hat{D}$$

بنابراین جواب گزینه ۴ است.

برای بازتاب یک خط نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم (خط $y = x$)، کافی است جای متغیر x و y را عوض کنیم. پس معادله خط، $x = 2y - 1$ است.

$$S_{ABCD} = 12^2 = 144$$

$$S_{\text{دایره}} = 6^2 \times \pi = 36\pi = 108$$

$$144 - 108 = 36 \Rightarrow S_{\text{رنگی}} = \frac{36}{4} = 9$$

گزینه ۱: با تبدیل بازتاب می‌توان AB را به روی خودش تصویر کرد. به عنوان نمونه تبدیل بازتابی که خط AB را روی محور بازتاب خود داشته باشد و یا تبدیل بازتابی که محور بازتاب آن عمودمنصف پاره‌خط AB باشد.

گزینه ۳: با دوران به مرکز وسط پاره‌خط AB و زاویه 180° می‌توان AB را به روی خودش تصویر کرد.

گزینه ۴: با تجانس معکوس به ضریب -1 و مرکز وسط پاره‌خط AB در واقع AB روی خودش تصویر می‌شود. پس تنها با تبدیل انتقال نمی‌توان AB را روی خودش تصویر کرد.

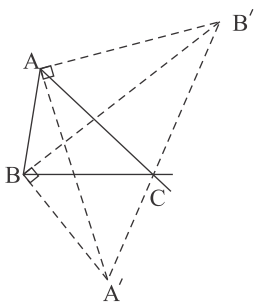
می‌دانیم دوران به مرکز یک نقطه دلخواه (که می‌تواند مبدأ هم نباشد) و تحت یک زاویه دلخواه، یک تبدیل طولپا است؛ پس در نتیجه طول را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین:

$$A'B' = AB = 5 \text{ cm}$$

همچنین در تجانس طول پاره‌خط k برابر می‌شود:

$$A''B'' = k \cdot A'B' = 4 \times 5 = 20$$

مطابق شکل، AB' نیمساز خارجی A و BA' نیز نیمساز خارجی B است. همچنین نیمسازهای داخلی و خارجی در هر رأس بر هم عمودند. بنابراین مثلث‌های $AA'B'$ و $BA'B'$ قائم‌الزاویه‌اند. پس اگر دایره‌ای به قطر $A'B'$ رسم کنیم، حتماً از نقاط A و B می‌گذرد. بنابراین چهار ضلعی $ABA'B'$ محاطی است.



C و C' انتقال یافته هم هستند، پس شعاع برابر دارند.

$$۴ - a^2 = 1 - 2a$$

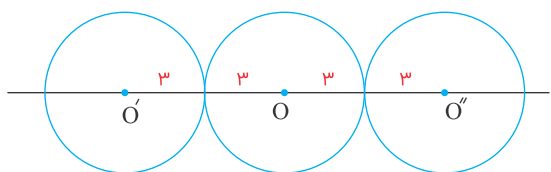
$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (a + 1)(a - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \checkmark \\ a = 3 \times \end{cases}$$

پس دو دایره C و C' به شعاع ۳ و $1 - 2a = 1 - 2(-1) = 3$ می‌باشند.
می‌دانیم C و C' مماس بیرونی هستند. پس:

$$OO' = 2 \times 3 = 6$$

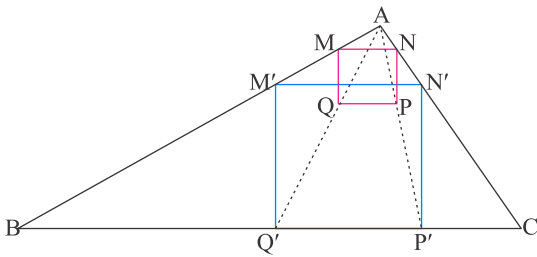
C'' مجانس C' به مرکز O و ضریب -1 می‌باشد، پس در واقع وضعیت سه دایره به صورت زیر است:



می‌دانیم $O'O'' = 12$ و شعاع هر دو دایره، ۳ می‌باشد. پس اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره C' و C'' برابر است با:

$$\sqrt{12^2 - (3 + 3)^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

نقاط M و N را روی AB و AC چنان انتخاب می‌کنیم که $MN \parallel BC$ و مربع $MNPQ$ را می‌سازیم. AP و AQ را امتداد می‌دهیم تا BC را در P' و Q' بر BC عمود می‌کنیم تا AC و AB را در N' و M' قطع کنند. حال داریم:

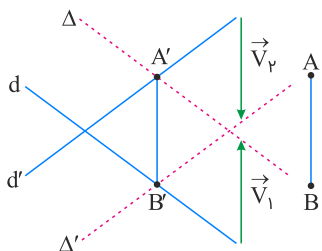


$$\left. \begin{array}{l} \triangle AM'Q' : MQ \parallel M'Q' \Rightarrow \frac{AM}{AM'} = \frac{AQ}{AQ'} \\ \triangle AQ'P' : QP \parallel Q'P' \Rightarrow \frac{AQ}{AQ'} = \frac{AP}{AP'} \\ \triangle AP'N' : PN \parallel P'N' \Rightarrow \frac{AP}{AP'} = \frac{AN}{AN'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AM}{AM'} = \frac{AQ}{AQ'} = \frac{AP}{AP'} = \frac{AN}{AN'}$$

پس چهار ضلعی $M'N'P'Q'$ مجانس چهار ضلعی $MNPQ$ است و چون $MNPQ$ مربع است، $M'N'P'Q'$ هم مربع است (بدیهی است که اگر $M'N'$ را به موازات BC بالاتر یا پایین‌تر ببریم، چهار ضلعی $M'N'P'Q'$ دیگر مربع نخواهد بود، پس $M'N'P'Q'$ تنها جواب مسئله است).



