

۱ دو کره همگن A و B دارای جرم‌های برابرند. کره A توپر و کره B توخالی است. اگر شعاع خارجی این دو کره باهم برابر و شعاع داخلی کره B، نصف شعاع خارجی آن باشد، چگالی کره A چندبرابر چگالی کره B است؟

$$\frac{7}{8} \quad (2)$$

$$\frac{8}{7} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

۲ در شکل زیر یک دماسنج دیجیتالی دمای محیط را نشان می‌دهد، دمای واقعی بابیان دقت برحسب درجه سلسیوس در چه محدوده‌ای است؟



$$20.08 + 0.005 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (1)$$

$$20.08 + 0.01 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (2)$$

$$20.080 + 0.005 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (3)$$

$$20.080 + 0.01 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (4)$$

۳ در کدام گزینه همه کمیت‌ها اصلی هستند؟

(۲) جرم، مسافت، زمان

(۱) جریان الکتریکی، دما، سرعت

(۴) دما، شدت روشنایی، جرم

(۳) شدت روشنایی، جریان الکتریکی، شتاب

۴ جرم یک کره کوچک به شعاع $R = 2 \times 10^{-2} \text{ cm}$ و با چگالی $1/5 \text{ g/cm}^3$ برحسب کیلوگرم چقدر است؟ ($\pi \simeq 3$)

$$72 \times 10^{-7} \quad (2)$$

$$48 \times 10^{-9} \quad (1)$$

$$48 \times 10^{-3} \quad (4)$$

$$24 \times 10^{-8} \quad (3)$$

۵ برای بیان از یک عدد با یکای مناسب استفاده می‌شود. برای بیان افزون بر یک عدد و یکا باید از جهت نیز استفاده کرد.

(۲) کمیت‌های نرده‌ای - کمیت‌های برداری

(۱) کمیت‌های فرعی - کمیت‌های اصلی

(۴) کمیت‌های برداری - کمیت‌های نرده‌ای

(۳) کمیت‌های برداری - کمیت‌های اصلی

۶ در ساخت یک قطعه آلیاژی از دو فلز A و B استفاده شده است. اگر چگالی این قطعه 10 g/cm^3 و حجم آن 50 cm^3 باشد، اگر تغییر حجمی در مجموع حجم‌ها رخ نداده باشد، چند گرم از فلز A در این آلیاژ به کار رفته است؟ ($\rho_B = 12 \text{ g/cm}^3$)

$$(\rho_A = 8 \text{ g/cm}^3)$$

$$150 \quad (2)$$

$$100 \quad (1)$$

$$250 \quad (4)$$

$$200 \quad (3)$$

۷

اگر فاصله زمین تا خورشید را 10^{11} m در نظر بگیریم، فاصله دو جرم آسمانی که $2/6 \times 10^5 \text{ Tm}$ می‌باشد چند واحد نجومی (AU) است؟

(۲) $1/3 \times 10^9$

(۱) $1/3 \times 10^6$

(۴) $1/3 \times 10^{16}$

(۳) $1/3 \times 10^{14}$

۸

به یک مخزن آب در هر ثانیه 100 cm^3 آب ریخته می‌شود. در هر شبانه‌روز چند مترمکعب آب به این مخزن ریخته می‌شود؟

(۲) $8/64$

(۱) $8/64 \times 10^{-2}$

(۴) $8/64 \times 10^2$

(۳) $8/64 \times 10^4$

۹

یک شناور با تندی ۱۴ گره در حال حرکت است. این شناور مسافت ۲۱۰ مایل را در چه مدتی برحسب ساعت طی می‌کند؟ (هر گره دریایی را برابر با ۵/۰ متر بر ثانیه و هر مایل دریایی را ۱۸۰۰ متر در نظر بگیرید)

(۲) ۳

(۱) ۱/۵

(۴) ۳۰

(۳) ۱۵

۱۰

جرم و حجم مکعب همگنی از جنس طلا به ترتیب 20 kg و 1000 cm^3 است. اگر حفره‌ای به حجم 200 cm^3 در داخل مکعب ایجاد کنیم، جرم باقی‌مانده چند کیلوگرم می‌شود؟

(۲) ۴

(۱) ۲

(۴) ۱۶

(۳) ۱۲

۱۱

روی صفحات خازنی که فضای بین صفحات آن از هوا پر شده باشد، و اندازه $3/0 \mu\text{C}$ بار الکتریکی ذخیره شده است. قطر صفحه‌های دایره‌ای شکل خازن 20 cm است. کار لازم برای این‌که فاصله بین صفحات خازن 36 mm افزایش یابد، چند میلی ژول است؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ و $k = 9$ و $\pi = 3$)

(۲) ۱۸

(۱) ۱۲

(۴) ۶

(۳) ۹

۱۲

بار الکتریکی کره‌ای فلزی به شعاع 5 cm برابر با $1/5 \text{ nC}$ است. بار الکتریکی موجود در هر سانتی‌متر مربع از سطح این کره چند پیکوکولن است؟

(۲) ۲

(۱) $0/002$

(۴) ۵

(۳) $0/005$

۱۳

خازنی به یک باتری که ولتاژ آن قابل تنظیم است، متصل است. اگر ولتاژ دو سر خازن از 5 V به 6 V برسد، انرژی خازن چند درصد افزایش می‌یابد؟

(۲) ۴۴

(۱) ۲۰

(۴) ۵۶

(۳) ۲۵

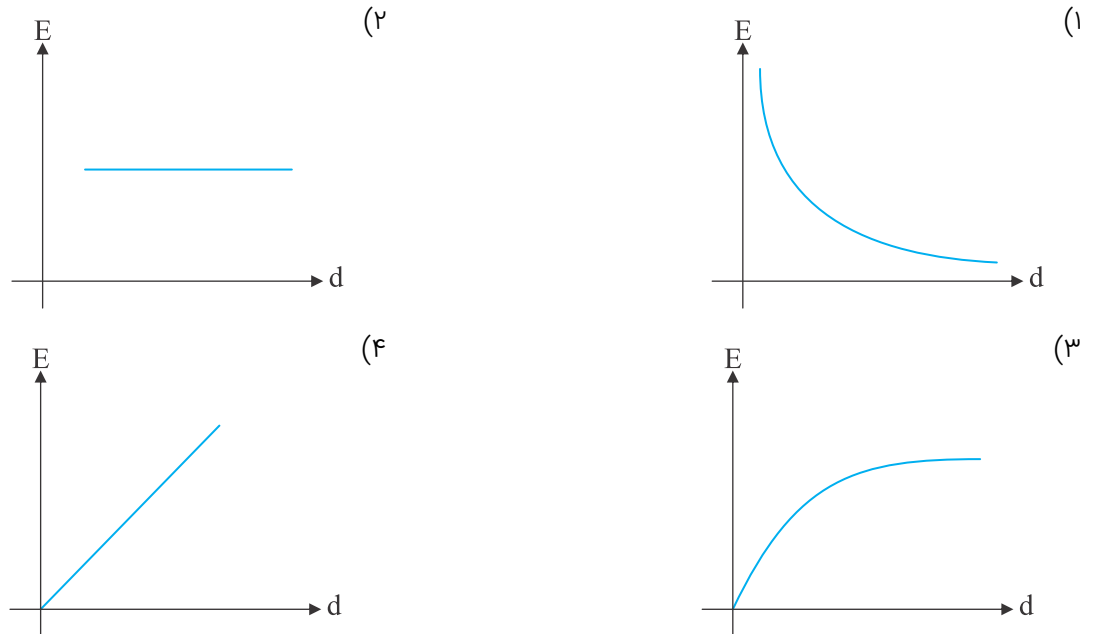
۱۴ یکای ضریب گذردهی الکتریکی در خلأ ϵ_0 در SI کدام است؟

۱۴

- (۱) (نیوتون * مربع ثانیه) بر مربع کولن
(۲) مربع کولن بر (نیوتون * مربع ثانیه)
(۳) (نیوتون * مربع متر) بر مربع کولن
(۴) مربع کولن بر (نیوتون * مربع متر)

۱۵ خازن تختی با دی‌الکتریک هوا را پس از باردارشدن، از مولد جدا کرده و فاصله دو صفحه‌اش را تغییر می‌دهیم. کدام گزینه تغییرات بزرگی میدان الکتریکی بین دو صفحه را برحسب فاصله دو صفحه، بهتر نشان می‌دهد؟

۱۵



۱۶ دو بار الکتریکی $q_1 = 16 \mu C$ و $q_2 = 9 \mu C$ در فاصله 28 cm از یکدیگر ثابت شده‌اند. فاصله نقاطی که در آن‌ها بر بار q_3 نیروهای هم اندازه از سمت دو بار q_1 و q_2 وارد می‌شود، چند cm است؟

۱۶

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۶
(۳) ۹۶
(۴) ۸۴

۱۷ دو کره فلزی مشابه روی پایه‌های عایق قرار دارند. بار الکتریکی یکی از کره‌ها $-4 \mu C$ و بار الکتریکی دیگری $+8 \mu C$ است. اگر دو کره را باهم تماس دهیم، برای رسیدن به تعادل الکتروستاتیک چند الکترون از یکی به دیگری منتقل می‌شود؟

۱۷

- (۱) $3/125 \times 10^{13}$
(۲) $3/75 \times 10^{14}$
(۳) $3/75 \times 10^{13}$
(۴) $3/125 \times 10^{14}$

۱۸ دو سر خازنی که ثابت دی‌الکتریک آن $K = 4$ است را به اختلاف پتانسیل ثابتی وصل کرده‌ایم. اگر دی‌الکتریک خازن را خارج کنیم، برای آنکه انرژی ذخیره‌شده در خازن تغییر نکند کدام تغییرات ذکر شده را می‌توان اعمال کرد؟

۱۸

- (۱) فاصله صفحات خازن را ۷۵ درصد کاهش دهیم.
(۲) مساحت صفحات خازن را چهار برابر کنیم.
(۳) فاصله صفحات خازن را نصف کرده و هم‌زمان مساحت صفحاتش را دو برابر کنیم.
(۴) هریک از سه گزینه قبل امکان‌پذیر است.

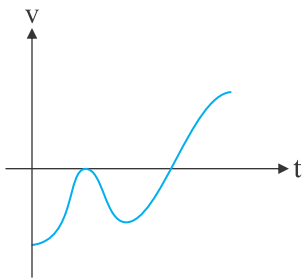
دو کرهٔ باردار $q_1 = -8 \mu C$ و $q_2 = +12 \mu C$ در فاصلهٔ r از یکدیگر واقع‌اند. به‌اندازه‌ای این دو را به هم نزدیک می‌کنیم تا القای الکتریکی صورت گیرد. پس از آن، این دو کره را به فاصله‌ای ۷۵٪ کمتر از فاصلهٔ اولیه باز می‌گردانیم. در این حالت نیرو چند درصد و به چه صورت نسبت به نیرو در حالت اولیه تغییر داشته است؟

- (۱) ۳۳٪ کاهش داشته است. (۲) ۶۶٪ افزایش داشته است.
(۳) ۶۶٪ کاهش داشته است. (۴) ۳۳٪ افزایش داشته است.

اگر فاصلهٔ صفحات یک خازن مسطح ۲۵ درصد افزایش یافته و دی‌الکتریک آن که دارای ثابت $K = 2$ است را از میان صفحات خازن خارج کنیم ظرفیت خازن چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

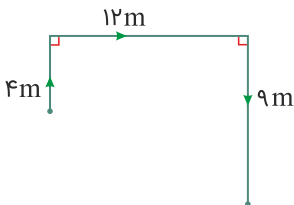
- (۱) ۶۰ درصد کاهش می‌یابد. (۲) ۶۰ درصد افزایش می‌یابد.
(۳) ۴۰ درصد کاهش می‌یابد. (۴) ۴۰ درصد افزایش می‌یابد.

در نمودار سرعت-زمان زیر که مربوط به متحرکی است که روی خط راست در حال حرکت است؛ اگر در بازهٔ زمانی نشان داده‌شده جهت حرکت جسم a بار تغییر کرده باشد و علامت شتاب متحرک b بار عوض شده باشد و نوع حرکت جسم از نظر تند شونده یا کند شونده بودن c بار تغییر کرده باشد حاصل عبارت $a + b + c$ برابر با کدام گزینه است؟



- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

متحرکی مسیری را مطابق شکل زیر طی می‌کند. نسبت اندازهٔ جابه‌جایی به مسافت طی‌شده توسط متحرک کدام است؟



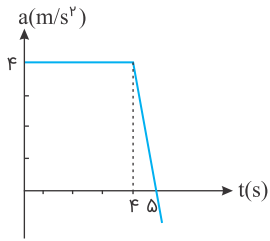
- (۱) $\frac{13}{17}$
(۲) $\frac{5}{17}$
(۳) $\frac{4}{17}$
(۴) $\frac{17}{25}$

کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) بردار سرعت متحرک در هر لحظه بر مسیر مماس است.
(۲) اگر مسیر حرکت متحرکی منحنی باشد، حرکت آن الزاماً شتاب‌دار است.
(۳) بردار شتاب متوسط همواره هم‌جهت با بردار سرعت است.
(۴) بردار سرعت متوسط همواره هم‌جهت با بردار جابجایی است.



نمودار شتاب- زمان متحرکی که روی خط راست از حال سکون شروع به حرکت کرده مطابق شکل زیر است. چند ثانیه پس از شروع حرکت، متحرک مجدداً متوقف می‌شود؟



(۱) ۲

(۲) ۱۶

(۳) ۸

(۴) گزینه‌های ۱ و ۳ صحیح است.

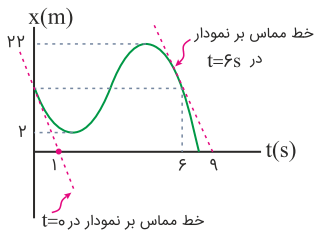
متحرکی مسیر مستقیم ۶۰ متری را با سرعت ثابت v طی می‌کند. اگر اندازه سرعت این متحرک 5 m/s بیشتر شود، 2 s زودتر به مقصد می‌رسد. این متحرک در مدت 4 s چه کسری از مسیر را می‌پیماید؟

(۲) $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{3}$

(۴) ۱

(۳) $\frac{2}{3}$

نمودار مکان- زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند به صورت شکل زیر است. اگر بردار شتاب متوسط در 6 ثانیه نخست حرکت $1/5 \text{ m/s}^2 +$ باشد، تندی متوسط متحرک در این بازه چند متر با ثانیه است؟

(۱) $\frac{13}{3}$

(۲) ۲۰

(۳) $15/6$ (۴) $\frac{20}{3}$

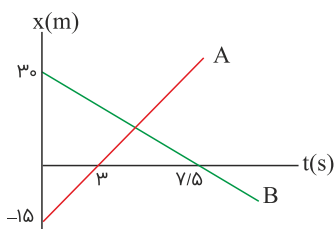
ذره‌ای از مکان $\vec{r}_A = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ بر خط راست در یک جهت به مکان $\vec{r}_B = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ می‌رود، سپس در مسیر خط راست از مکان $\vec{r}_B$ در یک جهت به مکان $\vec{r}_C = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ جابه‌جا می‌شود. مسافت طی‌شده توسط این ذره از ابتدا تا انتها چند متر است؟ (یکاهای SI هستند)

(۲) ۸

(۱) $\sqrt{34}$ (۴) $5\sqrt{10}$

(۳) ۵

نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B که بر مسیر مستقیم در حرکت هستند، مطابق شکل است. چند ثانیه پس از آنکه دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند، فاصله آن‌ها از هم به 36 m می‌رسد؟



(۱) ۴

(۲) ۹

(۳) ۳۶

(۴) ۴۱

دو متحرک A و B در فاصله یک کیلومتری از هم قرار دارند. اگر متحرک A با تندی ثابت v_A و متحرک B با تندی ثابت v_B در خلاف جهت هم حرکت کنند، پس از ۱۰s و اگر در جهت یکدیگر حرکت کنند، پس از ۲۰s به هم می‌رسند. به ترتیب v_B و v_A چند متر بر ثانیه است؟ (سرعت A بیشتر از سرعت B است)

(۲) ۷۵، ۲۵

(۱) ۵۰، ۵۰

(۴) ۶۰، ۴۰

(۳) ۲۵، ۷۵

معادله مکان- زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^2 - 5t + 6$ و معادله سرعت آن $v = 2t - 5$ است. متحرک در کدام لحظه در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است؟

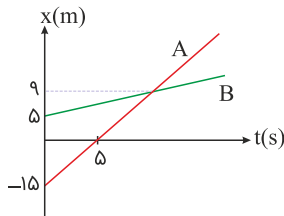
(۲) ۲/۲

(۱) ۱/۸

(۴) ۳/۳

(۳) ۲/۴

نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B به صورت شکل زیر است. ۲s پس از آنکه دو متحرک از کنار یکدیگر عبور کردند، متحرک B بر سرعت خود به مقدار $3/5 \text{ m/s}$ می‌افزاید. این دو متحرک در ثانیه چندم از شروع حرکت، دوباره به یکدیگر خواهند رسید؟



(۱) ۱۴

(۲) ۱۵

(۳) ۱۷

(۴) ۱۸

کدام گزینه نادرست است؟

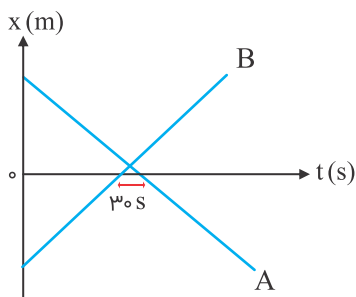
(۱) در لحظه تغییر جهت یک متحرک، شتاب آن صفر است.

(۲) در حرکت تندشونده، بردارهای شتاب و سرعت هم‌جهت‌اند.

(۳) در حرکت کندشونده، اندازه بردار سرعت در حال کاهش است.

(۴) حرکت در مسیر منحنی حتماً شتاب‌دار است.

