www.alirezaafshar.org

حسابان

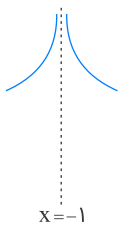
۱ به ازای مقداری از a، چندجمله‌ای $f(x) = x^۴ + ax^۳ - ۸x$ بر $x + ۲$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = ۰$ کدام است؟

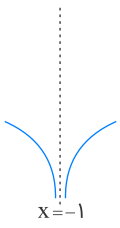
۱) $۱ - \sqrt{۳}$
۲) $۱ - \sqrt{۵}$
۳) $-۱ - \sqrt{۳}$
۴) $-۱ - \sqrt{۵}$

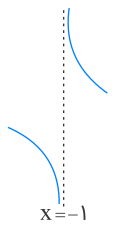
۲ حاصل عبارت $\lim\limits_{x \to ۴^-} \frac{-۲x}{x - ۴}$ کدام است؟

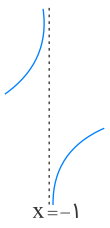
۱) $-\infty$
۲) -۸
۳) ۸
۴) $+\infty$

۳ نمودار تابع $y = \frac{۱}{x^۲ - ۱}$ اطراف خط $x = -۱$ چگونه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x = \frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \\ x = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$
۲) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۱۲}$
۳) $\begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۱۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۱۵\pi}{۱۶} \end{cases}$
۴) $x = k\pi \pm \frac{۵\pi}{۱۲}$

۵ حاصل حد کدام‌یک از توابع $f(x)=\frac{-x}{\sqrt{x^۲+۴x+۴}}$، $g(x)=\frac{(-۱)^{[x]}}{(x+۲)^۲}$ و $h(x)=\frac{|x|}{x^۲+۴x+۴}$ وقتی $x\to -۲$ برابر $+\infty$ است؟

۱) g و f
۲) h و f
۳) h و g و f
۴) h و g

۶ اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ برابر ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x-۱=۰$ باشند، $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) -۳
۴) -۱

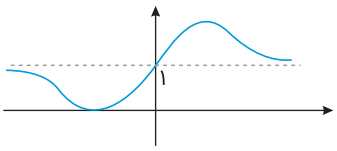
۷ اگر $f(x)=\left[\frac{-۵x+۳}{x-۱}\right]$، $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(\frac{۱}{x}-\frac{۲}{x^۲})-\lim\limits_{x\to -\infty} f(\frac{۱}{x}-\frac{۲}{x^۲})$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) ۲
۴) -۲

۸ حاصل عبارت‌های $\lim\limits_{x\to(-۳)^-}=\frac{[x+۵]}{x+۳}$ و $\lim\limits_{x\to(-۳)^+}\frac{x+۴}{[x+۳]}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

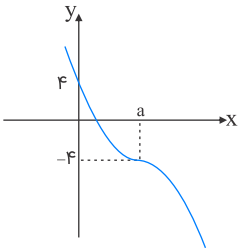
۱) $-\infty$ و $+\infty$
۲) $+\infty$ و تعریف نشده
۳) $-\infty$ و تعریف نشده
۴) $+\infty$ و $+\infty$

۹ اگر نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x)]+\lim\limits_{x\to +\infty}|f(x)|$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) صفر
۴) -۱

۱۰ نمودار تابع $y=(a-x)^۳-b$ به شکل زیر است. a کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

۱۱ اگر $x^۲+mx^۳-x-۱۴$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^۳+۳x^۲+m$ بر $x-۱$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

www.alirezaafshar.org

۱۲ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۲ x = ۳\cos x$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$
۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$
۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۱۳ تابع $f(x) = \frac{x^۲ + x}{x^۲ - |x|}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۱۴ نمودار تابع $f(x) = \frac{-۲x^۲ + ۳x}{ax^۲ + bx + c}$ دارای خط‌های مجانب $y = -۱$، $x = -۲$ و $x = ۱$ است. $f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱/۲۵
۲) ۱/۵
۳) ۱/۷۵
۴) -۱/۵

۱۵ سومین نقطهٔ مثبتی که تابع $F(x) = ۸ - ۳\cos ۴x$ به ازای آن ماکزیمم می‌شود، کدام طول را دارد؟ (x در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ است.)

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$
۲) $\frac{۵\pi}{۴}$
۳) π
۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

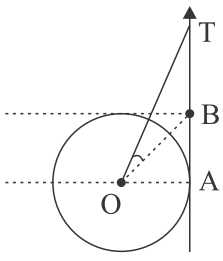
۱۶ اگر $f(x) = \frac{۲x^۲ - ۲۰}{mx^۲ + ۱۸x + n}$ و $\lim\limits_{x\to ۳} f(x) = +\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) ۲
۳) $-\frac{۲}{۳}$
۴) -۲

۱۷ تعداد مجانب‌های تابع معکوس $y = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^۲}}$ (در صورت وجود) در کدام گزینه صادق است؟

۱) دو قائم
۲) دو قائم و یک افقی
۳) دو افقی و یک قائم
۴) مجانب ندارد.

۱۸ باتوجه‌به دایرهٔ مثلثاتی زیر، اگر $BT = ۲$ باشد، مقدار $\tan(T\hat{O}B)$، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۹ اگر منحنی نمایش تابع $f(x)=\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-mx+۱}$ دارای دو مجانب باشد، m چند مقدار متمایز دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱

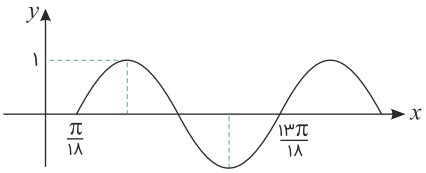
۲۰ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۲-\cos ۳x$ کدام است؟

۱) ۳π
۲) $\frac{\pi}{۳}$
۳) $\frac{۲\pi}{۳}$
۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۲۱ دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ برابر با ۱۰ است. دورهٔ تناوب کدام تابع زیر برابر با ۸ است؟

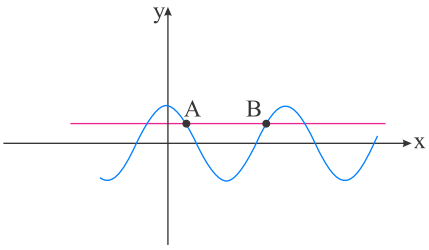
۱) $\frac{۴}{۵}f(x)$
۲) $\frac{۵}{۴}f(x)$
۳) $f(\frac{۴}{۵}x)$
۴) $f(\frac{۵}{۴}x)$

۲۲ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a-۲\cos(bx+\frac{\pi}{۲})$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۲۳ در شکل زیر نمودار توابع $y=\cos ۲x$ و $y=\frac{۱}{۲}$ را رسم کرده‌ایم. طول پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $\sqrt{\frac{۲\pi}{۳}}$
۲) $\sqrt{\frac{\pi}{۳}}$
۳) $\frac{۲\pi}{۳}$
۴) $\frac{\pi}{۳}$

۲۴ برای رسم نمودار تابع $y=x^۳-۲۱x^۲+۱۴۷x-۳۴۷$، باید نمودار تابع $y=x^۳$ را ..... واحد به ..... و ..... واحد به ..... منتقل کرد.

۱) ۷ ـ چپ، ۴ ـ بالا
۲) ۸ ـ راست، ۴ ـ پایین
۳) ۷ ـ راست، ۴ ـ پایین
۴) ۸ ـ چپ، ۴ ـ بالا

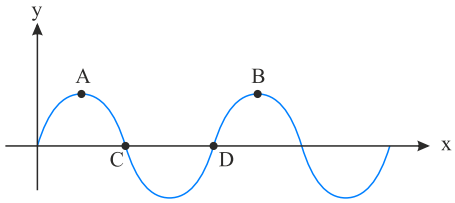
۲۵ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x + ۲\cos^۲ x = ۰$ کدام است؟

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۲) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$
۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۲۶ نمودار تابع $y = |\sin x|\sqrt{۱ + \tan^۲ x}$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

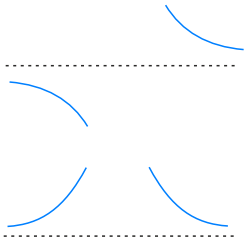
۱) $(\frac{\pi}{۲}, \pi)$
۲) $(\frac{۴\pi}{۳}, \frac{۳\pi}{۲})$
۳) $(\frac{۲\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳})$
۴) $(\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi)$

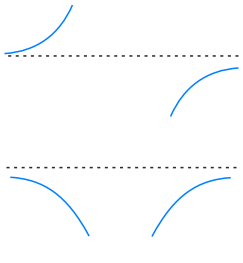
۲۷ باتوجه‌به نمودار $y = a\sin\frac{x}{a}$، مساحت ذوزنقهٔ حاصل از تقاطع نقاط A، B، C و D، ۶π واحد مربع شده است؛ a کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) -۴
۴) -۲

۲۸ نمودار تابع $y = \sqrt{\frac{۴x+۱}{x+۲}} - ۱$، در مجاورت مجانب افقی خود به کدام شکل است؟

۱)


۲)


۳)

۴)

۲۹ اگر $f(x) = \frac{\sin \pi x}{\tan(\frac{\pi x}{۲}) + ۱}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{۳}{۲}^+} f(x) = -\infty$
۲) $\lim\limits_{x \to \frac{۳}{۲}^-} f(x) = +\infty$
۳) $\lim\limits_{x \to \frac{۵}{۲}^+} f(x) = +\infty$
۴) $\lim\limits_{x \to \frac{۵}{۲}^-} f(x) = -\infty$

۳۰ تابع $y = (۲x + |x+۱|)^۲$ در کدام بازه نزولی اکید است؟

۱) $(-\infty\ ,\ ۰]$
۲) $\mathbb{R}$
۳) $(-\infty\ ,\ -\frac{۱}{۳}]$
۴) $(-\infty\ ,\ -۱]$

هندسه

۳۱ اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۴$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳۲ یک اشعهٔ نورانی را در امتداد خط $x = ۳$ و اشعهٔ دیگر را در امتداد خط $x = -۱$، از داخل سهمی به معادلهٔ $x^۲ - ۲x - ۴y + ۹ = ۰$، بر آن می‌تابانیم. مختصات نقطهٔ تلاقی بازتاب این دو پرتو، کدام است؟

۱) $(۱, ۳)$
۲) $(۱, ۴)$
۳) $(۲, ۲)$
۴) $(۲, ۳)$

۳۳ نقطهٔ $A(۱, -۲)$ داخل کدام‌یک از دایره‌های زیر است؟

۱) $x^۲ + y^۲ = ۱$
۲) $x^۲ + y^۲ = ۲x - ۵$
۳) $x^۲ + y^۲ - ۸x - ۴y - ۵ = ۰$
۴) $x^۲ + y^۲ - ۱۰x + ۸y = ۰$

۳۴ به ازای کدام مقدار a، خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۶y + ۲x + a = ۰$ از نقطهٔ $(۱, ۲)$ می‌گذرد؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۳۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $۲x^۲ + (a^۲ - ۷)y^۲ + ۴y + a = ۰$ یک دایره است؟

۱) $\{-۳\}$
۲) $\{۳\}$
۳) $\{-۳, ۳\}$
۴) $\varnothing$

۳۶ سهمی به معادلهٔ $y^۲ = ۳x - ۳$ مفروض است. دایره‌ای به مرکز رأس سهمی و شعاع $\sqrt{۸}$ واحد رسم می‌کنیم. طول یکی از نقاط برخورد این دایره و سهمی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۴۱} + ۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۴۱} - ۱}{۲}$
۳) $\frac{-۱ - \sqrt{۴۱}}{۴}$
۴) $\frac{-۱ + \sqrt{۴۱}}{۴}$

۳۷ به ازای کدام مقدار a، خط هادی سهمی $۲y^۲ - ۱۲y + ax + ۸ = ۰$، به معادلهٔ $x = \frac{۲۱}{۸}$ است؟

۱) ۱۲ و ۳
۲) ۱۶ و ۳
۳) ۱۲ و ۵
۴) ۱۶ و ۵

۳۸ از نقطهٔ $A(۷,۲)$ دو مماس بر دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x+۸y-۸=۰$ رسم کرده‌ایم. زاویهٔ بین دو مماس چند درجه است؟

۱) ۳۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۶۰°
۴) ۹۰°

۳۹ اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC که در آن $A(۱,۰)$، $B(۰,۱)$ و $C(۳,۱)$ هستند، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$
۲) $\sqrt{۱۰}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

۴۰ برای ماتریس مربع از مرتبه ۲ به نام A می‌دانیم $|A|=-۱$ و $I-A=۲A^۲$. مقدار دترمینان ماتریس $۲I-A$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۳
۳) ۱۲
۴) ۹

۴۱ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}$ و $C=۲A-۳B$. مجموع درایه‌های ماتریس C برابر کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

۴۲ مثلث ABC از برخورد سه خط به معادلات $x=۱$ و $y=۲$ و $x+۲y=۹$ ساخته می‌شود. اگر معادلهٔ دایرهٔ محیطی این مثلث به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) -۲

۴۳ اگر $a_{ij}=\begin{cases}\frac{xi}{jx+۲j} & ;i=j\\ \frac{x^۴-۱۳x^۲+۳۶}{x^۲+x-۶} & ;i\neq j\end{cases}$ باشد و $A=[a_{ij}]_{۴\times۴}$ ماتریس قطری باشد، x چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۴ در بیضی به طول قطر بزرگ ۳۴ و فاصله کانونی ۳۰، از رأس کانونی A مماسی بر دایره به قطر FF' رسم کرده‌ایم. طول این مماس کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۵
۳) ۱۷
۴) ۱۰

۴۵ اگر کانون سهمی $y^۲-my+۳x=۰$ روی محور yها باشد، m کدام است؟

۱) ±۱
۲) ±۳
۳) ±۵
۴) ±۲

www.alirezaafshar.org

۴۶ برای دو ماتریس A و B داریم: $A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$، $B^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $A+B = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}$. حاصل $AB+BA$ کدام ماتریس است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱۷ & ۱۵ \\ ۱۱ & ۱۶ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱۷ & ۱۵ \\ -۱۶ & ۱۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱۷ & ۱۵ \\ ۱۱ & -۱۶ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱۷ & ۱۵ \\ ۱۶ & ۱۱ \end{bmatrix}$

۴۷ در یک بیضی به قطرهای ۸ و $۲\sqrt{۷}$ واحد و کانون‌های F و F'، دایره‌ای به قطر $F'F$ بیضی را در نقطهٔ M، قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ M تا نزدیک‌ترین کانون، کدام است؟

۱) $۴-۲\sqrt{۲}$

۲) $۲/۵$

۳) $۴-\sqrt{۲}$

۴) ۳

۴۸ صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی است. مقطع حاصل از تقاطع صفحه و سطح مخروطی کدام است؟

۱) سهمی

۲) بیضی

۳) هذلولی

۴) دو خط

۴۹ اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^۴$ کدام است؟

۱) A

۲) $-\frac{۱}{۲}A$

۳) قطری غیرهمانی

۴) همانی

۵۰ در مثلث ABC ضلع BC را ثابت نگه داشته و نقطهٔ A را طوری حرکت می‌دهیم که طول میانهٔ AM ثابت باشد. مکان هندسی محل همرسی میانه‌های مثلث کدام است؟

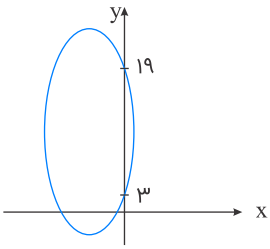
۱) خطی موازی BC و به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}AM$ از BC

۲) خطی موازی BC و به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}AM$ از BC

۳) دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{۱}{۲}AM$

۴) دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{۱}{۳}AM$

۵۱ در شکل زیر، اگر یکی از کانون‌ها نقطهٔ $F\ (-۶, ۱۹)$ باشد، طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟



۱) $۶+۲\sqrt{۷۳}$

۲) $۳+۲\sqrt{۷۳}$

۳) $۶+۲\sqrt{۶۹}$

۴) $۳+۲\sqrt{۶۹}$

www.alirezaafshar.org

۵۲ اگر $A = [j^۲ + ۲i]_{۳\times۳}$، آنگاه مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۶
۲) ۲۶
۳) ۳۶
۴) ۴۶

۵۳ در سهمی به معادلهٔ $x^۲ - ۶x + ۸ = ۲y$ معادلهٔ خط هادی آن کدام است؟

۱) $y = -\frac{۳}{۲}$
۲) $y = -۱$
۳) $y = -\frac{۱}{۲}$
۴) $y = \frac{۱}{۲}$

۵۴ به ازای کدام مقدار m معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} m-۲ & -۲ \\ ۳ & m+۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ جواب منحصربه‌فرد دارد؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{۲}\}$
۳) $\varnothing$
۴) $\{\pm\sqrt{۲}\}$

۵۵ دو کره به شعاع‌های ۳ و ۴ واحد که مرکزهای آن‌ها با یکدیگر ۵ واحد فاصله دارند، متقاطع‌اند. مساحت مکان هندسی نقاط مشترک این دو کره، کدام است؟

۱) $۳/۲۴\pi$
۲) $۴/۴۱\pi$
۳) $۴/۸\pi$
۴) $۵/۷۶\pi$

۵۶ در یک بیضی با رئوس کانونی $(۳, ۸)$ و $(۳, -۴)$ و خروج از مرکز $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$، مختصات یکی از رأس‌های دیگر کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(۲, ۵)$
۲) $(۶, ۲)$
۳) $(۷, ۲)$
۴) $(۱, ۲)$

۵۷ معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ $O(۱, ۲)$ بوده و بر دایرهٔ $(x+۳)^۲ + (y+۱)^۲ = ۹$ مماس خارج باشد، کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۴y + ۱ = ۰$
۲) $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۴y + ۲ = ۰$
۳) $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y + ۱ = ۰$
۴) $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y + ۲ = ۰$

۵۸ معادلهٔ خط هادی سهمی $y^۲ + ۸x = ۴(y-۳)$ کدام است؟

۱) $x = ۰$
۲) $x = ۱$
۳) $x = \frac{۱}{۲}$
۴) $x = \frac{۳}{۲}$

۵۹ دستگاه $\begin{cases} ax - ۲y = ۲ \\ ۴x + by = ۱ \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد. مقدار $a - b$ کدام است؟

۱) ۷
۲) ۹
۳) -۴
۴) -۶

۶۰ برای ماتریس‌های A و B که وارون‌پذیر و از مرتبهٔ ۳ می‌باشند، داریم $A^{-1} = AB^{-1}$. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

۱) $|A^۲| = |B|$
۲) $|I + A^۲B^{-1}| = ۸$
۳) $|A + A^{-1}B| = ۲|A|$
۴) $|A^۳ - AB| = ۰$

ریاضیات گسسته

۶۱ از رابطهٔ $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ کدام گزاره نتیجه نمی‌شود؟

۱) $b \mid an$
۲) $a \mid bn$
۳) $m \mid an$
۴) $an \mid bm$

۶۲ حاصل $([۲۴, ۵۴], ۱۹۲)$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۲۴
۳) ۳۶
۴) ۱۰۸

۶۳ معادلهٔ همنهشتی $۱۴۱x \overset{۱۳}{\equiv} ۵$ در بازهٔ $(۳۰, a)$ دارای چهار جواب است. حداکثر مقدار صحیح a کدام است؟

۱) ۹۵
۲) ۹۳
۳) ۸۷
۴) ۸۳

۶۴ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۳۷ برابر ۱۲ و $a + ۲۵$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۳۰۸
۲) ۸
۳) ۴۸
۴) ۱۲۳

۶۵ اگر $۱۰^n - ۵^n$ مضرب ۱۷ باشد، برای n چند جواب دو رقمی وجود دارد؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۲۵

۶۶ اگر درجهٔ رأس‌های یک گراف ۴، ۴، ۲، ۲، ۲ و ۲ باشد، تعداد تمام دورهای موجود، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۶۷ اگر G گرافی تهی بوده و مجموع درجات رئوس $\bar{G}$، ۳۸۰ باشد، مقدار Δ در $\bar{G}$ کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

۶۸ عدد احاطه‌گری $P_۷$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶۹ اگر $d = (۴a + ۳ , ۲a + ۵)$ باشد، آنگاه d چند مقدار می‌تواند بپذیرد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۰ کدام گزینه زیر همواره درست نیست؟

۱) $(۲m - ۱, ۲m + ۱) = ۱$
۲) $(m, m + ۱) = ۱$
۳) $(۷m + ۱, ۷m + ۳) = ۱$
۴) $(۴m - ۱, ۴m + ۱) = ۱$

۷۱ روی منحنی $xy - ۱ = ۲y + ۳x$ چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۲ کدام دو عدد کلیت حکم "مجموع مربعاتِ هر دو عدد اول، عددی اول است" را نقض می‌کند؟

۱) ۱ و ۳
۲) ۲ و ۳
۳) ۵ و ۹۱
۴) ۱۱ و ۹۷

۷۳ در گراف G از مرتبه ۱۲ بین تمام رئوس دست‌کم یک مسیر وجود دارد. اگر G کمترین اندازهٔ ممکن را داشته باشد، مجموع کمترین مقدار و بیشترین مقدار ممکن برای $\gamma(G)$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۷۴ گراف $G(V , E)$ مفروض است. اگر $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{ad, ba, bd, ce, de\}$ باشند، حاصل $(q - p)^۳ + \frac{\Delta}{\delta^۲}$ کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۷۵ چندتا از رابطه‌های زیر برای تمام اعداد صحیح n برقرار است؟

$n - ۱ \mid n^۲ - ۱$ الف) $n^۲ - ۴ \mid n + ۲$ ب) $n^۲ - ۲n + ۱ \mid n - ۱$ ج) $n^۲ - ۱ \mid n^۳ - ۱$ د)

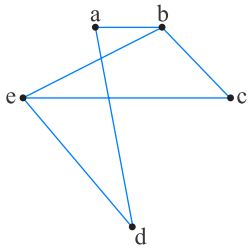
۱) ۴
۲) ۲
۳) ۱
۴) هیچ‌کدام

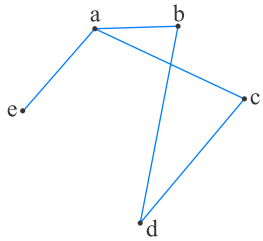
www.alirezaafshar.org

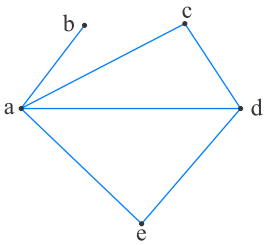
۷۶ گراف K_6 چند زیرگراف ۳ یالی دارد که $\Delta = 2$ باشد؟

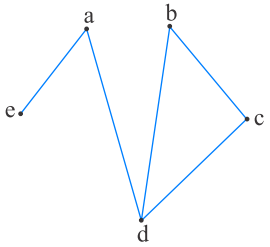
۱) ۱۶۰
۲) ۷۲۰
۳) ۳۶۰
۴) ۱۲۴۰

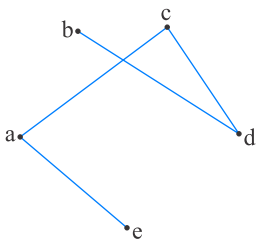
۷۷ کدام گزینه مکمل گراف زیر را نشان می‌دهد؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۷۸ با رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ چند گراف G می‌توان ساخت که $N(a) = \{b, c, d\}$ باشد؟

۱) ۸
۲) ۱۶
۳) ۶۴
۴) ۶۸

۷۹ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^2 + b^2 + 5$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

۸۰ خارج قسمت تقسیم ۳۱۶ بر چند عدد طبیعی برابر ۱۵ است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸۱ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد طبیعی برابر ۱۸ و تفاضل مربعات این دو عدد، ۲۲۶۸ است. رقم یکان عدد بزرگ‌تر، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۸۲ رقم‌های یکان اعداد $a+5$، $3b-2$ و 1399^{1399} یکسان است. رقم یکان عدد $4a-2b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸۳ اگر دو عدد طبیعی x و y بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، حاصل $xy\left(x^2-y^2\right)$ به چه صورت است؟

۱) $3k$
۲) $3k+1$
۳) $3k+2$
۴) $3k$یا $3k+1$

۸۴ با رئوس $V=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف می‌توان ساخت که $q=3$ و Δ حداکثر ۲ باشد؟

۱) ۱۲۰
۲) ۸۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۸

۸۵ مجموعهٔ اعداد طبیعی را به سه مجموعهٔ A، B و C افراز کرده‌ایم. اگر $A=\{n:n=6k+1,\ k\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{n:n=6k-1,\ k\in\mathbb{N}\}$، کدام عدد طبیعی به مجموعهٔ C تعلق دارد؟

۱) ۱۱
۲) ۲۹
۳) ۳۳
۴) ۳۷

۸۶ اگر n تعداد یال‌هایی باشد که با افزودن آن به یک گراف ۶-منتظم از مرتبهٔ ۹، گراف را به یک گراف کامل تبدیل می‌کند، تعداد مسیرهای به طول ۴ در گراف K_n کدام است؟

۱) ۴۰۲۵
۲) ۵۰۴۰
۳) ۷۵۶۰
۴) ۹۰۵۰

۸۷ جواب معادلهٔ $7x\overset{13}{\equiv}3$ به کدام صورت است؟

۱) $13k-5$
۲) $13k-2$
۳) $13k+4$
۴) $13k+6$

۸۸ اگر رابطه‌های $3k-2|5$ و $mk-8-18k^2|25$ هر دو برقرار باشند، m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۷
۲) -۲۴
۳) -۱۸
۴) ۱۶

۸۹ در گراف K_4 چند دور وجود دارد؟

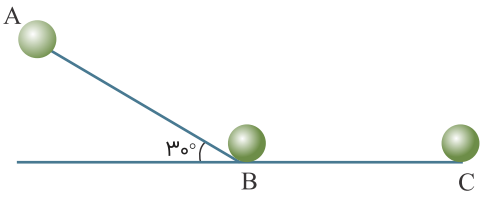
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۹۰ کدام‌یک از گزاره‌های زیر را نمی‌توان با مثال نقض رد کرد؟

۱) حاصل‌ضرب یک عدد گویا و یک عدد گنگ، حتماً عددی گنگ است.
۲) اگر x و y اعداد حقیقی باشند، آنگاه $|x-y| = |x| - |y|$.
۳) مربع هر عدد صحیح فرد به‌صورت $8k+1$ است.
۴) $n^2 + 7n + 17$ به ازای هر عدد طبیعی n، عددی اول است.