مطابق شکل زیر، خط پایینی (مثلاً d) را در راستای بردار $\vec{V}_1 = \overrightarrow{BA}$ به بالا انتقال می‌دهیم و خط Δ را موازی d رسم می‌کنیم.



همچنین خط بالایی (مثلاً d') را در راستای بردار $\vec{V}_2 = \overrightarrow{AB}$ به پایین انتقال می‌دهیم و خط Δ' را موازی d' رسم می‌کنیم. محل تلاقی Δ با d' و همچنین Δ' با d دو سر پاره‌خطی هستند که موازی و مساوی AB رسم شده و دو سر آن روی d و d' می‌باشد.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow (x - y)(x + y) = 16 \Rightarrow x - y = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = 3 \Rightarrow 2x - 3y = 10 - 9 = 1$$

در صورتی که از رنگ دو مهره خارج شده اطلاعی نداشته باشیم، احتمال آنکه مهره سوم خارج شده، سفید باشد دقیقاً مانند آن است که اولین مهره خارج شده سفید باشد یعنی $P(A) = \frac{4}{7}$ است.

نکته:

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$$

$$A \cap B = B \cap A = \{106, 112, \dots, 202\}$$

$$n(A \cap B) = \frac{202 - 106}{6} + 1 = 17$$

$$n((A \times B) \cap (B \times A)) = n[(A \cap B) \times (B \cap A)] = (n(A \cap B))^2 = 17 \times 17 = 289$$

$$n(S) = \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 4 = 20$$

10 مساوی یا کوچک‌تر یا مساوی 10 = پیشامد حاصل ضرب کوچک‌تر یا مساوی 10 = $\{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (3, 2), (5, 2)\}$

P (حاصل ضرب بزرگ‌تر از 10) = $1 - P$ (حاصل ضرب کوچک‌تر یا مساوی 10)

$$= 1 - \frac{6}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0.7$$

برای این کار کافی است ابتدا همهٔ سه‌رقمی‌هایی که از هر دو عدد 4 موجود استفاده شده است را پیدا کنیم و سپس یکی یکی از تعداد 4 ها کم کنیم:

$$\text{سه‌رقمی‌های با دو عدد } 4 \text{ و بدون عدد صفر: } \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{3}{3 \text{ یا } 5 \text{ یا } 7} \times \begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ \text{جایگشت} \\ \text{عدد غیر از } 4 \end{matrix} = 9$$

$$\text{سه‌رقمی‌های با دو عدد } 4 \text{ و با عدد صفر: } \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{\text{صفر}} = 1 \times 1 \times 1 = 1 \\ \frac{1}{4} \frac{1}{\text{صفر}} \frac{1}{4} = 1 \times 1 \times 1 = 1 \end{cases} \xrightarrow{+} 1 + 1 = 2$$

$$\text{سه‌رقمی‌های با یک عدد } 4 \text{ و با عدد صفر: } \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{3}{3 \text{ یا } 5 \text{ یا } 7} \frac{1}{\text{صفر}} = 1 \times 3 \times 1 \\ \frac{3}{3 \text{ یا } 5 \text{ یا } 7} \frac{1}{4} \frac{1}{\text{صفر}} = 3 \times 1 \times 1 \\ \frac{3}{3 \text{ یا } 5 \text{ یا } 7} \frac{1}{\text{صفر}} \frac{1}{4} = 3 \times 1 \times 1 \\ \frac{1}{4} \frac{1}{\text{صفر}} \frac{3}{3 \text{ یا } 5 \text{ یا } 7} = 1 \times 1 \times 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

$$\text{سه‌رقمی‌های با یک عدد } 4 \text{ و بدون عدد صفر: } \frac{1}{4} \frac{3}{3 \text{ یا } 5 \text{ یا } 7} \frac{2}{2} \times \begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ \text{جایگشت} \\ \text{عدد } 4 \end{matrix}$$

$$= 1 \times 3 \times 2 \times 3 = 18$$

$$\text{سه‌رقمی‌های بدون عدد } 4: \frac{3}{3 \text{ یا } 5 \text{ یا } 7} \frac{3}{3 \text{ یا } 5 \text{ یا } 7} \frac{2}{2} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

صفر هم می‌تواند قرار بگیرد

$$\Rightarrow n(S) = 9 + 2 + 12 + 18 + 18 = 59$$

$$n(S) = \binom{12}{3} = 220$$

$$P(\text{هر سه هم جنس باشند}) = P(\text{هر سه مرد}) + P(\text{هر سه زن})$$

$$= \frac{\binom{7}{3}}{220} + \frac{\binom{5}{3}}{220} = \frac{35 + 10}{220} = \frac{45}{220} = \frac{9}{44}$$

نمودار رسم شده، مربوط به مجموعه $(1, 3] \times \{1, 2, 3, 4\}$ است.

گزینه "۱": درست است.

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

گزینه "۲": نادرست است.

$$A \times B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \text{ یا } B = \emptyset$$

مثال نقض: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \emptyset$, $A \times B = \emptyset$
گزینه "۳": درست است.