شکل زیر، نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که با تندی‌های یکسان 2 m/s در حرکت هستند را نشان می‌دهد. اختلاف فاصله دو متحرک از مبدأ مکان در مبدأ زمان ($t = 0 \text{ s}$) چند متر است؟



(۱) ۳۰

(۲) ۶۰

(۳) ۹۰

(۴) ۱۲۰



معادله سرعت- زمان متحرکی در SI به صورت $v = t^2 - 6t + 5$ است. به ترتیب چند ثانیه پس از شروع حرکت، شتاب متحرک صفر می‌شود و اندازه شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t = 0$ تا لحظه‌ای که برای دومین بار تغییر جهت می‌دهد، چند متر بر مجذور ثانیه است؟

(۲) ۲، ۳

(۱) ۱، ۳

(۴) ۲، ۴

(۳) ۱، ۴

متحرکی در صفحه مختصات از نقطه $A \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right|$ بدون تغییر جهت روی مسیر مستقیم به نقطه $B \left| \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right|$ می‌رود، سپس بدون تغییر جهت و روی مسیر مستقیم از نقطه B به نقطه $C \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right|$ می‌رود. اندازه جابه‌جایی متحرک چند برابر مسافت طی شده است؟

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) ۱

(۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$

پرنده‌ای با تندی ثابت 10 m/s ، ابتدا 120 متر به سمت شمال، بعد 80 متر به سمت شرق، سپس 60 متر به سمت جنوب و در نهایت 240 متر به سمت بالا پرواز می‌کند، تندی متوسط آن در کل مسیر حرکت چند m/s بیشتر از اندازه سرعت متوسط آن در کل مسیر است؟

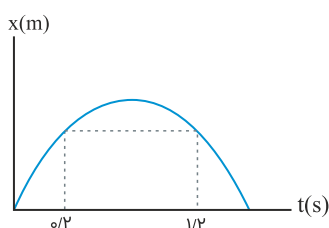
(۲) $4/8$

(۱) ۴

(۴) $5/2$

(۳) ۵

نمودار مکان- زمان حرکت خودرویی به صورت سهمی شکل زیر است. مقدار شتاب متوسط از لحظه $t_1 = 0/2 \text{ s}$ تا لحظه $t_2 = 1/2 \text{ s}$ برابر با 2 m/s^2 است. سرعت در لحظه t_2 چند متر بر ثانیه است؟



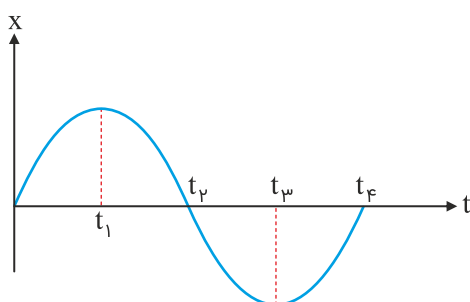
(۱) +۱

(۲) -۱

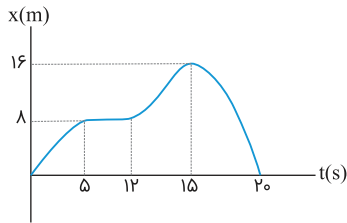
(۳) +۴

(۴) -۲

نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در چه بازه زمانی اندازه جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط متحرک یکسان نیست؟

(۱) $t_1 - t_3$ (۲) $t_2 - t_4$ (۳) $t_2 - t_3$ (۴) $t_1 - t_2$

نمودار مکان- زمان متحرکی که بر خط راست حرکت می‌کند مطابق شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در مدت ۲۰ s چند برابر اندازه سرعت متوسط متحرک در ۱۰ s آخر حرکت است؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۱/۶

(۴) ۲

متحرکی مسیری را با تندی ثابت ۲۰ m/s طی می‌کند؛ سپس $\frac{1}{4}$ همین مسیر را با تندی ثابت ۱۰ m/s برمی‌گردد. تندی متوسط در کل حرکت کدام است؟

(۱) $\frac{40}{3}$ (۲) $\frac{50}{3}$

(۳) ۲۰

(۴) ۱۰

کره‌ای فلزی در یک آزمایش با ۲ مول الکترون باردار می‌شود. حداکثر دقت ترازو چقدر باشد تا بتواند تغییرات جرم این کره پس از باردار شدن را محاسبه کند؟ (جرم الکترون را $\frac{1}{2000}$ amu در نظر بگیرید و $1 \text{ amu} = 1/66 \times 10^{-24}$)

(۱) ۰/۱ گرم

(۲) ۰/۰۰۰۱ گرم

(۳) ۰/۰۰۱ گرم

(۴) ۰/۰۱ گرم

در صورتی که ۰/۲۸ گرم از عنصری دارای $10^{21} \times 3/01$ اتم باشد، جرم مولی این عنصر کدام است؟

(۱) ۲۲۴

(۲) ۱۱۲

(۳) ۵۶

(۴) ۲۸

چه تعداد از عبارات زیر درست هستند؟

(الف) امروزه باتوجه به نوری که ستارگان بر ما می‌تابانند، آگاهی زیادی از آن‌ها پیدا کرده‌ایم.

(ب) ${}^3_1\text{H}$ ، پایدارترین رادیوایزوتوپ عنصر هیدروژن است.

(پ) ناپایدارترین ایزوتوپ ساختگی عنصر هیدروژن، ${}^7_1\text{H}$ است.

(ت) تفاوت عدد جرمی و عدد اتمی در ایزوتوپ‌های یک عنصر یکسان نیست.

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

کدام گزینه ترتیب عنصرهای زیر را به درستی نشان می‌دهد؟

(الف) عنصر موجود در دوره ۲ و گروه ۱۶

(ب) عنصری از گروه دوم که ۳۸ الکترون دارد.

(پ) گاز نجیبی که هم‌دوره با عنصر As ۳۳ است.

(ت) عنصری از دوره ۴ و هم‌گروه با C ۶

Si, Kr, Sr, O (۲)

Si, Ar, Ca, S (۱)

Ge, Kr, Sr, O (۴)

Ge, Kr, Ca, O (۳)

مطابق جدول زیر، نسبت شمار آنیون‌ها به کاتیون‌ها در ردیف از ستون اول با نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در ردیف از ستون دوم برابر است.

ستون ردیف	۱	۲
۱	لیتیم فلئورید	سدیم اکسید
۲	پتاسیم نیتريد	پتاسیم سولفید
۳	منیزیم اکسید	کلسیم یدید
۴	کلسیم نیتريد	آلومینیم برمید

(۲) سوم - دوم

(۱) چهارم - اول

(۴) اول - سوم

(۳) دوم - چهارم

یک دانشجوی رشته شیمی زیرلایه نیمه‌پر را زیرلایه‌ای تعریف کرد که دارای $\frac{1}{p}$ حداکثر تعداد الکترونی باشد که در آن زیرلایه می‌تواند قرار بگیرد. طبق این تعریف چه تعداد زیرلایه نیمه‌پر در آرایش الکترونی عناصر تناوب ۴ جدول تناوبی دیده می‌شود؟

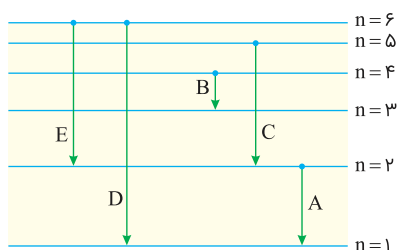
(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

در شکل زیر که مربوط به طیف نشری-خطی اتم هیدروژن است، کدام انتقال الکترونی مربوط به بخش نامرئی، کدام انتقال مربوط به خط آبی و کدام انتقال الکترونی بیشترین طول موج را دارا است؟



(۱) D - C - A

(۲) D - E - D

(۳) B - C - A

(۴) B - E - D

آرایش الکترونی عنصر M به صورت $(n-1)d^5ns^2$ [گاز نجیب] است. چند مورد دربارهٔ این عنصر درست است؟
 الف) این عنصر در گروه ۷ام جدول دوره‌ای قرار دارد و فلزی واسطه است.
 ب) به n می‌توان مقادیر ۴ و ۵ و ۶ و ۷ نیز نسبت داد.
 پ) آرایش الکترونی یون M^{2+} به صورت $(n-1)d^3ns^2$ [گاز نجیب] است.
 ت) اگر $n = ۴$ باشد، یون M^{2+} بی‌رنگ است.

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

کدام مطلب درست است؟

- (۱) شمار الکترون‌های مبادله‌شده به ازای تشکیل یک مول آلومینیوم اکسید برابر با ۵ مول است.
 (۲) در ترکیب‌های یونی دوتایی، آرایش الکترونی کاتیون و آنیون مشابه یکدیگر است.
 (۳) کاتیون ترکیب‌های یونی دوتایی تشکیل‌شده از عنصرهای گروه اول جدول دوره‌ای به آرایش پایدار هشتایی می‌رسند.
 (۴) نسبت کاتیون به آنیون در کلسیم برمید با نسبت آنیون به کاتیون در سدیم سولفید برابر است.

آرایش الکترونی $[Ar]3d^8 4s^2$ مربوط است به عنصر که در گروه جدول جای دارد.

- (۱) Ni ، ۲۸ ، ۱۰
 (۲) Cu^+ ، ۲۹ ، ۱۱
 (۳) Ni ، ۲۸ ، ۱۸
 (۴) Cu^+ ، ۲۹ ، ۹

دو ظرف داریم که یکی حاوی نوعی آلکان و دیگری حاوی نوعی آلکن است. برای شناسایی این هیدروکربن‌ها از کدامیک از مواد زیر می‌توان استفاده کرد؟

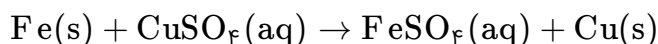
- (۱) H_2O
 (۲) H_2SO_4
 (۳) HCl
 (۴) Br_2

چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

- الف) برای جلوگیری از خوردگی فلزها می‌توان از آلکان‌های مایع استفاده کرد.
 ب) فرآوردهٔ حاصل از پنتان و گاز هیدروژن، هگزان خواهد بود.
 پ) از چهارمین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها برای سوخت موردنیاز فندک استفاده می‌کنند.
 ت) آلکان‌هایی با شمار کربن ۱ تا ۵، در دمای اتاق به شکل گاز هستند.

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

مقدار مس استخراج شده از $\frac{۸۰}{۷}$ کیلوگرم گیاه را از واکنش چند گرم آهن ناخالص با درصد خلوص ۷۰ درصد با مس سولفات کافی می‌توان به دست آورد؟ (از ۱ کیلوگرم گیاه ۱۴ g مس استخراج می‌شود، $\text{Fe} = ۵۶$, $\text{Cu} = ۶۴$: g.mol^{-1})



(۱) ۲۰۰ (۲) ۱۰۰

(۳) ۳۰۰ (۴) ۴۰۰

مقدار کافی از نمک آهن (III) کلرید به ۱۳۵ گرم محلول سدیم هیدروکسید اضافه می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که ۴۲/۸ گرم آن رسوب قرمز رنگ تولید می‌شود. اگر بازده درصدی این واکنش ۸۰ درصد باشد، چند گرم آب در محلول سدیم هیدروکسید وجود داشته است؟ ($\text{H} = ۱$, $\text{O} = ۱۶$, $\text{Na} = ۲۳$, $\text{Fe} = ۵۶$: g.mol^{-1})

(۱) ۶۰ (۲) ۸۵

(۳) ۱۰۰ (۴) ۷۵

دو عنصر A و B در چند مورد از ویژگی‌های زیر مشابه هم هستند؟
 (الف) سطح صاف و صیقلی (ب) اشتراک گذاشتن الکترون هنگام واکنش با سایر عناصر
 (پ) خرد شدن در اثر ضربه (ت) تعداد الکترون در آخرین زیرلایه
 (ث) رسانایی الکتریکی (ج) شبه فلز بودن

(۱) ۳ (۲) ۴

(۳) ۶ (۴) ۵

برای چهار آلکان راست‌زنجیر، نقطه جوش برحسب درجه سانتی‌گراد برابر صفر، -۴۲، ۹۸ و -۱۶۲ گزارش شده است. اگر بدانیم این چهار آلکان متان، پروپان، بوتان و هپتان هستند، نقطه جوش بوتان برحسب درجه سانتی‌گراد کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۴۲

(۳) ۹۸ (۴) -۱۶۲

کدام دو عنصر می‌توانند شباهت بیشتری به یکدیگر داشته باشند؟

(۱) ۲۱Y , ۱۱X (۲) ۳۱Y , ۱۳X

(۳) ۳۲Y , ۱۵X (۴) ۱۷Y , ۸X

اگر معادله موازنه نشده واکنشی که منجر به تولید آهن می‌شود، به صورت $\text{Fe}_2\text{O}_3(\text{s}) + \text{C}(\text{s}) \xrightarrow{\Delta} \text{Fe}(\text{s}) + \text{CO}(\text{g})$ باشد و بدانیم بازده واکنش ۸۰٪ می‌باشد و ۱۶/۸ گرم آهن تولید شده است، جرم جامد ثانویه چند گرم کمتر از جرم جامد اولیه می‌باشد؟ (درصد خلوص Fe_2O_3 ، ۶۰٪ است)

(۱) ۱۵/۳۷ (۲) ۱۰/۵

(۳) ۹/۹ (۴) ۷/۹۲

از تجزیه گرمایی کامل ۱۰۰ گرم کلسیم کربنات در یک ظرف سرباز، ۱۷/۶ گرم از جرم محتویات درون ظرف کاسته می‌شود. درصد خلوص کلسیم کربنات کدام است؟ ($\text{Ca} = 40$, $\text{C} = 12$, $\text{O} = 16$: g.mol^{-1})

کربن دی‌اکسید + کلسیم اکسید → کلسیم کربنات

(۲) ۳۵

(۱) ۳۰

(۴) ۵۰

(۳) ۴۰

کدام گزینه نادرست است؟

(۱) در بین نافلزهای دوره دوم جدول دوره‌ای کمترین عدد اتمی مربوط به کربن است.

(۲) گاز کلر همانند گوگرد زردرنگ است.

(۳) شبه‌فلزها دارای خواص فیزیکی شبیه به فلزها هستند.

(۴) عنصرهایی که در گروه ۱۴ جدول دوره‌ای دارای سطحی براق هستند با ضربه خرد نمی‌شوند.

از واکنش ۱۳/۲ گرم صابون جامد که حاوی زنجیره هیدروکربنی ۱۴ کربنه است با منیزیم کلرید کافی، چند گرم رسوب به تقریب تشکیل می‌شود؟ ($\text{C} = 12$, $\text{Na} = 23$, $\text{O} = 16$, $\text{H} = 1$, $\text{Mg} = 24$: g.mol^{-1})

(۲) ۱۲

(۱) ۱۲/۷

(۴) ۱۰/۴

(۳) ۱۳/۳

مخلوط آب و روغن و صابون یک مخلوط بوده و حاوی توده‌های مولکولی با اندازه‌های است و با رفتار نور در محلول رفتاری دارد.

(۲) همگن - متفاوت - متفاوت

(۱) همگن - یکسان - یکسان

(۴) ناهمگن - یکسان - یکسان

(۳) ناهمگن - متفاوت - متفاوت

چند مورد از مواد زیر به ترتیب در آب و در هگزان حل می‌شوند؟
اتانول - استون - بنزن - وازلین - بنزین - اوره - ید - صابون مایع

(۲) ۴ - ۴

(۱) ۳ - ۳

(۴) ۵ - ۴

(۳) ۴ - ۳

صابون، نمک سدیم اسیدهای است که زنجیر هیدروکربنی آن و آب است و در حلال‌های حل می‌شود.

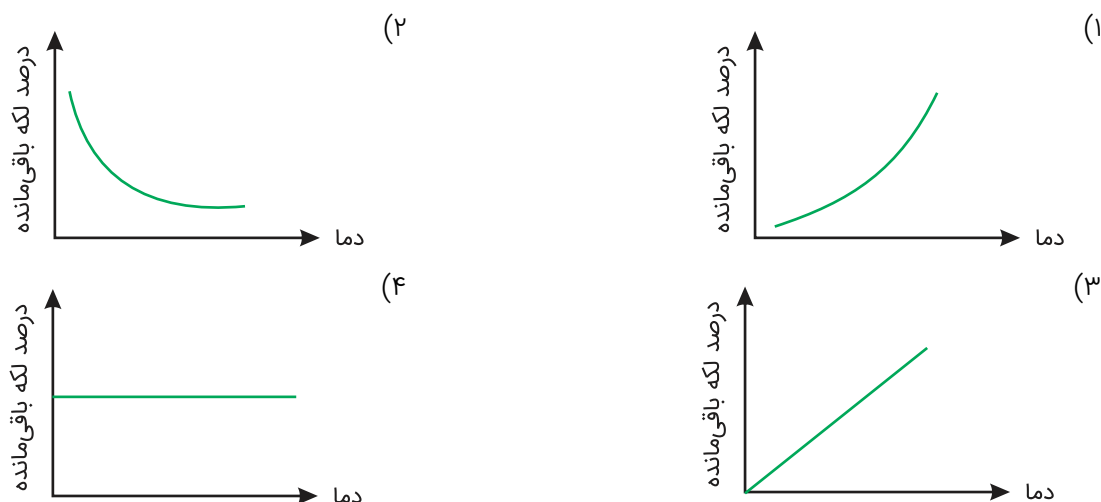
(۲) چرب - قطبی - دوست - قطبی

(۱) آلی - قطبی - دوست - قطبی

(۴) چرب - ناقطبی - گریز - ناقطبی

(۳) آلی - ناقطبی - گریز - ناقطبی

براساس آزمایش قدرت پاک‌کنندگی صابون، کدام نمودار، رابطه بین دما و درصد لکه باقی‌مانده حاصل از چربی را به‌درستی نشان می‌دهد؟



نسبت جرم مولی صابون مایع به‌دست آمده از کربوکسیلیک اسیدی با زنجیره کربنی سیرشده ۱۶ کربنه به اتیلن گلیکول تقریباً برابر چند است؟ ($H = 1, K = 39, Na = 23, O = 16, C = 12 : g \cdot mol^{-1}$)

(۲) ۴/۵

(۱) ۴/۷۵

(۴) ۵

(۳) ۴

به ترتیب از راست به چپ چه تعداد از موارد زیر در آب و در هگزان حل می‌شوند؟
"ضدیخ - بنزین - روغن زیتون - وازلین - اوره"

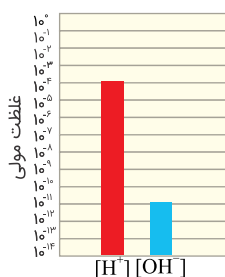
(۲) ۲، ۳

(۱) ۳، ۲

(۴) ۴، ۱

(۳) ۱، ۴

کدام گزینه زیر نادرست است؟



(۱) آمونیاک برخلاف سدیم هیدروکسید بازی ضعیف است.

(۲) برای افزایش قدرت پاک کردن چربی‌ها، به شوینده‌ها جوش شیرین می‌افزایند.

(۳) بین دو باز که به ترتیب K_b آن‌ها برابر با 5×10^{-4} و 2×10^{-3} است، باز دومی قوی‌تر است.

(۴) نمودار فوق میزان غلظت یون هیدروکسید و یون هیدرونیوم را در آب گازدار، در دمای اتاق، به‌درستی نشان می‌دهد.

در صورتی‌که مقداری کلسیم کلرید در آب حل نموده و با آب دست‌ها را بشوییم، میزان کف صابون یافته که دلیل آن

(۱) کاهش - واکنش یون کلسیم به‌جای کاتیون صابون با مولکول‌های آب

(۲) کاهش - واکنش یون کلسیم با آنیون صابون و رسوب دادن صابون

(۳) افزایش - کاهش کشش سطحی آب

(۴) افزایش - کاهش خاصیت آب‌دوستی و آب‌گریزی صابون

(۱) سوسپانسیون برخلاف کلوئیدها نور را پخش می‌کند و همانند محلول‌ها از ذره‌های ریز ماده تشکیل شده است.

(۲) کلوئیدها همانند محلول‌ها ته‌نشین نمی‌شوند ولی برخلاف مواد سوسپانسیون از توده‌های مولکولی تشکیل شده‌اند.

(۳) محلول همانند کلوئیدها پایدار هستند ولی برخلاف مواد سوسپانسیون همگن می‌باشند.

(۴) محلول‌ها برخلاف سوسپانسیون از یون‌ها و مولکول‌ها تشکیل شده‌اند و نور را پخش نمی‌کنند.