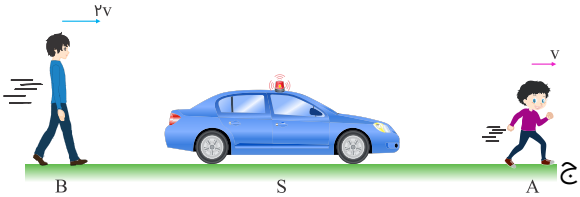
فیزیک

۹۱ مطابق شکل گلوله‌ای را از نقطهٔ A رها می‌کنیم تا روی یک سطح شیب‌دار بدون اصطکاک به نقطهٔ B برسد و در نقطهٔ B وارد یک سطح افقی با ضریب اصطکاک μ شود و در نقطهٔ C متوقف شود. اگر AB و BC هم‌طول باشند، مقدار μ کدام است؟



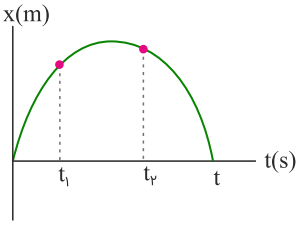
۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۲ مطابق شکل یک منبع صوتی ساکن (S) و دو ناظر (شنونده) متحرک در دو طرف آن قرار دارند که با تندی‌های نشان داده‌شده در جهات مختلف حرکت می‌کنند. کدام گزینه در مورد طول‌موج‌های دریافتی توسط دو شنونده صحیح است؟



۱) شنوندهٔ A طول موجی بلندتر از شنوندهٔ B دریافت می‌کند.
۲) شنوندهٔ B طول موجی بلندتر از شنوندهٔ A دریافت می‌کند.
۳) شنونده‌های A و B طول موج‌هایی برابر باهم ولی بلندتر از طول موج منبع دریافت می‌کنند.
۴) شنونده‌های A و B طول موج‌هایی برابر باهم و برابر با طول موج منبع دریافت می‌کنند.

۹۳ باتوجه‌به نمودار مکان- زمان زیر که مربوط به حرکت روی محور xها است، چند لحظه در بازهٔ $(t - ۰)$ یافت می‌شود که تندی آن‌ها با سرعت متوسط در بازهٔ $(t_۱ - t_۲)$ برابر باشد؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۹۴ جسمی روی سطحی قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین سطح اولیه و جسم به ترتیب ۰/۷ و ۰/۴ باشد و نیرویی اعمال کنیم تا جسم شروع به حرکت کند، حداقل شتاب اولیهٔ جسم چقدر است؟

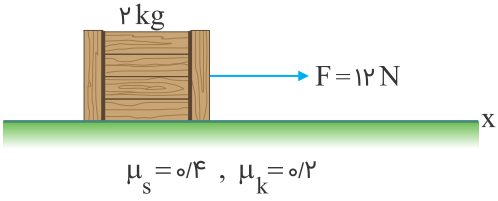
۱) $۱/۱g$

۲) $۰/۷g$

۳) $۰/۴g$

۴) $۰/۳g$

۹۵ مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $۲kg$ روی سطح افقی ساکن است. در لحظهٔ $t_۰ = ۰$، نیروی افقی $F = ۱۲N$ بر جسم وارد می‌شود. معادلهٔ جابه‌جایی- زمان این جسم در SI کدام است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$



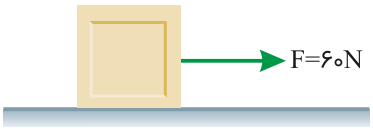
۱) $\Delta x = t^۲$

۲) $\Delta x = ۲t^۲$

۳) $\Delta x = t^۲ + t$

۴) $\Delta x = ۲t^۲ + ۴t$

۹۶ توسط نیروی افقی $F = ۶۰N$ جسم ۸ کیلوگرمی با سرعت ثابت روی سطح حرکت می‌کند. نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰N/kg)$



۱) ۶۰

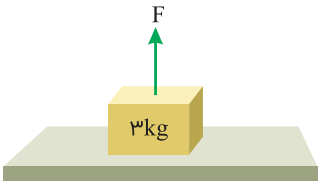
۲) ۹۰

۳) ۱۰۰

۴) $۱۲۰N$

www.alirezaafshar.org

۹۷ مطابق شکل زیر، به‌وسیلهٔ نخی که به وزنهٔ $۳\,kg$ متصل است، با نیروی $F = ۴۰\,N$ وزنه را در راستای قائم بالا می‌بریم. اگر پس از $۳\,s$ از شروع حرکت وزنه، نخ پاره شود. حداکثر ارتفاع وزنه از سطح زمین چند متر است؟ $(g = ۱۰\,N/kg)$ و از مقاومت هوا صرف‌نظر شود)



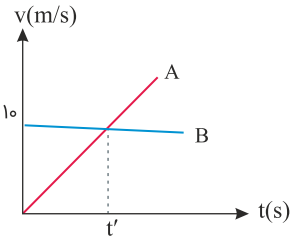
۱) ۱۵

۲) ۱۶/۲۵

۳) ۱۸/۷۵

۴) ۲۰

۹۸ نمودار سرعت- زمان دو متحرک A و B که از یک نقطه به‌طور همزمان حرکت خود را آغاز کرده‌اند مطابق شکل است. اگر این دو متحرک پس از طی مسافت ۳۰۰ متر دوباره در کنار هم باشند، t' چند ثانیه است؟



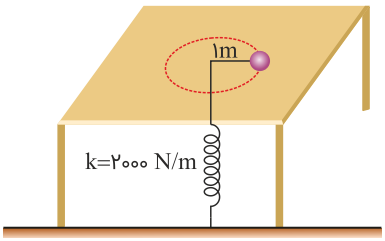
۱) ۷/۵

۲) ۱۵

۳) ۳۰

۴) ۶۰

۹۹ در شکل زیر یک سر طناب به جسم روی میز و سر دیگر از طریق حفره‌ای که روی میز قرار دارد به فنر قائم متصل و سر دیگر فنر سبک به زمین متصل است. این گلولهٔ $۲۰۰\,g$ روی دایره‌ای افقی به شعاع $۱\,m$ و بدون اصطکاک در هر ثانیه $\frac{۵}{\pi}$ می‌زند. طول فنر از حالت طبیعی چند cm شده است؟ $(g = ۱۰\,m/s^۲)$



۱) ۰/۸

۲) ۸

۳) ۱

۴) ۱۰

۱۰۰ معادلهٔ تکانه- زمان جسمی که با جرم ثابت روی محور x حرکت می‌کند در SI به‌صورت $p = -۴t + ۶$ است. نوع حرکت این متحرک در ثانیهٔ دوم حرکت کدام است؟

۱) همواره تندشونده

۲) همواره کندشونده

۳) ابتدا تندشونده و سپس کندشونده

۴) ابتدا کندشونده و سپس تندشونده

۱۰۱ متحرکی روی محور x در حال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۵\,s$ تا $t_۲ = ۱۰\,s$ در SI برابر $-۴\vec{i}$ و در بازهٔ زمانی $t_۲ = ۱۰\,s$ تا $t_۳ = ۱۲\,s$ برابر $۲\vec{i}$ است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۵\,s$ تا $t_۳ = ۱۲\,s$ در SI، کدام است؟

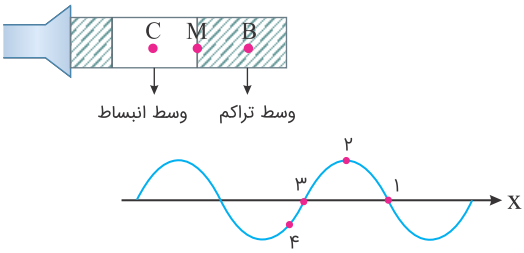
۱) $-\frac{۲}{۷}\vec{i}$

۲) $-\frac{۱۶}{۷}\vec{i}$

۳) $۴\vec{i}$

۴) $۸\vec{i}$

۱۰۲ شکل زیر صوت منتشرشده در داخل یک لولهٔ صوتی حاوی هوا را نشان می‌دهد. جزء M درست در وسط B و C قرار دارد. کدام نقطه در نمودار جابه‌جایی - مکان رسم‌شده در زیر این شکل، می‌تواند مربوط به جزء M باشد؟



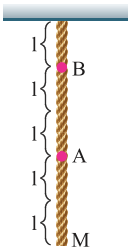
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۰۳ طناب سنگینی از سقف آویزان است. اگر توسط یک نوسان‌ساز نقطه M از طناب را به ارتعاش درآوریم تا یک موج عرضی در تار ایجاد شود، نسبت بسامد موج در نقاط A و B $(\frac{f'_A}{f_B})$ و نسبت طول‌موج در نقاط A و B $(\frac{\lambda_A}{\lambda_B})$ به ترتیب از راست به چپ چند است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\sqrt{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و ۱

۴) $\sqrt{۲}$ و ۱

۱۰۴ متحرکی با شتاب ثابت $۲\ m/s^۲$ در مدت $۳s$ در مسیر مستقیم $۲۱\ m$ جابه‌جا می‌شود. سرعت نهایی آن m/s است؟

۱) ۱۲

۲) ۱۰

۳) ۱۸

۴) ۸

۱۰۵ متحرکی در راستای محور x از حال سکون به حرکت درمی‌آید؛ معادلهٔ سرعت-زمان متحرک در SI به صورت $v = ۲t^۲ - ۳t$ است. شتاب متوسط در دو ثانیهٔ دوم در واحد SI برابر کدام گزینه است؟

۱) ۱۱

۲) ۹

۳) ۱/۵

۴) ۷/۵

۱۰۶ معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = ۳t^۲ - ۶t + ۳$ است. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، متحرک در مبدأ مکان قرار می‌گیرد؟

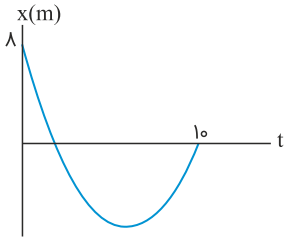
۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۱۰۷ نمودار مکان- زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است مسافت طی‌شده در ۱۰ ثانیهٔ نخست حرکت، ۵ برابر اندازهٔ جابه‌جایی در همین بازه است. متحرک در چه فاصله‌ای از مبدأ مکان تغییر جهت داده است؟



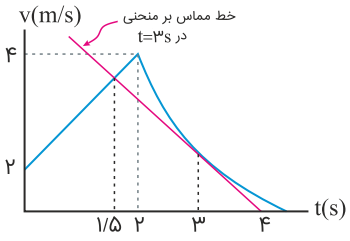
۱) ۸

۲) ۱۶

۳) ۲۶

۴) ۳۲

۱۰۸ نمودار سرعت- زمان متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند به‌صورت شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک در بازهٔ $(۱\,s, ۳\,s)$ چندبرابر شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۳\,s$ است؟



۱) ۰/۴

۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) ۰/۲

۴) $\frac{۲}{۷}$

۱۰۹ جسمی به جرم $۵\,kg$ در هوا از یک ارتفاع بسیار بلند رها می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت این جسم برحسب تندی حرکت آن در SI به‌صورت $f_D = \frac{v^۲}{۴}$ باشد، بیشینهٔ تندی این جسم در طی این سقوط چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۹/۸\,m/s^۲)$

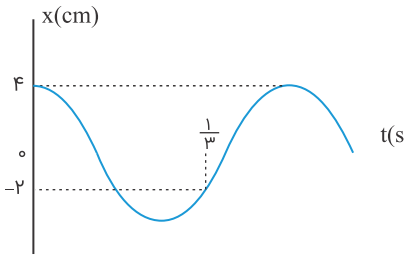
۱) ۲

۲) ۷

۳) ۱۰

۴) ۱۴

۱۱۰ نمودار مکان- زمان حرکت نوسانگری مطابق شکل زیر است. انرژی جنبشی نوسانگر در لحظهٔ $t = \frac{۳}{۱۶}\,s$ چند برابر انرژی مکانیکی آن است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) ۱

۱۱۱ طول آنتن یک گوشی تلفن همراه قدیمی معمولاً $\frac{۱}{۴}$ طول موج دریافتی است. اگر طول چنین آنتنی تقریباً برابر با ۵ سانتی‌متر باشد، بسامدی که این گوشی با آن کار می‌کند چند گیگاهرتز است؟ $(c = ۳ \times ۱۰^۸\,m/s)$

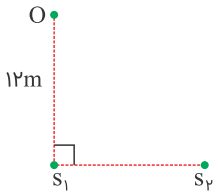
۱) ۱۵۰۰

۲) ۱/۵

۳) ۳۰۰۰

۴) ۳

۱۱۲ از دو چشمهٔ صوت که در سطح زمین قرار دارند، به‌طور هم‌زمان دو صوت در هوا منتشر می‌شود. اگر شخصی که در نقطهٔ O ایستاده است این دو صوت را با اختلاف زمانی $\frac{۱}{۳۴۰}$ ثانیه دریافت کند، فاصلهٔ $S_۱$ و $S_۲$ چندبرابر فاصلهٔ $S_۲$ تا شخص است؟ (تندی صوت در هوا $۳۴۰\,m/s$ است)



۱) $\frac{۵}{۱۲}$

۲) $\frac{۵}{۱۳}$

۳) $\frac{۱۲}{۱۳}$

۴) $\frac{۱۳}{۱۲}$

۱۱۳ اگر نیروی کشش تاری $۱۲۸N$ باشد، سرعت انتشار موج عرضی در آن $۱۶۰m/s$ است. نیروی کشش تار را چند نیوتن افزایش دهیم تا سرعت انتشار موج در آن $۲۰۰m/s$ شود؟

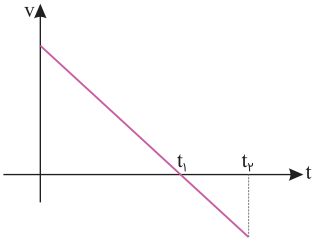
۱) ۳۲

۲) ۷۲

۳) ۱۶۰

۴) ۲۰۰

۱۱۴ شکل زیر نمودار سرعت- زمان یک متحرک را نشان می‌دهد:



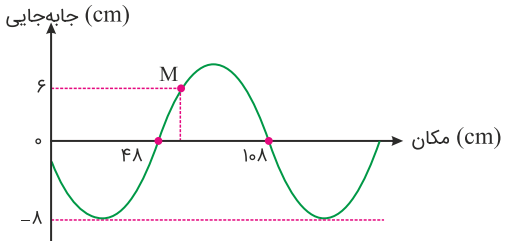
۱) حرکت جسم همواره کندشونده است.

۲) اندازه نیروی وارد بر جسم ثابت است.

۳) شتاب حرکت در ابتدا مثبت است.

۴) در بازه‌های زمانی یکسان و متوالی اندازهٔ نیروی وارد بر جسم در حال افزایش است.

۱۱۵ در شکل زیر نمودار جابه‌جایی- مکان یک موج را در لحظهٔ معینی مشاهده می‌کنید. اگر تندی انتشار موج $۳۰۰\,m/s$ باشد، در بازهٔ زمانی $\Delta t = ۰/۳\,s$ نقطهٔ M چه مسافتی را برحسب متر می‌پیماید؟



۱) ۶

۲) ۹

۳) ۱۲

۴) ۲۴

۱۱۶ اختلاف طول‌موج دو موج الکترومغناطیسی در خلأ برابر ۴۰۰۰ آنگستروم است و بسامد موج A، ۸۰ درصد بیشتر از بسامد موج B است. موج الکترومغناطیسی A در کدام ناحیه از طیف امواج الکترومغناطیسی قرار دارد؟

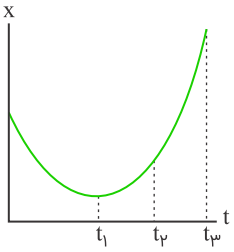
۱) فرابنفش

۲) رادیویی

۳) فروسرخ

۴) مرئی

۱۱۷ نمودار مکان- زمان متحرکی که روی محور xها حرکت می‌کند به‌صورت سهمی و مطابق شکل زیر است. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ حرکت این متحرک درست است؟ $(t_۱ > ۱\,s)$



الف) بزرگی سرعت متوسط در بازهٔ $(t_۱, t_۲)$ بیشتر از $(t_۱, t_۳)$ است.

ب) تندی متوسط متحرک در بازهٔ $(۰, t_۲)$ بیشتر از $(۰, t_۳)$ است.

پ) کمترین تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۲ ثانیه‌ای در بازهٔ $((t_۱ - ۱)\,s, (t_۱ + ۱)\,s)$ رخ می‌دهد.

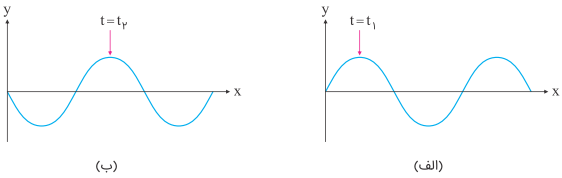
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

۱۱۸ شکل‌های "الف" و "ب" نقش یک موج را در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ نشان می‌دهند که در جهت مثبت محور x منتشر می‌شود. اگر بسامد نوسان‌ها $۵۰\,Hz$ باشد، $\Delta t = t_۲ - t_۱$ چند ثانیه است؟ (علامت $\downarrow$ یک قلهٔ موج را در این دو لحظه نشان می‌دهد)



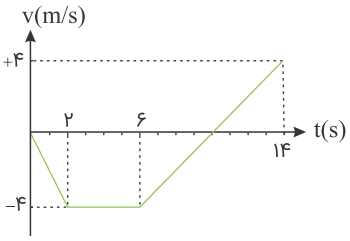
۱) ۱

۲) ۲

۳) $۱۰^{-۲}$

۴) ۲×۱۰^{-۲}

۱۱۹ نمودار سرعت- زمان متحرکی که روی محور x در حرکت است مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی داده شده متحرک چند ثانیه خلاف جهت محور x در حرکت است؟



۱) ۸

۲) ۱۴

۳) ۱۰

۴) ۱۲

۱۲۰ شدت صدای یک منبع صوتی در فاصلهٔ ۱۰ متری از آن برابر با $۱۰^{-۲}\,W/m^۲$ است. تراز شدت صوتی آن چند دسی‌بل است؟ $(I_۰ = ۱۰^{-۱۲}\,W/m^۲)$

۱) ۱۰۰

۲) ۱۰

۳) ۰/۱

۴) ۱۰۰۰

استاد علیرضا افشار
"سوال و جواب"
@soal_javab_ostad_afshar

شیمی

۱۲۱ کدام گزینه درست است؟

۱) افزایش تقاضا برای باتری‌های لیتیمی، سبب شد این فلز جایگاه نامناسبی در تأمین انرژی جهان پیدا کند.

۲) امروزه به‌دلیل داشتن پسماندهای شیمیایی سمی در باتری‌های لیتیمی، فلز لیتیم در ساخت باتری‌ها کنار گذاشته می‌شود.

۳) همهٔ باتری‌های لیتیمی قابل شارژ بوده و نسبت به باتری‌های دیگر، توانایی ذخیرهٔ بیشتر انرژی را دارند.

۴) لیتیم فلز گروه اول و دارای کمترین پتانسیل کاهشی در میان دیگر فلزها است.

۱۲۲ تعداد یون‌ها در ۲ لیتر محلول سدیم هیدروکسید برابر $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳}$ است. چند لیتر آب به آن اضافه کنیم تا pH محلول حاصل به ۱۲/۳ برسد؟ $(\log ۵ = ۰/۷)$

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۲۳ کدام عبارت نادرست است؟

$(E^\circ_{Cl_2/2Cl^-} = +۱/۳۶\,V \ , \ E^\circ_{Br_2/2Br^-} = +۱/۰۷\,V \ , \ E^\circ_{Mg^{2+}/Mg} = -۲/۳۶\,V \ , \ E^\circ_{Fe^{2+}/Fe} = -۰/۴۴\,V)$

۱) در سلول گالوانی بین دو نیم‌سلول برم و کلر جهت جریان الکترون‌ها در مدار بیرونی از سمت کلر به طرف برم است.