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B \text{ یا } A = \emptyset \text{ یا } B = \emptyset$$

گزینه "۴": درست است.

$$A \times B \neq \emptyset \Rightarrow A, B \neq \emptyset$$

می‌دانیم $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ پس:

$$n(A) \times n(B) = 48$$

به همین ترتیب:

$$n(C) \times n(A) = 28$$

بنابراین $n(A)$ هم مقسوم‌علیه ۴۸ و هم مقسوم‌علیه ۲۸ است. چون می‌خواهیم بیشترین مقدار $n(A)$ را بیابیم، کافی است ب.م.د دو عدد ۴۸ و ۲۸ را پیدا کنیم:

$$\text{Max}(n(A)) = (48, 28) = 4$$

نکته: اگر A, B, C, D مجموعه‌های متناهی و ناتهی باشند، آنگاه:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$A = \{۲, ۳, ۵, ۷\} \\ B = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\} \Rightarrow A \cap B = \{۳, ۵, ۷\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۳$$

$$n[(A \times B) \cap (B \times A)] = (n(A \cap B))^۲ = ۳^۲ = ۹$$

چون ورقه‌های الکتروسکوپ باز هستند، پس الکتروسکوپ و خازن هر دو باردارند. بار صفحه B و الکتروسکوپ از یک نوع است. با قرار دادن شیشه بدون بار بین صفحات خازن، ظرفیت خازن زیاد می‌شود. زیرا با وجود شیشه که به‌عنوان دی‌الکتریک بین صفحات خازن قرار دارد، ظرفیت خازن افزایش می‌یابد و همچنین بار روی صفحات خازن نیز زیاد می‌شود.

$$q = C \uparrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ثابت}}}{V} \Rightarrow q \uparrow \text{افزایشی}$$

این افزایش بار روی صفحات از انتقال بار الکتروسکوپ ناشی شده است. پس انحراف ورقه‌ها کاهش می‌یابد.

$$C = \frac{q_1}{V_1} = \frac{q_۲}{V_۲} \Rightarrow \frac{q_1}{V_1} = \frac{q_1 + ۲۰}{\frac{۳}{۲}V_1} \Rightarrow q_1 = ۴۰ \mu C$$

$$q_۲ = q_1 + ۲۰ = ۶۰ \mu C$$

$$U_۲ - U_1 = ۲۰۰$$

$$\frac{1}{۲}q_۲V_۲ - \frac{1}{۲}q_1V_1 = ۲۰۰$$

$$۶۰ \times \frac{۳}{۲}V_1 - ۴۰ \times V_1 = ۴۰۰ \Rightarrow V_1 = ۸ \text{ ولت}$$

$$C = \frac{q_1}{V_1} = \frac{۴۰}{۸} = ۵ \mu F$$



ظرفیت جدید خازن (C') نسبت به ظرفیت قبل از تغییرات برابر است با:

$$\frac{C'}{C} = \frac{\kappa'}{\kappa} \times \frac{A'}{A} \times \frac{d}{d'} = ۴ \times ۱ \times \frac{d}{۲d} = ۲$$

چون خازن از باتری جدا است، بار خازن ثابت است.

$$\frac{U'}{U} = \frac{\frac{q^۲}{۲C'}}{\frac{q^۲}{۲C}} = \frac{C}{C'} = \frac{۱}{۲}$$

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow \frac{E'}{E} = \frac{V'}{V} \times \frac{d}{d'} = \frac{\frac{q}{C'}}{\frac{q}{C}} \times \frac{d}{d'} = \frac{C}{C'} \times \frac{d}{d'} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

خازن به باتری متصل است، بنابراین اختلاف پتانسیل بین صفحات ثابت می ماند.

$$V_۲ = V_۱$$

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{\kappa_۲}{\kappa_۱} \cdot \frac{A_۲}{A_۱} \cdot \frac{d_۱}{d_۲} \xrightarrow[k_۲=k_۱, A_۲=A_۱]{d_۲=۳d_۱} \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{۱}{۳}$$

$$q = CV \xrightarrow{V \text{ ثابت}} \frac{q_۲}{q_۱} = \frac{C_۲}{C_۱} \Rightarrow \frac{q_۲}{q_۱} = \frac{۱}{۳}$$

$$U = \frac{۱}{۲} qV \xrightarrow{V \text{ ثابت}} \frac{U_۲}{U_۱} = \frac{q_۲}{q_۱} \Rightarrow \frac{U_۲}{U_۱} = \frac{۱}{۳}$$

$$V = E \cdot d \xrightarrow{V \text{ ثابت}} \frac{E_۲}{E_۱} = \frac{d_۱}{d_۲} \Rightarrow \frac{E_۲}{E_۱} = \frac{d_۱}{d_۲} = \frac{۱}{۳}$$

ابتدا جریان الکتریکی عبوری از سیم را حساب می کنیم.

$$q_۱ + q_۲ = q'_۱ + q'_۲ \xrightarrow{q'_۱=q'_۲} -۴۰ + ۳۰ = ۲q' \Rightarrow q' = -۵mC$$

$$\Rightarrow |\Delta q| = ۳۵mC$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{۳۵mC}{۷۰ms} = ۰/۵A$$

اکنون با استفاده از قانون اهم و رابطه محاسبه مقاومت بر حسب مشخصات ساختمانی آن داریم:

$$R = \frac{V}{I}, R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \rho \frac{L}{A} = \frac{V}{I} \Rightarrow V = I \left(\rho \frac{L}{A} \right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۴ \times ۱۰^{-۵} \times \frac{۱}{۲}}{۲ \times ۱۰^{-۶}} \right) = ۵V$$