در تقسیم عدد $۵۶ -$ بر عدد طبیعی b ، باقی‌مانده ۵ واحد کمتر از مقسوم‌علیه است. اگر b کمترین عدد قابل قبول باشد، خارج قسمت کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۴

(۳) -۱۶ (۴) -۵۰

باقی‌مانده $۱ + ۳^{۴۶} + ۷^{۳۰} \times ۳$ بر ۷۶ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۳۷ (۴) ۲۶

کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر a زوج باشد، آنگاه $a^۲ + ۱$ مضرب ۵ است.

(۲) عدد $n^۲ - n + ۴۱$ به ازای هر عدد طبیعی، اول است.

(۳) مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچک‌تر است.

(۴) از هر چهار عدد زوج متوالی، یکی بر ۴ بخش پذیر است.

چه تعداد از گزاره‌های زیر هم‌ارزند؟ ($a, b \in \mathbb{R}$)

(الف) $(a = b), (a^۳ = b^۳)$ (ب) $(a^۳ < b^۳), (a < b)$

(ج) $(a^۲ < b^۲), (a < b)$ (د) $(a^۲ = b^۲), (a = b)$

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

کدام عدد کلیت حکم "توان دوم هر عدد بزرگ‌تر از خود آن عدد" را نقض می‌کند؟

(۱) $۱ - \sqrt{۲}$ (۲) $\sqrt{۲} + ۱$

(۳) $\sqrt{۳} - ۲$ (۴) $\sqrt{۲} - ۱$

کدام گزینه مثال نقضی برای گزاره زیر است؟

"اگر $a|b$ و $c|d$ ، آنگاه $a + c|b + d$ "

(۱) مثال نقض ندارد. (۲) $a = ۲, b = ۲, c = ۳, d = ۳$

(۳) $a = ۲, b = ۲, c = ۳, d = ۶$ (۴) $a = ۱, b = ۲, c = ۱, d = ۲$

۷۷ اگر a و b گویا باشد و $6 = 3a(\sqrt{5} + \sqrt{7} + 2) - 2b(\sqrt{5} + \sqrt{7} - 3)$ ، آنگاه $a - b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۷۸ در تقسیم عدد 153 بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت از ثلث باقی‌مانده یک واحد کمتر است. اگر در این تقسیم، باقی‌مانده ماکزیم مقدار خود را داشته باشد، بزرگ‌ترین عدد اولی که b را عاد می‌کند، کدام است؟

- (۱) 11 (۲) 13
(۳) 5 (۴) 3

۷۹ برای چند عدد طبیعی n ، رابطه $2n^2 - 5n - 4 \mid n + 3$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) 1
(۳) 2 (۴) 3

۸۰ اگر در یک تقسیم، 100 واحد به مقسوم و 4 واحد به مقسوم‌علیه بیفزاییم، خارج قسمت تغییر نکرده اما باقی‌مانده 8 واحد کم می‌شود. خارج قسمت کدام است؟

- (۱) 27 (۲) 4
(۳) 15 (۴) 16

۸۱ اگر $a_{ij} = \begin{cases} \frac{xi}{jx + 2j} & ; i = j \\ \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + x - 6} & ; i \neq j \end{cases}$ باشد و $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ ماتریس قطری باشد، x چند جواب دارد؟

- (۱) 1 (۲) 2
(۳) 3 (۴) 4

۸۲ مجموع مربعات ریشه‌های معادله ماتریسی زیر کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1-x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = 15x + 2$$

- (۱) 20 (۲) 21
(۳) 22 (۴) 23

۸۳ اگر $A = [j^2 + 2i]_{3 \times 3}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

- (۱) 16 (۲) 26
(۳) 36 (۴) 46

ماتریس مربعی که ۱۶ درایه دارد را در نظر بگیرید. درایه‌های روی قطر اصلی همه مکعب شمارهٔ سطر خود هستند و تمام درایه‌های دیگر یک واحد بیشتر از اولین عضو سمت راست خود هستند. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی چقدر بیشتر از مجموع درایه‌های ۲ سطر اول است؟

(۱) صفر (۲) ۱۰

(۳) ۵۶ (۴) ۵

فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند و $BA = -AB$ ، حاصل $(A - B)(A + B)$ برابر کدام است؟

(۱) $A^2 - B^2$ (۲) $A^2 + 2AB - B^2$

(۳) $A^2 + B^2$ (۴) $A^2 - 2AB + B^2$

اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $A = I + A^2$ ، ماتریس A^{100} کدام است؟

(۱) $-A$ (۲) A

(۳) $-A^2$ (۴) A^2

کدام ماتریس سطری است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (۲) $[1 \ 3 \ 5 \ 7]$

(۳) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$ و $C = [c_{ij}]_{2 \times 4}$ و $D = [d_{ij}]_{3 \times 2}$ ، آنگاه چه تعداد از ماتریس‌های زیر قابل تعریف‌اند؟

$2A + B$, $A + 2D$, $3C - A$, $B - 2C$, $2D - B$, $D + B$

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

ماتریس $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $T = A + B$ باشد، به‌طوری‌که A ماتریس قطری است و درایه‌های

ماتریس A و B همگی همان درایه‌های ماتریس T هستند. قرینهٔ B کدام است؟

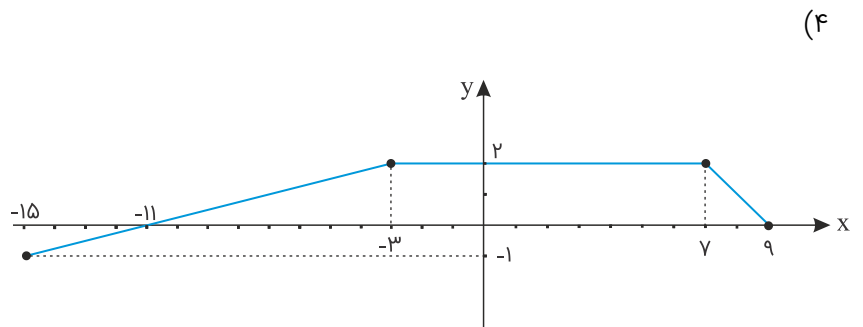
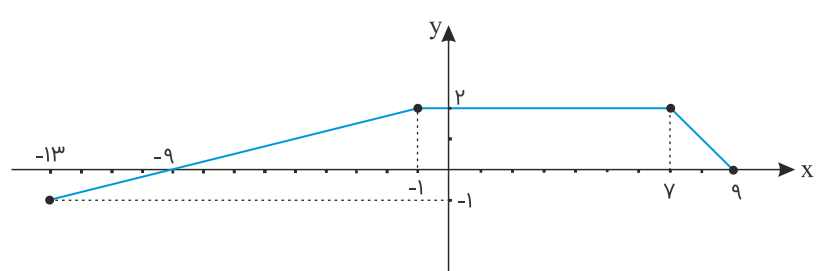
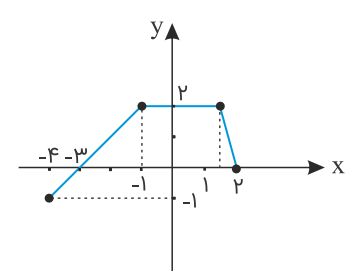
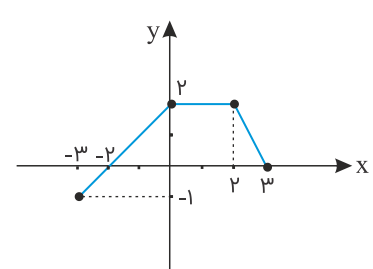
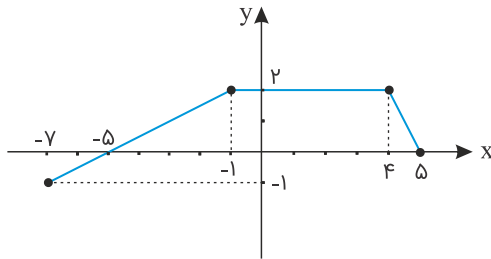
(۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

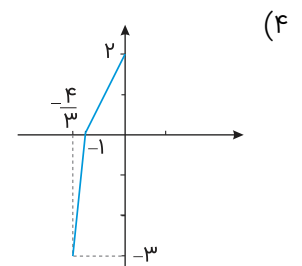
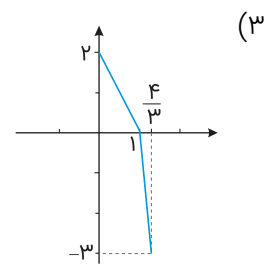
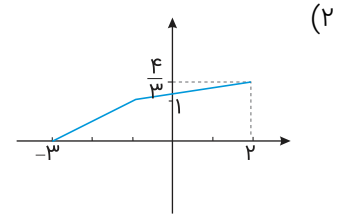
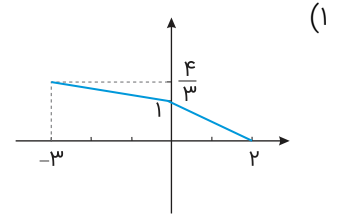
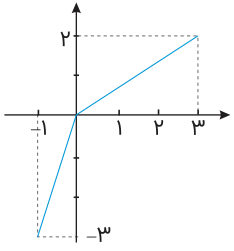
(۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

اگر اعضای روی قطر فرعی ماتریس $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha + 1 & \cos \alpha \\ \cos \beta - 1 & \sin \beta - 2 \end{bmatrix}$ صفر باشد، مجموع تمام ماتریس‌های این چنین به حالت ذکر شده را ماتریس B می‌نامیم. حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس B کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) -۸
(۳) -۴
(۴) -۱۶

نمودار تابع f به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x + 1)$ کدام است؟





تعداد نقاط برخورد توابع $y = \sin x$ و $y = \sin \frac{x}{2}$ در فاصله $(-2\pi, 2\pi)$ چقدر است؟

(۲) ۳

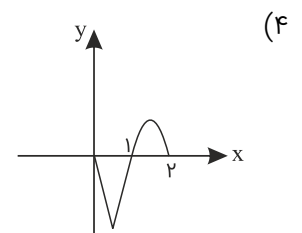
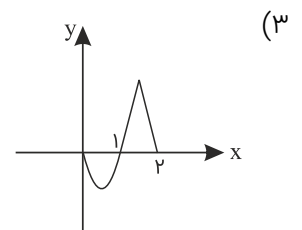
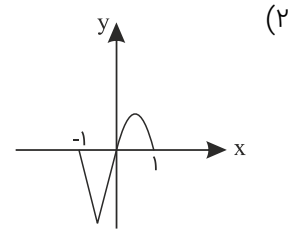
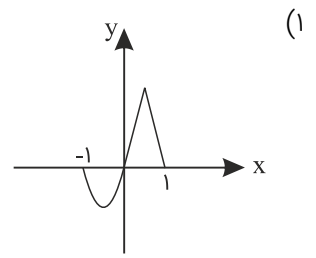
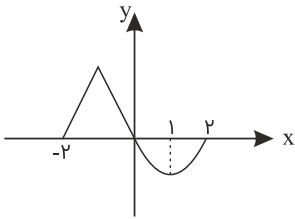
(۱) ۲

(۴) ۵

(۳) ۴

نمودار تابع $y = f(1 - x)$ به شکل زیر است. نمودار تابع $f(2x - 1)$ کدام است؟

۹۴



طول نقاط نمودار تابع f را سه برابر کرده و نمودار به دست آمده را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

۹۵

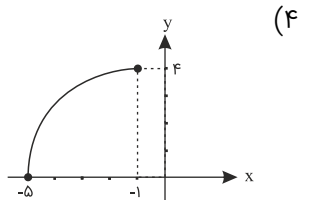
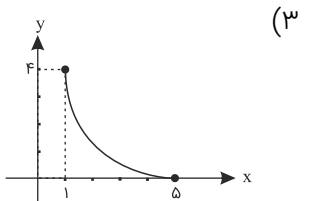
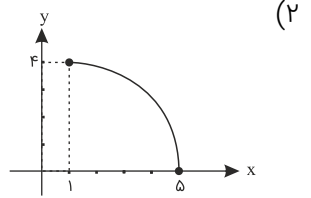
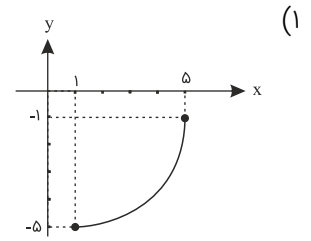
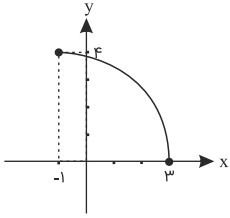
(۲) $f(3x + 6)$

(۴) $f(\frac{x}{3} + \frac{2}{3})$

(۱) $f(3x + 2)$

(۳) $f(\frac{x}{3} + 2)$

شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. کدام گزینه نمودار تابع $y = f^{-1}(x - 1) + 1$ را نمایش می‌دهد؟



نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 + 2x - 8$ را حداقل چند واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال دهیم. تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ‌ها نامنفی باشد؟

(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۱

(۳) ۲

نمودار تابع $f(x) = |x - 1| - 2$ را سه واحد به سمت چپ و چهار واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم، شکل به دست آمده تابع f را در چند نقطه قطع می‌کند؟

(۲) ۱

(۱) بی‌شمار

(۴) صفر

(۳) ۲

در مورد تابع غیر ثابت f می‌دانیم به ازای هر x داریم $f(1 - x) = f(x + 1)$ ، در مورد تابع f کدام گزینه صحیح است؟

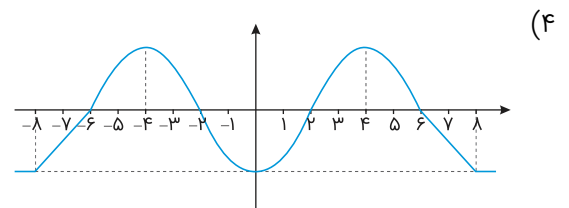
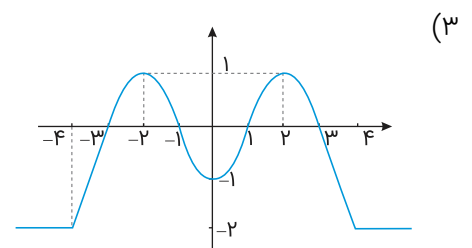
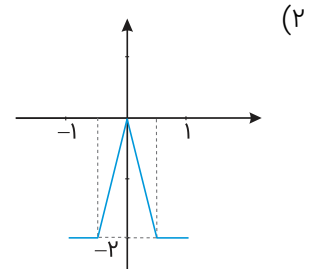
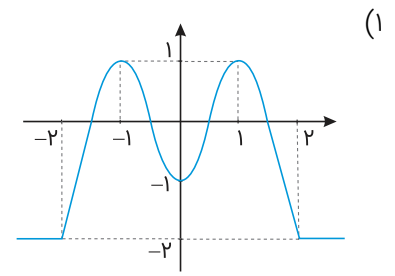
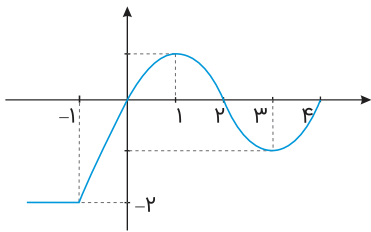
(۲) تابع f نسبت به خط $x = -1$ متقارن است.

(۱) تابع f نسبت به محور y ‌ها متقارن است.

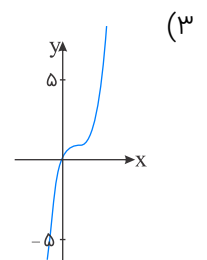
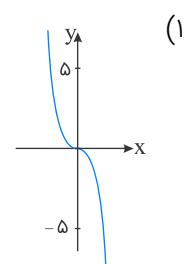
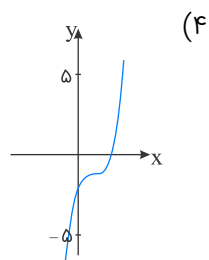
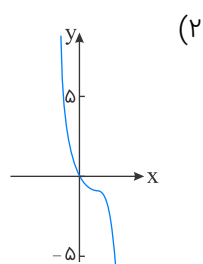
(۴) تابع f نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

(۳) تابع f نسبت به خط $x = 1$ متقارن است.

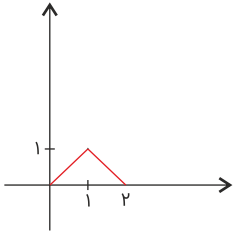
نمودار $y = f(x)$ به شکل زیر می‌باشد. نمودار $g(x) = f(3 - 2|x|)$ کدام است؟ ۱۰۰



نمودار تابع $f(x) = -x(x^2 - 3x + 3)$ به کدام صورت است؟ ۱۰۱



نمودار تابع $y = 1 + f(2x)$ مطابق شکل زیر است. مساحت ناحیه محصور بین نمودار تابع $y = 1 - f(x - 1)$ و خط $y = 2$ کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا یک واحد به سمت چپ سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. نمودار تابع جدید، نمودار تابع اولیه را در چند نقطه قطع می‌کند؟

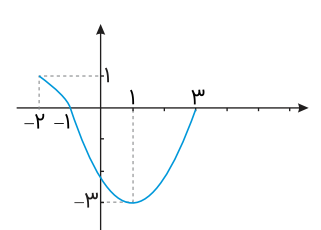
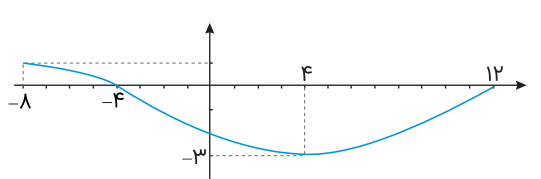
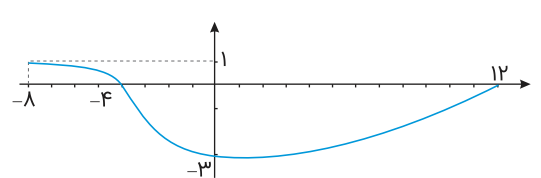
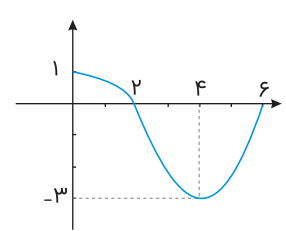
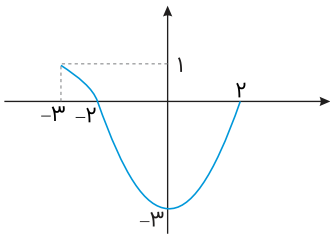
۱ (۱) صفر

۲ (۲) ۱

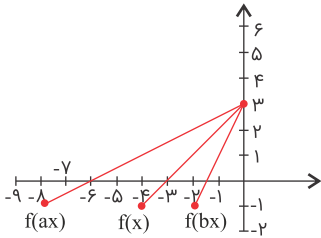
۳ (۳) ۲

۴ (۴) ۳

اگر نمودار $y = f(2x + 1)$ به صورت زیر باشد، نمودار $y = f(\frac{x}{2} - 1)$ کدام است؟



۱۰۵ شکل زیر مربوط به نمودار توابع $y = f(x)$ ، $y = f(ax)$ و $y = f(bx)$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟



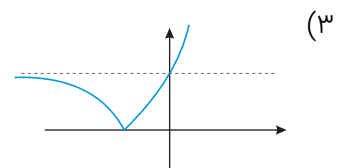
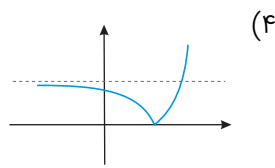
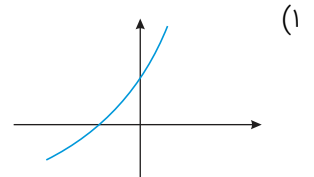
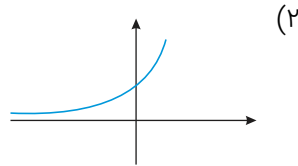
(۱) $1/5$

(۲) $2/5$

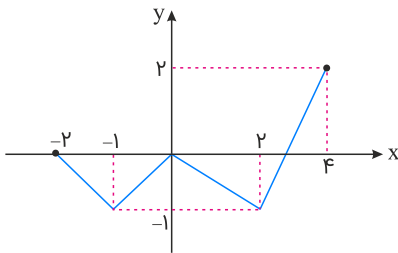
(۳) $3/5$

(۴) $4/5$

۱۰۶ نمودار تابع $y = \sqrt{2^{2x+2} - 2^{x+2} + 1}$ کدام است؟



۱۰۷ نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر است. در این صورت برد تابع $y = \sqrt{1 - f(2x)}$ برابر با کدام گزینه است؟



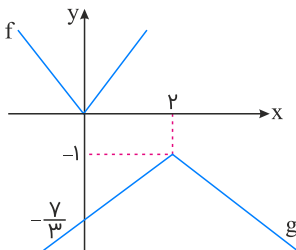
(۱) $[0, 1]$

(۲) $[0, \sqrt{2}]$

(۳) $[0, 2]$

(۴) $[1, 2]$

۱۰۸ نمودار تابع g از روی نمودار تابع $f(x) = |x|$ رسم شده است. $g(5)$ کدام است؟



(۱) -4

(۲) $-\frac{5}{2}$

(۳) $-\frac{7}{3}$

(۴) -3

۱۰۹ در نمودار تابع $f(x) = x^2$ ، به ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم: انتقال ۴ واحد به طرف‌های منفی-، قرینه نسبت به محور x ها-، دو برابر کردن برد-، انتقال ۳ واحد به طرف‌های منفی- معادله نمودار حاصل کدام است؟

(۲) $y = 2x^2 - 16x - 29$

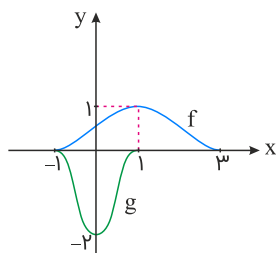
(۱) $y = 2x^2 - 8x - 11$

(۴) $y = -2x^2 + 16x - 35$

(۳) $y = -2x^2 - 16x - 35$

در شکل زیر، نمودار تابع g از روی نمودار تابع f ساخته شده است. ضابطه g کدام است؟

۱۱۰



$$-2f\left(\frac{x+2}{2}\right) \quad (1)$$

$$2f(-2x+1) - 1 \quad (2)$$

$$2f\left(\frac{-x+2}{2}\right) + 1 \quad (3)$$

$$-2f(2x+1) \quad (4)$$

کدام یک از توابع زیر وارون‌پذیرند؟

۱۱۱

$$g = \{(1, 2), (3, 4), (5, 2)\} \quad (2)$$

$$f = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\} \quad (1)$$

$$h = \{(4, 1), (5, 2), (6, 1)\} \quad (4)$$

$$k = \{(1, 1), (2, 5), (3, 6)\} \quad (3)$$

دامنه کدام تابع از گزینه‌های زیر از حذف یک نقطه از دامنه $f(x) = \frac{3x+5}{[x]}$ به دست می‌آید؟

۱۱۲

$$h(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2-x)(x-2)^2}} \quad (2)$$

$$g(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-x}} \quad (1)$$

$$m(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+x}} \quad (4)$$

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{[x]x}} \quad (3)$$

اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $2f(x+1) - x^2f(3) = 2x^2 - 4$ ، آنگاه حاصل $f(0)$ کدام است؟

۱۱۳

$$-2 \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

$$3 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

اگر $f(x) = \begin{cases} [-x] + 1 & ; x \geq 1 \\ f(x+1) & ; x < 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $f\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

۱۱۴

$$-1 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

کدام تابع زیر چندجمله‌ای نیست؟

۱۱۵

$$y = \sqrt{2}x - x^3 \quad (2)$$

$$y = 1 - x - x^5 \quad (1)$$

$$y = \frac{x^3 + 3}{x} \quad (4)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{3} \quad (3)$$

تابع خطی f محور طول‌ها را با زاویه 10° قطع کرده است. زاویه برخورد f^{-1} با محور طول‌ها و عرض‌ها به ترتیب چند درجه است؟

۱۱۶

$$10^\circ \text{ و } 80^\circ \quad (2)$$

$$10^\circ \text{ و } 170^\circ \quad (1)$$

$$110^\circ \text{ و } 170^\circ \quad (4)$$

$$80^\circ \text{ و } 10^\circ \quad (3)$$

چه تعداد از توابع زیر یک به یک است؟

$$\begin{aligned}
 & \text{ب) } g(x) = \sqrt{|x+4|} \quad \text{آ) } f(x) = \sqrt{x-2} + (x-3)^2 \\
 & \text{ت) } k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - 1 & ; x > 0 \\ \sqrt{-x} - 2 & ; -4 \leq x \leq 0 \end{cases} \quad \text{پ) } h(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x^2-9}
 \end{aligned}$$

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

اگر $f(x) = 2|x+a| - ax + 2$ یک به یک باشد، حدود a کدام است؟۲ (۲) $|a| > 3$ ۱ (۱) $|a| > 1$ ۴ (۴) $|a| > 4$ ۳ (۳) $|a| > 2$ ماشین f مطابق شکل زیر عمل می کند. حاصل $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ کدام است؟

$$\frac{x-1}{x+1} \rightarrow \underline{f} \rightarrow [x]$$

$$\left[\frac{x+1}{-x+1} \right] \quad (۲)$$

$$[-x] \quad (۱)$$

$$\left[\frac{1}{x} \right] \quad (۴)$$

$$\left[-\frac{1}{x} \right] \quad (۳)$$

 $f(x)$ تابعی چند جمله ای است. اگر $f(x) + f^{-1}(x) = -2x + 4$ باشد، حاصل $f(4) + f^{-1}(4)$ کدام است؟۲ (۲) -4 ۱ (۱) -2 ۴ (۴) -8 ۳ (۳) -6 در مثلث ABC طول اضلاع $BC = 9$ و $AC = 7$ است. طول میانه وارد بر ضلع سوم، کدام می تواند باشد؟

۳ (۲)

۱ (۱)

۱۰ (۴)

۸ (۳)

در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، نیمساز خارجی زاویه A را رسم می کنیم. چند نقطه روی نیمساز وجود دارد که از قاعده BC به یک فاصله باشند؟

۴ (۲)

۱ (۱)

بی شمار (۴)

۲ (۳)

دو خط متقاطع d_1 و d_2 مفروض اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از یکی از خطوط به فاصله ۱ و از دیگری به فاصله ۳ واحد باشد؟

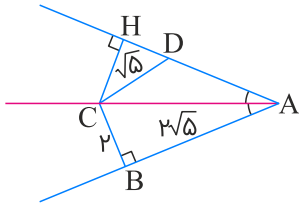
۱ (۲)

۲ (۱)

۳ (۴)

۴ (۳)

در شکل زیر AC نیمساز زاویه A می‌باشد. باتوجه به اندازه‌های روی شکل طول پاره‌خط AD کدام است؟
 $(CD = \sqrt{5}, AC = 2\sqrt{5})$



(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{2}$

چند مثلث ABC وجود دارد که در آن $BC = 6$, $CA = 5$ و $\angle C = 60^\circ$ باشد؟

(۲) ۲

(۱) ۳

(۴) هیچ

(۳) ۱

دو نقطه A و B به فاصله ۶ واحد از یکدیگر قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصله ۳ و از B به فاصله ۴ باشد؟

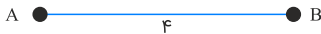
(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

ضلع $AB = 4$ از مثلث ABC در صفحه رسم شده است. اگر طول میانه و ارتفاع وارد بر آن به ترتیب ۳ و ۲ واحد باشد، چند نقطه متمایز برای رأس C می‌توان یافت؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

خط d به فاصله ۲ سانتی‌متر از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر قرار دارد. روی دایره چند نقطه وجود دارد که از d به فاصله ۴ سانتی‌متر باشد؟

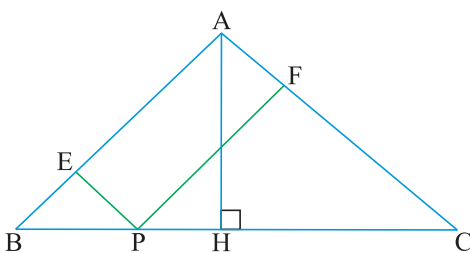
(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

در مثلث ABC ، $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$ و ارتفاع $AH = 3$ است. اگر P نقطه‌ای دلخواه روی قاعده BC باشد و با تغییر P بین دو رأس B و C ، چهار ضلعی $AEPF$ همواره متوازی‌الاضلاع شود، ماکزیم مقدار $AE \cdot AF$ کدام است؟



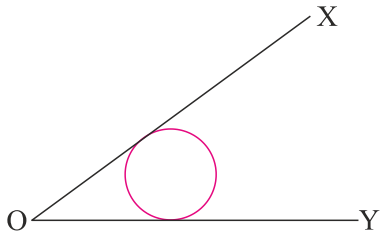
(۱) ۶

(۲) ۹

(۳) ۱۶

(۴) ۳۶

در شکل زیر، اضلاع زاویه XOY بر دایره مماس‌اند. چند نقطه روی محیط دایره وجود دارد که از اضلاع زاویه به یک فاصله می‌باشند؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ بی‌شمار





استاد علیرضا افشار

“همایش ها”

@hamayesh_dr_afshar



گزینه ۲

۱

حجم کره A و حجم قسمت توپر کره B را به دست می‌آوریم:

$$V_A = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_B = \frac{4}{3}\pi(R^3 - R'^3) \xrightarrow{R' = \frac{R}{\lambda}} V_B = \frac{4}{3}\pi(R^3 - (\frac{R}{\lambda})^3) = \frac{4}{3}\pi(\frac{\lambda^3 - 1}{\lambda^3}R^3)$$

حالا رابطه چگالی را به صورت نسبتی برای دو کره می‌نویسیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A} \xrightarrow{m_A = m_B} \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{\frac{4}{3}\pi \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda^3} R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda^3}$$

گزینه ۲

۲

برای وسیله‌های دیجیتالی، دقت اندازه‌گیری برابر یک واحد از آخرین رقمی است که می‌خوانند. در شکل سؤال، دو واحد از آخرین رقم، برابر ۰/۰۱ درجه سلسیوس است. در نتیجه دقت اندازه‌گیری برابر ۰/۰۱ درجه سلسیوس می‌شود.

گزینه ۴

۳

مسافت از جنس طول است ولی کمیت فرعی محسوب می‌شود.

گزینه ۱

۴

ابتدا حجم کره را به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times (2 \times 10^{-2})^3 = 4 \times \pi \times 10^{-6} = 32 \times 10^{-6} \text{ cm}^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = 1/5 \times 32 \times 10^{-6} = 48 \times 10^{-6} \text{ g}$$

$$m = 48 \times 10^{-6} \times 10^{-3} = 48 \times 10^{-9} \text{ kg}$$

برای بیان کمیت های نرده ای از یک عدد با یکای مناسب استفاده می شود ولی برای بیان کمیت های برداری افزون بر عدد و یکا از یک جهت مناسب نیز استفاده می شود. کمیت هایی نظیر جرم و زمان نرده ای هستند اما کمیت هایی مثل سرعت و نیرو برداری می باشند.

$$m_{\text{کل}} = \rho_{\text{کل}} V_{\text{کل}} = 10 \times 50 = 500 \text{ g}$$

$$V_A + V_B = 50 \Rightarrow V_B = 50 - V_A$$

$$m_{\text{کل}} = m_A + m_B \Rightarrow \rho_{\text{آلیاژ}} \times V_{\text{کل}} = \rho_A V_A + \rho_B V_B$$

$$\Rightarrow 10 \times 50 = 8V_A + 12(50 - V_A) \Rightarrow 500 = 8V_A + 600 - 12V_A$$

$$\Rightarrow 4V_A = 100 \Rightarrow V_A = 25 \text{ cm}^3$$

$$m_A = \rho_A V_A = 8 \times 25 = 200 \text{ g}$$

نکته: چون چگالی آلیاژ، میانگین چگالی A و B است، پس حجم آن ها باهم برابر و هرکدام 25 cm^3 می باشد.

$$1 \text{ AU} = 2 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$d = 2/6 \times 10^5 \text{ Tm} \times \frac{10^{12} \text{ m}}{1 \text{ Tm}} \times \frac{1 \text{ AU}}{2 \times 10^{11} \text{ m}} = 1/3 \times 10^6 \text{ AU}$$

$$\text{۱ شبانه روز} = 24 \text{ h} = 24 \times 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$$

در هر ثانیه 100 cm^3 آب به مخزن ریخته می شود؛ بنابراین:

$$\text{حجم آب ریخته شده به منبع در شبانه روز} = 86400 \times 100 \text{ cm}^3$$

$$= 8640000 \times (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 8640000 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 8.64 \text{ m}^3$$

ابتدا تندی شناور را برحسب متر بر ثانیه به دست می‌آوریم:

$$v = 14 \text{ گر} \times \frac{0.5 \text{ m/s}}{1 \text{ گر}} = 7 \text{ m/s}$$

حالا مسافت طی شده را برحسب متر به دست می‌آوریم:

$$\text{مسافت} = 210 \times \frac{1800 \text{ m}}{1 \text{ مایل دریایی}} = 210 \times 1800 \text{ m}$$

مدت زمان طی کردن این مسافت توسط شناور به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{مسافت} = vt \Rightarrow 210 \times 1800 = 7 \times t$$

$$\Rightarrow t = \frac{210 \times 1800}{7} = 30 \times 1800 \text{ s} \xrightarrow{1 \text{ h} = 3600 \text{ s}} t = \frac{30 \times 1800}{3600} = 15 \text{ h}$$

ابتدا چگالی و سپس جرم خارج شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{20000}{1000} = 20 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 20 = \frac{m}{200} \Rightarrow m = 4000 \text{ g} = 4 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow m_{\text{باقی مانده}} = 20 - 4 = 16 \text{ kg}$$

پاسخ کوتاه: باتوجه به ثابت بودن چگالی و اینکه $\frac{1}{5}$ حجم را برداشته‌ایم، بنابراین $\frac{1}{5}$ جرم نیز کاهش یافته است.

$$\frac{1}{5} \times 20 = 4 \text{ kg} \Rightarrow m = 20 - 4 = 16 \text{ kg}$$

$$\left. \begin{aligned} W &= U_2 - U_1 = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1} \\ C &= \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \end{aligned} \right\} \Rightarrow W = \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{d_2}} - \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{d_1}} \right) = \frac{q^2}{2 \epsilon_0 A} (d_2 - d_1)$$

$$= \frac{0.3 \times 0.3 \times 10^{-12}}{2 \times 9 \times 10^{-12} \times 3 \left(\frac{20}{2} \times 10^{-2} \right)} \times (36 \times 10^{-3}) = \frac{9 \times 10^{-2}}{2 \times 9 \times 3 \times 10^{-2}} \times (36 \times 10^{-3})$$

$$= 6 \times 10^{-3} \text{ J} = 6 \text{ mJ}$$

$$\frac{Q}{A} = \frac{Q'}{A'} \Rightarrow \frac{1/57 \times 10^{-9}}{9 \times 3/14 \times 25 \times 10^{-6}} = \frac{Q'}{1 \times 10^{-6}}$$

$$\Rightarrow Q' = 5 \times 10^{-8} \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-14} \text{ C} = 5 \text{ pC}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{2} C V_2^2}{\frac{1}{2} C V_1^2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 = \frac{36}{25} = \frac{144}{100} \Rightarrow 44 \text{ درصد افزایش}$$

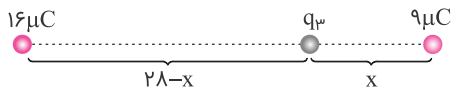
با استفاده از رابطه نیروی الکتریکی بین دو ذره داریم:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi F r^2} \Rightarrow [\epsilon_0] = \frac{C \times C}{N \cdot m^2} = \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{\frac{q}{C}}{d} = \frac{q}{Cd} = \frac{q}{\kappa(\epsilon_0 \frac{A}{d})d} = \frac{q}{\kappa\epsilon_0 A}$$

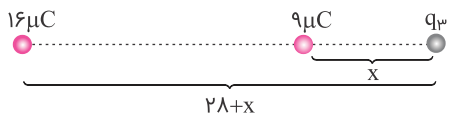
مقدار $\frac{q}{\kappa\epsilon_0 A}$ در این سوال ثابت است. پس در نتیجه مقدار E هم ثابت می‌باشد.

خواسته سؤال نیروهای هم‌اندازه است نه متعادل ماندن بار سوم!
حالت اول:



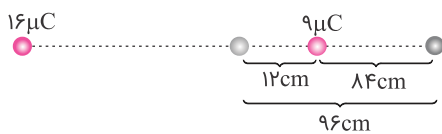
$$\Rightarrow \frac{k(16)q_3}{(28-x)^2} = \frac{k(9)q_3}{x^2} \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

حالت دوم:



$$\Rightarrow \frac{k(16)q_3}{(28+x)^2} = \frac{k(9)q_3}{x^2} \Rightarrow x = 18 \text{ cm}$$

شکل نهایی:



چون کره‌ها مشابه هستند، بنابراین بار آن‌ها پس از تماس یکسان خواهد بود:

$$q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{-4 + 8}{2} = 2 \mu\text{C}$$

کره‌ای که قبل از تماس دارای بار $+8 \mu\text{C}$ بوده باید از کره منفی $-6 \mu\text{C}$ بار منفی دریافت کرده باشد تا بار آن $2 \mu\text{C}$ شود. حال محاسبه می‌کنیم $-6 \mu\text{C}$ حاصل جابه‌جایی چند الکترون است:

$$q = -ne \Rightarrow -6 \times 10^{-6} = -n \times 1/6 \times 10^{-19} \\ \Rightarrow n = \frac{6 \times 10^{-6}}{1/6 \times 10^{-19}} = 3/75 \times 10^{13}$$

نکته ۱: ظرفیت خازن از رابطه $C = \frac{Q}{V}$ به دست می‌آید ولی ربطی به بار خازن یا ولتاژ دو سر خازن ندارد. ظرفیت خازن به عوامل ساختمانی آن بستگی دارد و از رابطه $C = K\epsilon_0 \frac{A}{d}$ محاسبه می‌گردد.

نکته ۲: تا وقتی خازنی به اختلاف پتانسیل ثابتی متصل است ولتاژ دو سر آن ثابت می‌ماند.