۲) قدرت کاهندگی Fe بیشتر از Cl^- ولی کمتر از Mg است.

۳) محلولی از نمک سدیم کلرید را می‌توان در ظرفی از جنس آهن نگهداری کرد.

۴) فلز آهن همانند یون برمید (Br^-)، می‌تواند با گاز کلر واکنش دهد.

۱۲۴ پاسخ درست پرسش‌های زیر به‌ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

الف) اگر به ازای حل کردن a مول اسید HA در آب، درمجموع $۱/۰۲۴a$ مول گونهٔ حل‌شونده در آب وجود داشته باشد، درصد یونش اسید چقدر است؟

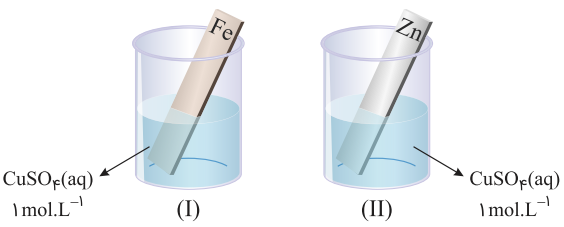
ب) در یک سامانهٔ تعادلی با اضافه کردن مقداری واکنش‌دهنده به سامانه، ثابت تعادل چه تغییری می‌کند؟

پ) pH خون انسان از نظر بیشتر یا کمتر از ۷ بودن مشابه آب گازدار است یا برخلاف آن؟

۱) ۱/۲ درصد - کوچک‌تر می‌شود - مشابه ۲) ۲/۴ درصد - تغییر نمی‌کند - برخلاف

۳) ۱/۲ درصد - تغییر نمی‌کند - مشابه ۴) ۲/۴ درصد - کوچک‌تر می‌شود - برخلاف

۱۲۵ در شکل‌های زیر دمای اولیهٔ محلول مس (II) سولفات $۲۰^\circ C$ است. پس از گذشت مدتی، دمای محلول در ظرف ..... بیشتر افزایش می‌یابد که می‌توان نتیجه گرفت ..... است.



۱) I - آهن کاهنده‌تر از روی

۲) I - روی اکسنده‌تر از آهن

۳) II - روی کاهنده‌تر از آهن

۴) II - آهن اکسنده‌تر از روی

۱۲۶ در دمای اتاق، برای تهیهٔ محلولی از KOH به حجم ۳۰۰ میلی‌لیتر و $pH = ۱۰$، به چند گرم KOH با خلوص ۸۰ درصد نیاز است؟ $(KOH = ۵۶\ g.mol^{-۱})$

۱) $۲/۱ \times ۱۰^{-۳}$

۲) $۱/۶۸ \times ۱۰^{-۴}$

۳) $۲/۱ \times ۱۰^{-۱۰}$

۴) $۱/۶۸ \times ۱۰^{-۸}$

۱۲۷ کدام‌یک از عبارات زیر نادرست هستند.

الف) اتیلن گلیکول، اوره و نمک خوراکی، در آب حل شده که عامل آن وجود گروه هیدروکسیل در ساختار آن‌هاست.

ب) وازلین و بنزین در هگزان که یک حلال قطبی است به خوبی حل می‌شوند.

پ) انحلال‌پذیری وازلین در هگزان بیشتر از انحلال بنزین در هگزان است.

ت) روغن زیتون همانند قندهای موجود در عسل، حاوی مولکول‌هایی است که تعداد زیادی گروه هیدروکسیل دارند و قطبی محسوب می‌شوند.

۱) الف - پ

۲) الف - ب - پ

۳) پ - ت

۴) ب - ت - الف

۱۲۸ کدام عبارت دربارهٔ پاک‌کننده‌های غیرصابونی درست است؟

۱) پس از شستن لباس با آن‌ها، معمولاً لکه‌های سفیدی بر روی لباس بر جای می‌ماند.

۲) برای جدا کردن لکهٔ چربی از روی سطح، چربی به گروه $-SO_۳^-$ می‌چسبد.

۳) قدرت لکه‌بری آن‌ها در آب سخت از قدرت لکه‌بری پاک‌کننده‌ای با فرمول کلی $RCOONa$، بیشتر است.

۴) تعداد عناصر سازندهٔ آن‌ها با تعداد عناصر سازندهٔ پاک‌کننده‌های صابونی جامد برابر است.

۱۲۹ کدام گزینه جاهای خالی را به‌درستی تکمیل می‌کند؟

"گاز هیدروژن فلوئورید یک ..... آرنیوس به شمار می‌رود؛ زیرا سبب افزایش غلظت ..... می‌شود. در دمای ثابت با افزودن این گاز به آب، غلظت یون ..... کم می‌شود."

۱) اسید ، H^+ ، هیدروکسید

۲) باز ، OH^- ، هیدروکسید

۳) اسید ، H^+ ، هیدروکسید

۴) باز ، OH^- ، هیدروکسید

۱۳۰ کدام گزینه درست است؟

۱) نوعی پاک‌کننده که مخلوط $NaOH$ و Al است، با آب واکنش داده و گاز $CO_۲$ تولید می‌کند.

۲) برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک به آن سنگ آهک اضافه می‌کنند.

۳) پیش از شناخت ساختار اسیدها و بازها، اطلاعاتی از آن‌ها در دسترس نبود.

۴) آرنیوس اولین کسی بود که اسیدها و بازها را بر مبنای علمی توصیف کرد.

۱۳۱ با در نظر گرفتن نیم‌واکنش‌های زیر، آن‌ها را موازنه نموده و سپس با مقایسه ضریب الکترون، کدام مقایسه درست است؟

الف) $MnO_4^- + H^+ + x_1e^- \rightarrow Mn^{2+} + H_2O$

ب) $H_2O + O_2 + x_2e^- \rightarrow OH^-$

ج) $O_3 + H^+ + x_3e^- \rightarrow O_2 + H_2O$

د) $H_2O + x_4e^- \rightarrow H_2 + OH^-$

۱) $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$

۲) $x_4 > x_2 = x_3 > x_1$

۳) $x_1 > x_2 > x_3 = x_4$

۴) $x_2 > x_1 > x_3 = x_4$

۱۳۲ غلظت یون‌های کلسیم و منیزیم در یک نمونه آب سخت به ترتیب برابر با $120ppm$ و $360ppm$ است. برای برطرف کردن کامل سختی این نمونه آب و رسوب دادن یون‌های کلسیم و منیزیم مطابق معادله‌های موازنه نشدهٔ زیر، چند میلی مول سدیم فسفات را باید به هر لیتر از این نمونه آب سخت افزود؟ (چگالی آب را $1g.mL^{-1}$ در نظر بگیرید) $(Ca = 40 \ , \ Mg = 24 : g.mol^{-1})$

$$Ca^{2+}(aq) + Na_3PO_4(aq) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) + Na^+(aq)$$

$$Mg^{2+}(aq) + Na_3PO_4(aq) \rightarrow Mg_3(PO_4)_2(s) + Na^+(aq)$$

۱) ۱۲

۲) ۱۰

۳) ۱۶

۴) ۸

۱۳۳ کدام مورد در مورد استخراج آلومینیم درست است؟

۱) فرآیند هال برای تولید آلومینیم از Al_2O_3 مذاب است که در یک سلول گالوانی انجام می‌شود.

۲) جنس آند و کاتد در فرآیند هال یکسان است.

۳) آلومینیم مذاب از بالای سلول به‌صورت مذاب خارج می‌شود.

۴) با بازیافت فلز آلومینیم می‌توان ضمن افزایش عمر یکی از مهم‌ترین منابع تجدیدپذیر طبیعت هزینه‌های تولید این فلز را کاهش داد.

۱۳۴ ۳۵۰ گرم پتاسیم هیدروکسید ناخالص را در ۵۰ لیتر آب خالص در دمای ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد حل می‌کنیم. اگر غلظت یون هیدروکسید 10^{12} برابر غلظت یون هیدرونیوم باشد، درصد خلوص پتاسیم هیدروکسید چند است؟ (از تغییر حجم صرف‌نظر کنید و $KOH = 56 \, g.mol^{-1}$)

۱) ۲۰

۲) ۸۰

۳) ۷۰

۴) ۳۰

۱۳۵ در کدام گزینه در هر دو گونه عدد اکسایش اتمی که زیر آن خط کشیده شده است، برابر می‌باشد؟

۱) $\underline{P}Br_3 \ , \ \underline{N}H_4^+$

۲) $\underline{Mn}O_4^{2-} \ , \ \underline{S}O_3^{2-}$

۳) $K_2\underline{Cr}_2O_7 \ , \ \underline{Mn}O_4^{2-}$

۴) $H\underline{N}O_3 \ , \ \underline{Cl}O_2^-$

۱۳۶ کدام‌یک از عبارات زیر نادرست است؟

۱) pH اسید معده حدود ۱/۷ است و قدرت این اسید به‌اندازه‌ای است که می‌تواند فلز روی را حل کند.

۲) جذب مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم توسط سلول‌های داخلی دیوارهٔ معده، سبب نابودی سلول‌های معده می‌شود.

۳) در بدن انسان بالغ، روزانه بین ۲ تا ۳ لیتر شیرهٔ معده تولید می‌شود.

۴) به‌منظور کاهش اثر مصرف غذاها و داروهای اسیدی، از داروهای ضداسید استفاده می‌شود.

۱۳۷ در سلول گالوانی روی- نقره ضمن اکسایش ۰/۱ مول ..... ، ..... گرم به وزن تیغهٔ ..... افزوده می‌شود. (گزینه‌ها از راست به چپ خوانده شود)

$(E^\circ(Ag^+/Ag) = +۰/۸\,V \ , \ E^\circ(Zn^{۲+}/Zn) = -۰/۷۶\,V \ , \ Ag = ۱۰۸ \ , \ Zn = ۶۵ : g.mol^{-۱})$

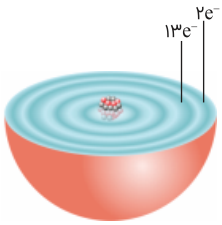
۱) نقره ، ۳/۲۵ ، روی

۲) نقره ، ۲۱/۶ ، روی

۳) روی ، ۳/۲۵ ، نقره

۴) روی ، ۲۱/۶ ، نقره

۱۳۸ اگر دایره‌های تیره‌رنگ در شکل زیر، نشان‌دهندهٔ لایه‌های الکترونی اتم عنصر A باشد، چندمورد از مطالب زیر، دربارهٔ آن درست است؟



- A عنصری اصلی از گروه ۱۵ است.
- برخی از ترکیب‌های آن، رنگی هستند.
- بالاترین عدد اکسایش آن برابر ۷+ است.
- سه زیر لایه از لایهٔ سوم آن از الکترون اشغال شده است.

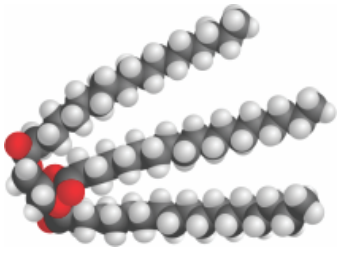
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۳۹ باتوجه‌به مدل فضاپرکن مولکول زیر، کدام‌یک از مطالب زیر به‌درستی بیان شده است؟



۱) تفاوت جرم مولی مولکول داده‌شده با جرم مولی مولکول روغن زیتون برابر با ۲ گرم بر مول است.

۲) فرمول مولکولی اسید چرب تشکیل‌دهندهٔ آن به‌صورت $C_{۱۹}H_{۳۸}O_۲$ است.

۳) یک مول از این ترکیب با یک مول آب واکنش داده و سه اسید چرب تولید می‌کند.

۴) در ساختار لوویس آن، ۳ پیوند دوگانه وجود دارد.

۱۴۰ اگر واکنش مقدار یکسانی از نوار منیزیم با یک لیتر محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید (a) و محلول ۱ مولار هیدروفلوئوریک اسید (b) را در نظر بگیریم، چند مورد از مقایسه‌های زیر درست است؟

الف) زمان پایان واکنش $a > b$

ب) حجم گاز آزادشده قبل از پایان واکنش در زمان یکسان $a > b$

پ) جرم جامد موجود در مخلوط قبل از پایان واکنش $a = b$

ت) غلظت یون هیدرونیوم $a > b$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۱ آمونیوم سولفات و آمونیوم نیترات در کدام موارد زیر، با یکدیگر تفاوت دارند؟

الف) عدد اکسایش اتم مرکزی آنیون

ب) شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول شیمیایی

پ) شمار اتم‌های نیتروژن در فرمول شیمیایی

ت) شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در اتم مرکزی آنیون

۱) الف - ب - پ ۲) الف - ب

۳) الف - پ - ت ۴) الف - ت

۱۴۲ کدام مطلب نادرست است؟ (در همهٔ گزینه‌ها، دما ثابت در نظر گرفته شود)

۱) درصد یونش اسید ضعیف HA با افزایش غلظت آن در آب کاهش می‌یابد.

۲) $[OH^-]$ در محلول یک اسید ضعیف، می‌تواند برابر $[H_3O^+]$ در محلول یک باز ضعیف باشد.

۳) اگر درصد یونش باز بسیار قوی YOH دو برابر درصد یونش اسید HX باشد، pH محلول ۱ مولار اسید برابر ۳ است.

۴) اگر برای محلول ۳ مولار یک اسید، pH در گسترهٔ صفر تا ۷ قرار گیرد، آن اسید از هیدروبرمیک اسید، ضعیف‌تر است.

۱۴۳ در ترکیب‌های فسفردار زیر کدام ترکیب به‌ترتیب تنها می‌تواند نقش عامل اکسنده و کدام ترکیب تنها می‌تواند نقش یک عامل کاهنده را در واکنش‌ها داشته باشد؟

۱) P_4 ، P_4O_{10} ۲) PF_3 ، H_3PO_2

۳) PH_3 ، P_4O_{10} ۴) PF_3 ، P_4

www.alirezaafshar.org

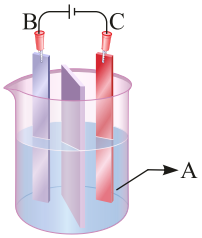
۱۴۴ چه تعداد از عبارت‌های زیر پیرامون برقکافت آب درست هستند؟

الف) حرکت الکترون‌ها در خارج از الکترولیت از B به C است.

ب) مادهٔ A، آب خالص است.

پ) واکنش کلی برقکافت آب به‌صورت $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 2H_2(g)$ است.

ت) حجم گاز تولیدی در کاتد دو برابر حجم گاز تولیدی در آند است.



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۴۵ باتوجه‌به فرآیند زنگ زدن آهن در هوای مرطوب، نقش‌های آب در این واکنش، کدام‌اند؟

۱) اکسنده ، حلال

۲) کاهنده ، حلال

۳) الکترولیت ، واکنش‌دهنده

۴) الکترولیت ، اکسنده

۱۴۶ در ۰/۰۱ مول از یک اسید چرب با زنجیرهٔ کربنی شامل ۱۶ کربن، چه تعداد اتم هیدروژن وجود دارد؟

۱) $0/34N_A$

۲) $0/33N_A$

۳) $0/32N_A$

۴) $0/31N_A$

۱۴۷ در سلول گالوانی ساخته‌شده از نقره و منیزیم، اگر افزایش مجموع جرم الکترودهای آند و کاتد برابر با ۰/۴۸ گرم باشد، چند مول الکترون از مدار بیرونی منتقل شده است؟ $(Ag = 108 \ , \ Mg = 24 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۰۱۱

۲) ۰/۰۰۵

۳) ۰/۰۰۴۵

۴) ۰/۰۲۲

۱۴۸ به ازای مصرف ۱۵۳ کیلوگرم سنگ بوکسیت با خلوص ۸۰ درصد در فرآیند هال، چند کیلوگرم فلز آلومینیوم به دست می‌آید؟ $(O = 16 \ , \ Al = 27 : g.mol^{-1})$

۱) ۱۰۱/۲۵

۲) ۶۴/۸

۳) ۴۸/۶

۴) ۱۱۰/۲۵

۱۴۹ واکنش‌های زیر در باتری‌های دکمه‌ای معمول برای تأمین انرژی دستگاه‌های کوچک همراه انجام می‌شود. کدام‌یک از گزینه‌ها برداشت نادرستی از این واکنش‌های الکتروشیمیایی را بیان می‌کند؟

$$Zn(s) + Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s) + 2\,Ag(s)$$

$$Li(s) + MnO_2 \rightarrow LiMnO_2(s)$$

۱) در باتری لیتیمی نیم‌واکنش کاهشی $Li^+ + MnO_2 \rightarrow LiMnO_2$ انجام می‌پذیرد.

۲) لیتیم منفی‌ترین پتانسیل کاهشی را در بین عناصر دارد. بنابراین انرژی تولیدشده در باتری لیتیم بیشتر است.

۳) درصورتی‌که انرژی الکتریکی تولیدی دو باتری یکسان باشد، وزن باتری لیتیمی کمتر خواهد بود.

۴) می‌توان در شرایط مناسب از $Li(s)$ و $ZnO(s)$ سلول گالوانی تشکیل داد.

۱۵۰ کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟

۱) ذرات سازندهٔ سوسپانسیون ماده‌های ریزی هستند که در صورت ثابت ماندن ته‌نشین می‌شوند.

۲) مخلوط آب و روغن کلوئیدی است که با افزودن صابون پایدار شده و به‌ظاهر همگن می‌گردد.

۳) مخلوط سوسپانسیون برخلاف محلول‌ها رفتار مشابهی با کلوئیدها در برابر نور دارد.

۴) میزان بار ذرات کلوئید با اندازهٔ آن رابطهٔ مستقیم دارد.

استاد علیرضا افشار
”همایش ها“
@hamayesh_dr_afshar

www.alirezaafshar.org

حسابان

۱ گزینه ۴

چون $f(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، بنابراین $f(-۲)=۰$ است.

$$f(x)=x^۴+ax^۳-۸x \Rightarrow f(-۲)=۱۶-۸a+۱۶=۰$$

$$\Rightarrow ۸a=۳۲ \Rightarrow a=۴ \Rightarrow f(x)=x^۴+۴x^۳-۸x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x+۲$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{r|l} x^۴+۴x^۳-۸x & x+۲ \\ \hline -(x^۴+۲x^۳) & x^۳+۲x^۲-۴x \\ \hline ۲x^۳-۸x & \\ -(۲x^۳+۴x^۲) & \\ \hline -۴x^۲-۸x & \\ -(-۴x^۲-۸x) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$f(x)=(x+۲)(x^۳+۲x^۲-۴x)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x(x^۲+۲x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=-۱\pm\sqrt{۵} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ برابر با $x=-۱-\sqrt{۵}$ است.

۲ گزینه ۴

نکته:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^+}=+\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{۰^+}=-\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^-}=-\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{۰^-}=+\infty$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{-۲x}{x-۴}=\frac{-۲(۴)}{۴^--۴}=\frac{-۸}{۰^-}=+\infty$$

۳ گزینه ۴

باید مقادیر حد چپ و راست تابع را در اطراف $x=-۱$ پیدا کنیم.

$$\lim_{x\to(-۱)^+} y=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{۱}{x^۲-۱}=\frac{۱}{((-۱)^+)^۲-۱}=\frac{۱}{۱^--۱}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-} y=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{۱}{x^۲-۱}=\frac{۱}{((-۱)^-)^۲-۱}=\frac{۱}{۱^+-۱}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

مقدار تابع سمت راست $x=-۱$ باید $-\infty$ و سمت چپ آن باید $+\infty$ باشد.

۴ گزینه ۱

اگر $\sin ۲x = \sin \frac{\pi}{۶}$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \\ x = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$$

۵ گزینه ۲

$$\lim_{x\to -۲} f(x) = \lim_{x\to -۲} \frac{-x}{\sqrt{(x+۲)^۲}} = \lim_{x\to -۲} \frac{-x}{|x+۲|} = \frac{۲}{۰^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -۲} g(x) = \lim_{x\to -۲} \frac{(-۱)^{[x]}}{(x+۲)^۲} = \begin{cases} \frac{۱}{۰^+} = +\infty & ; x \to (-۲)^+ \\ \frac{-۱}{۰^+} = -\infty & ; x \to (-۲)^- \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -۲} h(x) = \lim_{x\to -۲} \frac{|x|}{(x+۲)^۲} = \frac{۲}{۰^+} = +\infty$$

پس حد توابع f و h وقتی $x \to -۲$ برابر $+\infty$ است.

۶ گزینه ۴

داریم:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha.\tan\beta}$$

ازآنجاکه $\tan\beta$ و $\tan\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$ هستند، داریم:

$$S = \tan\alpha + \tan\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{۳}{۲}$$
$$P = \tan\alpha.\tan\beta = \frac{c}{a} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha.\tan\beta} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{۱ + \frac{۱}{۲}} = -۱$$

۷ گزینه ۱

$$f(x) = \left[\frac{-۵x + ۵ - ۲}{x - ۱}\right] = \left[-۵ - \frac{۲}{x-۱}\right]$$

$$f(\frac{۱}{x} - \frac{۲}{x^۲}) = f(\overbrace{\frac{x-۲}{x^۲}}^{t}) \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x\to -\infty} \lim_{t\to ۰^-} f(t) = \lim_{x\to ۰^-} \left[-۵ - \frac{۲}{x-۱}\right] = [-۳^-] = -۴ \\ \xrightarrow{x\to ۰^+} \lim_{t\to -\infty} f(t) = [-۵ + ۰^+] = [-۵^+] = -۵ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(\frac{۱}{x} - \frac{۲}{x^۲}) - \lim_{x\to -\infty} f(\frac{۱}{x} - \frac{۲}{x^۲}) = -۵ - (-۴) = -۱$$

۸ گزینه ۳

نکته: اعداد ۰^+ یا ۰^- را صفر حدی می‌نامیم. درواقع این اعداد به‌معنای صفر اصلی (صفر مطلق) نیستند، بلکه یک عدد بسیار نزدیک به صفر هستند؛ بنابراین توجه شود که:

الف) $\frac{\text{عدد}}{\text{۰ حدی}} = \infty$

ب) $\frac{\text{عدد}}{\text{۰ مطلق}} = \text{تعریف نشده}$

$$\lim_{x\to (-۳)^-} \frac{[x+۵]}{x+۳} = \frac{[(-۳)^- + ۵]}{(-۳)^- + ۳} = \frac{[۲^-]}{۰^-} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to (-۳)^+} \frac{x+۴}{[x+۳]} = \frac{-۳+۴}{[(-۳)^+ + ۳]} = \frac{۱}{[۰^+]} = \frac{۱}{\text{۰ مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

۹ گزینه ۲

تابع در $+\infty$ از مقادیر بیشتر به ۱ نزدیک می‌شود و در $-\infty$ از مقادیر کمتر به ۱ نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=|1|=1 \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)]=[1^-]=0$$

حاصل حد برابر ۱ خواهد بود.