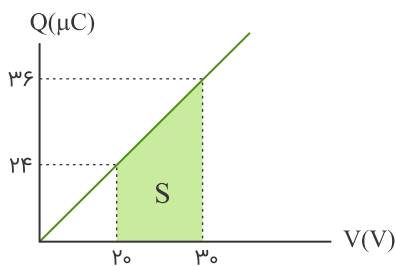
در نمودار $I - V$ شیب نمودار برابر با عکس مقاومت الکتریکی است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{R} = \frac{2/5}{10} \Rightarrow R = \frac{V}{I} = \frac{10}{2/5} = 4 \Omega$$

ابتدا بار ذخیره‌شده در خازن را در حالتی که ولتاژ بین صفحه‌های آن $20V$ است به دست می‌آوریم:

$$\frac{Q_2}{V_2} = \frac{Q_1}{V_1} \Rightarrow \frac{36}{30} = \frac{Q_1}{20} \Rightarrow Q_1 = 24 \mu C$$

مساحت ناحیه رنگی‌شده نشان‌دهنده اندازه تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن است:



$$\Delta U = \frac{(24 + 36) \times 10^{-6}}{2} \times 10 = 300 \times 10^{-6} = 300 \mu J$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{2}CV_2^2}{\frac{1}{2}CV_1^2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \frac{36}{25} = \frac{144}{100} \Rightarrow \text{۴۴ درصد افزایش}$$

$$\Delta R = R_1 \times \alpha \times \Delta \theta \begin{cases} 0/5 = 50 \times \alpha \times 50 \\ \Delta R = 150 \times \alpha \times 80 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه را تقسیم می‌کنیم}} \frac{0/5}{\Delta R} = \frac{5}{3 \times 8}$$

$$\Rightarrow \Delta R = 2/4 \Omega$$

$$R_2 = 150 + 2/4 = 152/4 \Omega$$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{q}{Cd} = \frac{q}{\kappa(\epsilon_0 \frac{A}{d})d} = \frac{q}{\kappa \epsilon_0 A}$$

مقدار $\frac{q}{\kappa \epsilon_0 A}$ در این سوال ثابت است. پس در نتیجه مقدار E هم ثابت می‌باشد.

ابتدا طول سیم پس از آن که قطر مقطع آن نصف می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$A_1 L_1 = A_2 L_2 \Rightarrow \pi \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 \times L_1 = \pi \left(\frac{D_1}{4}\right)^2 \times L_2 \Rightarrow L_2 = 4L_1$$

مقاومت سیم جدید نسبت به سیم قبلی را حساب می‌کنیم:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{R_2}{24} = 1 \times \frac{4}{1} \times \frac{4}{1} = 16 \Rightarrow R_2 = 24 \times 16 \Omega$$

حالا کسری از قطعه سیم جدید که باید کنار گذاشته شود تا مقاومت قطعه سیم باقی‌مانده (R_3) برابر 48Ω شود را به دست می‌آوریم:

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{\rho_3}{\rho_2} \times \frac{L_3}{L_2} \times \frac{A_2}{A_3} \Rightarrow \frac{48}{24 \times 16} = 1 \times \frac{L_3}{L_2} \times 1 \Rightarrow \frac{L_3}{L_2} = \frac{1}{8}$$

پس باید $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ طول سیم جدید را کنار بگذاریم تا مقاومت قطعه باقی‌مانده برابر 48Ω شود.

$$m_A = m_B \Rightarrow \rho_A V_A = \rho_B V_B \xrightarrow[\rho_A = \rho_B]{V = AL} \frac{A_B}{A_A} = \frac{L_A}{L_B}$$

$$R = \frac{\rho L}{A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{\frac{\rho L_A}{A_A}}{\frac{\rho L_B}{A_B}} = \frac{L_A A_B}{L_B A_A} = \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2$$

$$\frac{D_B}{D_A} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{A_B}{A_A} = 3 \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2 = 9$$

چون این خازن به مولد متصل است، پس اختلاف پتانسیل دو سر آن ثابت خواهد ماند و با خارج کردن دی‌الکتریک از بین صفحات خازن، ظرفیت خازن و بار خازن به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \xrightarrow[\text{ثابت } A, d]{k_2=1, k_1=2} \frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{1}{2} C_1 \xrightarrow{C_1 = 4 \times 10^{-2} \mu F} C_2 = \frac{1}{2} (4 \times 10^{-2}) \Rightarrow C_2 = 2 \times 10^{-2} \mu F$$

ظرفیت بر حسب میکروفاراد

$$q_2 = \overset{\uparrow}{C_2} \underset{\downarrow}{V} = (2 \times 10^{-2}) \times 200 = 4 \mu C$$

پتانسیل ثابت و برابر با ۲۰۰ ولت است

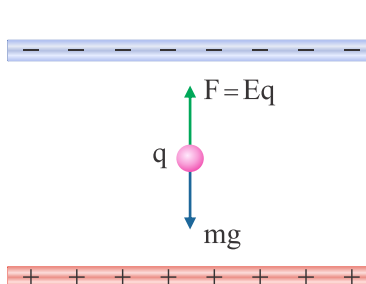
میدان الکتریکی بین صفحات خازن از رابطه $E = \frac{V}{d}$ به دست می‌آید. در تغییر اول چون خازن به باتری متصل است، V ثابت است و با ۲ برابر شدن فاصله بین دو صفحه، میدان بین دو صفحه نصف می‌شود. پس از جدا شدن خازن از باتری با هر تغییری بار خازن ثابت می‌ماند.