انرژی خازن از رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ محاسبه می‌گردد و چون در این سؤال V ثابت است برای ثابت ماندن انرژی خازن باید ظرفیت آن ثابت بماند.

$$U_1 = U_2$$

$$C_1 = C_2 \Rightarrow \frac{K_1 \epsilon_0 A_1}{d_1} = \frac{K_2 \epsilon_0 A_2}{d_2} \xrightarrow{K_2 = \frac{1}{4} K_1} \frac{A_1}{d_1} = \frac{1}{4} \frac{A_2}{d_2}$$

$$\text{یا } \frac{A_2}{d_2} = 4 \frac{A_1}{d_1} \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} = 4 \text{ شرط ثابت ماندن ظرفیت}$$

بررسی تک تک گزینه‌ها:

$$\text{گزینه (۱): } d_2 = \frac{25}{100} d_1 = \frac{1}{4} d_1 \xrightarrow{A_2 = A_1} \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} = 1 \times \frac{d_1}{\frac{1}{4} d_1} = 4$$

$$\text{گزینه (۲): } \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} = \frac{4 A_1}{A_1} \times 1 = 4$$

$$\text{گزینه (۳): } \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} = \frac{2 A_1}{A_1} \times \frac{d_1}{\frac{1}{2} d_1} = 4$$

پس تمام گزینه‌ها صحیح بوده و گزینه ۴ مورد نظر طراح بوده است.

$$\text{حالت اول: } \begin{cases} |q_1 \cdot q_2| = |8 \times 12| \\ d = r \end{cases}$$

$$\text{در حین القا: } q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \mu\text{C}$$

$$\begin{cases} |q'_1 \cdot q'_2| = |2 \times 2| \\ d' = r - 75\%r = 25\%r = \frac{1}{4}r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{F'}{F} = \left| \frac{q'_1 \cdot q'_2}{q_1 \cdot q_2} \right| \times \left(\frac{d}{d'} \right)^2 = \frac{|2 \times 2|}{|8 \times 12|} \times \left(\frac{d}{\frac{1}{4}d} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{1}{24} \times 16 = \frac{2}{3} \times 100 \simeq 66\%$$

$$\Rightarrow \Delta F = F' - F = 66\%F - 100\%F = -33\%$$

$$d_v = 1/2 \omega d_1 \Rightarrow d_v = \frac{\omega}{4} d_1$$

$$\kappa_1 = 2, \kappa_v = 1 \Rightarrow \kappa_v = \frac{1}{2} \kappa_1$$

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} \Rightarrow \frac{C_v}{C_1} = \frac{\kappa_v}{\kappa_1} \times \frac{d_1}{d_v} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\omega} = \frac{2}{\omega} \Rightarrow C_v = 0/4 C_1$$

یعنی ظرفیت ۶۰ درصد کاهش یافته است.

نکته ۱: به تعداد نقاطی که نمودار سرعت - زمان از محور t عبور می‌کند جهت حرکت (و نیز علامت سرعت متحرک) عوض شده است. پس در این سؤال $a = 1$ می‌باشد.

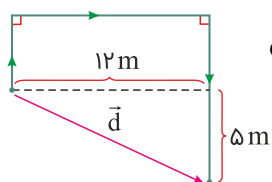
نکته ۲: به تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نمودار سرعت زمان، جهت شتاب حرکت (و علامت آن) عوض شده است. پس در این سؤال $b = 2$ است.

نکته ۳: در نمودار $v - t$ هرگاه نمودار به محور t نزدیک شود حرکت کند شونده است و هرگاه از محور t دور شود حرکت تند شونده است.

در شکل این سؤال ابتدا حرکت کند شونده و سپس تند شونده و دوباره کند شونده و نهایتاً تند شونده است. پس ۳ بار نوع حرکت عوض شده است پس $c = 3$ است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6$$

جابه‌جایی برداری است که مکان آغازین را به مکان پایانی وصل می‌کند. اندازه جابه‌جایی برابر است با:



$$d = \sqrt{(5m)^2 + (12m)^2} = 13m$$

مسافت طی شده برابر با طول مسیر است:

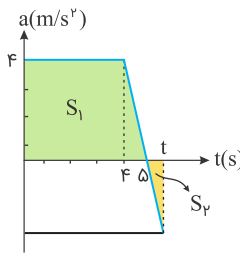
$$\ell = 4m + 12m + 9m = 25m$$

نسبت اندازه جابه‌جایی به مسافت طی شده برابر است با:

$$\frac{d}{\ell} = \frac{13m}{25m} = 0/52$$

بردار شتاب متوسط، همواره هم‌جهت با بردار تغییرات سرعت است. سایر گزینه‌ها به موارد درستی اشاره می‌کنند.

سطح محصور بین نمودار شتاب- زمان با محور زمان برابر تغییر سرعت است، متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده، پس سرعت اولیه $v_0 = 0$ است. برای آن که متحرک مجدداً متوقف شود باید تغییر سرعت آن صفر شود یعنی سطح زیر نمودار صفر شود.



$$\Delta v = 0 \Rightarrow S_1 = S_2 \Rightarrow 16 + 2 = \frac{(t - 2) \times a}{2} \Rightarrow (t - 2) \times a = 36 \quad (I)$$

از طرفی چون شیب خط در ثانیه ۴ تا t ثابت است، پس داریم:

$$\frac{4}{2 - 4} = \frac{a}{t - 2} \Rightarrow 4(t - 2) = a \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow (t - 2) \times 4(t - 2) = 36 \Rightarrow (t - 2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} t - 2 = 3 \\ t - 2 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 5 \text{ s} \\ t = -1 \text{ s} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

دقت کنید t به عنوان مجهول بعد از ثانیه ۵ نوشته شده است، پس $t = 5 \text{ s}$ غیر قابل قبول می باشد.



گام اول: متحرک با سرعت ثابت v مسیر مستقیم را طی می‌کند، بنابراین معادله مکان- زمان آن به صورت زیر است:

$$x = vt$$

اکنون با فرض اینکه متحرک، مسیر ۶۰ متری را در مدت t_1 بپیماید، داریم:

$$۶۰ = vt_1 \quad (I)$$

گام دوم: اگر متحرک ۵ m/s به سرعت خود بیفزاید، مسیر موردنظر را ۲ ثانیه زودتر به پایان می‌رساند، پس:

$$۶۰ = (v + ۵)(t_1 - ۲) \quad (II)$$

گام سوم: سمت چپ رابطه‌های (I) و (II) با یکدیگر مساوی است؛ بنابراین سمت راست آن‌ها نیز با یکدیگر مساوی است:

$$vt_1 = (v + ۵)(t_1 - ۲) \Rightarrow \cancel{vt_1} = \cancel{vt_1} - ۲v + ۵t_1 - ۱۰ \\ \Rightarrow ۲v = ۵t_1 - ۱۰ \Rightarrow v = ۲/۵t_1 - ۵ \quad (III)$$

گام چهارم: اکنون کافی است تا v از رابطه (III) را در رابطه (I) قرار بدهیم و مقادیر v و t_1 را به دست آوریم:

$$(I) : ۶۰ = vt_1 \xrightarrow{(III)} ۶۰ = (۲/۵t_1 - ۵)t_1 \Rightarrow ۶۰ = ۲/۵t_1^2 - ۵t_1 \\ \Rightarrow t_1^2 - ۲t_1 - ۱۵۰ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t_1 = ۱۵ \text{ s} \\ t_1 = -۱۰ \text{ s} \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$$۶۰ = vt_1 \Rightarrow ۶۰ = v \times ۱۵ \Rightarrow v = ۴ \text{ m/s}$$

بنابراین معادله مکان- زمان متحرک به صورت زیر خواهد شد و با استفاده از آن می‌توان مسافتی که متحرک در مدت ۴ s می‌پیماید را به دست آورد.

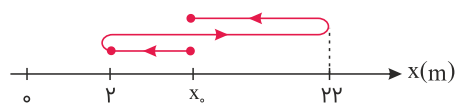
$$x = vt \Rightarrow x = ۴t$$

$$x_۴ = ۴ \times ۴ = ۱۶ \text{ m}$$

و در پایان خواسته سوال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x_۴}{x_{کل}} = \frac{۱۶}{۶۰} = \frac{۴}{۱۵}$$

اطلاعات مربوط به شتاب و شیب خط مماس برای پیدا کردن مسافت غیرضروری هستند و نیازی به آن‌ها نیست. باتوجه به نمودار مسافت طی شده در ۶ ثانیه نخست برابر است با:

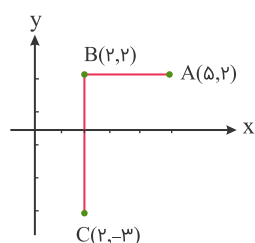


$$\ell = (x_0 - 2) + (22 - 2) + (22 - x_0) = 40 \text{ m}$$

تندی متوسط در این بازه برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} \text{ m/s}$$

محل نقاط A و B و C را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم:



$$\ell = AB + BC = 3 + 5 = 8 \text{ m}$$



گام اول: معادله مکان- زمان هریک را می‌نویسیم:

$$v_A = \frac{15}{3} = 5 \text{ m/s} \Rightarrow x_A = 5t - 15$$

$$v_B = \frac{-20}{5/5} = -4 \text{ m/s} \Rightarrow x_B = -4t + 30$$

گام دوم: لحظه‌ای که به هم می‌رسند را به دست می‌آوریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 5t_1 - 15 = -4t_1 + 30 \Rightarrow 9t_1 = 45 \Rightarrow t_1 = 5 \text{ s}$$

گام سوم: لحظه‌ای که برای دومین بار به فاصله ۳۶m از هم می‌رسند را محاسبه می‌کنیم:

$$x_A - x_B = 36 \Rightarrow 5t_2 - 15 - (-4t_2 + 30) = 36 \\ \Rightarrow 9t_2 = 36 + 45 \Rightarrow t_2 = 9 \text{ s}$$

$t_2 - t_1 = 9 - 5 = 4 \text{ s}$ بنابراین ۴s پس از آنکه از کنار هم عبور می‌کنند، فاصله آن‌ها به ۳۶m می‌رسد.



با فرض اینکه در مبدأ زمان، متحرک A در مبدأ مکان قرار داشته باشد، متحرک B در مکان $x_{OB} = 1000\text{m}$ قرار دارد؛ بنابراین معادلات مکان-زمان دو متحرک A و B در دو حالت موردنظر تست به صورت زیر خواهد شد:

حالت اول: دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند.



$$x_A = v_A t$$

$$x_B = -v_B t + 1000$$

$$t = 10\text{s} \Rightarrow x_A = x_B$$

$$\Rightarrow v_A \times 10 = -v_B \times 10 + 1000$$

$$\Rightarrow 10v_A + 10v_B = 1000$$

$$\Rightarrow v_A + v_B = 100 \quad (\text{I})$$

حالت دوم: دو متحرک در یک جهت حرکت می‌کنند.



$$x_A = v_A t$$

$$x_B = v_B t + 1000$$

$$t = 20\text{s} \Rightarrow x_A = x_B$$

$$\Rightarrow v_A \times 20 = v_B \times 20 + 1000$$

$$\Rightarrow v_A - v_B = 50 \quad (\text{II})$$

در پایان با استفاده از دو رابطه (I) و (II)، v_A و v_B را به دست می‌آوریم:

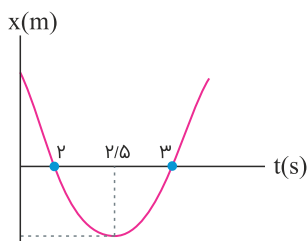
$$v_A = 75 \text{ m/s}$$

$$v_B = 25 \text{ m/s}$$

روش اول: اگر $xv > 0$ باشد متحرک در حال دور شدن از مبدأ مکان و اگر $xv < 0$ باشد متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است.
بنابراین در بازه‌های $(0 - 2s)$ و $(2/5s - 3s)$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است.

t(s)	۲	۲/۵	۳
x	+	-	+
v	-	+	+
xv	-	+	+

روش دوم: می‌توان نمودار مکان-زمان را با استفاده از اینکه نمودار سهمی است رسم کرد.



$$x = t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3)$$

باتوجه به نمودار متحرک در بازه‌های $(0 - 2s)$ و $(2/5s - 3s)$ در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است.



گام اول: با فرض اینکه t_1 لحظه‌ای باشد که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند و t_2 لحظه‌ای باشد که متحرک B، به مقدار $3/5 \text{ m/s}$ بر سرعت خود بیفزاید. باتوجه به شکل زیر، داریم:

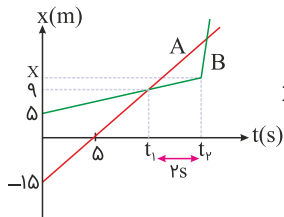
معادله مکان- زمان متحرک A:

$$x_A = 3t - 15 \Rightarrow 9 = 3t_1 - 15 \Rightarrow t_1 = 8 \text{ s}$$

$$t_2 = t_1 + 2 = 8 + 2 = 10 \text{ s} \Rightarrow x_B = v_B t + 5 \Rightarrow 9 = v_B t_1 + 5$$

$$\Rightarrow 9 = v_B \times 8 + 5 \Rightarrow v_B = \frac{1}{2} \text{ m/s}$$

معادله مکان- زمان متحرک B:



$$x_B = \frac{1}{2}t + 5$$

گام دوم: از لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ به بعد، متحرک B بر سرعت خود به مقدار $3/5 \text{ m/s}$ می‌افزاید، بنابراین:

$$v'_B = v_B + 3/5 = 0/5 + 3/5 = 4 \text{ m/s}$$

و از طرفی مکان متحرک B، در لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ برابر است با:

$$x_B = \frac{1}{2}t + 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \times 10 + 5 = 10 \text{ m}$$

درنتیجه معادله مکان- زمان متحرک B بعد از لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ به صورت زیر خواهد شد:

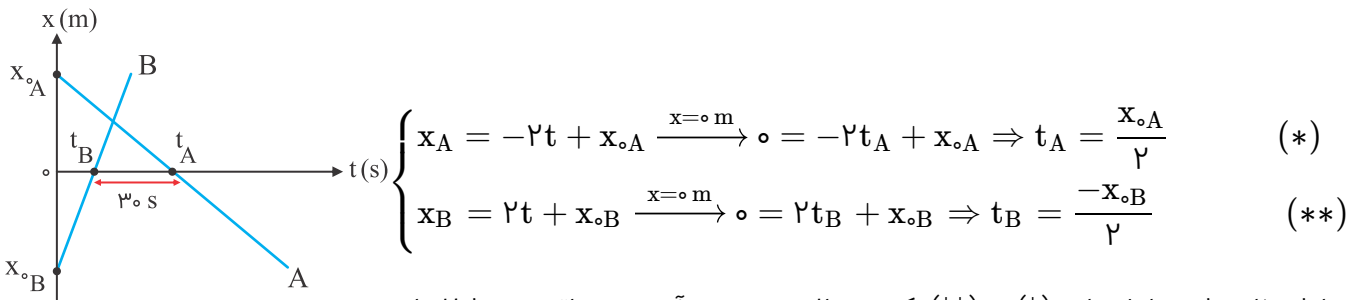
$$x'_B = v'_B t + x'_{B_0} \Rightarrow v'_B = 4t - 30$$

گام سوم: در پایان، لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند را به دست می‌آوریم:

$$x'_B = x_A \Rightarrow 4t - 30 = 3t - 15 \Rightarrow t = 15 \text{ s}$$

در لحظه تغییر جهت سرعت متحرک صفر است اما می‌تواند شتاب داشته باشد؛ مانند تغییر جهت یک گلوله در نقطه اوجش.

در حقیقت خواسته سؤال $|x_{oA}| - |x_{oB}|$ است که چون $x_{oA} > 0$ و $x_{oB} < 0$ است، کافی است $x_{oA} + x_{oB}$ را به دست بیاوریم تا به پاسخ برسیم. در ابتدا با استفاده از رابطه حرکت با سرعت ثابت، معادله حرکت دو متحرک A و B را می‌نویسیم:



حال با استفاده از معادله‌های (*) و (**) که در بالا به دست آمدند و باتوجه به اطلاعات داده شده روی نمودار داریم:

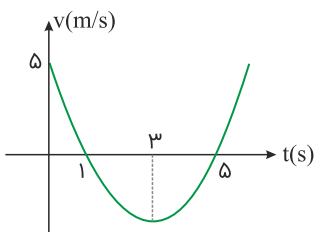
$$t_A - t_B = 3.0 \text{ s} \xrightarrow{(*), (**)} \frac{x_{oA}}{v} + \frac{x_{oB}}{v} = 3.0 \Rightarrow x_{oA} + x_{oB} = 6.0 \text{ m}$$

نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

$$v = t^2 - 6t + 5 \xrightarrow{t=0} v = 5 \text{ m/s}$$

$$v = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s}, 5 \text{ s}$$

$$t_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times 1} = 3 \text{ s}$$

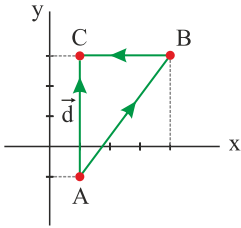


باتوجه به نمودار مشخص است که در لحظه $t = 3 \text{ s}$ شیب خط مماس بر نمودار موازی محور زمان بوده و بنابراین شتاب حرکت در آن صفر است.

همچنین سرعت متحرک در لحظه‌های $t = 1 \text{ s}$ و $t = 5 \text{ s}$ صفر است، بنابراین متحرک در این لحظات تغییر جهت می‌دهد و در نتیجه شتاب متوسط در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 5 \text{ s}$ برابر است با:

$$a_{av} = \frac{|v_2 - v_1|}{t_2 - t_1} = \frac{|0 - 5|}{5 - 0} = \frac{5}{5} = 1 \text{ m/s}^2$$

مسیر حرکت متحرک مطابق شکل زیر است.