۱۰ گزینه ۲

باتوجه‌به شکل مقدار تابع در $x=a$ برابر با -4 می‌شود؛ پس:

$$y=(a-x)^3-b \xrightarrow{x=a} -b=-4\Rightarrow b=4\Rightarrow y=(a-x)^3-4$$

تابع در $y=4$ محور y ها را قطع می‌کند، یعنی:

$$y(0)=4\Rightarrow (a)^3-4=4\Rightarrow a^3=8\Rightarrow a=2$$

۱۱ گزینه ۳

چون عبارت x^2+mx^3-x-14 بر $x+2$ بخش‌پذیر است، پس:

$$x+2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow (-2)^2+m(-2)^3-(-2)-14=0$$
$$\Rightarrow 4-8m+2-14=0\Rightarrow -8m=8\Rightarrow m=-1$$

پس باقی‌ماندهٔ $P(x)=x^3+3x^2-1$ بر $x-1$ برابر است با:

$$x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow R=P(1)=(1)^3+3(1)^2-1=3$$

۱۲ گزینه ۴

در این گونه سؤال ها ابتدا تمام نسبت های مثلثاتی را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با توجه به رابطهٔ $\sin^2x=1-\cos^2x$، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ مرتب می کنیم.

$$2\sin^2x=3\cos x\Rightarrow 2(1-\cos^2x)=3\cos x$$
$$\Rightarrow 2-2\cos^2x=3\cos x\Rightarrow 2\cos^2x+3\cos x-2=0$$
$$\Rightarrow (2\cos x-1)(\cos x+2)=0\Rightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=-2 \text{ غ.ق.ق}\end{cases}$$

معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ دارای جواب $x=2k\pi\pm\alpha$ است. هم چنین توجه کنید که معادلهٔ $\cos x=A$ به ازای $A>1$ و $A<-1$ فاقد جواب است.

پس جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos x=\frac{1}{2}$ برابر است با:

$$\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۱۳ گزینه ۳

ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$x^2-|x|=0\Rightarrow |x|^2-|x|=0\Rightarrow |x|(|x|-1)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=1\ ,\ x=-1$$

باید توجه کرد $x=0$ و $x=-1$ ریشه‌های صورت هم هستند، پس باید حد تابع را در این نقاط بیابیم:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^2-|x|}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^2+x}=1\neq+\infty \text{ یا } -\infty$$

پس $x=-1$ مجانب قائم تابع نیست.

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{x^2-|x|}\Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=-1\\ \lim\limits_{x\to0^-}\frac{x(x+1)}{x(x+1)}=1\end{cases}$$

$x=0$ هم مجانب قائم تابع نیست، پس تابع f دارای یک مجانب قائم به معادلهٔ $x=1$ است.

۱۴ گزینه ۱

$$f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x}{ax^۲+bx+c}$$

$y=-۱$ مجانب افقی تابع است، بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{-۲}{a}=-۱\Rightarrow a=۲\Rightarrow f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x}{۲x^۲+bx+c}$$

همچنین $x=-۲$ و $x=۱$ مجانب‌های قائم تابع و درنتیجه ریشهٔ مخرج هستند، پس مخرج به‌صورت $۲(x-۱)(x+۲)$ است. بنابراین تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x}{۲(x-۱)(x+۲)}=\frac{-۲x^۲+۳x}{۲x^۲+۲x-۴}\Rightarrow f(-۱)=\frac{-۲-۳}{۲-۲-۴}=\frac{-۵}{-۴}=۱/۲۵$$

۱۵ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه $F(x)$ هنگامی بیشینه می‌شود که $\cos ۴x=-۱$، پس ریشه‌های این معادله نقاط ماکزیمم را شامل می‌شود.

$$۴x=(۲k+۱)\pi\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$$

توجه کنید که چون نقطهٔ مثبت را خواسته، به k مقدار منفی نمی‌دهیم.

۱۶ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۳}\left(\frac{۲x^۲-۲۰}{mx^۲+۱۸x+n}\right)=+\infty$$

حد صورت کسر وقتی $x\to ۳$، برابر $۲-۲۰=-۲\left(۳^۲\right)$ است؛ بنابراین برای آنکه حاصل حد داده‌شده برابر $+\infty$ شود، باید در هر دو حالت $x\to ۳^+$ و $x\to ۳^-$، حاصل مخرج کسر برابر ۰^- شود؛ یعنی باید $x=۳$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد و در اطراف آن (در ۳^+ و ۳^-) تغییر علامت نداشته باشیم، بنابراین:

$$mx^۲+۱۸x+n=a(x-۳)^۲=ax^۲-۶ax+۹a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۶a=۱۸\Rightarrow a=-۳\\ m=a=-۳\\ n=۹a=۹(-۳)=-۲۷\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{۲}{m}=-\frac{۲}{۳}$$

۱۷ گزینه ۱

اولاً چون x و y هم‌علامت هستند، پس تابع یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است. ثانیاً:

$$y^۲=\frac{x^۲}{۱+x^۲}\Rightarrow y^۲+y^۲x^۲=x^۲\Rightarrow y^۲=x^۲(۱-y^۲)$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{y^۲}{۱-y^۲}}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{\frac{x^۲}{۱-x^۲}}\Rightarrow x=\pm ۱\ \text{قائم}$$

چون x به بی‌نهایت میل نمی‌کند، پس مجانب افقی ندارد.

۱۸ گزینه ۳

به دست آوردن $\tan(T\hat{O}B)=\tan\alpha$ از روی شکل کار آسانی نیست؛ بنابراین از تساوی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\tan((\alpha+۴۵)-۴۵)=\frac{\tan(\alpha+۴۵)-\tan ۴۵}{۱+\tan(\alpha+۴۵)\tan ۴۵}=\frac{\tan(\alpha+۴۵)-۱}{۱+\tan(\alpha+۴۵)}=\frac{۳-۱}{۱+۳}=\frac{۱}{۲}$$

توجه کنید که $\tan(\alpha+۴۵)=\frac{AT}{OA}=\frac{۳}{۱}=۳$ است.

نکته:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

۱۹ گزینه ۲

قبل از بررسی مجانب قائم، این تابع حتماً یک مجانب افقی به معادلهٔ $y = ۱$ را دارا است، پس باید m طوری تعیین شود که تابع فقط یک مجانب قائم بدهد. برای این هدف دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) مخرج کسر ریشهٔ مضاعف بدهد، یعنی:

$$\Delta = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow m = \pm ۲$$

ب) مخرج کسر دو ریشه بدهد ولی یکی از آن‌ها ریشهٔ صورت باشد، یعنی $x = ۱$ و $x = ۲$ ریشه‌های صورت، در مخرج جداگانه صدق کنند:

$$x = ۱ \Rightarrow ۱ - m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = ۲$$
$$x = ۲ \Rightarrow ۴ - ۲m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۵}{۲}$$

پس در مجموع سه مقدار متمایز برای عدد m یافت شد و "گزینهٔ ۲" درست است.

۲۰ گزینه ۳

نکته:تابع $y = a\cos bx + c$ دارای دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

$$f(x) = ۲ - \cos ۳x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۳}$$

۲۱ گزینه ۴

نکته: اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ برابر با T باشد، دورهٔ تناوب تابع $kf(ax)$ برابر با $\frac{T}{|a|}$ است.

$$T = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ \frac{۴}{۵}f(x) \Rightarrow T = ۱۰ \\ ۲)\ \frac{۵}{۴}f(x) \Rightarrow T = ۱۰ \\ ۳)\ f(\frac{۴}{۵}x) \Rightarrow T = \frac{۱۰}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۵۰}{۴} = \frac{۲۵}{۲} \\ ۴)\ f(\frac{۵}{۴}x) \Rightarrow T = \frac{۱۰}{\frac{۵}{۴}} = ۸ \end{cases}$$

www.alirezaafshar.org

۲۲ گزینه ۴

گام اول

الف) تابع در بازهٔ بین $\frac{\pi}{۱۸}$ و $\frac{۱۳\pi}{۱۸}$ یک دوره تناوب کامل را طی می‌کند.

ب) دوره تناوب تابع $y = a - ۲\cos\left(bx + \frac{\pi}{۲}\right)$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.

ج) داریم:

$$y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲}) = a + ۲\sin bx$$

باتوجه‌به نمودار b باید مثبت باشد زیرا در غیر این صورت نمودار تابع قرینهٔ نمودار رسم شده خواهد بود.

د) نقطه به مختصات $\left(\frac{\pi}{۱۸}, ۰\right)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{۱۳\pi}{۱۸} - \frac{\pi}{۱۸} = \frac{۱۲\pi}{۱۸} = \frac{۲\pi}{۳}$$

همچنین باتوجه‌به قسمت ب و ج از گام اول می‌توان نوشت:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} \quad \Rightarrow \quad |b| = ۳ \quad \xrightarrow{b>۰} \quad b = ۳$$

اکنون با توجه به اینکه $f\left(\frac{\pi}{۱۸}\right) = ۰$ است، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$۰ = a - ۲\cos\left(۳ \times \frac{\pi}{۱۸} + \frac{\pi}{۲}\right) = a - ۲\cos\left(\frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۲}\right) = a + ۲\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = a + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a + ۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad a = -۱$$

پس حاصل $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -۱ + ۳ = ۲$$

۲۳ گزینه ۳

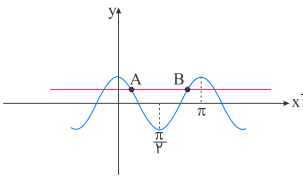
برای پیدا کردن نقاط تلاقی، توابع را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\cos ۲x = \frac{۱}{۲} = \cos(\frac{\pi}{۳})$$
$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$$

باتوجه‌به این که دورهٔ تناوب تابع $y = \cos ۲x$ برابر π است، پس مقدار xها باید کمتر از π باشد.

$$A \xrightarrow{k=۰} x = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow (\frac{\pi}{۶}, \frac{۱}{۲})$$
$$B \xrightarrow{k=۱} x = \pi - \frac{\pi}{۶} = \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow (\frac{۵\pi}{۶}, \frac{۱}{۲})$$

حالا طول پاره‌خط AB را به دست می‌آوریم:



$$AB = \sqrt{(\frac{۵\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶})^۲ + (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲})^۲} = \sqrt{(\frac{۲\pi}{۳})^۲} = \left|\frac{۲\pi}{۳}\right| = \frac{۲\pi}{۳}$$

۲۴ گزینه ۳

$$y = x^۳ - ۲۱x^۲ + ۱۴۷x - ۳۴۷ = (x - ۷)^۳ - ۴$$

بنابراین برای رسم نمودار داده‌شده، کافی است نمودار $y = x^۳$ را ۷ واحد به راست و ۴ واحد به پایین انتقال دهیم.

۲۵ گزینه ۳

گام اول

با استفاده از فرمول $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$ عبارت داده‌شده را ساده کرده و معادله را حل می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos ۲x + ۲\cos^۲x = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲x - ۱ + ۲\cos^۲x = ۰$$

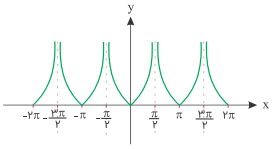
$$\Rightarrow ۴\cos^۲x = ۱ \Rightarrow \cos^۲x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

۲۶ گزینه ۲

$$y = |\sin x|\sqrt{۱ + \tan^۲x} = |\sin x|\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲x}}$$

$$= |\sin x| \times \frac{۱}{|\cos x|} = \left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| = |\tan x|$$



باتوجه‌به شکل گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲۷ گزینه ۴

مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$\frac{\text{مجموع دو قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$$

ارتفاع ذوزنقهٔ داده‌شده برابر با مقدار ماکسیمم تابع است که همان a می‌شود؛ توجه کنید a می‌تواند هر علامتی داشته باشد، چراکه اگر مثبت باشد که ایرادی نیست و اگر منفی هم باشد منفی داخل کمان به بیرون سینوس هدایت می‌شود و با منفی خود a از بین می‌رود؛ فعلاً فرض می‌گیریم a مثبت است.

اما برای قاعده‌ها مقدار AB برابر با T (دورهٔ تناوب) و CD برابر با $\frac{T}{۲}$ است. ازطرفی:

$$T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{a}} = ۲\pi a \Rightarrow S = \frac{a \times (۲\pi a + \pi a)}{۲} = \frac{۳\pi a^۲}{۲} = ۶\pi \Rightarrow a^۲ = ۴ \Rightarrow a = \pm ۲$$

که مقدار -۲ در گزینه‌ها حضور دارد.

۲۸ گزینه ۲

ابتدا مجانب افقی تابع را تعیین می‌کنیم. سپس به کمک تفکیک کسر، مقدار حد را به‌طور دقیق‌تر محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{\frac{۴x+۱}{x+۲}} - ۱) = \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{\frac{۴x}{x}} - ۱) = ۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow y = ۱$$

$$y = \sqrt{\frac{۴x + ۸ - ۷}{x+۲}} - ۱ \Rightarrow y = \sqrt{۴ - \frac{۷}{x+۲}} - ۱$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{۴ - ۰^+} - ۱ = ۲^- - ۱ = ۱^- \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{۴ - ۰^-} - ۱ = ۲^+ - ۱ = ۱^+ \end{matrix}$$

در قسمت $x \to +\infty$ وقتی جواب حد، برابر ۱^- شده یعنی منحنی، زیرخط مجانب افقی است و در قسمت $x \to -\infty$ وقتی جواب حد برابر ۱^+ شده یعنی منحنی، بالای خط مجانب افقی است، پس "گزینهٔ ۲" درست است.

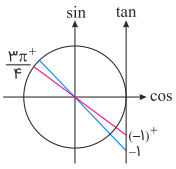
۲۹ گزینه ۱

اگر $x \to \frac{۵}{۲}$، آنگاه مخرج برابر $\tan \frac{۵\pi}{۴} + ۱ = ۱ + ۱ = ۲$ است و حاصل حد نمی‌تواند نامتناهی باشد. پس گزینه‌های "۳" و "۴" قطعاً نادرست هستند.

ولی اگر $x \to \frac{۳}{۲}$، آنگاه مخرج $\tan(\frac{۳\pi}{۴}) + ۱ = -۱ + ۱ = ۰$ و حاصل حد نامتناهی است. داریم:

$$\lim_{x \to \frac{۳}{۲}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{۳}{۲}^+} \frac{\sin \pi x}{\tan \frac{\pi x}{۲} + ۱} = \frac{\sin \frac{۳\pi}{۲}^+}{\tan(\frac{۳\pi}{۴}^+) + ۱} = \frac{-۱}{(-۱)^+ + ۱} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

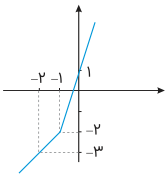
توجه کنید چون تابع تانژانت در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی صعودی است، پس مقدار آن در $\frac{۳\pi}{۴}^+$ نسبت به $\frac{۳\pi}{۴}$ افزایش یافته و برابر $(-۱)^+$ می‌باشد. برای درک بهتر می‌توانیم از دایرهٔ مثلثاتی نیز کمک بگیریم. داریم:



۳۰ گزینه ۳

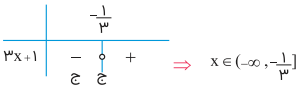
نکته: اگر f تابع اکیداً نزولی و g تابع اکیداً صعودی باشد، $f(g(x))$ تابعی اکیداً نزولی است. به‌طور کلی می‌توان برای توابع صعودی علامت $(+)$ و برای توابع نزولی علامت $(-)$ در نظر گرفت و با ضرب کردن علامت‌ها، صعودی یا نزولی بودن تابع مرکب را تعیین کرد.

$$f(x) = ۲x + |x+۱| = \begin{cases} ۳x+۱ & ; x \geq -۱ \\ x-۱ & ; x < -۱ \end{cases}$$



همان‌طور که می‌بینیم شیب هردو ضابطهٔ نمودار تابع f مثبت و درنتیجه اکیداً صعودی است. همچنین می‌دانیم تابع $g(x) = x^۲$ به ازای $x \leq ۰$ اکیداً نزولی است. بنابراین طبق نکته تابع $y = (۲x + |x+۱|)^۲$ به ازای xهایی که $۲x + |x+۱| \leq ۰$ هستند، اکیداً نزولی خواهد بود.

$$۲x + |x+۱| = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳x+۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳} \text{ ق ق} \\ x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$



$\Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{۱}{۳}]$

www.alirezaafshar.org

۳۱ گزینه ۲

طبق فرض، داریم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$A^۴ = A^۲ \times A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

دقت کنید که نیازی به یافتن سطرهای دوم و سوم ماتریس $A^۴$ نیست.

۳۲ گزینه ۱

گام اول

طبق فیزیک آیینه‌ها، هرگاه پرتو نوری موازی محور تقارن آینهٔ سهموی بر آن بتابد، آنگاه بازتاب آن پرتو از کانون می‌گذرد.

گام دوم

باتوجه‌به معادلهٔ سهمی، یک سهمی قائم داریم، بنابراین دو اشعهٔ تابیده‌شده موازی محور تقارن این سهمی است که طبق گام اول در کانون سهمی، همرس‌اند، پس کافی است با استاندارد کردن معادلهٔ سهمی مختصات کانون این سهمی را به دست آوریم.

$$x^۲ - ۲x - ۴y + ۹ = ۰ \Rightarrow (x^۲ - ۲x + ۱) - ۱ - ۴y + ۹ = ۰$$

$$(x-۱)^۲ = ۴y - ۸ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۴(y-۲)$$

بنابراین یک سهمی قائم روبه‌بالا داریم که نقطهٔ $S(۱,۲)$ رأس سهمی و $a = ۱$ فاصلهٔ کانونی و $x = ۱$ محور تقارن آن است. همچنین نقطهٔ $F(۱,۳)$ کانون سهمی و درنتیجه محل تلاقی دو اشعه است.

۳۳ گزینه ۴

نکته: دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم $f(x,y) = x^۲ + y^۲ + ax + by + c$ باشد. در این صورت به ازای هر نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ داریم:

$$f(A) = f(x_۰, y_۰) = x_۰^۲ + y_۰^۲ + ax_۰ + by_۰ + c$$

حال برای تشخیص وضعیت نقطهٔ A نسبت به این دایره خواهیم داشت:

$f(A) > ۰ \Leftrightarrow$ خارج دایره A

$f(A) = ۰ \Leftrightarrow$ روی دایره A

$f(A) < ۰ \Leftrightarrow$ درون دایره A

طبق نکتهٔ فوق داریم:

۱) $f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۱ \Rightarrow f(A) = f(۱,-۲) = ۱ + ۴ - ۱ = ۴ > ۰ \Rightarrow$ خارج دایره

۲) $f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۲x + ۵ \Rightarrow f(A) = f(۱,-۲) = ۱ + ۴ - ۲ + ۵ = ۸ > ۰ \Rightarrow$ خارج دایره

۳) $f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۸x - ۴y - ۵ \Rightarrow f(A) = f(۱,-۲) = ۱ + ۴ - ۸ + ۸ - ۵ = ۰ \Rightarrow$ روی دایره

۴) $f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۱۰x + ۸y \Rightarrow f(A) = f(۱,-۲) = ۱ + ۴ - ۱۰ - ۱۶ = -۲۱ < ۰ \Rightarrow$ داخل دایره

www.alirezaafshar.org

۳۴ گزینه ۴

با استاندارد کردن معادلهٔ سهمی، مختصات رأس و فاصلهٔ کانونی آن را تعیین می‌کنیم.

$$y^۲ - ۶y + ۲x + a = ۰ \Rightarrow (y^۲ - ۶y + ۹) - ۹ + ۲x + a = ۰$$

$$\Rightarrow (y - ۳)^۲ = -۲x - a + ۹ \Rightarrow (y - ۳)^۲ = -۲(x - (\frac{۹ - a}{۲}))$$

رأس این سهمی نقطهٔ $S(\frac{۹ - a}{۲}, ۳)$ است و چون ضریب عبارت سمت راست تساوی منفی است پس سهمی روبه‌چپ باز می‌شود و داریم:

$$-۴p = -۲ \Rightarrow ۴p = ۲ \Rightarrow p = \frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ خط هادی این سهمی از رابطهٔ $x = xs + p$ به دست می‌آید، پس داریم:

$$x = \frac{۹ - a}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۰ - a}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱۰ - a}{۲} \quad \text{خط هادی}$$

ازطرفی خط هادی سهمی از نقطهٔ $(۱, ۲)$ عبور می‌کند، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط هادی صدق می‌کند.

$$x = \frac{۱۰ - a}{۲} \xrightarrow{x=۱} ۱ = \frac{۱۰ - a}{۲} \Rightarrow ۱۰ - a = ۲ \Rightarrow a = ۱۰ - ۲ = ۸$$

۳۵ گزینه ۱

گام اول

الف) معادلهٔ استاندارد یک دایره به مرکز (α, β) و شعاع R به‌صورت $(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = R^۲$ است.

ب) معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است.

گام دوم

باتوجه‌به معادلهٔ گستردهٔ نوشته‌شده در گام اول، ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باید باهم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر a را به‌گونه‌ای می‌یابیم که ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باهم برابر شوند؛ درنتیجه:

$$a^۲ - ۷ = ۲ \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = \pm ۳$$

ازطرفی معادلهٔ این دایره را باید بتوان به‌صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a = +۳$ و $a = -۳$ را در معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a = ۳ : \ ۲x^۲ + (۹ - ۷)y^۲ + ۴y + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(x - ۰)^۲ + ۲(y^۲ + ۲y + ۱) + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲(x - ۰)^۲ + ۲(y + ۱)^۲ + ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} (x - ۰)^۲ + (y + ۱)^۲ + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow (x - ۰)^۲ + (y + ۱)^۲ = -\frac{۱}{۲} \quad \text{غ ق ق}$$

رابطهٔ به‌دست‌آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می‌باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

$$a = -۳ : \ ۲x^۲ + (۹ - ۷)y^۲ + ۴y - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(x - ۰)^۲ + ۲(y^۲ + ۲y + ۱) - ۵ = ۰ \Rightarrow ۲(x - ۰)^۲ + ۲(y + ۱)^۲ - ۵ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} (x - ۰)^۲ + (y + ۱)^۲ - \frac{۵}{۲} = ۰ \Rightarrow (x - ۰)^۲ + (y + ۱)^۲ = \frac{۵}{۲}$$

به ازای $a = -۳$، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(۰, -۱)$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{۵}{۲}}$ داریم.

۳۶ گزینه ۲

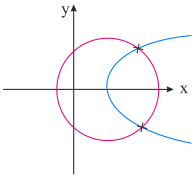
داریم: $y^۲ = ۳(x-۱)$، پس این سهمی افقی است و رأس آن $(۰\ ,\ ۱)$ می‌باشد. پس معادلهٔ دایره به‌صورت $(x-۱)^۲ + y^۲ = ۸$ است. حال تلاقی دایره و سهمی را می‌یابیم:

$$(x-۱)^۲ + y^۲ = ۸ \xrightarrow{y^۲=۳(x-۱)} (x-۱)^۲ + ۳(x-۱) = ۸$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ + ۳x - ۳ = ۸ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ - ۸ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow \Delta = \sqrt{۱ + ۴(۱۰)} = \sqrt{۴۱}$$

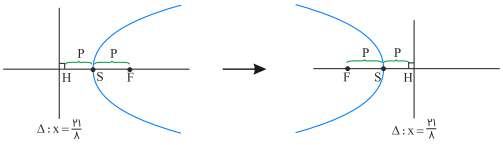
$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \dfrac{-۱ + \sqrt{۴۱}}{۲} \\ x_۲ = \dfrac{-۱ - \sqrt{۴۱}}{۲} \end{cases} \quad \times$$



دقت کنید که دایره و سهمی همدیگر را در طول مثبت قطع می‌کنند، پس $x_۲$ غیرقابل‌قبول است.