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{K\epsilon_0 \frac{A}{d}} = \frac{dQ}{K\epsilon_0 A}$$

با جایگذاری رابطه به دست آمده در $E = \frac{V}{d}$ داریم:

$$E = \frac{d \frac{Q}{K\epsilon_0}}{d} = \frac{Q}{K\epsilon_0}$$

بنابراین، در این حالت با تغییر d ، میدان الکتریکی بین صفحات ثابت می‌ماند. پس در مجموع دو تغییر، میدان الکتریکی بین صفحات $\frac{1}{\kappa}$ برابر یعنی به $\frac{1}{\kappa} E_1$ می‌شود.



$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C' = \kappa C$$

$$q = CV \Rightarrow V = \frac{q}{C'}$$

ثابت
↑
q
↓
κ برابر

$$\Rightarrow V' = \frac{V}{\kappa} ; E' = \frac{V'}{d} \Rightarrow E' = \frac{E}{\kappa} , \kappa = 1$$

پس E' ضعیف‌تر از E است. پس $F = Eq$ کاهش یافته، بنابراین q به سمت پایین حرکت می‌کند.

به عبارتی: $C' \uparrow \Rightarrow V' \downarrow \Rightarrow E' \downarrow \Rightarrow F \downarrow$



اگر بار $8 \mu\text{C}$ بر روی یکی از صفحه‌های خازن ذخیره شده باشد حتماً $8 \mu\text{C}$ بار بر روی صفحه دیگر ذخیره شده و بار ذخیره شده را کلاً $8 \mu\text{C}$ در نظر می‌گیریم.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{8 \times 10^{-6}}{20} = 0.4 \times 10^{-6} = 0.4 \mu\text{F}$$

حالا از رابطه $Q = CV$ بار ذخیره شده را در حالتی که به اختلاف پتانسیل 12 V وصل است را به دست می‌آوریم:

$$Q = CV = 0.4 \times 10^{-6} \times 12 = 4.8 \times 10^{-6} \text{ C} = 4.8 \mu\text{C}$$

گزینه ۴ درست است.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 6 \Rightarrow 2 \times 3 \times r = 6 \\ \Rightarrow r &= 1 \text{ cm}, \quad A = \pi r^2 = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} = 4 \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{3 \times 10^{-4}}{18 \times 10^{-3}} = 6 \times 10^{-13} \text{ (F)}$$

حداکثر ولتاژی که مجاز به اعمال آن هستیم:

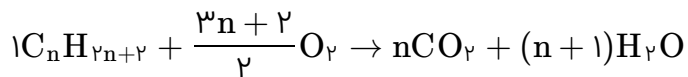
$$\begin{aligned} V_{\max} &= E_{\max} d = 12 \times 10^6 \times 18 \times 10^{-3} = 216 \times 10^3 \text{ V} \\ C &= \frac{q_{\max}}{V_{\max}} \Rightarrow q_{\max} = 6 \times 10^{-13} \times 216 \times 10^3 = 1296 \times 10^{-10} \\ &= 0.1296 \times 10^{-6} \text{ C} = 0.1296 \mu\text{C} \approx 0.13 \mu\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_a &= L_b, \quad m_a = m_b, \quad R_a = R_b, \quad \rho'_a = 2\rho'_b \\ R_a = R_b &\Rightarrow \rho'_a \times \frac{L_a}{A_a} = \rho'_b \times \frac{L_b}{A_b} \xrightarrow{L_a=L_b, \rho'_a=2\rho'_b} \frac{2}{A_a} = \frac{1}{A_b} \Rightarrow A_a = 2A_b \\ \rho &= \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_a}{\rho_b} = \frac{V_b}{V_a} = \frac{L_b A_b}{L_a A_a} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Delta R = 0.1 R$$

$$\Delta R = R \alpha \Delta \theta \Rightarrow 0.1 = \alpha \times 50 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{500} = 2 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

معادله موازنه شده سوختن کامل آلکان:

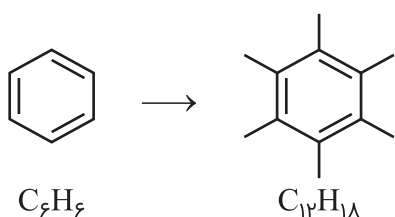
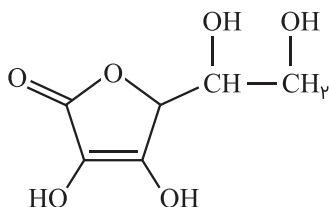


$$4/3 \text{ g } C_nH_{2n+2} \times \frac{1 \text{ mol } C_nH_{2n+2}}{(14n+2)C_nH_{2n+2}} \times \frac{n \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_nH_{2n+2}} \times \frac{44 \text{ g } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 13/2 \text{ g } CO_2 \Rightarrow n = 6$$

پس آلکان موردنظر باید ۶ کربنه باشد.

۲، ۳- دی متیل بوتان (C_6H_{14})

پلی اتن، پروپان و نفتالن هیدروکربن هستند و مولکول های ناقطبی دارند. نیروهای بین مولکولی آن ها از نوع واندروالسی است. اما ویتامین C با داشتن گروه های هیدروکسیل دارای پیوندهای هیدروژنی است.