باتوجه به مسیر اندازه بردار جابه جایی و مسافت طی شده برابر است با:

$$d = ۴ \text{ m}$$

$$\ell = \overline{AB} + \overline{BC} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} + ۳ = ۵ + ۳ = ۸ \text{ m}$$

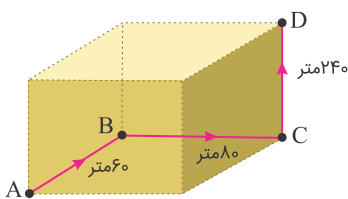
نسبت اندازه جابه جایی به مسافت طی شده برابر است با:

$$\frac{d}{\ell} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

در مرحله اول باید بدانیم که: $\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}} = \text{تندی}$ و چون تندی ثابت است، پس متوسط آن همان ۱۰ m/s است و در نتیجه با جمع کردن کل مسیر پرواز یعنی: $۱۲۰ + ۸۰ + ۶۰ + ۲۴۰ = ۵۰۰ \text{ متر}$ مسافت طی شده به دست می آید و داریم:

$$\frac{۵۰۰}{\text{زمان}} = ۱۰ \Rightarrow ۵۰ \text{ s} = \text{زمان حرکت}$$

برای یافتن جابه جایی کافی است بدانیم نهایتاً پرنده $۶۰ - ۱۲۰ = ۶۰ \text{ متر}$ به سمت شمال و ۸۰ متر به شرق و ۱۲۰ متر به بالا رفته است، یعنی اضلاع یک مکعب مستطیل به صورت زیر:

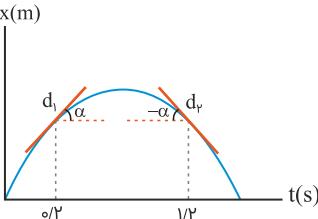


$$\text{جابه جایی} = \sqrt{\underbrace{۶۰^۲ + ۸۰^۲}_{۱۰۰^۲} + ۲۴۰^۲} = \sqrt{۱۰۰^۲ + ۲۴۰^۲} = ۲۶۰ \text{ متر}$$

$$v_{av} = \frac{\text{جابه جایی}}{\text{زمان}} = \frac{۲۶۰}{۵۰} = ۵/۲ \text{ m/s}$$

$$S_{av} - v_{av} = ۱۰ - ۵/۲ = ۴/۸ \text{ m/s}$$

در دو لحظه نشان داده شده، شیب خط مماس بر نمودار دارای مقدارهای یکسان است، یعنی تندى در این دو لحظه باهم برابر است. از طرفی علامت سرعت در این دو لحظه قرینه یکدیگر است؛ پس با استفاده از معادله محاسبه شتاب متوسط می‌توان نوشت:



$$\left. \begin{aligned} a_{av} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{t_2} - v_{t_1}}{t_2 - t_1} \\ v_{t_2} &= -v_{t_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_{av} = \frac{-2v_{t_1}}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow -2 = \frac{-2v_{t_1}}{1/2 - 0/2} \Rightarrow -2v_{t_1} = -2 \Rightarrow v_{t_1} = 1 \text{ m/s} \Rightarrow v_{t_2} = -1 \text{ m/s}$$

اگر متحرک تغییر جهت ندهد اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان خواهد بود. می‌دانیم متحرک در نمودار مکان - زمان در رئوس سهمی تغییر جهت می‌دهد پس فقط در بازه t_2 تا t_4 اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان نیست.

متحرک در مدت 20 s ، 16 m را رفته و 16 m برگشته است؛ پس مسافتی برابر با 32 m را طی کرده است؛ بنابراین داریم:

$$S_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{32}{20} = 1.6 \text{ m/s}$$

متحرک در لحظه $t_1 = 10 \text{ s}$ در مکان $x_1 = 8 \text{ m}$ و در لحظه $t_2 = 20 \text{ s}$ در مکان $x_2 = 0$ است؛ بنابراین داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 8}{20 - 10} = -0.8 \text{ m/s}$$

حالا داریم:

$$\frac{S_{av}}{|v_{av}|} = \frac{1.6}{0.8} = 2$$

$$s_{av} = \frac{l_1 + l_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\frac{\Delta x}{\frac{4}{20}} + \frac{\Delta x}{\frac{4}{10}}}{\frac{\Delta x}{\frac{4}{20}} + \frac{\Delta x}{\frac{4}{10}}} = \frac{50}{3} \text{ m/s}$$

$$\Delta m = 2 \times \frac{6.022 \times 10^{23} \text{ الکترون}}{1 \text{ mol الکترون}} \times \frac{1 \text{ amu}}{2000 \text{ الکترون}} \times \frac{1/66 \times 10^{-24}}{1 \text{ amu}} = 10^{-3}$$

جرم مولی؛ یعنی جرم یک مول اتم، از این رو جرم $۱۰^{۲۳} \times ۶/۰۲$ اتم را محاسبه می‌کنیم:
روش اول:

$$? g = ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \times \frac{۰/۲۸}{۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۱}} = ۵۶ g$$

روش دوم:

$$\begin{array}{cc} \text{اتم} & \text{گرم} \\ ۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۱} & ۰/۲۸ \Rightarrow x = ۵۶ g \\ ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} & x \end{array}$$

همه عبارت‌های داده شده درست هستند.

- بین ایزوتوپ‌های ناپایدار ${}^3\text{H}$ ، ${}^4\text{H}$ ، از بقیه پایدارتر بوده و ${}^2\text{H}$ از بقیه ناپایدارتر است.

- در ایزوتوپ‌ها، عدد اتمی ثابت بوده و عدد جرمی متفاوت است؛ بنابراین تفاوت این دو هم یکسان نیست.

الف) عنصر موجود در دوره ۲ و گروه ۱۶ O

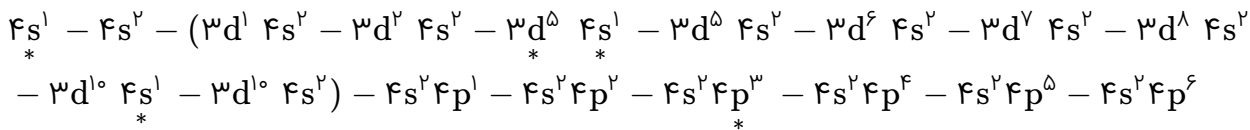
ب) عنصری از گروه دوم که ۳۸ الکترون دارد Sr

پ) گاز نجیبی که هم‌دوره با عنصر ${}_{۳۳}\text{As}$ است Kr

ت) عنصری از دوره ۴ و هم‌گروه با ${}^6\text{C}$ Ge

نسبت شمار کاتیون به آنیون	نام ترکیب	نسبت شمار آنیون به کاتیون	نام ترکیب
۲	(Na_2O) سدیم اکسید	۱	(LiF) لیتیم فلوئورید
۲	(K_2S) پتاسیم سولفید	$\frac{۱}{۳}$	(K_3N) پتاسیم نیتريد
$\frac{۱}{۲}$	(CaI_2) کلسیم یدید	۱	(MgO) منیزیم اکسید
$\frac{۱}{۳}$	(AlBr_3) آلومینیم برمید	$\frac{۲}{۳}$	(Ca_3N_2) کلسیم نیتريد

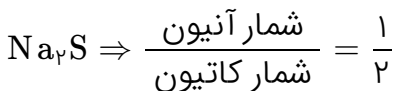
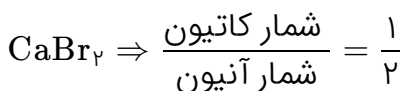
آرایش الکترونی آخرین لایه رسم شود کافی است، زیرا لایه‌های قبل از آن پر هستند.
آرایش الکترونی تمام عناصر تناوب ۴ (۳۶ - ۱۹) به قرار زیر است:



انتقال از $n = 5$ به $n = 2$ مربوط به رنگ آبی است و انتقال B کمترین انرژی و به تبع بیشترین طول موج را دارا است و انتقال A و D هر دو متعلق به محدوده نامرئی هستند.

اگر n برابر با ۶ یا ۷ باشد، حتماً می‌بایست پس از گاز نجیب زیرلایه f نیز دارای الکترون می‌بود.
هنگام تشکیل یون M^{2+} الکترون از دورترین زیرلایه جدا می‌شود؛ پس به $(n-1)d^5$ ختم خواهد شد.
یون‌های فلزهای واسطه ترکیب‌های رنگی را می‌سازند.

گزینه ۱: نادرست. فرمول شیمیایی آلومینیوم اکسید به صورت Al_2O_3 است. این فرمول از دو یون Al^{3+} و سه یون O^{2-} تشکیل شده است؛ پس شمار الکترون‌های مبادله شده برابر با ۶ است.
گزینه ۲: نادرست. در بسیاری از ترکیب‌های یونی دوتایی آرایش الکترونی کاتیون و آنیون متفاوت است. برای مثال CaF_2 ، $FeCl_2$ و ...
گزینه ۳: نادرست. کاتیون Li^+ به آرایش الکترونی هشتایی نمی‌رسد.
گزینه ۴: درست.



$10 = 2 + 8 = \text{الکترون‌های } d + \text{الکترون‌های } s = \text{شماره گروه}$

همه آلکن‌ها در واکنش با برم مایع قرمز رنگ، شرکت کرده و آن را بی‌رنگ می‌کنند؛ بنابراین از این واکنش می‌توان برای شناسایی آن‌ها از هیدروکربن‌های سیر شده استفاده کرد.

بررسی سایر عبارت‌ها:

ب) نادرست. پنتان از خانواده آلکان‌ها است که به اصطلاح سیرشده می‌باشد و تمایل چندانی به انجام واکنش‌های شیمیایی ندارد.
ت) نادرست. اگر شمار اتم‌های کربن آلکان‌ها بین ۱ تا ۴ باشد، در دمای اتاق حالت گازی شکل دارند.

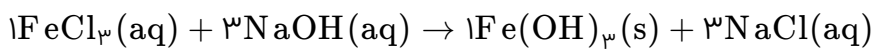
گام ۱: محاسبه مقدار مس:

$$\frac{80}{100} \text{ kg گیاه} \times \frac{20 \text{ g Cu}}{1 \text{ kg گیاه}} = 160 \text{ g Cu}$$

گام ۲: محاسبه مقدار آهن لازم برای تولید ۱۶۰ g مس:

$$\frac{20}{100} \text{ g Cu} \times \frac{1 \text{ mol Cu}}{63.5 \text{ g Cu}} \times \frac{1 \text{ mol Fe}}{1 \text{ mol Cu}} \times \frac{56 \text{ g Fe}}{1 \text{ mol Fe}} \times \frac{100 \text{ g Fe na khales}}{70 \text{ g Fe khales}} = 200 \text{ g}$$

معادله موازنه شده واکنش:



$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار فرآورده عملی}}{\text{مقدار فرآورده نظری}} \times 100$$

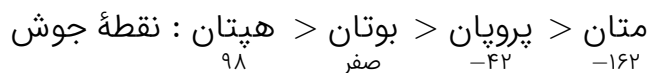
$$\Rightarrow 80 = \frac{42/8}{\text{مقدار فرآورده نظری}} \times 100 \Rightarrow \text{مقدار فرآورده نظری} = 53/5 \text{ g}$$

$$? \text{ g NaOH} : 53/5 \text{ g Fe}(\text{OH})_3 \times \frac{1 \text{ mol Fe}(\text{OH})_3}{107 \text{ g Fe}(\text{OH})_3} \times \frac{3 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ mol Fe}(\text{OH})_3} \times \frac{40 \text{ g NaOH}}{1 \text{ mol NaOH}} = 60 \text{ g NaOH}$$

$$\text{جرم حل‌شونده} - \text{جرم حلال (آب)} = 135 - 60 = 75 \text{ g}$$

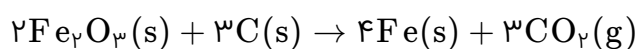
دو عنصر ^{14}Si و ^{32}Ge هر دو شبه‌فلز، دارای سطح صاف و صیقلی، رسانایی الکتریکی کم و عضو گروه ۱۴ جدول تناوبی هستند. همچنین هنگام واکنش با سایر عناصر، الکترون به اشتراک می‌گذارند.

با افزایش شمار کربن در هیدروکربن‌ها نقطه جوش افزایش می‌یابد، پس داریم:



عنصری که در یک گروه جدول تناوبی باشند، شباهت بیشتری به یکدیگر دارند. Al و Ga در گروه ۱۳ جدول دوره‌ای‌اند.

ابتدا معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:



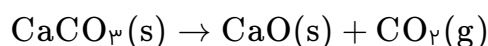
همانطور که ملاحظه می‌کنید، در این واکنش همه مواد حالت فیزیکی جامد دارند و فقط CO_2 حالت گازی داشته و ظرف واکنش را ترک می‌کند.

بنابراین تفاوت جرم جامد ثانویه و جامد اولیه دقیقاً به مقدار گاز CO_2 تولیدشده در این واکنش است. به عبارت دیگر کافی است بدون آنکه خودمان را درگیر محاسبات مربوط به درصد خلوص و بازده درصدی واکنش کنیم، از روی مقدار آهن تولیدشده، مقدار گاز CO_2 را به دست آوریم:

$$16/8 \text{ g Fe} \times \frac{1 \text{ mol Fe}}{56 \text{ g Fe}} \times \frac{3 \text{ mol CO}_2}{4 \text{ mol Fe}} \times \frac{44 \text{ g CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} = 9/9 \text{ g CO}_2$$

$$9/9 \text{ g} = \text{جرم تولیدشده CO}_2 = \text{تفاوت جرم مواد جامد ثانویه و مواد جامد اولیه}$$

جرم کاسته‌شده از واکنش برابر جرم گاز تولیدی در واکنش است، لذا داریم:



$$? \text{ g CaCO}_3 = 17/6 \text{ g CO}_2 \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{44 \text{ g CO}_2} \times \frac{1 \text{ mol CaCO}_3}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{100 \text{ g CaCO}_3}{1 \text{ mol CaCO}_3} = 40 \text{ g CaCO}_3$$

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم خالص}}{\text{جرم ناخالص}} \times 100 \Rightarrow \text{درصد خلوص} = \frac{40}{100} \times 100 = \%40$$

سیلیسیم و ژرمانیم سطح براقی دارند، اما در اثر ضربه خرد می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

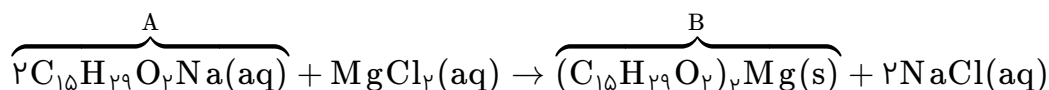
گزینه ۱: درست. کربن اولین نافلز دوره دوم جدول دوره‌ای است.

گزینه ۲: درست. گاز کلر و گوگرد، هر دو زرد هستند.

گزینه ۳: درست. خواص فیزیکی شبه‌فلزها شبیه فلزها و رفتار شیمیایی آن‌ها مانند نافلزها است.

گزینه ۱

۶۱



$$13/2 \text{ g A} \times \frac{1 \text{ mol A}}{264 \text{ g A}} \times \frac{1 \text{ mol B}}{2 \text{ mol A}} \times \frac{506 \text{ g B}}{1 \text{ mol B}} = 12/65 \simeq 12/7$$

گزینه ۳

۶۲

مخلوط آب و روغن و صابون یک کلوئید پایدار و ناهمگن است و حاوی توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت است و با رفتار نور در محلول رفتاری متفاوت دارند.

گزینه ۴

۶۳

اتانول، استون، اوره و صابون در آب و بنزن، وازلین، یُد، صابون و بنزین در هگزان حل می‌شوند.

گزینه ۴

۶۴

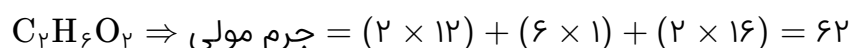
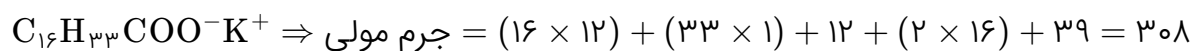
گزینه ۲

۶۵

با افزایش دما قدرت پاک‌کنندگی صابون افزایش می‌یابد، بنابراین لکه کمتری بر روی جسم باقی می‌ماند.

گزینه ۴

۶۶



$$\frac{308}{62} \simeq 5$$

گزینه ۱

۶۷

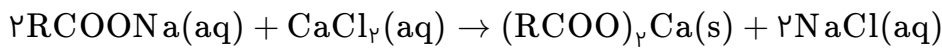
ضدیخ و اوره محلول در آب و بنزین، روغن زیتون و وازلین محلول در هگزان هستند.

گزینه ۴

۶۸

در نمودار داده‌شده حاصل ضرب $[H^+] \times [OH^-]$ باتوجه به اینکه در دمای اتاق مورد بررسی قرار گرفته است، به جای آنکه 10^{-14} باشد برابر 10^{-15} است.

طبق واکنش زیر Ca^{2+} با صابون واکنش داده و تولید رسوب می‌کند.



به همین دلیل میزان کف تولید شده کاهش می‌یابد.

سوسپانسیون همانند کلئیدها نور را پخش می‌کنند. ذره‌های سازندهٔ سوسپانسیون ذره‌های ریز ماده و ذره‌های سازنده محلول‌ها، یون‌ها و مولکول‌ها است.

رابطهٔ تقسیم به صورت $bq + (b - 5) = -56$ است که $b - 5 < b \leq 0$. حال داریم:

$$\underbrace{-3 \times 17 = -1 \times 51}_{-51} = b(q + 1) \xrightarrow{5 \leq b} \min(b) = 17 \Rightarrow q + 1 = -3 \Rightarrow q = -4$$

نکته: $a^m + b^m | a^n + b^n$ برقرار است هرگاه $\frac{n}{m}$ فرد باشد.

$$\begin{aligned} 76 &= 7^2 + 3^3 \Rightarrow 7^2 + 3^3 | (7^2)^{15} + (3^3)^{15} \\ &\Rightarrow 7^2 + 3^3 | 3 \times (7^2)^{15} + (3^3)^{15} \times 3 \Rightarrow 7^2 + 3^3 | 3 \times 7^{30} + 3^{46} \end{aligned}$$

درنتیجه باقی‌ماندهٔ تقسیم $1 + 3^{46} + 3 \times 7^{30}$ بر ۷۶ برابر ۱ خواهد بود.

گزینه "۱": به ازای $a = 0$ رد می‌شود.

گزینه "۲": به ازای $n = 41$ رد می‌شود.

گزینه "۳": به ازای $x = 1$ رد می‌شود.

گزینه "۴": با استدلال اثبات می‌شود.

گزینه‌های (الف) و (ب) هم‌ارزند.

$$\text{ج) } a = -4, b = 1 \Rightarrow -4 < 1, 16 \not\leq 1$$

$$\text{د) } a^2 = b^2 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases} : a = 1, b = -1 \Rightarrow (1)^2 = (-1)^2, (1) \neq -1$$

می‌دانیم اگر $۱ < a < ۰$ باشد الزاماً $a^۲ < a$ است. بین اعداد گزینه‌ها فقط $۱ < \sqrt{۲} - ۱ < ۰$ است.