۳۷ گزینه ۴

اولاً این سهمی افقی است و $p = \dfrac{-a}{۴(۲)} = -\dfrac{a}{۸}$. حال معادلهٔ سهمی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:



$$۲y^۲ - ۱۲y + ax + ۸ = ۰ \Rightarrow ۲(y^۲ - ۶y + ۹ - ۹) = -ax - ۸$$

$$\Rightarrow ۲((y-۳)^۲ - ۹) = -ax - ۸ \Rightarrow ۲(y-۳)^۲ - ۱۸ = -ax - ۸$$

$$\Rightarrow ۲(y-۳)^۲ = -ax + ۱۰ \xrightarrow{\div ۲} (y-۳)^۲ = -\frac{a}{۲}x + \frac{۱۰}{۲}$$

$$\Rightarrow (y-۳)^۲ = -\frac{a}{۲}(x - \frac{۱۰}{a})$$

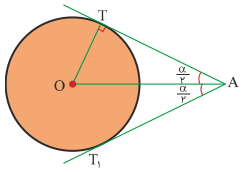
$$\Rightarrow S = (\frac{۱۰}{a}, ۳) \Rightarrow H = (\frac{۱۰}{a} - p, ۳)$$

$$\xrightarrow{p=-\frac{a}{۸}} H = (\frac{۱۰}{a} + \frac{a}{۸}, ۳) \Rightarrow \Delta : x = \frac{۱۰}{a} + \frac{a}{۸} \xrightarrow{\Delta : x = \frac{۲۱}{۸}} \frac{۲۱}{۸} = \frac{۱۰}{a} + \frac{a}{۸}$$

$$\xrightarrow{\times ۸a} ۲۱a = ۸۰ + a^۲ \Rightarrow a^۲ - ۲۱a + ۸۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (a-۵)(a-۱۶) = ۰ \Rightarrow a = ۵ \text{ یا } a = ۱۶$$

۳۸ گزینه ۳



مطابق شکل داریم: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R}{OA}$

پس باید مرکز و شعاع دایره و مقدار OA را محاسبه کنیم؛ درنتیجه داریم:

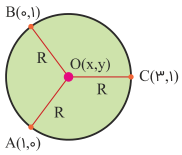
$$x^2+y^2+2x+8y-8=0\Rightarrow O(-1,-4)\ ,\ R=\sqrt{\frac{4+64+32}{4}}=5$$

$$|OA|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R}{OA}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=30^\circ\Rightarrow\alpha=60^\circ$$

۳۹ گزینه ۱

مطابق شکل با فرض $O(x,y)$ داریم:



$$|OA|=|OB|=|OC|=R$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}_{(1)}=\underbrace{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}_{(2)}=\underbrace{\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}}_{(3)}$$

$$(2),(3)\Rightarrow x^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-1)^2\Rightarrow x^2=x^2-6x+9$$

$$\Rightarrow 6x=9\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$(1),(2)\Rightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2-2y+1$$

$$\Rightarrow x=y=\frac{3}{2}\Rightarrow O(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow R=|OA|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

۴۰ گزینه ۴

می‌نویسیم:

$$(2I-A)^2=4I-4A+A^2=4(I-A)+A^2$$

طبق فرض $I-A=2A^2$ پس:

$$(2I-A)^2=4(2A^2)+A^2=9A^2$$

اکنون می‌نویسیم:

$$|(2I-A)^2|=|9A^2|=9^2|A|^2=9^2$$

در نهایت به دست می‌آید:

$$|2I-A|=\pm 9$$

فقط عدد ۹ در بین گزینه‌ها وجود دارد.

۴۱ گزینه ۴

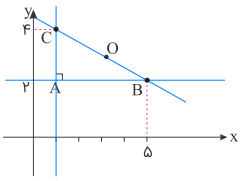
$$C = ۲A - ۳B = \begin{bmatrix} ۴ & -۸ \\ -۳ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های C:

$$۴ + (-۸) + ۱۱ + (-۳) = ۱۵ - ۱۱ = ۴$$

۴۲ گزینه ۱

باتوجه‌به معادلات داده‌شده مثلث حاصل قائم‌الزاویه خواهد بود. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، مرکز دایرهٔ محیطی، وسط وتر است؛ پس داریم:



$$BC \text{ وسط } O \left| \begin{matrix} \frac{۱+۵}{۲} \\ \frac{۴+۲}{۲} \end{matrix} \right. \Rightarrow O \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۳ \end{matrix} \right. \qquad R = OB = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲ + (y-۳)^۲ = ۵ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۶x - ۶y + ۱۳ = ۰$$

$$\Rightarrow a + b + c = ۱$$

۴۳ گزینه ۱

چون A ماتریس قطری است، پس تمام درایه‌های خارج قطر اصلی صفر است پس باید هرجا $i \neq j$ باشد صفر شود، پس:

$$\frac{x^۴ - ۱۳x^۲ + ۳۶}{x^۲ + x - ۶} = ۰ \Rightarrow x^۴ - ۱۳x^۲ + ۳۶ = ۰ \Rightarrow (x^۲ - ۴)(x^۲ - ۹) = ۰$$

پس $x = \pm ۲$ و $x = \pm ۳$ چون معادله گویا است، پس ریشه‌های مخرج نباید در جواب‌ها باشد. اگر $x^۲ + x - ۶ = ۰$ باشد، $x = -۳$ و $x = ۲$ است، درنتیجه فقط $x = -۲$ و $x = ۳$ قبول است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & a_{۴۴} \end{bmatrix}$$

در حالت $i = j$ داریم: $a_{ij} = \frac{xi}{j(x+۲)}$

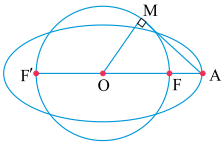
چون $i = j$ پس تمام درایهٔ اصلی به‌صورت $\frac{x}{x+۲}$ می‌شود که در این صورت $x = -۲$ نیز چون مخرج صفر می‌کند، قابل قبول نیست، پس $x = ۳$ قابل قبول است، پس داریم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۵} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۳}{۵} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$$

یعنی $A = \frac{۳}{۵} I_۴$، پس گزینهٔ ۱ صحیح است.

۴۴ گزینه ۱

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. مثلث OAM قائم‌الزاویه است:



$$AM = \sqrt{OA^{۲} + OM^{۲}} = \sqrt{a^{۲} - c^{۲}} = b$$

باتوجه‌به اطلاعات مسأله، $a = ۱۷$ و $c = ۱۵$ بنابراین:

$$b = \sqrt{a^{۲} - c^{۲}} = \sqrt{۱۷^{۲} - ۱۵^{۲}} = ۸$$

یعنی طول مماس AM برابر ۸ است.

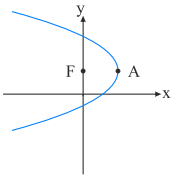
۴۵ گزینه ۲

ابتدا معادلهٔ سهمی را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$y^{۲} - my + ۳x = ۰ \Rightarrow y^{۲} - my = -۳x \Rightarrow y^{۲} - my + \frac{m^{۲}}{۴} = -۳x + \frac{m^{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow (y - \frac{m}{۲})^{۲} = -۳(x - \frac{m^{۲}}{۱۲}) \Rightarrow \begin{cases} A(\frac{m^{۲}}{۱۲}, \frac{m}{۲}) \\ -۴a = -۳ \Rightarrow a = \frac{۳}{۴} \end{cases}$$

سهمی افقی است و روبه‌چپ باز می‌شود، پس شکل فرضی مسئله به‌صورت زیر است.



برای یافتن کانون کافی است از رأس A به‌اندازهٔ $a = \frac{۳}{۴}$ به‌سمت چپ برویم، پس داریم:

$$F(\frac{m^{۲}}{۱۲} - \frac{۳}{۴}, \frac{m}{۲}) \xrightarrow[\text{روی محور yها } F]{x_F = ۰} \frac{m^{۲}}{۱۲} - \frac{۳}{۴} = ۰ \Rightarrow m^{۲} = ۹ \Rightarrow m = \pm ۳$$

۴۶ گزینه ۴

باتوجه‌به رابطهٔ $(A+B)^{۲} = A^{۲} + B^{۲} + AB + BA$ جواب را پیدا می‌کنیم:

$$(A+B)^{۲} = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}^{۲} = \begin{bmatrix} ۱۸ & ۱۸ \\ ۱۸ & ۱۸ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱۸ & ۱۸ \\ ۱۸ & ۱۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} + AB + BA$$

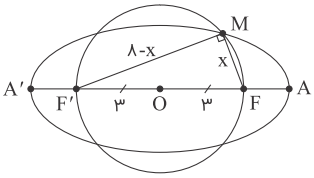
$$\Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} ۱۸ & ۱۸ \\ ۱۸ & ۱۸ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۷ & ۱۵ \\ ۱۶ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

www.alirezaafshar.org

۴۷ گزینه ۳

اولاً طبق فرض، داریم:

$$۸ > ۲\sqrt{۷} \Rightarrow ۲a = ۸ \ , \ ۲b = ۲\sqrt{۷} \Rightarrow a = ۴ \ , \ b = \sqrt{۷}$$
$$\xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} ۱۶ = ۷ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۹ \Rightarrow c = ۳$$

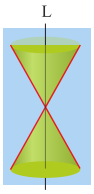


در دایره به قطر FF'، زاویهٔ FMF' محاطی و روبه‌رو به قطر FF' است؛ پس $F\hat{M}F' = ۹۰^\circ$.
حال چون M روی بیضی قرار دارد، $MF + MF' = ۲a = ۸$. پس اگر $MF = x$، آنگاه $MF' = ۸ - x$ و داریم:

$$\overset{\Delta}{MFF'} \text{ : فیثاغورس} \Rightarrow x^۲ + (۸-x)^۲ = ۶^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۶x + ۶۴ = ۳۶$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۱۶x + ۲۸ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \pm \sqrt{۲}$$
$$\xrightarrow{MF<MF'} x = ۴ - \sqrt{۲}$$

۴۸ گزینه ۴

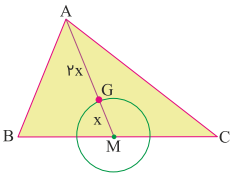
اگر صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی باشد، مقطع حاصل، دو خط متقاطع است.



۴۹ گزینه ۴

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$
$$A^۴ = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۵۰ گزینه ۴



اگر نقطهٔ G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، $GM = \frac{۱}{۳}AM$. ازآنجاکه طول میانهٔ AM ثابت است، طول GM نیز ثابت است؛ بنابراین نقطهٔ G از نقطهٔ ثابت M به فاصلهٔ ثابت $\frac{۱}{۳}AM$ است؛ پس مکان هندسی نقطهٔ G، دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{۱}{۳}AM$ است. توجه کنید که نقاط برخورد این دایره با BC جزء مکان هندسی نیستند، زیرا در این صورت نقاط A، B و C در یک امتداد قرار می‌گیرند.

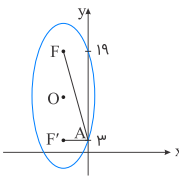
www.alirezaafshar.org

۵۱ گزینه ۱

به دلیل اینکه بیضی عمودی است، کانون‌ها و مرکز هم‌طول هستند.

$$\text{مرکز } O(-۶, \frac{۱۹+۳}{۲}) = (-۶, ۱۱) \Rightarrow F'(-۶, ۳)$$
$$FF' = ۲c = ۱۶ \Rightarrow c = ۸$$

نقطهٔ $A(۰, ۳)$ یک نقطه روی بیضی است، پس داریم:



$$AF + AF' = ۲a$$
$$AF' = ۶$$
$$AF^۲ = FF'^۲ + AF'^۲ \Rightarrow AF = \sqrt{(۱۶)^۲ + (۶)^۲}$$
$$\Rightarrow AF = \sqrt{۲۹۲} = ۲\sqrt{۷۳}$$
$$AF + AF' = ۶ + ۲\sqrt{۷۳} = ۲a$$

طول قطر بزرگ برابر است با:

$$۲a = ۶ + ۲\sqrt{۷۳}$$

۵۲ گزینه ۲

ابتدا ماتریس A را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۶ & ۱۱ \\ ۵ & ۸ & ۱۳ \\ ۷ & ۱۰ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های روی قطر اصلی} = ۳ + ۸ + ۱۵ = ۱۱ + ۱۵ = ۲۶$$

۵۳ گزینه ۲

با استاندارد کردن معادلهٔ سهمی، مختصات رأس و فاصلهٔ کانونی آن را تعیین می‌کنیم.

$$x^۲ - ۶x + ۸ = ۲y \Rightarrow (x^۲ - ۶x + ۹) - ۹ + ۸ = ۲y$$
$$\Rightarrow (x-۳)^۲ = ۲y + ۱ \Rightarrow (x-۳)^۲ = ۲(y + \frac{۱}{۲})$$

این معادله به یک سهمی قائم روبه‌بالا مربوط می‌شود که رأس آن نقطهٔ $S(۳, -\frac{۱}{۲})$ است و داریم:

$$۴p = ۲ \Rightarrow p = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ خط هادی یک سهمی قائم روبه‌بالا به‌صورت $y = y_S - p$ است، پس داریم:

$$y = -\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = -۱ \Rightarrow y = -۱ \quad \text{خط هادی}$$

۵۴ گزینه ۱

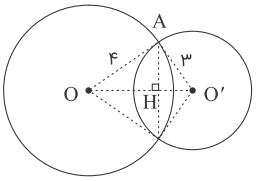
برای آنکه جواب منحصربه‌فرد داشته باشیم باید دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد، یعنی:

$$(m-۲)(m+۲) - (-۲)(۳) \neq ۰ \Rightarrow m^۲ + ۲ \neq ۰ \Rightarrow m^۲ \neq -۲$$

واضح است که رابطهٔ بالا به ازای تمامی مقادیر m برقرار است.

۵۵ گزینه ۴

مکان هندسی نقاط مشترک دو کره، دایره‌ای به مرکز H و شعاع HA است. حال داریم:



$$\overset{\Delta}{OAO'} : ۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲ \xrightarrow{\text{عکس فیثاغورس}} O\hat{A}O' = ۹۰^\circ$$

$$\text{روابط طولی} \Rightarrow AH = \frac{AO \times AO'}{OO'} = \frac{۴ \times ۳}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت دایرهٔ مکان هندسی} = \pi(\frac{۱۲}{۵})^۲ = \frac{۱۴۴}{۲۵}\pi \times \frac{۴}{۴} = \frac{۵۷۶}{۱۰۰}\pi = ۵/۷۶\pi$$

۵۶ گزینه ۳

فاصله دو رأس کانونی $۲a$ است:

$$۲a = ۸ - (-۴) \Rightarrow a = ۶$$

با داشتن $e = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$، مقدار b را حساب می‌کنیم:

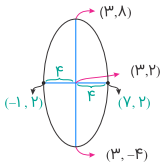
$$e = \sqrt{۱ - (\frac{b}{a})^۲} \Rightarrow \frac{\sqrt{۵}}{۳} = \sqrt{۱ - (\frac{b}{۶})^۲} \Rightarrow \frac{۵}{۹} = ۱ - (\frac{b}{۶})^۲$$

$$\Rightarrow (\frac{b}{۶})^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{b}{۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow b = ۴$$

نقطهٔ مرکز را پیدا می‌کنیم:

$$\text{مرکز} = \text{میانگین دو رأس کانونی} = \frac{(۳, ۸) + (۳, -۴)}{۲} = (۳, ۲)$$

از نقطهٔ $(۳, ۲)$، ۴ واحد به چپ و راست می‌رویم:



رئوس ناکانونی این بیضی، نقاط $(۷, ۲)$ و $(-۱, ۲)$ هستند.

۵۷ گزینه ۳

$$(x + ۳)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۹ \Rightarrow O'(-۳, -۱)\ ,\ R' = ۳$$

ازآنجاکه دو دایره مماس خارج‌اند، پس $d = OO' = R + R'$ است؛ درنتیجه داریم:

$$OO' = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$$

$$d = R + R' \Rightarrow ۵ = R + ۳ \Rightarrow R = ۲$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ دایره} : (x - ۱)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y + ۱ = ۰$$

www.alirezaafshar.org

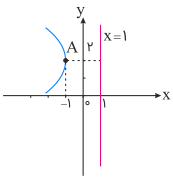
۵۸ گزینه ۲

ابتدا معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$y^۲ - ۴y = -۸x - ۱۲ \Rightarrow y^۲ - ۴y + ۴ = -۸x - ۱۲ + ۴$$

$$\Rightarrow (y-۲)^۲ = -۸(x+۱) \Rightarrow \begin{cases} A = (-۱, ۲) \\ -۴a = -۸ \Rightarrow a = ۲ \end{cases}$$

ازآنجاکه متغیر درجهٔ دوم، y است سهمی افقی می‌باشد. ازطرفی ضریب x در معادلهٔ استاندارد منفی است، پس دهانهٔ سهمی روبه‌چپ باز می‌شود.
حال مطابق شکل از رأس سهمی به‌اندازهٔ ۲ واحد به‌سمت راست حرکت می‌کنیم تا معادلهٔ خط هادی یعنی $x = ۱$ به دست آید.



۵۹ گزینه ۲

ازآنجاکه دستگاه بی‌شمار جواب دارد، بنابراین داریم:

$$\frac{a}{۴} = \frac{-۲}{b} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow a = ۸ \ , \ b = -۱$$

بنابراین $a - b = ۸ - (-۱) = ۹$ است.

۶۰ گزینه ۳

$$\text{گزینهٔ ۱ : } A^{-۱} = AB^{-۱} \Rightarrow |A^{-۱}| = |A||B^{-۱}| \Rightarrow \frac{۱}{|A|} = \frac{|A|}{|B|}$$
$$\Rightarrow |A|^۲ = |B| \Rightarrow |A^۲| = |B|$$

$$\text{گزینهٔ ۲ : } A^{-۱} = AB^{-۱} \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times A} I = A^۲B^{-۱}$$
$$|I + A^۲B^{-۱}| = |I + I| = |۲I| = ۸|I| = ۸$$

$$\text{گزینهٔ ۳ : } A^{-۱} = AB^{-۱} \xrightarrow[\text{از راست}]{\times B} A^{-۱}B = A$$
$$|A + A^{-۱}B| = |۲A| = ۸|A| \quad \times$$

$$\text{گزینهٔ ۴ : } A^{-۱} = AB^{-۱} \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times A^۲} A = A^۳B^{-۱}$$
$$\xrightarrow[\text{از راست}]{\times B} AB = A^۳$$
$$|A^۳ - AB| = |\bar{O}| = ۰$$

ریاضیات گسسته

۶۱ گزینه ۲

اثبات درستی بقیه گزینه‌ها به‌صورت زیر است.

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow an = bm \Rightarrow b \,|\, an$$
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow an = bm \Rightarrow m \,|\, an$$
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow an = bm \Rightarrow an \,|\, bm$$

www.alirezaafshar.org

۶۲ گزینه ۲

$$\begin{matrix}۲۴ = ۲^۳ \times ۳ \\ ۵۴ = ۲ \times ۳^۳\end{matrix} \xrightarrow{\text{ک.م.م}} [۲۴, ۵۴] = ۲^۳ \times ۳^۳$$

$$۱۹۲ = ۲^۶ \times ۳$$

$$(۲^۳ \times ۳^۳, ۲^۶ \times ۳) = ۲^۳ \times ۳ = ۸ \times ۳ = ۲۴$$

۶۳ گزینه ۱

ابتدا عدد ۱۴۱ را تقسیم بر ۱۳ کرده و باقی‌ماندهٔ تقسیم را به‌جای آن قرار می‌دهیم:

$$۱۴۱x \overset{۱۳}{\equiv} ۵ \Rightarrow -۲x \overset{۱۳}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۲x \overset{۱۳}{\equiv} -۵ \Rightarrow ۲x \overset{۱۳}{\equiv} ۸ \xrightarrow{(۲,۱۳)=۱} x \overset{۱۳}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۱۳k + ۴$$
$$k = ۲ \Rightarrow x = ۳۰ \text{ غ ق ق}$$

.
.
.

$$k = ۷ \;\Rightarrow\; x = ۱۳ \times ۷ + ۴ = ۹۵$$

پس به ازای k برابر با ۳، ۴، ۵ و ۶ چهار جواب معادله تولید می‌شود.

۶۴ گزینه ۱

رابطهٔ تقسیم a بر ۳۷ را می‌نویسیم:

$$a = ۳۷q + ۱۲ \quad (۱)$$

ازطرفی $a + ۲۵$ بر ۹ بخش‌پذیر است؛ یعنی:

$$a + ۲۵ = ۹q' \quad (۲)$$

در رابطهٔ (۲)، رابطهٔ (۱) را جایگذاری می‌کنیم:

$$۳۷q + \underbrace{۱۲ + ۲۵}_{۳۷} = ۹q' \Rightarrow ۳۷(q+۱) = ۹q'$$
$$\xrightarrow{۳۷ \not\vdots ۹k} q + ۱ = ۹k$$

اکنون برای اینکه a کوچکترین عدد طبیعی باشد، داریم:

$$\xrightarrow{\min(k)=۱} q + ۱ = ۹ \Rightarrow q = ۸$$
$$a = ۳۷q + ۱۲ = ۳۷ \times ۸ + ۱۲ = ۳۰۸$$

۶۵ گزینه ۲

$$۱۰^n - ۵^n \overset{۱۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵^n \times (۲^n - ۱) \overset{۱۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲^n - ۱ \overset{۱۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲^n \overset{۱۷}{\equiv} ۱$$

حال باید کوچک‌ترین توان از ۲ را پیدا کنیم که در پیمانه ۱۷ برابر با ۱ باشد:

$$۲^۴ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۲^۸ \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۸k} \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow n = ۸k$$

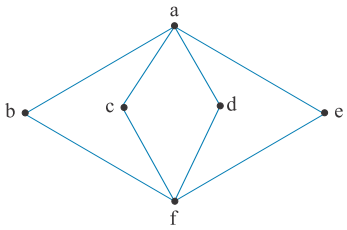
بنابراین باید $۱۰ \le ۸k \le ۹۹$ باشد که جواب‌های قابل قبول برای k عبارتند از:

$$k = \underbrace{۲, ۳, ۴, \ldots, ۱۱, ۱۲}_{\text{۱۱ جواب}}$$

www.alirezaafshar.org

۶۶ گزینه ۴

باتوجه‌به درجهٔ رئوس، گراف را می‌توان به‌صورت زیر رسم کرد:



این گراف دارای شش دور به طول ۴ است: $abfca, aefda, acfda, acfea, abfda, abfea$

۶۷ گزینه ۲

اگر G گرافی تهی از مرتبهٔ p باشد، $\bar{G}$ یک گراف کامل از مرتبهٔ p خواهد بود. از طرفی مجموع درجات رئوس هر گراف، دو برابر تعداد یال‌های آن است، درنتیجه:

$$۲q = ۳۸۰ \Rightarrow q = \frac{۳۸۰}{۲} = ۱۹۰ \Rightarrow \binom{p}{۲} = ۱۹۰ \Rightarrow \frac{p(p-۱)}{۲} = ۱۹۰$$

$$\Rightarrow p(p-۱) = ۳۸۰ = ۲۰ \times ۱۹ \Rightarrow p = ۲۰ \Rightarrow \Delta = ۱۹$$

۶۸ گزینه ۳

گراف $P_۷$ به‌صورت زیر است، در گراف $P_۷$ مقدار $p = ۷$ و $\Delta = ۲$ است؛ لذا $\gamma \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+۱} \right\rceil$ داریم: $\gamma \geq \left\lceil \frac{۷}{۲+۱} \right\rceil = ۳$

ازطرفی مجموعهٔ $D = \{V_۲, V_۴, V_۶\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس $\gamma \leq ۳$ است؛ پس باتوجه‌به $\gamma \geq ۳$ و $\gamma \leq ۳$ مقدار $\gamma = ۳$ به دست می‌آید؛ یعنی عدد احاطه‌گری $P_۷$ برابر با ۳ خواهد بود.