بررسی گزینه ها:

گزینه ۱: با افزایش جرم مولی و قوی تر شدن نیروهای بین مولکولی از میزان فزادنده ماده کم می شود.

گزینه ۲: ترکیب حاصل نیز آروماتیک است.

گزینه ۳: فرمول مولکولی ترکیب به دست آمده $C_{12}H_{18}$ و فرمول مولکولی نفتالن $C_{10}H_8$ است.

گزینه ۴: گشتاور دو قطبی برای هر دو ترکیب برابر صفر است.

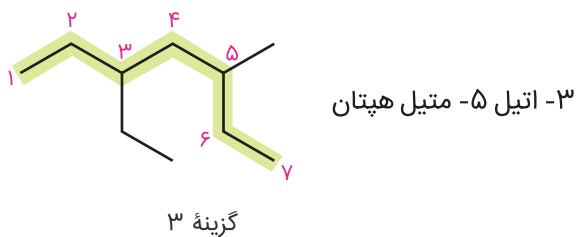
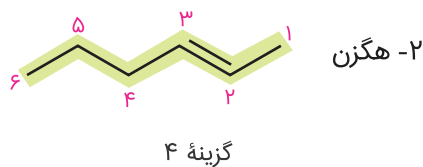
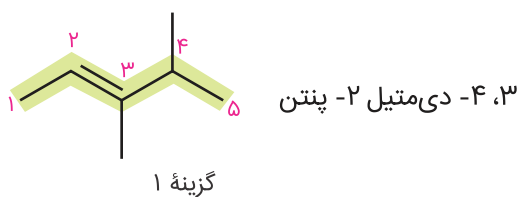
مقایسه‌های "الف" و "ب" درست است.

$$\frac{1}{\text{فرار بودن}} \times \text{گرانروی} \times \text{نیروی بین مولکولی} \times \text{نقطه جوش} \times \text{تعداد کربن}$$

پ) نیروی بین مولکولی C_5H_{12} بیشتر است.

ت) گرانروی $C_{16}H_{34}$ بیشتر است.

نام صحیح ترکیب‌ها به صورت زیر است:



نکته: در نام‌گذاری آلکن‌ها شماره‌گذاری از سمتی که به پیوند دوگانه نزدیک‌تر است انجام می‌شود و سپس از بیان شماره محل و نام شاخه‌های فرعی، کمترین شماره محل پیوند دوگانه بیان می‌شود.

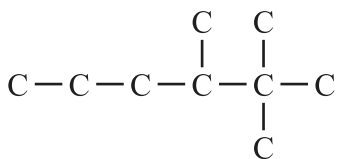
بررسی سایر عبارت‌ها:

الف) نادرست. مبادله گرما باعث تغییر دما می‌شود.

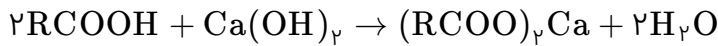
ب) نادرست. گرما از ویژگی‌های ماده نیست.

ت) نادرست. به دلیل تفاوت در ظرفیت گرمایی ویژه، گرمای مبادله شده متفاوت خواهد بود.

این آلکان ۹ کربنی دارای ۸ پیوند کووالانسی ساده کربن - کربن است.



معادله واکنش خنثی شدن کربوکسیلیک اسید (RCOOH) با کلسیم هیدروکسید به صورت زیر است:

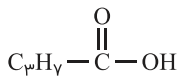


$$\frac{0.88 \text{ g}}{2 \times M} = \frac{462/5 \times 10^{-3} \text{ g} \times \frac{100}{100}}{1 \times 74 \text{ g}} \Rightarrow M = 88$$

فرمول همگانی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی با زنجیر هیدروکربنی به صورت $\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2$ است؛ بنابراین:

$$12n + 2n + 32 = 88 \Rightarrow 14n = 56 \Rightarrow n = 4$$

پس شمار اتم‌های کربن در زنجیر هیدروکربنی آن برابر با ۳ است.



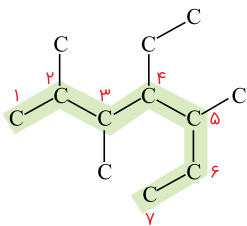
گزینه ۳

۶۹

به دلیل اختلاف در دمای سامانه و محیط، میانگین تندی (دما) ذرات سازنده آن‌ها پس از مدتی برابر خواهد شد.

گزینه ۴

۷۰

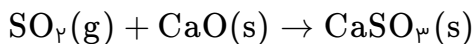


۴- اتیل، ۲ و ۳ و ۵- تری‌متیل هپتان

گزینه ۴

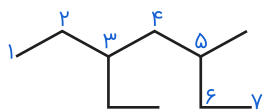
۷۱

الف) برای به دام انداختن گاز گوگرد دی‌اکسید خارج شده از نیروگاه‌ها، گازهای خروجی را از روی کلسیم اکسید عبور می‌دهند.



ب) از کاربردهای تیتانیم می‌توان به استفاده در بدنه دوچرخه، در ساخت موتور جت و ساخت پروانه کشتی‌های اقیانوس‌پیما اشاره کرد.