گزاره صورت تست در حالت کلی نادرست است و گزینه (۳) مثال نقض برای آن است.

$$(۳a - ۲b)(\sqrt{۵} + \sqrt{۷}) + ۶a + ۶b = ۶$$

$$\begin{cases} ۳a - ۲b = ۰ \\ a + b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{۲}{۵}, b = \frac{۳}{۵} \Rightarrow a - b = \frac{-۱}{۵}$$

$$\begin{array}{r|l} ۱۵۳ & b \\ \vdots & \frac{۱}{۳}(b-۱) - ۱ \\ \hline & b-۱ \end{array}$$

$$\Rightarrow ۱۵۳ = b\left(\frac{۱}{۳}(b-۱) - ۱\right) + b - ۱ \Rightarrow ۱۵۳ = \frac{۱}{۳}b^۲ - \frac{۱}{۳}b + ۱$$

$$\Rightarrow b^۲ - b - ۴۶۲ = ۰ \Rightarrow (b - ۲۲)(b + ۲۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} b = ۲۲ \\ b = -۲۱ \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

واضح است که بزرگ‌ترین عدد اولی که ۲۲ را عاد می‌کند، ۱۱ است.

$$\left. \begin{array}{l} n+۳ \mid ۲n^۲ - ۵n - ۴ \\ ۲n^۲ - ۵n - ۴ = (n+۳)(۲n-۱۱) + ۲۹ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n+۳ \mid (n+۳)(۲n-۱۱) + ۲۹ \\ n+۳ \mid (n+۳)(۲n-۱۱) \end{array}$$

$$\Rightarrow n+۳ \mid ۲۹ \Rightarrow \begin{cases} n+۳ = ۱ \Rightarrow n = -۲ \\ n+۳ = ۲۹ \Rightarrow n = ۲۶ \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$a = bq + r \Rightarrow a + ۱۰۰ = (b + ۴)q + r - ۸$$

$$\Rightarrow \cancel{bq} + \cancel{r} + ۱۰۰ = \cancel{bq} + ۴q + \cancel{r} - ۸$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ = ۴q - ۸ \Rightarrow ۴q = ۱۰۸ \Rightarrow q = ۲۷$$

چون A ماتریس قطری است، پس تمام درایه‌های خارج قطر اصلی صفر است پس باید هر جا $i = j$ باشد صفر شود، پس:

$$\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + x - 6} = 0 \Rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$$

پس $x = \pm 2$ و $x = \pm 3$ چون معادله گویا است، پس ریشه‌های مخرج نباید در جواب‌ها باشد. اگر $x^2 + x - 6 = 0$ باشد،
 $x = 2$ و $x = -3$ است، در نتیجه فقط $x = -2$ و $x = 3$ قبول است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

در حالت $i = j$ داریم: $a_{ij} = \frac{xi}{j(x+2)}$

چون $i = j$ پس تمام درایه‌های اصلی به صورت $\frac{x}{x+2}$ می‌شود که در این صورت $x = -2$ نیز چون مخرج صفر می‌کند، قابل قبول نیست، پس $x = 3$ قابل قبول است، پس داریم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

یعنی $A = \frac{3}{5}I_4$ ، پس گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا سمت چپ را ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3+2-2x & 3x+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = 5 - 2x + 3x^2 + 2x = 3x^2 + 5$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 5 = 15x + 2 \Rightarrow 3x^2 - 15x + 3 = 0$$

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $3x^2 - 15x + 3 = 0$ باشند، داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P = \left(\frac{15}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{3}\right) = 23$$

ابتدا ماتریس A را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۶ & ۱۱ \\ ۵ & ۸ & ۱۳ \\ ۷ & ۱۰ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های روی قطر اصلی} = ۳ + ۸ + ۱۵ = ۱۱ + ۱۵ = ۲۶$$

ماتریس مربعی همواره به صورت $n \times n$ است، پس n^2 درایه داریم در نتیجه $n^2 = ۱۶$ و $n = ۴$. دقت کنید چون n مرتبه است، پس n عددی طبیعی است. پس این ماتریس، ۴×۴ می‌باشد. می‌دانیم درایه‌های روی قطر اصلی همواره به صورت a_{ij} است که $j = i$. چون درایه‌های روی قطر اصلی، مکعب شماره سطر خود است، پس اعضاء روی قطر اصلی به صورت i^3 می‌باشد (i شماره سطر).

پس $a_{۱۱} = ۱^3$, $a_{۲۲} = ۲^3$, $a_{۳۳} = ۳^3$ و $a_{۴۴} = ۴^3$ و بقیه اعضاء باتوجه به رابطه یک واحد بیشتر بودن نسبت به عضو سمت راست خود ساخته می‌شود.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ \\ ۲۵ & ۲۶ & ۲۷ & ۲۸ \\ ۶۱ & ۶۲ & ۶۳ & ۶۴ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی برابر است با:

$$۱^3 + ۲^3 + ۳^3 + ۴^3 = ۱ + ۸ + ۲۷ + ۶۴ = ۱۰۰$$

مجموع درایه روی سطر اول و دوم:

$$(۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰) - (۵ + ۶) = \frac{۱۰ \times ۱۱}{۲} - ۱۱ = ۵۵ - ۱۱ = ۴۴$$

پس:

$$۱۰۰ - ۴۴ = ۵۶$$

لذا گزینه ۳ صحیح است.

نکته:

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{۲}$$

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + n^۲ = \frac{n(n+1)(۲n+1)}{۶}$$

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + n^۳ = \left(\frac{n(n+1)}{۲}\right)^۲$$

$$\begin{aligned}(A - B)(A + B) &= A^2 + AB - BA - B^2 \\ &= A^2 + AB - (-AB) - B^2 = A^2 + 2AB - B^2\end{aligned}$$

طبق فرض، داریم:

$$\begin{aligned}A &= I + A^2 \Rightarrow A^2 - A + I = \bar{O} \\ \xrightarrow{\times (A+I)} (A + I)(A^2 - A + I) &= (A + I) \times \bar{O} \Rightarrow A^3 + I = \bar{O} \\ \Rightarrow A^3 &= -I \quad (*) \\ A^{100} &= (A^3)^{33} A = (-I)^{33} A = -I^{33} A = -IA = -A \\ &\quad \downarrow \\ &\quad (*)\end{aligned}$$

می‌دانیم هر ماتریس از چند سطر و چند ستون تشکیل شده است.
در ماتریس سطری همواره یک سطر و چند ستون داریم.
گزینه ۱: ماتریس یک ستون و ۳ سطر از مرتبه 1×3 است.
گزینه ۲: ماتریس یک سطر و چهار ستون دارد، مرتبه آن 1×4 .
گزینه ۳: ماتریس مربعی از مرتبه 2×2 است.
گزینه ۴: ماتریس ۲ سطر و ۳ ستون دارد. مرتبه آن، 2×3 است.
پس گزینه ۲ صحیح است.
نکته: ماتریس سطری، همواره از مرتبه $1 \times n$ است (یک سطر و n ستون).

جمع و تفریق ماتریس‌ها هنگامی قابل تعریف است که ماتریس‌ها هم‌مرتبه باشند. در بین ماتریس‌های داده شده تنها ماتریس‌های D و B هم‌مرتبه هستند؛ بنابراین فقط $2D - B$ و $D + B$ در آن‌ها قابل تعریف است؛ پس گزینه "۲" صحیح خواهد بود.

چون درایه‌های ماتریس A و B از ماتریس T هستند و A ماتریس قطری است، پس ماتریس A را از درون T به صورت زیر می‌سازیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

پس:

$$T = A + B \Rightarrow B = T - A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه } B} -B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۴ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

اعضای روی قطر فرعی ماتریس A، $\cos \alpha$ و $\cos \beta - ۱$ است که:

$$\begin{cases} \cos \alpha = ۰ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \dots \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos \beta - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos \beta = ۱ \Rightarrow \beta = ۰, ۲\pi, \dots \Rightarrow \beta = ۲k\pi \end{cases}$$

اگر $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ باشد، $\sin(k\pi + \frac{\pi}{۲}) = \begin{cases} ۱ & ; k \text{ زوج} \\ -۱ & ; k \text{ فرد} \end{cases}$ است، پس $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha + ۱ & ۰ \\ ۰ & \sin \beta - ۲ \end{bmatrix}$.
در ضمن اگر $\beta = ۲k\pi$ باشد، پس $\sin(۲k\pi) = ۰$ است. لذا برای A، ۲ حالت داریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

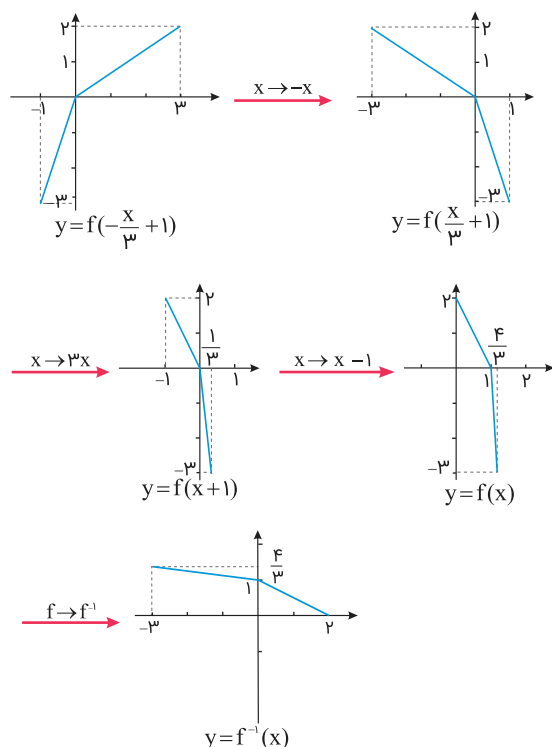
پس ماتریس B برابر است با:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}$$

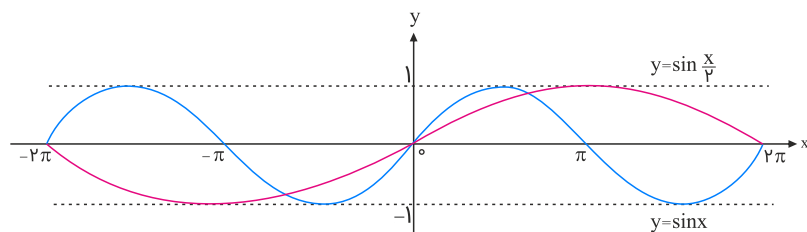
پس اعضای روی قطر اصلی ماتریس B می‌شود ۲ و -۴، پس حاصل ضرب آن‌ها (-۸) می‌شود، لذا گزینه ۲ صحیح است.

برای رسم این نمودار، نقاط مشخص شده نمودار f را یک واحد به سمت چپ برده و سپس طول آن‌ها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم؛ درواقع اگر $A(x_0, y_0)$ یک نقطه از f باشد، آنگاه $A'(\frac{x_0 - ۱}{۲}, y_0)$ نقطه متناظر آن روی نمودار g است.
پس با انتقال نقطه $(۵, ۰)$ به جواب سوال می‌رسیم:

$$A(۵, ۰) \Rightarrow A'(\frac{۵ - ۱}{۲}, ۰) \Rightarrow A'(۲, ۰)$$

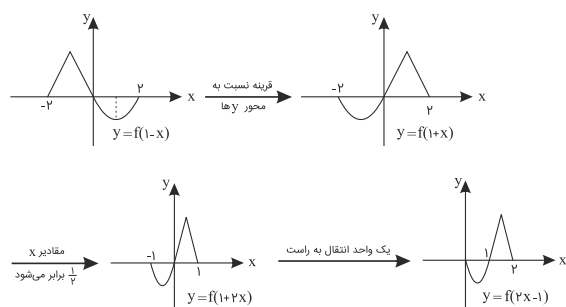


نمودار توابع را رسم می‌کنیم:



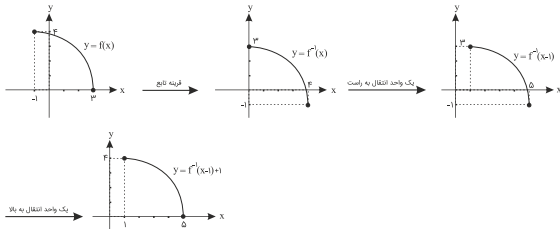
مطابق شکل دو نمودار در فاصله $(-2\pi, 2\pi)$ در سه نقطه باهم برخورد می‌کنند.

$$y = f(1 - x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y = f(1 + x) \xrightarrow{\text{طول نقاط تقسیم بر دو}} y = f(1 + 2x) \xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به راست}} y = f(1 + 2(x - 1)) = f(2x - 1)$$

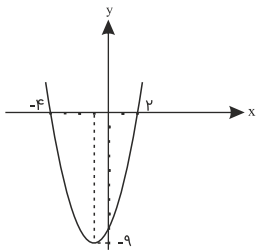


$$f(x) \xrightarrow{\text{طول نقاط سه برابر شده است}} f\left(\frac{x}{3}\right) \xrightarrow{\text{دو واحد انتقال به چپ}} f\left(\frac{x+2}{3}\right) = f\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

ابتدا نمودار $y = f(x)$ را نسبت به $y = x$ قرینه می‌کنیم، سپس یک واحد به راست و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا $y = f^{-1}(x-1) + 1$ به دست آید.

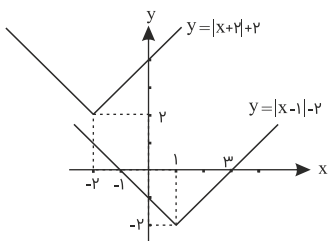


$$y = x^2 + 2x - 4 = (x + 1)(x - 2) \Rightarrow x = -1, x = 2$$



باید حداقل ۴ واحد به راست انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نامنفی شود.

$$f(x) = |x-1| - 2 \xrightarrow{\text{سه واحد انتقال به چپ}} |x+3-1| - 2 = |x+2| - 2 \xrightarrow{\text{چهار واحد انتقال به بالا}} |x+2| + 2$$



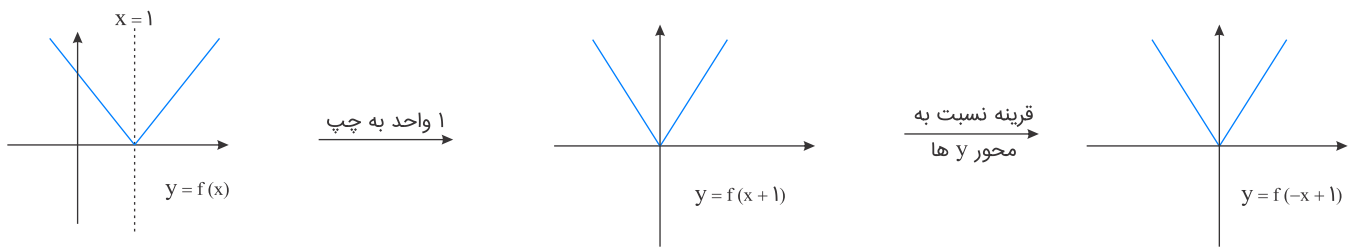
همانطور که از شکل مشخص است، این دو نمودار در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

برای رسم تابع $f(1-x)$ باید مراحل زیر را طی کنیم:

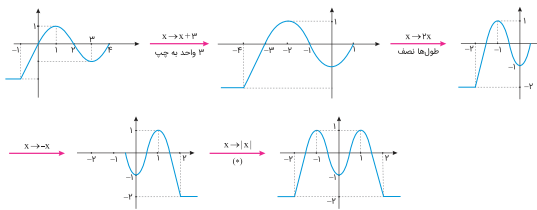
۱) ابتدا در تابع $y = f(x)$ به جای x قرار دهیم $x+1$ ، یعنی تابع f را ۱ واحد به سمت چپ ببریم تا تابع $y = f(x+1)$ ایجاد شود.

۲) در تابع مرحله قبل به جای x قرار دهیم $-x$ تا تابع $y = f(-x+1)$ ایجاد شود؛ یعنی تابع $y = f(x+1)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

حال اگر تابع قسمت ۱ و ۲ یکسان باشند، این یعنی تابع f ، تابعی است که اگر ۱ واحد آن را به سمت چپ ببریم با تابعی که اگر ۱ واحد به سمت چپ ببریم و سپس نسبت به محور y ها قرینه کنیم تفاوتی ندارد. پس $x=1$ باید محور تقارن این تابع باشد. به شکل زیر دقت کنید:



(*) برای رسم نمودار $y = f(|x|)$ به کمک نمودار $y = f(x)$ ابتدا قسمت‌های سمت چپ محور y ها را حذف می‌کنیم و سپس قرینه قسمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.



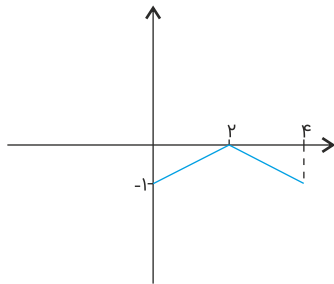
$$f(x) = -x(x^2 - 3x + 3) = -x^3 + 3x^2 - 3x = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 1 \\ = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 1 = -(x-1)^3 - 1$$

برای رسم تابع $-(x-1)^3 - 1$ کافی است تابع x^3 را یک واحد در جهت افقی به سمت راست منتقل کرده سپس نسبت به محور x ها قرینه و در نهایت یک واحد در جهت عمودی به پایین منتقل کنیم.

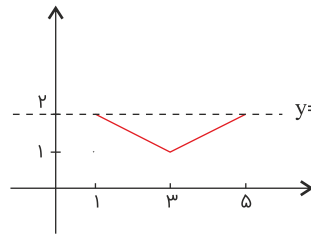
تابع $f(x)$ با تقسیم بر ۲ شدن، دامنه‌اش به $f(2x)$ تبدیل شده است. با انتقال یک واحد به سمت پایین نمودار بالا به برد f می‌رسیم:

$$D_f = [0, 4] \quad , \quad R_f = [-1, 0]$$

نمودار f در شکل زیر رسم شده است:



برای رسم $y = 1 - f(x - 1)$ ابتدا نمودار f را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده و در آخر یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. نمودار نهایی به صورت زیر است:

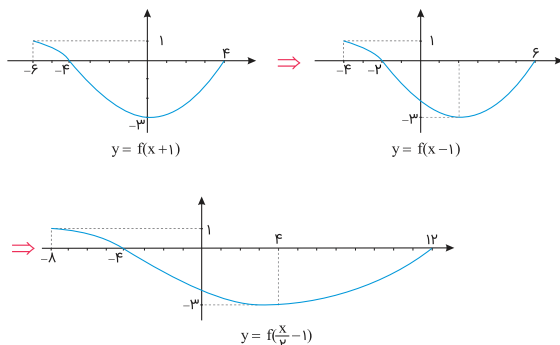


$$S = \frac{4 \times 1}{2} = 2$$

اگر عملیات گفته شده در مسئله را اعمال کنیم، به تابع $1 + \sqrt{x+1}$ می‌رسیم. حال دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم تا نقطه برخورد را محاسبه کنیم:

$$1 + \sqrt{x+1} = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان دو}} 1 + x + 1 + 2\sqrt{x+1} = x \\ \Rightarrow 1 + \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow \text{معادله فاقد ریشه است.}$$

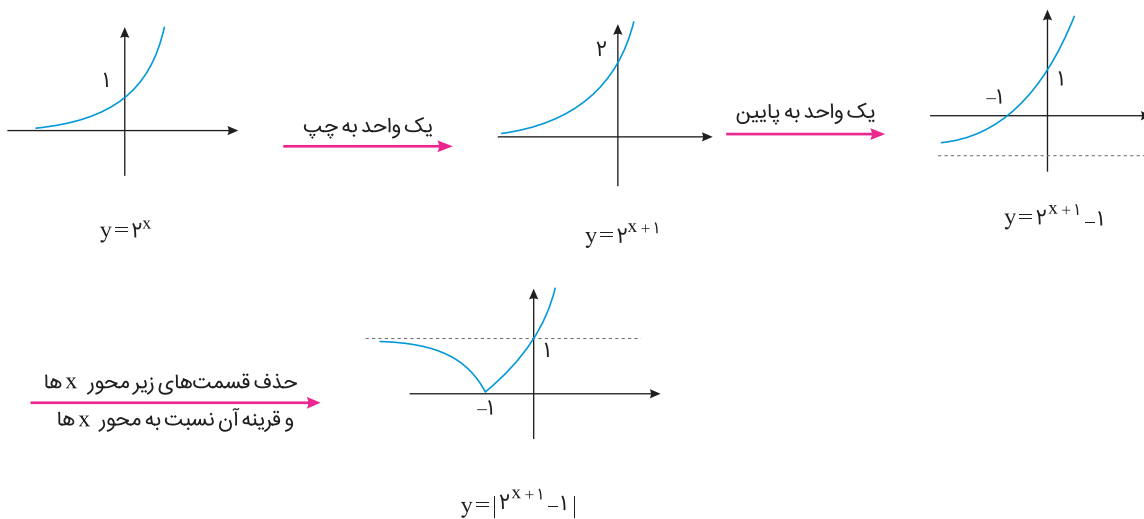
پس نمودارهای دو تابع یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