۶۹ گزینه ۲

$$\begin{cases} d|۴a+۳ \xrightarrow{\times ۱} d|۴a+۳ \\ d|۲a+۵ \xrightarrow{\times ۲} d|۴a+۱۰ \end{cases} \Rightarrow d|۷ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } d = ۷$$

۷۰ گزینه ۳

می‌دانیم دو عدد متوالی نسبت به هم اول‌اند (گزینهٔ (۲) برقرار است). ازطرفی دو عدد فرد متوالی نیز نسبت به هم اول‌اند، یعنی گزینهٔ (۱) و (۴) برقرار است. اما گزینهٔ (۳) همواره برقرار نیست. زیرا به ازای مقادیری از m هر دو عدد $۷m+۱$ و $۷m+۳$ زوج هستند و ب.م.م آن‌ها برابر ۲ است. برای مثال $m = ۱$ را در نظر بگیرید $(۸, ۱۰) = ۲$، بنابراین گزینهٔ (۳) همواره درست نیست.

۷۱ گزینه ۲

$$xy - ۱ = ۲y + ۳x \Rightarrow xy - ۲y = ۳x + ۱ \Rightarrow y(x-۲) = ۳x + ۱$$

$$y = \frac{۳x+۱}{x-۲} \xrightarrow{x,y \in \mathbb{N}} \text{صورت باید بر مخرج بخش‌پذیر باشد} \Rightarrow x-۲ | ۳x+۱$$

ازطرفی:

$$\begin{cases} x-۲|۳x+۱ \\ x-۲|x-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-۲|۳x+۱ \\ x-۲|۳x-۶ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} x-۲|۷ \Rightarrow x-۲ = \pm ۱, \pm ۷$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \Rightarrow y = ۱۰ \\ x = ۱ \Rightarrow y = -۴ \quad \times \end{cases}, \quad \begin{cases} x = ۹ \Rightarrow y = ۴ \\ x = -۵ \quad \times \end{cases}$$

نقاط $(۳, ۱۰)$ و $(۹, ۴)$ طبیعی و قابل قبول هستند، بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

www.alirezaafshar.org

۷۲ گزینه ۴

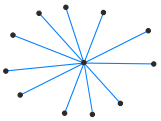
توجه کنید x و y زمانی می‌توانند مثال نقض مناسب برای این گزاره باشند که در دو شرط زیر صدق کنند:
۱) x و y، هر دو عددی اول باشند (رد گزینه‌های "۱" و "۳")
۲) مقدار $x^۲ + y^۲$ عددی مرکب باشد. (رد گزینه "۲"):

$$۲^۲ + ۳^۲ = ۴ + ۹ = ۱۳ \quad \times$$

توجه کنید که در گزینه "۴"، هم ۱۱ و هم ۹۷ اول هستند و مجموع مربعات آن‌ها چون عددی زوج می‌شود پس قطعاً عددی مرکب است.

۷۳ گزینه ۱

G یک گراف همبند از مرتبه ۱۲ و کمترین یال است، لذا برای آنکه کمترین عدد احاطه‌گری را داشته باشد لازم است به‌صورت زیر رسم شود:



پس: $\gamma_{min}(G) = ۱$
و برای اینکه بیشترین مقدار عدد احاطه‌گری را داشته باشد باید به شکل زیر باشد:

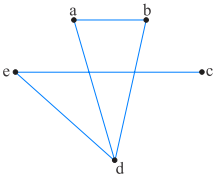
یعنی یک $P_{۱۲}$ که دراین‌صورت داریم:

$$\gamma_{max}(G) = [\frac{۱۲}{۳}] = ۴$$

درنتیجه داریم: $۱ + ۴ = ۵$

۷۴ گزینه ۲

گراف سادهٔ $G(V, E)$ گرافی است که V در آن مجموعه‌ای متناهی و ناتهی از رأس‌های گراف و E زیرمجموعه‌ای دوتایی از مجموعهٔ رأس‌ها است که مجموعهٔ یال‌های گراف نامیده می‌شود. همچنین در بین درجهٔ رئوس گراف، ماکزیمم درجه را با Δ و مینیمم درجه را با δ نشان می‌دهیم.



$$p = ۵, q = ۵, \delta = ۱, \Delta = ۳$$
$$(q - p)^۳ + \frac{\Delta}{\delta^۲} = ۰ + \frac{۳}{۱} = ۳$$

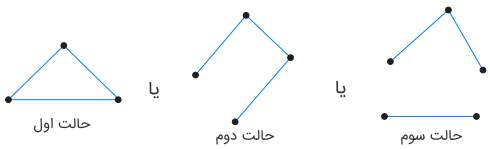
۷۵ گزینه ۳

فقط گزاره الف برای تمام اعداد صحیح برقرار است و بقیه گزاره‌ها تنها به ازای بعضی از اعداد صحیح درست هستند.

www.alirezaafshar.org

۷۶ گزینه ۴

شکل گراف به یکی از سه صورت زیر است:



حالت اول: ابتدا ۳ رأس برمی‌داریم و بقیهٔ رئوس ۲ حالت دارند.

$$\binom{۶}{۳} \times ۲^۳ = ۱۶۰$$

حالت دوم: ابتدا ۴ رأس برمی‌داریم که باید روی گراف زیر مرتب شود که به $۴!$ صورت می‌گیرد، اما به خاطر تکرار به $۲!$ تقسیم می‌شود و ۲ رأس دیگر ۲ حالت دارند.

$$\binom{۶}{۴} \times \frac{۴!}{۲} \times ۲^۲ = ۷۲۰$$

حالت سوم: ابتدا ۳ رأس برمی‌داریم و یکی از رئوس را به ۲ رأس دیگر وصل می‌کنیم تا گراف زیر ساخته شود. حال ۲ رأس دیگر برداشته و به هم وصل می‌کنیم و یک رأس باقی‌مانده هم که ۲ حالت دارد.

$$\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۲} \times ۲ = ۳۶۰$$

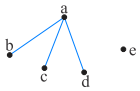
پس در کل $۱۲۴۰ = ۱۶۰ + ۷۲۰ + ۳۶۰$ زیرگراف داریم.

۷۷ گزینه ۴

گراف گزینهٔ "۴" مکمل گراف G است، زیرا رأس‌های هر دو مشترک می‌باشد و گراف مکمل یال‌هایی دارد که گراف G ندارد.

$$q_{(G)} + q_{(\overline{G})} = q_{(K_p)}$$

۷۸ گزینه ۳



ابتدا رأس a را به رئوس b، c و d وصل می‌کنیم اما به رأس e وصل نمی‌کنیم. حال با بقیهٔ رئوس $\{b, c, d, e\}$ می‌توان گراف ساخت که طبق فرمول $۲^{\binom{p}{۲}}$، می‌توان $۲^{\binom{۴}{۲}} = ۲^۶$ گراف ساخت.

۷۹ گزینه ۱

فرض می‌کنیم $a = ۲n + ۱$ و $n \in \mathbb{Z}$:

$$a = ۲n + ۱ \xrightarrow{b|a+۲} b|۲n + ۳ \Rightarrow b \text{ عددی فرد است.} \Rightarrow b = ۲m + ۱\ ,\ m \in \mathbb{Z}$$

بنابراین:

$$a^۲ + b^۲ + ۵ = (۲n+۱)^۲ + (۲m+۱)^۲ + ۵ = ۴n^۲ + ۴n + ۱ + ۴m^۲ + ۴m + ۱ + ۵$$

$$= \underbrace{۴n(n+۱)}_{۲k} + \underbrace{۴m(m+۱)}_{۲k'} + ۷ = ۸k + ۸k' + ۷$$

$$= ۸(\underbrace{k + k'}_{k''}) + ۷ \Rightarrow a^۲ + b^۲ + ۵ = ۸k'' + ۷ \Rightarrow r = ۷$$

۸۰ گزینه ۲

$$۳۱۶ = ۱۵b + r\ ,\ ۰ \le r < b \xrightarrow{\div b} \frac{۳۱۶}{b} = ۱۵ + \frac{r}{b}\ ,\ ۰ \le \frac{r}{b} < ۱$$

$$\Rightarrow ۱۵ \le \frac{۳۱۶}{b} < ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} ۱۵b \le ۳۱۶ \Rightarrow b \le ۲۱/۰۷ \\ ۱۶b > ۳۱۶ \Rightarrow b > ۱۹/۷۵ \end{cases} \xrightarrow{b \in \mathbb{N}} \begin{cases} b \le ۲۱ \\ b \ge ۲۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = ۲۰ \text{ یا } b = ۲۱$$

دو مقدار طبیعی یافت شد.

۸۱ گزینه ۱

دو عدد مفروض را a و b می‌نامیم، داریم:

$$d = (a, b) = ۱۸ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۸a' \\ b = ۱۸b' \end{cases}$$

$$a^۲ - b^۲ = ۲۲۶۸ \Rightarrow (۱۸a')^۲ - (۱۸b')^۲ = ۲۲۶۸ \Rightarrow ۳۲۴a'^۲ - ۳۲۴b'^۲ = ۲۲۶۸$$

$$\Rightarrow a'^۲ - b'^۲ = ۷ \Rightarrow (a' - b')(a' + b') = ۷$$

می‌دانیم ۷ یک عدد اول است که به‌جز یک و خودش مقسوم‌علیه دیگری ندارد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a' - b' = ۱ \\ a' + b' = ۷ \end{cases} \xrightarrow{(+)} ۲a' = ۸ \Rightarrow a' = ۴$$

$$a' - b' = ۱ \xrightarrow{a'=۴} b' = ۳$$

بنابراین $a = ۱۸ \times ۴ = ۷۲$ و $b = ۱۸ \times ۳ = ۵۴$ است که رقم یکان عدد بزرگ‌تر $(a = ۷۲)$ برابر با ۲ است.

۸۲ گزینه ۲

رقم یکان $۱۳۹۹^{۱۳۹۹}$ برابر ۹ است. (زیرا ۹ به توان یک عدد فرد رسیده است)

درنتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} a + ۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \\ ۳b - ۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۳b \overset{۱۰}{\equiv} ۱۱ \Rightarrow ۳b \overset{۱۰}{\equiv} ۱۱ + ۱۰ \Rightarrow ۳b \overset{۱۰}{\equiv} ۲۱ \Rightarrow b \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴a - ۲b = ۱۶ - ۱۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$$

۸۳ گزینه ۱

اگر عدد a بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، دو حالت زیر را داریم :

$$a = ۳k + ۱ \Rightarrow a^۲ = (۳k + ۱)^۲ = ۹k^۲ + ۶k + ۱ = ۳\underbrace{(۳k^۲ + ۲k)}_{k'} + ۱ = ۳k' + ۱$$

$$a = ۳k + ۲ \Rightarrow a^۲ = (۳k + ۲)^۲ = ۹k^۲ + ۱۲k + \underbrace{۴}_{۳+۱} = ۳(\underbrace{۳k^۲ + ۴k}_{k'}) + ۱$$

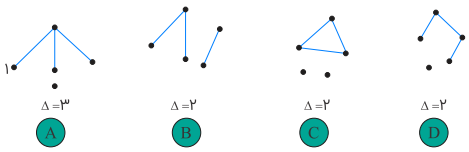
بنابراین مربع هر عدد طبیعی که بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، به‌صورت $۳k' + ۱$ است، حال داریم:

$$xy\left(x^۲ - y^۲\right) = xy\left(۳k' + ۱ - (۳k'' + ۱)\right) = xy\left(۳\left(k' - k''\right)\right) = ۳k$$

www.alirezaafshar.org

۸۴ گزینه ۳

گراف‌های ۳یاله که با ۵ رأس می‌توان ساخت به‌شکل دسته‌های زیر هستند:



کافی است تمام گراف‌های دارای ۳ یال را محاسبه کنیم و تعداد گراف‌های نوع (A) را از آن کم کنیم.

گراف‌های qیاله از فرمول $\binom{\binom{p}{۲}}{q}$ محاسبه می‌شود. پس تعداد کل گراف‌های با ۳ یال $= \binom{\binom{۵}{۲}}{۳} = ۱۲۰$ است.

برای پیدا کردن تعداد گراف‌های نوع (A) یک رأس را انتخاب و به ۳ رأس دیگر وصل می‌کنیم:

$$\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۳} = ۲۰$$

پس تعداد کل گراف‌های مطلوب برابر با $۱۲۰ - ۲۰ = ۱۰۰$ است.

۸۵ گزینه ۳

گام اول

الف) اعداد مجموعهٔ A در تقسیم بر عدد ۶ دارای باقی‌ماندهٔ ۱ هستند.

ب) اعداد عضو مجموعهٔ B در تقسیم به عدد ۶ دارای باقی‌ماندهٔ ۱- یا به عبارت دیگر دارای باقی‌ماندهٔ ۵ هستند.

ج) از بین گزینه‌ها عددی می‌تواند متعلق به مجموعهٔ C باشد که در تقسیم بر عدد ۶ هیچ کدام از باقی‌مانده‌های ۱ و ۱- را نداشته باشد.

گام دوم

با بررسی گزینه‌ها عدد مورد نظر را پیدا می‌کنیم.

بررسی گزینهٔ اول:

$$۱۱ \overset{۶}{\equiv} ۵ \overset{۶}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۱ \in B$$

بررسی گزینهٔ دوم:

$$۲۹ \overset{۶}{\equiv} ۵ \overset{۶}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۲۹ \in B$$

بررسی گزینهٔ سوم:

$$۳۳ \overset{۶}{\equiv} ۳$$

عدد ۳۳ به هیچ کدام از مجموعه‌های A و B تعلق ندارد پس ۳۳ متعلق به مجموعهٔ C است.

بررسی گزینهٔ چهارم:

$$۳۷ \overset{۶}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳۷ \in A$$

۸۶ گزینه ۳

تعداد یال‌های گراف ۶-منتظم از مرتبهٔ ۹ برابر است با: $q = \frac{۹ \times ۶}{۲} = ۲۷$

از طرفی یک گراف کامل از مرتبهٔ ۹ دارای $\binom{۹}{۲}$ یعنی ۳۶ یال است. لذا: $n = ۳۶ - ۲۷ = ۹$

پس کافی است تعداد مسیرهای به طول ۴ در گراف $K_۹$ را به دست آوریم.

نکته: تعداد مسیرهای به طول m در گراف K_p برابر است با:

$$\binom{p}{m+۱} \times \frac{(m+۱)!}{۲}$$

درنتیجه تعداد تمام مسیرهای به طول ۴ در $K_۹$ برابر است با:

$$\binom{۹}{۵} \times \frac{۵!}{۲} = ۱۲۶ \times ۶۰ = ۷۵۶۰$$

۸۷ گزینه ۴

$$۷x \overset{۱۳}{\equiv} ۳ + ۳(۱۳) \Rightarrow ۷x \overset{۱۳}{\equiv} ۴۲ \xrightarrow[(۷,۱۳)=۱]{\div ۷} x \overset{۱۳}{\equiv} ۶ \Rightarrow x = ۱۳k + ۶$$

www.alirezaafshar.org

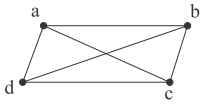
۸۸ گزینه ۲

می‌دانیم اگر $a|b$، آنگاه $a^n|b^n$. پس:

$$۵|۳k+۲ \Rightarrow ۲۵|۹k^۲+۱۲k+۴ \xrightarrow{\text{طرف راست} \times -۲} ۲۵|-۱۸k^۲-۲۴k-۸$$

پس: $m=-۲۴$

۸۹ گزینه ۳



گراف کامل $K_۴$ به‌صورت زیر است:

۴ دور با طول ۳: $abca, abda, acda, bcdb$

۳ دور با طول ۴: $abcda, acdba, adbca$

جمعاً ۷ دور وجود دارد.

۹۰ گزینه ۳

گزینهٔ "۱": مثال نقض:

$$a=۰\ ,\ b=\sqrt{۳} \Rightarrow ab=۰ \quad \text{گویا}$$

گزینهٔ "۲": مثال نقض:

$$x=۲\ ,\ y=-۳ \Rightarrow |۲-(-۳)| \neq |۲|-|-۳|$$

گزینهٔ "۳": اثبات می‌شود.

هر عدد صحیح فرد به‌صورت $۲k+۱$ می‌باشد و داریم:

$$(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴k(k+۱)+۱=۴(۲k')+۱=۸k'+۱$$

پس باقی‌ماندهٔ مربع هر عدد صحیح فرد به‌صورت $۸k+۱$ است.

گزینهٔ "۴": مثال نقض:

$$n=۱۷:\ n^۲+۷n+۱۷=۱۷^۲+۷\times۱۷+۱۷=۱۷\,(۱۷+۷+۱)=۱۷\times۲۵$$

فیزیک

۹۱ گزینه ۴

اگر طول AB و BC را برابر با L فرض نماییم، باتوجه‌به قانون پایستگی انرژی می‌توانیم بنویسیم:

$$h=L\sin ۳۰=\frac{۱}{۲}L$$

$$E_C-E_A=W_{f_k} \Rightarrow ۰-mgh=-f_k.d$$

$$\Rightarrow -mg\frac{L}{۲}=-\mu mgL \Rightarrow \mu=\frac{۱}{۲}$$

۹۲ گزینه ۴

اگر منبع صوت ساکن باشد طول‌موج رسیده به ناظر تغییر نمی‌کند.

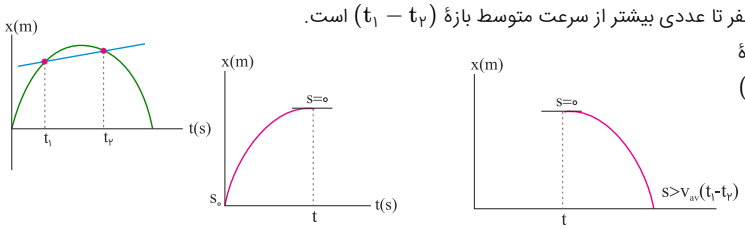
www.alirezaafshar.org

۹۳ گزینه ۲

شیب خط بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 برابر با سرعت متوسط در این بازه است.

اگر نمودار را به دو قسمت تقسیم کنیم، در هر قسمت تندی در تمام لحظات مقداری بین صفر تا عددی بیشتر از سرعت متوسط بازهٔ $(t_1 - t_2)$ است.

بنابراین در هر قسمت یک لحظه یافت می‌شود که در آن تندی با سرعت متوسط در بازهٔ $(t_1 - t_2)$ برابر است و درمجموع در دو لحظه تندی با سرعت متوسط در بازهٔ $(t_1 - t_2)$ برابر است.



۹۴ گزینه ۴

هنگامی‌که جسم شروع به حرکت می‌کند نیروی اعمال‌شده برابر با $f_{s\,max}$ است؛ بنابراین قانون دوم نیوتون را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f_{s\,max} - f_k = ma \Rightarrow (\mu_s \times m \times g) - (\mu_k \times m \times g) = ma \Rightarrow a = ۰/۷g - ۰/۴g = ۰/۳g$$

۹۵ گزینه ۲

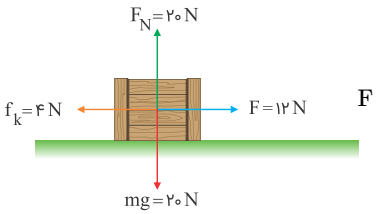
نیروی اصطکاک ایستایی بیشینهٔ بین جسم و سطح را محاسبه می‌کنیم:

$$f_{s\,max} = F_N . \mu_s \xrightarrow[\mu_s = ۰/۴]{F_N = mg = ۲۰N} f_{s\,max} = ۲۰ \times ۰/۴ = ۸N$$

نیروی F بزرگتر از $f_{s\,max}$ می‌باشد و این به معنای حرکت جسم روی سطح است و درنتیجه نیروی اصطکاک از نوع جنبشی است:

$$f_k = F_N . \mu_k = ۲۰ \times ۰/۲ = ۴N$$

وضعیت نیروهای وارد بر جسم به شکل زیر است:



$$F_{net} = ma \rightarrow ۱۲ - ۴ = ۲a \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^2}$$

به کمک رابطهٔ $\Delta x = \frac{۱}{۲}at^2 + v_۰t$ ، جابه‌جایی جسم را برحسب زمان به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^2 + v_۰t \xrightarrow[a=۴\frac{m}{s^2}]{v_۰=۰} \Delta x = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times t^2 + ۰ \Rightarrow \Delta x = ۲t^2$$

۹۶ گزینه ۳

چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، پس شتاب حرکت صفر است. داریم:

$$F - f_k = ma \xrightarrow{a=۰} f_k = F = ۶۰N$$

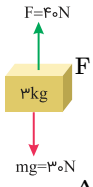
در راستای قائم شتاب نداریم، بنابراین $F_N = mg = ۸۰N$ است.

حال نیروی سطح را محاسبه می‌کنیم:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2}$$
$$R = \sqrt{۶۰^2 + ۸۰^2} = ۱۰۰N$$

۹۷ گزینه ۴

ابتدا شتاب حرکت وزنه را قبل از پاره شدن نخ (قبل از حذف نیروی F) به دست می‌آوریم. طبق قانون دوم نیوتون و باتوجه‌به نیروهایی که به جسم وارد می‌شوند، داریم:



$$F - mg = ma \Rightarrow ۴۰ - ۳۰ = ۳ \times a \Rightarrow a = \frac{۱۰}{۳}\,m/s^۲$$

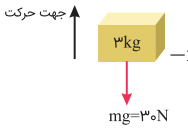
جابه‌جایی جسم در مدت $۳\,s$ و تندی آن را در انتهای این $۳\,s$ به دست می‌آوریم:

$$\Delta y_{(۳\,s)} = \frac{۱}{۲}at^۲ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۰}{۳} \times (۳)^۲ = ۱۵\,m$$

$$V_{۳\,s} = at + V_۰ = \frac{۱۰}{۳} \times ۳ + ۰ = ۱۰\,m/s$$

با قطع نیروی F، جسم به دلیل داشتن تندی بازهم مقداری بالا می‌رود.