پ) ۳- اتیل - ۵- متیل هپتان

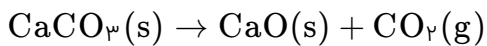


ابتدا انرژی آزاد شده NaCl را به دست می‌آوریم:

$$۲۳۴ \text{ g NaCl} \times \frac{۱ \text{ mol NaCl}}{۵۸/۵ \text{ g}} \times \frac{۸۰۰ \text{ kJ}}{۱ \text{ mol NaCl}} = ۳۲۰۰ \text{ kJ}$$

حالا جرم آب را به دست می‌آوریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow ۳۲۰۰ \text{ kJ} = m \text{ kg} \times ۴/۲ \times ۳۲ \Rightarrow m = ۲۳/۸ \text{ kg}$$



$$\begin{aligned} ? \text{ g CO}_2 &= ۲۰۰ \text{ g CaCO}_3 \text{ ناخالص} \times \frac{۹۰ \text{ g CaCO}_3 \text{ خالص}}{۱۰۰ \text{ g CaCO}_3 \text{ ناخالص}} \times \frac{۱ \text{ mol CaCO}_3}{۱۰۰ \text{ g CaCO}_3} \\ &\times \frac{۱ \text{ mol CO}_2}{۱ \text{ mol CaCO}_3} \times \frac{۴۴ \text{ g CO}_2}{۱ \text{ mol CO}_2} = ۷۹/۲ \text{ g CO}_2 \end{aligned}$$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow ۱۳۹۴ = ۷۹/۲ \times c \times ۲۲ \Rightarrow c = ۰/۸ \text{ J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$$

ساختار لوویس مواد مذکور در عبارت‌ها به صورت زیر است:

باتوجه به ساختارهای بالا عبارت‌های "الف"، "ب" و "ت" نادرست هستند. از طرفی باتوجه به اینکه شکل زیر، هم ساختاری خطی دارد و راست‌زنجیر $\text{O}=\text{C}=\text{O}$: کربن دی‌اکسید است؛ پس عبارت "پ" هم نادرست می‌باشد.

اتین: $\text{H}-\text{C}\equiv\text{C}-\text{H}$ ایتین: $\text{H}-\text{C}\equiv\text{N}$: هیدروژن سیانید

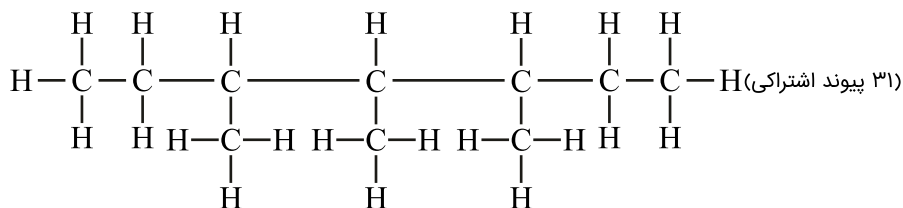


باتوجه به اینکه ظرفیت گرمایی آب بیشتر از روغن زیتون می‌باشد، می‌توان گفت که نیروهای بین مولکولی ذره روغن زیتون ضعیف‌تر از آب است.

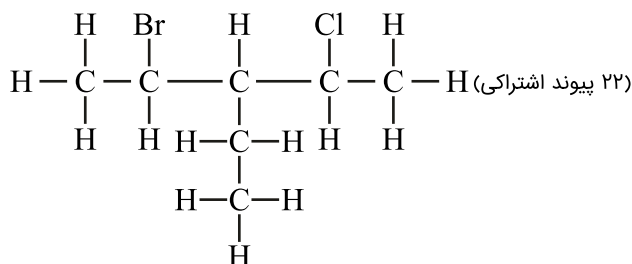


بررسی عبارت‌ها:

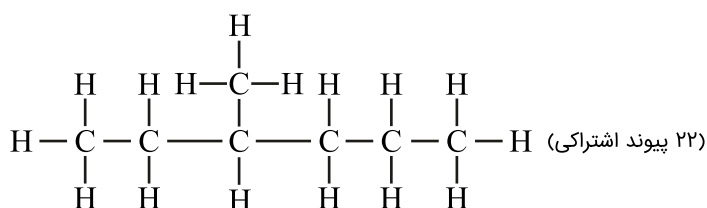
الف) ۳، ۴، ۵- تری‌متیل هپتان



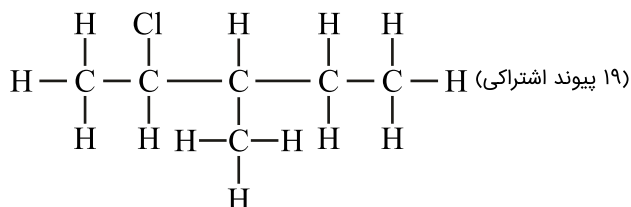
ب) ۲- برم-۴- کلرو-۳- اتیل پنتان



پ) ۳- متیل هگزان



ت) ۲- کلرو-۳- متیل پنتان



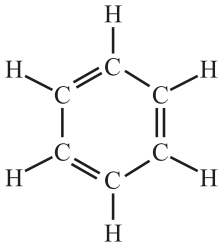
عبارت‌های اول و سوم درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