نمودار $f(bx)$ نسبت به $f(x)$ ، ۲ برابر و در جهت محور x ها فشرده شده است، پس $b = ۲$ است. نمودار $f(ax)$ نسبت به $f(x)$ ، ۲ برابر در جهت محور x ها باز شده است، پس $a = \frac{1}{۲}$ است.

$$a + b = \frac{1}{۲} + ۲ = \frac{۵}{۲}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{۲^{۲x+۲} - ۲^{x+۲} + ۱} = \sqrt{۲^{۲(x+۱)} - ۲^{x+۱+۱} + ۱} \\ &= \sqrt{(۲^{x+۱})^۲ - ۲(۲^{x+۱}) + ۱} = \sqrt{(۲^{x+۱} - ۱)^۲} = |۲^{x+۱} - ۱| \end{aligned}$$



از نمودار مشخص است که $-۱ \leq f(x) \leq ۲$ است، پس $f(۲x)$ هم در همین فاصله است.

$$-۱ \leq f(۲x) \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq -f(۲x) \leq ۱ \xrightarrow{+۱} -۱ \leq ۱ - f(۲x) \leq ۲$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال}} ۰ \leq \sqrt{۱ - f(۲x)} \leq \sqrt{۲} \Rightarrow \text{برد: } [۰, \sqrt{۲}]$$

باید ببینیم چه کارهایی روی $y = |x|$ می‌توان اعمال کرد که به تابع g تبدیل شود. در گام نخست تابع $|x|$ را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و بعد نمودار را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اما باید توجه داشت که چه اتفاقی رخ داده که $g(۰) = -\frac{۷}{۳}$ شده است. قطعاً ضریب مانند a پشت $|x - ۲|$ قرار داشته که این اتفاق افتاده؛ بنابراین a را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = -a|x - ۲| - ۱ \xrightarrow{g(۰) = -\frac{۷}{۳}} g(۰) = -۲a - ۱ = -\frac{۷}{۳} \Rightarrow -۲a = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{۲}{۳}|x - ۲| - ۱ \Rightarrow g(۵) = -\frac{۲}{۳}|۵ - ۲| - ۱ = -۳$$

به ترتیب اعمال مورد نظر را انجام می‌دهیم.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f_1(x) = (x + 4)^2$$

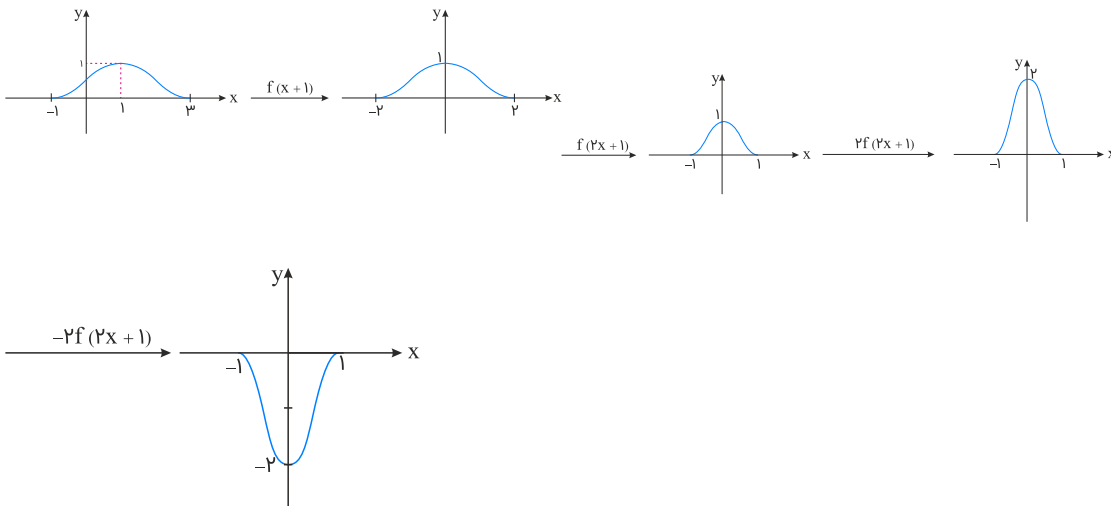
$$f_2(x) = -(x + 4)^2 \Rightarrow f_3(x) = -2(x + 4)^2$$

$$f_4(x) = -2(x + 4)^2 - 3 = -2(x^2 + 8x + 16) - 3$$

در نتیجه:

$$y = -2x^2 - 16x - 35$$

در گام نخست تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال افقی می‌دهیم؛ سپس طول نقاط نمودار را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم و بعد عرض نقاط را در ۲ ضرب کرده و در نهایت نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. داریم:



تابعی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد. در حالت زوج مرتب نیز تابعی یک‌به‌یک است که مولفه دوم یکسان نداشته باشد.

$$D_f = \mathbb{R} - [0, 1)$$

$$D_g = \mathbb{R} - [0, 1], D_h = \mathbb{R} - \{[0, 1], \{2\}\}$$

$$D_k = \mathbb{R} - [0, 1), D_m = (0, 1)$$

باتوجه به دامنه‌های به دست آمده، اگر از دامنه f ، نقطه ۱ را حذف کنیم، دامنه g به دست می‌آید.

$$D_f - \{1\} = \mathbb{R} - [0, 1) - \{1\} = \mathbb{R} - [0, 1] = D_g$$

اول: x را برابر ۲ قرار می‌دهیم تا مقدار $f(3)$ را محاسبه کنیم:

$$2f(x+1) - x^2 f(3) = 2x^2 - 4 \xrightarrow{x=2} 2f(3) - 4f(3) = 8 - 4 \\ -2f(3) = 4 \Rightarrow f(3) = -2$$

دوم: برای به دست آوردن $f(0)$ باید x را برابر ۱ بگذاریم:

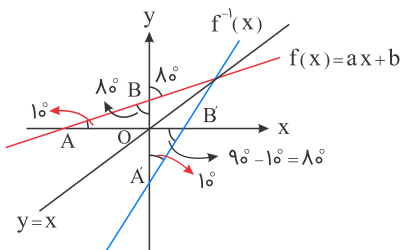
$$2f(x+1) - x^2 f(3) = 2x^2 - 4 \\ \xrightarrow{x=1} 2f(0) - (-1)^2 \times (-2) = 2(-1)^2 - 4 \Rightarrow 2f(0) = -4 \Rightarrow f(0) = -2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\text{ضابطه پایینی}} f\left(\frac{1}{2} + 1\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$$

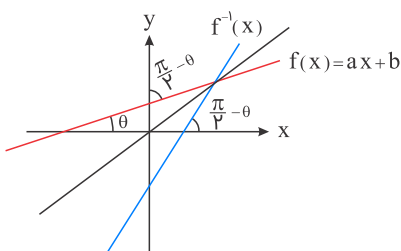
$$\xrightarrow{\text{ضابطه بالایی}} f\left(\frac{3}{2}\right) = \left[-\frac{3}{2}\right] + 1 = -2 + 1 = -1$$

تابع $y = \frac{x^3 + 3}{x}$ چند جمله‌ای نیست و تابعی گویا است.

مطابق شکل می‌بینیم دو مثلث $\triangle ABO$ و $\triangle A'B'O$ به حالت (ض.ز.ض) برابرند؛ لذا $\hat{A} = \hat{A}' = 10^\circ$ و $\hat{B} = \hat{B}' = 80^\circ$



توجه کنید که اگر خط f محور x ها را با زاویه θ قطع کند، f^{-1} محور y ها را با زاویه θ قطع می‌کند و زاویه f^{-1} با محور x ها $\frac{\pi}{2} - \theta$ است.



بررسی "آ": مثال نقض برای یک‌به‌یک نبودن تابع f :

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 1$$

f یک‌به‌یک نیست.

بررسی "ب": از آنجا که $|x + 4|$ یک‌به‌یک نیست، پس $\sqrt{|x + 4|}$ نیز یک‌به‌یک نمی‌باشد.

بررسی "پ": می‌دانیم تابع $\sqrt{x^2 - 9}$ روی دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست، اما اگر دامنه آن را به $x \geq 3$ و یا به $x \leq -3$ محدود کنیم، یک‌به‌یک می‌شود. با توجه به اینکه دامنه h برابر است با $x \leq -3$ ، پس تابع یک‌به‌یک است.

بررسی "ت": ابتدا برد هریک از ضابطه‌های k را به دست می‌آوریم:

$$k_1(x) = \frac{1}{x-1} - 1 \xrightarrow{x > 0} R_{k_1} = (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$$

$$k_2(x) = \sqrt{-x} - 2 \xrightarrow{-4 \leq x \leq 0} R_{k_2} = [-2, 0]$$

از آنجا که $R_{k_1} \cap R_{k_2} = \{-2\} \cup (-1, 0]$ پس تابع یک‌به‌یک نیست.

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+a) - ax + 2 & ; x \geq -a \\ -2(x+a) - ax + 2 & ; x < -a \end{cases} = \begin{cases} (2-a)x + 2a + 2 & ; x \geq -a \\ (-2-a)x - 2a + 2 & ; x < -a \end{cases}$$

اگر یکی از شیب‌های خط‌های دو ضابطه بالا منفی و دیگری مثبت باشد آنگاه تابع یک‌به‌یک نخواهد بود چون نمودار به صورت $\vee$ یا $\wedge$ می‌شود؛ پس شیب دو خط ضابطه‌های f هم‌علامت هستند.

$$\Rightarrow (2-a)(-2-a) > 0 \Rightarrow (a-2)(a+2) > 0 \Rightarrow a^2 > 4 \Rightarrow |a| > 2$$

صورت سؤال را به صورت زیر ترجمه کرده و $f(x)$ را می‌یابیم:

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = [x]$$

$$\frac{x-1}{x+1} = t \Rightarrow x-1 = tx+t \Rightarrow -t-1 = tx-x$$

$$-t-1 = x(t-1) \Rightarrow \frac{-t-1}{t-1} = x$$

$$f(t) = \left[x = \frac{-t-1}{t-1} \right] \Rightarrow f(x) = \left[\frac{-x-1}{x-1} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{صورت و مخرج ضرب در } (-1)} f(x) = \left[\frac{x+1}{-x+1} \right]$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \left[\frac{\frac{1-x}{1+x} + 1}{-\frac{1-x}{1+x} + 1} \right] = \left[\frac{1}{x} \right]$$

نکته: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای معکوس‌پذیر از درجه $n \in \mathbb{N}$ باشد، $f^{-1}(x)$ تابعی از درجه $\frac{1}{n}$ خواهد بود. در این تست از آنجایی که $y = f(x) + f^{-1}(x)$ تابعی خطی و از درجه اول است، نتیجه می‌گیریم که $n = 1$ بوده است؛ یعنی خود f تابعی درجه اول است:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow f(x) + f^{-1}(x) = ax + b + \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = x\left(a + \frac{1}{a}\right) + b - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b - \frac{b}{a}\right) = -2x + 4$$

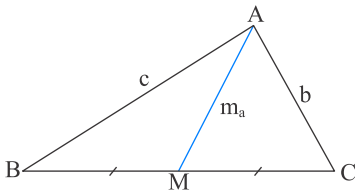
$$\Rightarrow a + \frac{1}{a} = -2, \quad b\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 4$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b\left(1 - \frac{1}{(-1)}\right) = 4$$

$$\Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -x + 2, \quad f^{-1}(x) = -x + 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(4) + f(4) = (-4 + 2) + (-4 + 2) = -4$$

نکته: در هر مثلث، طول هر میانه، از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کمتر و از نصف تفاضل آن‌ها، بیشتر است.



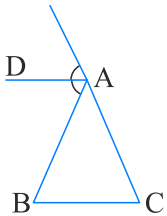
$$\frac{1}{2} |b - c| < m_a < \frac{1}{2} (b + c)$$

اولاً طبق فرض، $a = 9$ و $b = 7$ است. حال به کمک نکته فوق، داریم:

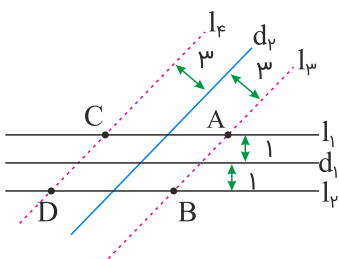
$$\frac{1}{2} |a - b| < m_c < \frac{1}{2} (a + b) \Rightarrow \frac{1}{2} (9 - 7) < m_c < \frac{1}{2} (9 + 7) \\ \Rightarrow 1 < m_c < 8$$

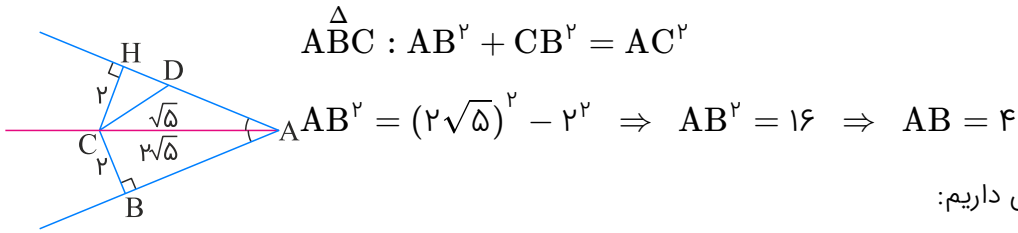
از بین گزینه‌ها، فقط گزینه (۲) در این بازه قرار دارد.

اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد ($AB = AC$)، در این صورت نیمساز خارجی زاویه A موازی قاعده BC می‌شود (طبق عکس قضیه خطوط موازی و مورب)، پس بی‌شمار نقطه روی نیمساز وجود دارد که از قاعده BC به یک فاصله‌اند.



تمام نقاطی که از خط d_1 به فاصله ۱ می‌باشد روی ۲ خط موازی خط d_1 و به فاصله یک واحد از آن قرار دارند (خطوط l_1 و l_2) و نیز نقاطی که از d_2 به فاصله ۳ واحد قرار دارند روی ۲ خط موازی d_2 به فاصله ۳ واحد از آن هستند (خطوط l_3 و l_4) محل تلاقی این خطوط جواب مسئله می‌باشد. (نقاط A و B و C و D)



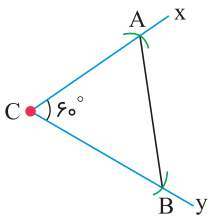


$$CH = CB = 2, AH = AB = 4 \quad (1)$$

$$\triangle CDH : CD^2 = CH^2 + HD^2 \Rightarrow 5 = 4 + HD^2 \Rightarrow HD = 1 \quad (2)$$

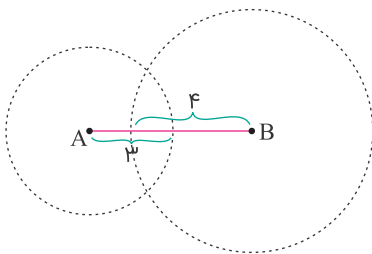
$$(1), (2) \Rightarrow AD = AH - HD = 4 - 1 = 3$$

ابتدا زاویه $\hat{C}$ را به اندازه 60° مانند شکل زیر رسم می‌کنیم. دهانه پیرگار را به اندازه‌های ۵ و ۶ سانتی‌متر باز می‌کنیم و دو بار به مرکز C کمان می‌زنیم به طوری که Cx را در A و Cy را در B قطع کند.

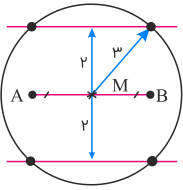


حال B را به A وصل می‌کنیم. جواب مسئله مثلث ABC است. پس فقط یک مثلث با این مشخصات وجود دارد.

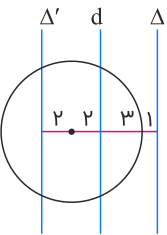
مطابق شکل زیر، دوایر به مرکز A و شعاع ۳ و مرکز B و شعاع ۴ در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ پس دو نقطه با این ویژگی وجود دارد.



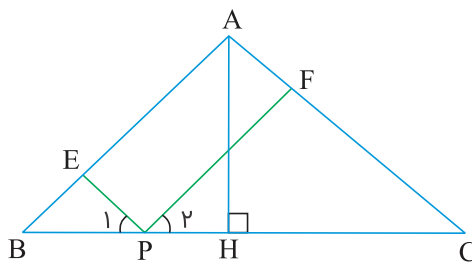
از وسط ضلع AB (نقطه M) دایره‌ای به شعاع ۳ واحد رسم کرده و دو خط موازی ضلع AB و به فاصله ۲ واحد از آن رسم می‌کنیم تا رأس C به دست بیاید. همان‌طور که می‌بینید چهار نقطه متمایز برای رأس C قابل یافتن است.



باتوجه به شکل، مجموعه نقاطی که از خط d به فاصله ۴ سانتی‌متر هستند، دو خط Δ و Δ' موازی با d می‌باشند که فقط یکی از این خط‌ها می‌تواند دایره را قطع کند و دو نقطه ایجاد شده، جواب این مسئله می‌باشد.



طبق قضیه خطوط موازی و مورب داریم:



$$\begin{cases} PE \parallel AC \\ \text{مورب } BC \end{cases} \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{C} \xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}} \hat{P}_1 = \hat{B} \Rightarrow PE = BE \quad (1)$$

$$\begin{cases} PF \parallel AB \\ \text{مورب } BC \end{cases} \Rightarrow \hat{P}_2 = \hat{B} \xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}} \hat{P}_2 = \hat{C} \Rightarrow PF = CF \quad (2)$$

$$\text{محيط } AEPF = AE + PE + PF + AF$$

$$\xrightarrow{\text{بنا بر رابطه های (۱), (۲)}} (AE + BE) + (AF + CF) = AB + AC = 2AB \\ \Rightarrow AE + AF = AB$$

بنابراین مقدار $AE + AF$ همواره با تغییر نقطه P ثابت می ماند. پس حاصل ضرب $AE \cdot AF$ در صورتی ماکزیمم است که $AE = AF$ باشد و این حالت هنگامی رخ می دهد که P بر H منطبق شود و در نتیجه AE و AF هریک نصف ساق مثلث هستند. لذا داریم:

$$\begin{cases} \max(AE \cdot AF) = AE^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4} \\ \triangle ABH : \hat{B} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 6 \end{cases} \Rightarrow \max(AE \cdot AF) = \frac{36}{4} = 9$$

می دانیم نقاطی که از اضلاع یک زاویه به فاصله یکسان قرار دارند، روی نیمساز آن زاویه می باشند، پس نیمساز زاویه XOY را رسم می کنیم. محل تلاقی نیمساز با محیط دایره، جواب مسئله است که مطابق شکل، دو نقطه A و B می باشند.