پس از قطع نیروی F، تنها نیروی وارد بر جسم، نیروی وزن است. در این حالت، شتاب جسم برابر است با:



$$-mg = ma \Rightarrow a = -g = -۱۰\,m/s^۲$$

مسافتی که جسم پس از قطع نیروی F بالا می‌رود برابر است با:

$$V^۲ - V_۰^۲ = ۲a\Delta y_۲ \Rightarrow ۰^۲ - ۱۰^۲ = ۲ \times (-۱۰)\Delta y_۲ \Rightarrow \Delta y_۲ = ۵\,m$$

پس حداکثر ارتفاعی که وزنه از سطح زمین پیدا می‌کند برابر است با:

$$h_{max} = \Delta y_۱ + \Delta y_۲ = ۱۵ + ۵ = ۲۰\,m$$

۹۸ گزینه ۲

حرکت متحرک A به‌صورت شتاب‌دار و حرکت متحرک B با سرعت ثابت انجام می‌شود؛ بنابراین:

$$x_B = v_B t + x_۰ \Rightarrow ۳۰۰ = ۱۰t + ۰ \Rightarrow t = ۳۰\,s$$

$$x_A = \frac{۱}{۲}a_A t^۲ + v_{۰_A} t + x_{۰_A} \Rightarrow ۳۰۰ = \frac{۱}{۲}a_A \times ۳۰^۲ + ۰ + ۰ \Rightarrow a_A = \frac{۲}{۳}\,m/s^۲$$

در لحظهٔ t'، سرعت دو متحرک باهم برابرند؛ بنابراین با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان برای متحرک A خواهیم داشت:

$$v_A = a_A t' + v_{۰_A} \xrightarrow{v_A = v_B = ۱۰\,m/s} ۱۰ = \frac{۲}{۳}t' + ۰ \Rightarrow t' = ۱۵\,s$$

۹۹ گزینه ۳

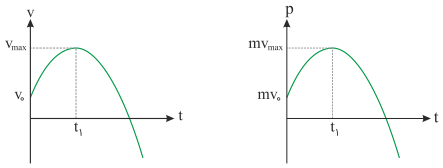
$$f = \frac{۵}{\pi} \Rightarrow T = \frac{\pi}{۵} \qquad v = \frac{۲\pi R}{T} = \frac{۲\pi \times ۱}{\frac{\pi}{۵}} = ۱۰\,m/s$$

$$F = \frac{mv^۲}{R} = \frac{۰/۲ \times ۱۰۰}{۱} = ۲۰$$

$$F = k\Delta\ell \Rightarrow ۲۰ = ۲۰۰۰\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = ۰/۰۱\,m = ۱\,cm$$

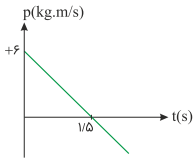
۱۰۰ گزینه ۴

نکته: شکل کلی نمودار تکانه- زمان و سرعت- زمان یکسان است؛ بنابراین اظهارنظرهایی که در مورد نوع حرکت در نمودار سرعت- زمان داشتیم در نمودار تکانه- زمان نیز برقرار است.
به‌طور مثال:



ابتدا نمودار تکانه- زمان را رسم می‌کنیم:

$$t = ۰ \Rightarrow p = ۶$$
$$t = ۱/۵ \Rightarrow p = ۰$$



نکته: می‌دانیم که اگر نمودار سرعت- زمان به محور t (افقی) نزدیک شود، تندی متحرک در حال کاهش و حرکت کندشونده است و اگر نمودار سرعت- زمان از محور t (محور افقی) دور شود، تندی متحرک در حال افزایش و حرکت تندشونده است.
طبق شکل مشاهده می‌شود که در ثانیهٔ دوم حرکت یعنی در بازهٔ $t = ۱s$ تا $t = ۲s$ ابتدا نمودار به محور t نزدیک می‌شود (کندشونده) و سپس دور می‌شود (تندشونده).

۱۰۱ گزینه ۲

از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ داریم:

$$-۴ = \frac{v_{۱۰} - v_۵}{۱۰ - ۵} \Rightarrow v_{۱۰} - v_۵ = -۲۰\,m/s \quad (I)$$
$$۲ = \frac{v_{۱۲} - v_{۱۰}}{۱۲ - ۱۰} \Rightarrow v_{۱۲} - v_{۱۰} = ۴\,m/s \quad (II)$$

دو معادلهٔ (I) و (II) را باهم جمع می‌کنیم:

$$(I) + (II) = v_{۱۲} - v_۵ = ۴ - ۲۰ = -۱۶\,m/s$$

حال شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $۵\,s$ تا $۱۲\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{v_{۱۲} - v_۵}{۱۲ - ۵} = \frac{-۱۶}{۷}\,m/s^۲$$

۱۰۲ گزینه ۲

می‌دانیم در وسط تراکم و وسط انبساط جابه‌جایی هر جزء محیط از وضعیت تعادل برابر صفر است بنابراین نقاط ۱ و ۳ متناظر با B و C هستند همچنین می‌دانیم نقاطی که در بین وسط تراکم و وسط انبساط هستند دارای جابه‌جایی بیشینه هستند پس M متناظر با نقطهٔ ۲ خواهد بود.

www.alirezaafshar.org

۱۰۳ گزینه ۳

اگر جرم کل طناب را M فرض کنیم، داریم:

$$F_A = \frac{۲}{۵}mg$$

$$F_B = \frac{۴}{۵}mg \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = ۲ \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{F_B}{F_A}} = \sqrt{۲}$$

با پیشروی موج بسامد موج ثابت است.

$$\frac{f_A}{f_B} = ۱$$

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۰۴ گزینه ۲

می‌توانیم حرکت را بر عکس تصور کنیم، به‌این صورت که متحرک با سرعت اولیه‌ای شروع به حرکت کرده (همان مجهول مسئله) و پس از ۳ ثانیه، ۲۱ متر جابه‌جا شده است.
نکتهٔ مهم این است که باید توجه داشت در برعکس تصور کردن، علامت شتاب قرینه می‌شود.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow ۲۱ = \frac{۱}{۲}(-۲)(۳)^۲ + v_۰ \times ۳ \Rightarrow ۳۰ = ۳v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۱۰\,m/s$$

۱۰۵ گزینه ۲

دو ثانیهٔ دوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی $t = ۲\,s$ تا $t = ۴\,s$، پس طبق رابطهٔ شتاب متوسط داریم:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t = ۴\,s) - v(t = ۲\,s)}{۴ - ۲}$$

$$\bar{a} = \frac{(۲(۴)^۲ - ۳(۴)) - (۲(۲)^۲ - ۳(۲))}{۲} = \frac{۲۰ - ۲}{۲} = ۹\,m/s^۲$$

۱۰۶ گزینه ۲

مبدأ مکان، یعنی $x = ۰$ پس:

$$۰ = ۳t^۲ - ۶t + ۳ \Rightarrow ۰ = ۳(t^۲ - ۲t + ۱) = ۰ \Rightarrow t^۲ - ۲t + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (t - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = ۱s$$

۱۰۷ گزینه ۲

مسیر و حرکت متحرک مطابق شکل زیر است.

باتوجه‌به مسیر حرکت $\ell = ۲\,|x| + ۸\,m$ و $|\Delta x| = ۸\,m$ است؛ بنابراین:

$$\ell = ۵\,|\Delta x| \Rightarrow ۲\,|x| + ۸ = ۵ \times ۸ \Rightarrow |x| = ۱۶\,m$$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

www.alirezaafshar.org

۱۰۸ گزینه ۲

در بازهٔ $(۰, ۲\,s)$ نمودار سرعت- زمان به‌صورت یک خط راست با معادلهٔ $v = t + ۲$ است. سرعت متحرک در دو لحظهٔ $t = ۱s$ و $t = ۱/۵\,s$ روی این خط برابر است با:

$$\begin{cases} v(t = ۱s) = ۱ + ۲ = ۳\,m/s \\ v(t = ۱/۵\,s) = ۱/۵ + ۲ = ۳/۵\,m/s \end{cases}$$

معادلهٔ شیب خط مماس بر نمودار را در لحظهٔ $t = ۳\,s$ به دست می‌آوریم تا شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۳\,s$ به دست بیاید.

$$\text{شیب خط مماس} = \frac{v(t = ۴\,s) - v(t = ۱/۵\,s)}{۴ - ۱/۵} = \frac{۰ - ۳/۵}{۲/۵} = \frac{-۷}{۵} = -۱/۴\,m/s^۲$$

شیب خط مماس همان شتاب لحظه‌ای متحرک در $t = ۳\,s$ است. با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان در حرکت با شتاب ثابت سرعت متحرک در $t = ۳\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$v = -۱/۴t + v' \xrightarrow[v=۰]{t=۴\,s} ۰ = -۱/۴(۴) + v'$$
$$\Rightarrow v' = ۵/۶\,m/s \Rightarrow v = -۱/۴t + ۵/۶$$

حالا $t = ۳\,s$ را در معادلهٔ سرعت- زمان خط قرار می‌دهیم تا سرعت در $t = ۳\,s$ به دست آید.

$$v(t = ۳\,s) = -۱/۴t + ۵/۶ = -۱/۴(۳) + ۵/۶ = +۱/۴\,m/s$$

حالا شتاب متوسط در بازهٔ $(۱s, ۳\,s)$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av(۱s,۳\,s)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t = ۳\,s) - v(t = ۱s)}{۳ - ۱} = \frac{۱/۴ - ۳}{۲} = -۰/۸\,m/s^۲$$

حالا نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_{av(۱s,۳\,s)}}{a(t = ۳\,s)} = \frac{-۰/۸}{-۱/۴} = \frac{۴}{۷}$$

۱۰۹ گزینه ۴

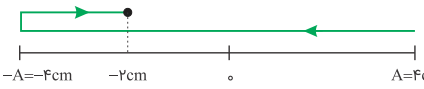
می‌دانیم که بیشینهٔ تندی حرکت جسمی که از یک ارتفاع رها می‌شود، همان تندی حدی است که جسم در حالتی به این تندی می‌رسد که نیروی مقاومت شاره (مقاومت هوا) با نیروی وزن جسم برابر شود. بنابراین داریم:

$$f_D = mg \xrightarrow[m=۵\,kg\ ,\ g=۹/۸\,m/s^۲]{f_D=\frac{v^۲}{۴}} \frac{v^۲}{۴} = \underbrace{۵ \times ۹/۸}_{۴۹}$$

$$\Rightarrow v^۲ = ۴۹ \times ۴ \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} v = ۷ \times ۲ = ۱۴\,m/s$$

۱۱۰ گزینه ۲

ابتدا دورهٔ نوسان را به دست می‌آوریم و معادلهٔ حرکت نوسانگر را می‌نویسیم. باتوجه‌به نمودار زمان $\frac{۱}{۳}$ برحسب دورهٔ نوسان برابر است با:



$$\Delta t = \frac{T}{۲} + \frac{T}{۶} = \frac{۴T}{۶} = \frac{۲T}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۲T}{۳} \Rightarrow T = \frac{۱}{۲}\,(s)$$

معادلهٔ مکان - زمان نوسانگر را می‌نویسیم:

$$x = A\cos(\frac{۲\pi}{T}t) = ۰/۰۴\cos(۴\pi t)$$

مکان متحرک در $t = \frac{۳}{۱۶}\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$x = ۰/۰۴\cos(۴\pi \times \frac{۳}{۱۶}) = ۰/۰۴\cos(\frac{۳\pi}{۴}) = -۰/۰۲\sqrt{۲}$$

متأسفانه همانطورکه می‌دانیم چون $x = ۰$ و $x = \pm A$ است در این مکان ما توانایی به دست آوردن انرژی جنبشی را نداریم. اما راه‌حل آن به‌صورت زیر است:

$$\frac{K}{E} = (\frac{v}{v_m})^۲ = (\frac{A^۲ - x^۲}{A^۲}) = (\frac{۴^۲ - (۲\sqrt{۲})^۲}{۴^۲}) \Rightarrow \frac{K}{E} = \frac{۱}{۲}$$

۱۱۱ گزینه ۲

$$\lambda = ۴ \times ۵ = ۲۰\,cm$$
$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{۳ \times ۱۰^۸}{۰/۲} = ۱/۵ \times ۱۰^۹\,Hz = ۱/۵\,GHz$$

۱۱۲ گزینه ۲

ابتدا فاصلهٔ $s_۲$ تا O را محاسبه می‌کنیم:

$$x = vt \Rightarrow x = ۳۴۰(\frac{۱}{۳۴۰}) = ۱m$$

یعنی فاصلهٔ $s_۲$ تا شخص، ۱ متر بیشتر از $s_۱$ تا شخص است؛ و برابر با $۱۳\,m$ می‌باشد. باتوجه‌به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$۱۳^۲ = ۱۲^۲ + x^۲ \Rightarrow x = ۵\,m$$

پس فاصلهٔ بین $s_۱$ و $s_۲$، ۵ متر است؛ بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۱۱۳ گزینه ۲

گام اول

الف) نیروی کشش تاری $۱۲۸N \leftarrow F_۱ = ۱۲۸N$

ب) سرعت انتشار امواج عرضی در آن $۱۶۰m/s \leftarrow v_۱ = ۱۶۰m/s$

ج) نیروی کشش تار را چند نیوتن افزایش دهیم $\leftarrow \Delta F = ?$

د) تا سرعت انتشار موج در آن $۲۰۰m/s$ شود $\leftarrow v_۲ = ۲۰۰m/s$

گام دوم

با استفاده از رابطهٔ $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$، نسبت $\frac{v_۲}{v_۱}$ را نوشته، نیروی ثانویه را به دست آورده و درنهایت میزان افزایش نیرو (ΔF) را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{v_۲}{v_۱} = \frac{\sqrt{\frac{F_۲}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F_۱}{\mu}}} \Rightarrow \frac{۲۰۰}{۱۶۰} = \sqrt{\frac{F_۲}{۱۲۸}} \Rightarrow F_۲ = ۲۰۰N$$

$$\Delta F = F_۲ - F_۱ = ۲۰۰ - ۱۲۸ = ۷۲N$$

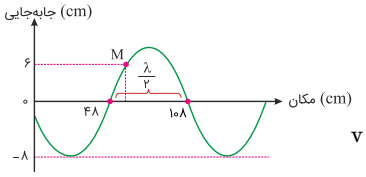
۱۱۴ گزینه ۲

شیب خط مماس بر منحنی نمودار سرعت- زمان معرف شتاب است. در این نمودار شیب خط مماس بر منحنی منفی بوده ولی اندازهٔ آن ثابت است. درنتیجه، اندازهٔ نیروی وارد بر جسم نیز ثابت است.

۱۱۵ گزینه ۴

از روی نمودار نتیجه می‌گیریم که $\frac{\lambda}{۲} = ۶۰\,cm$؛ پس $\lambda = ۱۲۰\,cm$ است.

اکنون بسامد موج را محاسبه می‌کنیم:



$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{۳۰۰}{۱/۲} = ۲۵۰\,Hz$$

حال دورهٔ تناوب نوسان ذرات را به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{۱}{f} = \frac{۱}{۲۵۰} = ۴ \times ۱۰^{-۳}\,s$$

تعداد نوسان ذرات را در مدت $۰/۳\,s$ محاسبه می‌کنیم:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{۰/۳}{۴ \times ۱۰^{-۳}} = ۷۵$$

ذره در هر نوسان مسافتی به‌اندازهٔ $۴A$ را می‌پیماید؛ پس مسافت طی‌شده در این مدت برابر است با:

$$l = ۷۵(۴A) = ۷۵ \times ۴ \times ۸ \times ۱۰^{-۲} = ۲۴\,m$$

۱۱۶ گزینه ۴

$$f_A = ۱/۸ f_B \Rightarrow \frac{c}{\lambda_A} = ۱/۸ \frac{c}{\lambda_B} \Rightarrow \lambda_B = ۱/۸ \lambda_A$$
$$\lambda_B - \lambda_A = ۴۰۰۰\,A^\circ \Rightarrow ۱/۸\lambda_A - \lambda_A = ۴۰۰۰ \Rightarrow ۰/۸\lambda_A = ۴۰۰۰$$

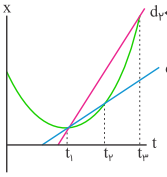
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_A = ۵۰۰۰\,A^\circ \\ \lambda_B = ۹۰۰۰\,A^\circ \end{cases}$$

طول‌موج طیف مرئی در خلأ بین $۴۰۰۰\,A^\circ$ تا $۷۰۰۰\,A^\circ$ است پس موج A در ناحیهٔ مرئی طیف واقع‌شده و موج B در ناحیهٔ فروسرخ واقع شده است.

۱۱۷ گزینه ۱

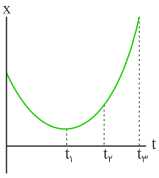
به بررسی هریک از موارد می‌پردازیم:

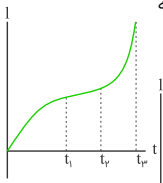
الف) نادرست؛ بزرگی سرعت متوسط در نمودار مکان - زمان برابر شیب خط واصل بین دو لحظه است. باتوجه‌به شکل زیر شیب خط واصل در بازهٔ $(t_۱, t_۲)$ کمتر از بازهٔ $(t_۱, t_۳)$ است.



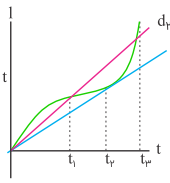
$$d_۲ \text{شیب} > d_۱ \text{شیب} \Rightarrow v_{av(t_۱,t_۳)} > v_{av(t_۱,t_۲)}$$

ب) نادرست؛ نمودار مکان - زمان را به نمودار مسافت - زمان تبدیل می‌کنیم. برای این کار هنگامی‌که مکان در حال کاهش است، نمودار را نسبت به راستای افقی قرینه می‌کنیم.



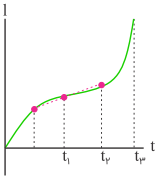


در نمودار مسافت- زمان شیب خط واصل بین دو لحظه برابر تندی متوسط بین آن دو لحظه است. باتوجه‌به نمودار، تندی متوسط بین $(۰, t_۳)$ بزرگ‌تر از تندی متوسط بین $(۰, t_۲)$ است.



$$\begin{cases} S_{av(۰,t_۲)} = d_۱ \text{شیب} \\ S_{av(۰,t_۳)} = d_۲ \text{شیب} \end{cases} \Rightarrow d_۲ \text{شیب} > d_۱ \text{شیب} \Rightarrow S_{av(۰,t_۳)} > S_{av}$$

ت) درست: کمترین تندی متوسط در بازهٔ ۲ ثانیه‌ای برابر کمترین شیب خط بین دو لحظه به فاصلهٔ زمانی ۲ ثانیه است. کمترین شیب خط بین دو لحظه هنگامی رخ می‌دهد که $t_۱$ در وسط این بازهٔ زمانی ۲ ثانیه باشد پس مورد (ت) درست است.



۱۱۸ گزینه ۳

$$\text{جابه‌جایی قله} = \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۳\frac{\lambda}{۴} - \frac{\lambda}{۴} = \frac{\lambda}{۲}$$

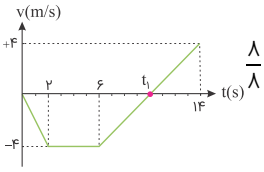
$$\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \frac{\frac{\lambda}{۲}}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{۲} \xrightarrow{T=\frac{۱}{f}} \Delta t = \frac{۱}{۲f} = \frac{۱}{۱۰۰}\,s$$

۱۱۹ گزینه ۳

در بازه زمانی‌ای که سرعت متحرک منفی است متحرک خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

بنابراین مطابق شکل مشاهده می‌شود که در بازه زمانی ۰ تا $t_۱$ سرعت متحرک منفی و در خلاف جهت محور x در حال حرکت است.

برای یافتن $t_۱$ با توجه به ثابت بودن شیب نمودار در بازه ۶ تا ۱۴ ثانیه داریم:



$$\frac{\lambda}{\lambda} = \frac{۴}{(t_۱ - ۶)} \Rightarrow t_۱ = ۱۰\,s$$

۱۲۰ گزینه ۱

طبق رابطهٔ تراز شدت صوت داریم:

$$\beta = (۱۰dB)\log\frac{I}{I_۰} = (۱۰dB)\log(\frac{۱۰^{-۲}}{۱۰^{-۱۲}}) = (۱۰dB)\log ۱۰^{۱۰}$$
$$= (۱۰dB)۱۰\log ۱۰ = ۱۰۰dB$$

www.alirezaafshar.org

۱۲۱ گزینه ۴

گزینهٔ ۱: افزایش تقاضا برای باتری‌های لیتیمی، سبب شد این فلز جایگاه ممتازی در تأمین انرژی جهان پیدا کند.
گزینهٔ ۲: نادرست. پسماندهای سمی مانع از استفاده از لیتیم نشده است.
گزینهٔ ۳: نادرست. دسته‌ای دیگر از باتری‌های لیتیمی آن‌هایی هستند که در تلفن و رایانه همراه به‌کار می‌روند و می‌توان آن‌ها را بارها شارژ کرد. (همهٔ باتری‌های لیتیمی قابلیت شارژ ندارند)

۱۲۲ گزینه ۳

اول pH محلول اولیه را حساب می‌کنیم:
بین تعداد یون‌ها و OH^- نسبت‌های $\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}$ را تشکیل می‌دهیم تا غلظت $[OH^-]$ محاسبه شود.

$NaOH \rightarrow Na^+ + OH^- \simeq ۲$ یون
$۱OH^- \sim ۲$ یون

$$\frac{M \times V_{(mL)}}{۱۰۰۰ \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد یون‌ها}}{۶/۲ \times ۱۰^{۲۳} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{M \times ۲۰۰۰}{۱۰۰۰ \times ۱} = \frac{۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳}}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \times ۱۰} \Rightarrow M = \frac{۲}{۲۰} = ۰/۱ mol.L^{-۱}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow [OH^-] = ۰/۱ \Rightarrow pOH = -\log ۰/۱ = ۱ \Rightarrow pH = ۱۳$$

حالا pH محلول باید از ۱۳ به ۱۲/۳ برسد؛ یعنی: $\Delta pH = ۰/۷$
- می‌دانیم اگر حجم محلول x برابر شود pH اسید یا باز قوی به‌اندازهٔ $\log x$ تغییر می‌کند.

$$\log x = ۰/۷ \rightarrow x = ۱۰^{۰/۷} = ۱۰^{\log ۵} = ۵$$

پس حجم محلول باید ۵ برابر شود؛ یعنی از ۲ لیتر به ۱۰ لیتر برسد، بنابراین باید ۸ لیتر دیگر آب به آن اضافه کنیم.

۱۲۳ گزینه ۱

چون E° کلر بزرگ‌تر از E° برم است در سلول گالوانی تشکیل‌شده بین این دو نیم‌سلول، نیم‌سلول کلر کاتد و نیم‌سلول برم آند است پس جهت جریان الکترود در مدار بیرونی سلول گالوانی بین آن‌ها از نیم‌سلول آند (برم) به نیم‌سلول کاتدی (کلر) است.