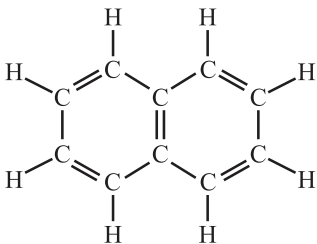
- واکنش $\text{N}_2\text{O}_4(\text{g}) + \text{Q} \rightarrow 2\text{NO}_2(\text{g})$ گرماگیر است و در دمای بالاتر مقدار $\text{NO}_2(\text{g})$ قهوه‌ای‌رنگ بیشتر می‌شود؛ اما در دمای پایین نیز مقدار $\text{NO}_2(\text{g})$ قهوه‌ای‌رنگ در هوا کمتر می‌شود و بیشتر به صورت $\text{N}_2\text{O}_4(\text{g})$ بی‌رنگ است. (درست)
- میانگین تندی و انرژی جنبشی ذرات در حالت گاز بیشتر از جامد است. (نادرست)
- فتوسنتز یک فرآیند گرماگیر است و $\Delta H > 0$ دارد. (درست)
- تغییر نوع آلوتروپ در واکنش‌هایی که عنصرهای خالص تولید یا مصرف می‌شوند، بر ΔH واکنش تأثیر دارد. به‌عنوان مثال گرمای سوختن الماس بیشتر از گرمای سوختن همان مقدار گرافیت است. (نادرست)

فقط مورد اول نادرست است.

- بنزن ساده‌ترین ترکیب آروماتیک با فرمول C_6H_6 و ساختار زیر است.



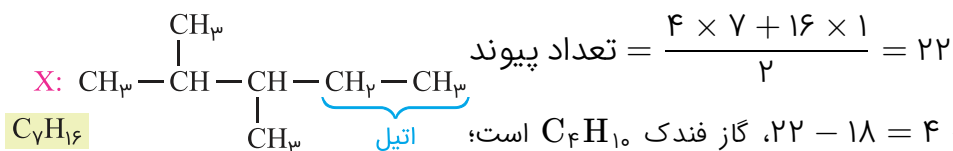
- از نفتالین به‌عنوان ضد بید استفاده می‌شود.



۲۴ پیوند



در جمله مورد نظر $A = 4$ و $B = 0$ است.



C_7H_{16}

۲، ۳-دی‌متیل پنتان

گزینه ۱: نادرست. گریس $C_{18}H_{38} \Leftarrow 22 - 18 = 4$ ، گاز فندک C_4H_{10} است؛

پس $2 \Leftarrow 16 - (4 + 10)$

گزینه ۲: نادرست. $5 = 23 - 18$ ، ترکیب **X** یک گروه اتیل دارد.

گزینه ۳: درست. ترکیب **X**، ۴ گروه متیل دارد. در اتیل C_2H_5 در مجموع ۷ اتم وجود دارد. ترکیب **X** هم دارای ۷ اتم کربن

است؛ پس $0 = 7 - 7$ که درست است.

گزینه ۴: نادرست. در نام‌گذاری ترکیب **X**، ۳ و ۲ که در مجموع ۵ می‌شود، وجود دارد. سیکلوهگزان دارای فرمول مولکولی

C_6H_{12} است که در مجموع ۱۸ اتم دارد و در ترکیب **X** در مجموع $23 = 7 + 16$ اتم وجود دارد.

اول با استفاده از رابطه " $Q = mc\Delta\theta$ " جرم CO_2 را حساب می‌کنیم. بعد با استفاده از جرم CO_2 و معادله سوختن کامل زغال سنگ، مول SO_2 را به دست می‌آوریم. در انتها با استفاده از نصف SO_2 ، جرم کلسیم اکسید (CaO) مورد نیاز برای به دام انداختن آن به دست می‌آید.

ابتدا با استفاده از فرمول " $Q = mc\Delta\theta$ " جرم CO_2 را حساب می‌کنیم:

$$Q = 11880 \text{ kJ} \times \frac{1000 \text{ J}}{1 \text{ kJ}} = 11880000 \text{ J}$$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow m = \frac{Q}{c\Delta\theta} = \frac{11880000}{0.8 \times 10} = 1485000 \text{ g } CO_2$$

معادله موازنه شده سوختن کامل زغال سنگ به صورت زیر است:



تعداد مول‌های SO_2 از روی جرم CO_2 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

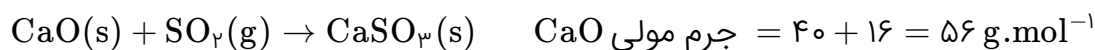
$$CO_2 \text{ مولی جرم} = 1(12) + 2(16) = 44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$1485000 \text{ g } CO_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{44 \text{ g } CO_2} \times \frac{2 \text{ mol } SO_2}{270 \text{ mol } CO_2} = 250 \text{ mol } SO_2$$

قرار است نصف این مقدار SO_2 ، توسط کلسیم اکسید به دام بیافتد.

$$\text{مول‌های } SO_2 \text{ به دام افتاده} = \frac{250 \text{ mol}}{2} = 125 \text{ mol } SO_2$$

حال با توجه به واکنش به دام افتاده SO_2 ، جرم CaO خالص محاسبه می‌شود:



$$125 \text{ mol } SO_2 \times \frac{1 \text{ mol } CaO}{1 \text{ mol } SO_2} \times \frac{56 \text{ g } CaO}{1 \text{ mol } CaO} \times \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} = 7 \text{ kg } CaO$$

در نهایت با استفاده از رابطه درصد خلوص، جرم CaO ناخالص را به دست می‌آوریم:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم ماده خالص}}{\text{جرم ماده ناخالص}} \times 100 \Rightarrow 70 = \frac{7 \text{ kg}}{\text{جرم } CaO \text{ ناخالص}} \times 100 \Rightarrow \text{جرم } CaO \text{ ناخالص} = 10 \text{ kg}$$