قدرت کاهندگی : $Mg > Fe > Br^- > Cl^-$

نمک سدیم کلرید حاوی یون‌های Cl^- و Na^+ است. Na^+ یک اکسنده بسیار ضعیف بوده و نمی‌تواند از Fe الکترون بگیرد. و واکنشی بین آن‌ها رخ نمی‌دهد پس می‌توان محلول سدیم کلرید را در ظرف آهنی نگهداری کرد.
هم Br^- یک کاهنده است و هم Fe یک کاهنده می‌باشد. و E° کلر $(Cl_۲)$ بزرگ‌تر از هر دوی آن‌ها است پس می‌تواند هر دوی آن‌ها را اکسید کند.

۱۲۴ گزینه ۲

بررسی پرسش‌ها:
الف)

$$\begin{array}{ccccc} HA(aq) & \rightleftarrows & H^+(aq) & + & A^-(aq) \\ a-x & & x & & x \end{array} \quad \text{تعداد مول تعادلی}$$

$$\Rightarrow (a-x) + x + x = ۱/۰۲۴a \Rightarrow a + x = ۱/۰۲۴a \Rightarrow x = ۰/۰۲۴a$$

$$\text{درصد یونش} = \frac{\text{تعداد مول‌های یونش یافته}}{\text{تعداد کل مول‌های حل‌شده}} \times ۱۰۰ = \frac{۰/۰۲۴a}{a} \times ۱۰۰ = \%۲/۴$$

ب) تنها عامل مؤثر بر ثابت تعادل دما است و با تغییر غلظت مواد ثابت تعادل تغییر نمی‌کند.
پ) pH خون انسان برخلاف آب گازدار بیشتر از ۷ است. (pH آب گازدار کمتر از ۷ و دارای خاصیت اسیدی است)

۱۲۵ گزینه ۳

دمای مخلوط در ظرف (II) افزایش بیشتری خواهد داشت که نشان می‌دهد تمایل فلز روی برای از دست دادن الکترون بیشتر است و کاهندهٔ قوی‌تری است. در ضمن توجه نمایید که هیچ‌کدام از فلزها (در اینجا فلزهای روی و آهن) اکسنده نیستند.

www.alirezaafshar.org

۱۲۶ گزینه ۱

گام ۱: به دست آوردن غلظت مولی KOH:

$$pH = ۱۰ \Rightarrow [OH^-] = M_{KOH} = ۱۰^{-۴}\ mol.L^{-۱}$$

گام ۲: محاسبهٔ مقدار KOH لازم:

$$\text{ناخالص } g\ KOH = ۰/۳\ L \text{ محلول} \times \frac{۱۰^{-۴}\ mol\ KOH}{۱\ L \text{ محلول}} \times \frac{۵۶\ g\ KOH}{۱\ mol\ KOH} \times \frac{۱۰۰\ g \text{ ناخالص } KOH}{۸۰\ g \text{ خالص } KOH} = ۲/۱ \times ۱۰^{-۳}\ g \text{ ناخالص } KOH$$

۱۲۷ گزینه ۴

الف) اتیلن گلیکول، اوره و نمک خوراکی در آب حل می‌شوند ولی عامل انحلال در هر سه آن‌ها وجود گروه هیدروکسیل نمی‌باشد.

ب) هگزان یک حلال ناقطبی است.

ت) روغن زیتون فاقد تعداد زیادی گروه هیدروکسیل بوده و یک مولکول ناقطبی (گشتاور دوقطبی بسیار اندک) محسوب می‌شود و بلعکس قندهای موجود در عسل است.

۱۲۸ گزینه ۳

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. پاک‌کنندهٔ غیرصابونی در آب سخت با یون‌های $Mg^{۲+}$ و $Ca^{۲+}$ رسوب نمی‌کند، پس لکهٔ سفید بر جای نمی‌ماند.

گزینهٔ ۲: نادرست. برای جدا کردن لکهٔ چربی از روی سطح، چربی به بخش هیدروکربنی که قسمت ناقطبی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی است، می‌چسبد.

گزینهٔ ۴: نادرست. تعداد عناصر سازندهٔ پاک‌کننده‌های غیرصابونی برابر ۵ (C، H، O، S و Na) درحالی‌که تعداد عناصر موجود در پاک‌کننده‌های صابونی جامد برابر ۴ (C، H، O و Na) است.

۱۲۹ گزینه ۳

گاز هیدروژن فلوئورید، اسید آرنیوس است، زیرا سبب افزایش غلظت H^+ در آب می‌شود. همچنین در دمای ثابت با افزودن این ماده به آب، برای برقرار ماندن رابطهٔ "مقدار ثابت $= [OH^-][H^+]$" باید غلظت یون هیدروکسید (OH^-) کم شود.

۱۳۰ گزینه ۴

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. واکنش به‌صورت زیر است:

$$\text{مخلوط } Al \text{ و } NaOH + \text{آب} \rightarrow \text{گاز هیدروژن} + \text{فرآورده‌های دیگر}$$

گزینهٔ ۲: نادرست. برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک به آن آهک (CaO) اضافه می‌کنند نه سنگ آهک $(CaCO_۳)$.

گزینهٔ ۳: نادرست. پیش از شناخت اسیدها و بازها، شیمی‌دان‌ها افزون بر ویژگی‌های اسیدها و بازها با برخی واکنش‌های آن‌ها نیز آشنا بودند.

۱۳۱ گزینه ۳

$$MnO_۴^- + ۸H^+ + ۵e^- \rightarrow Mn^{۲+} + ۴H_۲O$$

$$۲H_۲O + O_۲ + ۴e^- \rightarrow ۴OH^-$$

$$O_۳ + ۲H^+ + ۲e^- \rightarrow O_۲ + H_۲O$$

$$۲H_۲O + ۲e^- \rightarrow H_۲ + ۲OH^-$$

۱۳۲ گزینه ۱

معادله‌های موازنه‌شده به‌صورت زیر است:

$$۳Ca^{۲+}(aq) + ۲Na_۳PO_۴(aq) \rightarrow Ca_۳(PO_۴)_۲(s) + ۶Na^+(aq)$$

$$۳Mg^{۲+}(aq) + ۲Na_۳PO_۴(aq) \rightarrow Mg_۳(PO_۴)_۲(s) + ۶Na^+(aq)$$

$$?\ mol\ Na_۳PO_۴ = \frac{۱۲۰\ g\ Ca^{۲+}}{۱۰^۶\ g \text{ آب}} \times \frac{۱\ g \text{ آب}}{۱\ mL \text{ آب}} \times ۱۰۰۰\ mL \times \frac{۱\ mol\ Ca^{۲+}}{۴۰\ g\ Ca^{۲+}} \times \frac{۲\ mol\ Na_۳PO_۴}{۳\ mol\ Ca^{۲+}} = ۲ \times ۱۰^{-۳}\ mol\ Na_۳PO_۴$$

$$?\ mol\ Na_۳PO_۴ = \frac{۳۶۰\ g\ Mg^{۲+}}{۱۰^۶\ g \text{ آب}} \times \frac{۱\ g \text{ آب}}{۱\ mL \text{ آب}} \times ۱۰۰۰\ mL \times \frac{۱\ mol\ Mg^{۲+}}{۲۴\ g\ Mg^{۲+}} \times \frac{۲\ mol\ Na_۳PO_۴}{۳\ mol\ Mg^{۲+}} = ۱۰ \times ۱۰^{-۳}\ mol\ Na_۳PO_۴$$

پس مجموع مول سدیم فسفات موردنیاز برابر است با:

$$(۲ \times ۱۰^{-۳}) + (۱۰ \times ۱۰^{-۳}) = ۱۲ \times ۱۰^{-۳}\ mol$$

www.alirezaafshar.org

۱۳۳ گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. آلومینیم در یک سلول الکترولیتی به دست می‌آید.

گزینهٔ ۲: درست. آند و کاتد هر دو از جنس گرافیت هستند.

گزینهٔ ۳: نادرست. آلومینیم مذاب از پایین سلول خارج می‌شود.

گزینهٔ ۴: نادرست. فلز آلومینیم تجدیدناپذیر است.

۱۳۴ گزینه ۲

$$[OH^-] \times [H^+] = ۱۰^{-۱۴} \ , \ [OH^-] = ۱۰^{۱۲}[H^+] \Rightarrow ۱۰^{۱۲} \times [H^+]^۲ = ۱۰^{-۱۴}$$
$$\Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱۳} \ , \ [OH^-] = ۱۰^{-۱}$$
$$[OH^-] = ۰/۱ mol.L^{-۱} \Rightarrow ۰/۱ = \frac{n}{۵۰} \Rightarrow n = ۵ mol\, OH^-$$

KOH یک باز قوی است، پس به ازای انحلال یک مول از آن یک مول OH^- ایجاد می‌شود. حالا که ۵ مول OH^- داریم؛ پس درواقع ۵ مول KOH خالص داریم که جرمی معادل ۲۸۰ گرم خواهد داشت، پس:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{۲۸۰}{۳۵۰} \times ۱۰۰ = \%۸۰$$

۱۳۵ گزینه ۳

بررسی سایر گزینه‌ها:

$$\text{گزینهٔ ۱}: \begin{cases} \underline{N}H_۴^+ : x + ۴ = ۱ \Rightarrow x = -۳ \\ \underline{P}Br_۳ : x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$
$$\text{گزینهٔ ۲}: \begin{cases} \underline{S}O_۳^{۲-} : x - ۶ = -۲ \Rightarrow x = ۴ \\ \underline{Mn}O_۴^{۲-} : x - ۸ = -۲ \Rightarrow x = ۶ \end{cases}$$
$$\text{گزینهٔ ۳}: \begin{cases} \underline{Mn}O_۴^{۲-} : x - ۸ = -۲ \Rightarrow x = ۶ \\ K_۲\underline{Cr}_۲O_۷ : ۲ + ۲x - ۱۴ = ۰ \Rightarrow x = ۶ \end{cases}$$
$$\text{گزینهٔ ۴}: \begin{cases} \underline{Cl}O_۲^{۲-} : x - ۴ = -۲ \Rightarrow x = ۲ \\ H\underline{N}O_۳ : ۱ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۵ \end{cases}$$

۱۳۶ گزینه ۱

غلظت یون هیدرونیوم در اسید معده حدوداً برابر $۰/۰۳ mol.L^{-۱}$ می‌باشد که pH آن برابر است با:

$$pH = -\log[H^+] = -\log ۰/۰۳ = ۲ - \log ۳ = ۱/۵$$

۱۳۷ گزینه ۴

پتانسیل استاندارد روی منفی‌تر از نقره است؛ بنابراین روی آند و نقره کاتد است، پس روی اکسایش و نقره کاهش می‌یابد.

$$\text{نیم‌واکنش اکسایش} : Zn(s) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + ۲e^-$$
$$\text{نیم‌واکنش کاهش} : ۲ \times (Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s))$$
$$\text{واکنش کلی} : ۲Ag^+(aq) + Zn(s) \rightarrow ۲Ag(s) + Zn^{۲+}(aq)$$

$$\text{تولید نقره } ?\,g = ۰/۱ mol\, Zn \times \frac{۲ mol\, Ag}{۱ mol\, Zn} \times \frac{۱۰۸ g\, Ag}{۱ mol\, Ag} = \text{تولید نقره } ۲۱/۶ g$$

۱۳۸ گزینه ۳

این عنصر دارای چهار لایه و لایهٔ سوم آن دارای ۱۳ الکترون است؛ بنابراین آرایش الکترونی زیر را می‌توان به آن نسبت داد.

$$_{۲۵}A : ۱s^۲\ ۲s^۲۲p^۶\ ۳s^۲۳p^۶۳d^۵\ ۴s^۲$$

بررسی عبارت‌ها:

- عبارت اول نادرست است. این عنصر واسطه و در گروه هفتم جدول دوره‌ای قرار دارد.
- عبارت دوم درست است. برخی از ترکیب‌های عنصرهای واسطه رنگی هستند.
- عبارت سوم درست است. در عنصرهای واسطه از گروه سوم تا هفتم، بالاترین عدد اکسایش فلز در ترکیب‌ها برابر شمارهٔ گروه فلز است.
- عبارت چهارم درست است. زیرلایه های $۳s$، $۳p$ و $۳d$ مربوط به لایهٔ سوم از الکترون اشغال شده‌اند.

www.alirezaafshar.org

۱۳۹ گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: مدل فضاپرکن داده‌شده مربوط به مولکول $C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$ است؛ لذا تفاوت جرم مولی آن با مولکول روغن زیتون، $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$، ۶ گرم بر مول است.

گزینه‌های ۲ و ۳: اسید چرب سازندهٔ این استر دارای فرمول مولکولی $C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲$ است که از واکنش یک مول از آن با ۳ مول آب حاصل می‌شود.

گزینهٔ ۴: در ساختار این استر، سه گروه عاملی $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-$ و ۳ پیوند دوگانه $C=O$ وجود دارد.

۱۴۰ گزینه ۲

HCl اسید قوی و HF اسید ضعیف است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) سرعت واکنش هیدروکلریک اسید بیشتر است، پس سریع‌تر پایان می‌یابد. (نادرست)

ب) سرعت واکنش هیدروکلریک اسید بیشتر بوده و در زمان یکسان گاز بیشتری تولید می‌کند. (درست)

پ) جرم منیزیم در ظرف a کمتر از ظرف b خواهد بود. (نادرست)

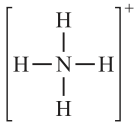
ت) HCl قوی‌تر بوده و هیدرونیوم بیشتری آزاد می‌کند. (درست)

۱۴۱ گزینه ۲

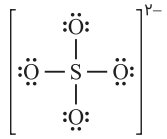
فرمول شیمیایی ترکیب‌ها: آمونیوم سولفات $(NH_۴)_۲SO_۴$، آمونیوم نیترات $NH_۴NO_۳$

ساختار لوویس یون‌ها:

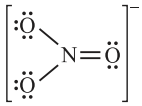
یون آمونیوم ($NH_۴^+$):



یون سولفات ($SO_۴^{۲-}$):



یون نیترات ($NO_۳^-$):



بررسی عبارت‌ها:

الف) عدد اکسایش اتم مرکزی در یون سولفات و یون نیترات یکسان نیست.

$SO_۴^{۲-}$ (عدد اکسایش S) $-۸=-۲ \Rightarrow$ عدد اکسایش S $=+۶$

$NO_۳^-$ (عدد اکسایش N) $-۶=-۱ \Rightarrow$ عدد اکسایش N $=+۵$

ب) شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول شیمیایی آمونیوم سولفات برابر ۸ و در آمونیوم نیترات برابر ۴ است.

پ) شمار اتم‌های نیتروژن در فرمول شیمیایی آمونیوم سولفات برابر ۲ و در آمونیوم نیترات هم برابر ۲ است.

ت) شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در یون سولفات برابر ۴ و در یون نیترات هم برابر ۴ است.

www.alirezaafshar.org

۱۴۲ گزینه ۳

در بازهای قوی، درصد یونش برابر ۱۰۰ است ($\alpha = ۱$)؛ بنابراین طبق فرض سوال، درصد یونش اسید HX برابر ۵۰ درصد ($\alpha = ۰/۵$) خواهد بود.

$$[H^+]_{HX} = M\alpha = ۱ \times ۰/۵ = ۰/۵$$
$$pH = -\log(۵ \times ۱۰^{-۱}) = -[\log ۵ + \log ۱۰^{-۱}] = -(۰/۷ - ۱) = ۰/۳$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: در اسیدهای ضعیف رابطهٔ $\alpha = \sqrt{\frac{k_a}{M}}$ برقرار است. باتوجه‌به این رابطه، با افزایش غلظت مولی اسید در آب، درجهٔ یونش اسید کاهش می‌یابد و برعکس.

گزینهٔ ۲: توجه داشته باشید که $[OH^-]$ و $[H^+]$ در محلول یک اسید ضعیف یا یک باز ضعیف نمی‌تواند برابر باشد، به‌عبارتی در محلول یک باز، $[OH^-]$ همواره از $[H^+]$ بیشتر است و در محلول یک اسید، $[H^+]$ همواره بیشتر از $[OH^-]$ می‌باشد؛ اما $[H^+]$ در محلول یک اسید ضعیف با $[OH^-]$ در محلول یک باز ضعیف می‌تواند برابر باشد؛ به مثال زیر توجه کنید:

$pH = ۴$ در اسیدی با : $[H^+] = ۱۰^{-۴}$

$pH = ۱۰$ در بازی با : $[H^+] = ۱۰^{-۱۰} \xrightarrow{[H^+] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴}} [OH^-] = ۱۰^{-۴}$

گزینهٔ ۴: pH اسیدهای قوی با غلظت بیش از یک مول بر لیتر، عدد منفی خواهد بود. مطابق فرض سوال، برای محلول ۳ مولار یک اسید، pH در گسترهٔ صفر تا ۷ قرار دارد. این به این معنی است که درجهٔ یونش این اسید قطعاً کوچک‌تر از یک می‌باشد ($\alpha < ۱$). درحالی‌که هیدروبرومیک اسید، یک اسید قوی بوده و درجهٔ یونش آن برابر یک است.

۱۴۳ گزینه ۳

ابتدا عدد اکسایش فسفر را در ترکیب‌های داده شده تعیین می‌کنیم:

$$P_۴ \Rightarrow x = ۰$$
$$P_۴O_{۱۰} \Rightarrow ۴x + ۱۰(-۲) = ۰ \Rightarrow x = +۵$$
$$PH_۳ \Rightarrow x + ۳(+۱) = ۰ \Rightarrow x = -۳$$
$$H_۳PO_۲ \Rightarrow ۳(+۱) + x + ۲(-۲) = ۰ \Rightarrow x = +۱$$
$$PF_۳ \Rightarrow x + ۳(-۱) = ۰ \Rightarrow x = +۳$$

عنصرهایی که مانند فسفر دارای چندین عدد اکسایش هستند در بالاترین حالت اکسایش خود فقط اکسنده و در پایین‌ترین حالت اکساش خود فقط کاهنده هستند.
بالاترین عدد اکسایش فسفر (+۵) و پایین‌ترین عدد اکسایش فسفر (-۳) است.

۱۴۴ گزینه ۳

در شکل داده‌شده B نقش آند و C نقش کاتد را دارد.

بررسی عبارت‌ها:

الف) درست. حرکت الکترون در خارج از الکترولیت از آند به‌سمت کاتد است.

ب) نادرست. آب خالص رسانایی الکتریکی کمی دارد، ازاین‌رو برای برقکافت آن باید اندکی الکترولیت به آن افزوده شود. لذا A محلول رقیق الکترولیت است.

پ) درست.

$$\text{نیم‌واکنش کاتدی} : ۴H_۲O(l) + ۴e^- \rightarrow ۴OH^-(aq) + ۲H_۲(g)$$
$$\underline{\text{نیم‌واکنش آندی} : ۲H_۲O(l) \rightarrow O_۲(g) + ۴H^+(aq) + ۴e^-}$$
$$\text{واکنش کلی برقکافت آب} : ۲H_۲O(l) \rightarrow O_۲(g) + ۲H_۲(g)$$

ت) درست. باتوجه‌به بررسی عبارت "پ" درست است.

۱۴۵ گزینه ۳

در فرآیند زنگ زدن آهن، عدد اکسایش اتم‌های هیدروژن و اکسیژن مولکول آب تغییر نمی‌کند بنابراین آب نمی‌تواند نقش اکسنده و کاهنده داشته باشد. (رد گزینه ۱، ۲ و ۴)
مطابق معادله واکنش کلی زنگ زدن آهن، آب یک واکنش‌دهنده است. ضمناً ازطریق آب، یون‌های مثبت و منفی در سطح فلز جابه‌جا می‌شوند بنابراین آب نقش الکترولیت نیز دارد.

۱۴۶ گزینه ۱

زنجیرهٔ آلکیل با فرمول عمومی $C_nH_{۲n+۱}$ را با R نمایش می‌دهند.

$$R - COOH \rightarrow C_{۱۶}H_{۳۳}COOH$$
$$۰/۰۱\,mol \times \frac{۳۴\,mol\,H}{۱\,mol\,\text{اسید}} \times \frac{N_A\,H}{۱\,mol\,H} = ۰/۳۴\,N_A$$

۱۴۷ گزینه ۲

$$\text{نیم‌واکنش اکسایش}: Mg(s) \rightarrow Mg^{2+}(aq) + 2e^-$$
$$\text{نیم‌واکنش کاهش}: Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s)$$
$$\text{واکنش کلی سلول}: Mg(s) + 2Ag^+(aq) \rightarrow Mg^{2+}(aq) + 2Ag(s)$$

باتوجه‌به واکنش کلی سلول اگر دو مول الکترون از طریق مدار بیرونی منتقل شود، یک مول منیزیم $(24g)$ حل شده و از جرم تیغهٔ آند کم می‌شود و دو مول نقره $(2 \times 108 = 216g)$ به تیغهٔ کاتد افزوده می‌شود؛ بنابراین با انتقال دو مول الکترون از طریق مدار بیرونی، $192g$ $(216 - 24 = 192g)$ به مجموع جرم دو تیغه افزوده می‌شود.

$$?\,mol\,e^- = 0/48\,g\ \text{افزایش جرم} \times \frac{2\,mol\,e^-}{192\,g\ \text{افزایش جرم}} = 0/005\,mol\,e^-$$

۱۴۸ گزینه ۲

معادلهٔ کلی فرآیند هال به‌صورت زیر است:

$$2Al_2O_3(s) + 3C(s) \rightarrow 4Al(s) + 3CO_2(g)$$

بنابراین میان Al_2O_3 و Al رابطهٔ استوکیومتری زیر برقرار است:

$$2Al_2O_3 \sim 4Al$$

$$\frac{153\,kg \times \frac{80}{100}}{2 \times 102\,g} = \frac{?\,kg}{4 \times 27\,g} \Rightarrow ? = 64/8$$

۱۴۹ گزینه ۲

انرژی تولیدشده بستگی به میزان الکترون تولیدشده در باتری (سلول گالوانی) دارد و میزان تولید الکترون بستگی به میزان مواد استفاده‌شده در باتری دارد. می‌توان با باتری‌های $Zn - Ag_2O$ با ظرفیت بیشتر از باتری‌های لیتیم ساخت و یا برعکس.

گزینهٔ ۱: درست است.

گزینهٔ ۳: به‌عنوان‌مثال برای تولید ۲ مول الکترون وزن Li و MnO_2 استفاده‌شده کمتر از Zn و Ag_2O خواهد بود.

گزینهٔ ۴: لیتیم کمترین پتانسیل کاهشی را داشته و Zn^{2+} می‌تواند آن را اکسید کند.

۱۵۰ گزینه ۲

مخلوط آب و روغن کلوئید نیست بلکه مخلوط آب و روغن و صابون تشکیل کلوئید می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: مطابق متن کتاب صحیح است.

گزینهٔ ۳: مخلوط‌های سوسپانسیون و کلوئید نور را پخش می‌کند ولی نور از محلول عبور می‌کند.

گزینهٔ ۴: دلیل پایداری ذرات کلوئید همنام بودن بارهای (مثبت یا منفی) سطحی آن‌ها است. هرچه این ذرات بزرگ‌تر باشند بار سطحی نیز بیشتر است.