www.alirezaafshar.org

حسابان

۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x، در نقطهٔ $x=1$ با نمو ۰/۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{1}{30}$
۲) $\frac{1}{24}$
۳) $\frac{1}{12}$
۴) $\frac{1}{6}$

۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|\cdot[x]$، مقدار $f'_+(0)-f'_-(0)$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۳ مشتق چپ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در نقطهٔ $x=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
۲) $-\sqrt{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۴) $\sqrt{2}$

۴ تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2+ax+2}$ در نقاطی به طول‌های ۱ و b دارای خط مماس قائم است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۵
۴) -۵

۵ اگر $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x+a}$ و $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1,b\}$ باشد، b کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) -۱
۴) صفر

۶ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{x^2+3x}$ در نقطهٔ $x=1$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $-\frac{3}{5}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

۷ اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد که از مبدأ مختصات می‌گذرد و $f(x) = \sin(x + ۲f(x))$، آنگاه مشتق تابع $fof(x)$ در $x = ۰$، چقدر بزرگ‌تر از $f'(۰)$ است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸ تابع $f(x) = \begin{cases} |x^۲ - ۱| & ; x > ۰ \\ ۲ - |x + ۱| & ; x \le ۰ \end{cases}$ چند نقطهٔ مشتق‌ناپذیر دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۹ در تابع $f(x) = \sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر روی بازهٔ $[۲/۲۵,\ ۲/۵۶]$، از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۹۳}$
۲) $\frac{۲}{۹۳}$
۳) $\frac{۱}{۶۲}$
۴) $\frac{۱}{۳۱}$

۱۰ تابع مشتق کدام‌یک از توابع زیر در $x = ۱$ مشتق‌پذیر است؟

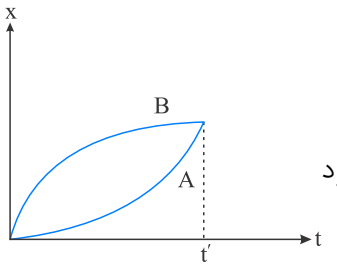
۱) $f(x) = \begin{cases} x^۳ + ۱ & ; x > ۱ \\ -۱ & ; x = ۱ \\ ۲x^۲ - ۱ & ; x < ۱ \end{cases}$

۲) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \ge ۱ \\ \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲} & ; x < ۱ \end{cases}$

۳) $h(x) = \begin{cases} ۴ - ۳x & ; x \ge ۱ \\ ۳ - ۲x^۳ & ; x < ۱ \end{cases}$

۴) $k(x) = \begin{cases} x^۳ + ۳x - ۱ & ; x \ge ۱ \\ ۳x^۲ & ; x < ۱ \end{cases}$

۱۱ دو دوندهٔ A و B در یک مسیر صاف با مبدأ و مقصد یکسان شروع به دویدن می‌کنند؛ اگر نمودار مکان برحسب زمان آن‌ها مطابق شکل زیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟



۱) دوندهٔ B زودتر به مقصد می‌رسد.

۲) بیشترین فاصلهٔ این دو دونده هنگامی رخ می‌دهد که سرعت آن‌ها برابر شود.

۳) اگر سرعت متوسط دو دونده از $t = ۰$ تا $t = a$ یکسان شود، دو مقدار متفاوت برای a وجود دارد.

۴) دوندهٔ A زودتر می‌رسد.

۱۲ نقطهٔ $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{x + ۸}$ در حرکت است. T فاصلهٔ نقطهٔ M تا مبدأ مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطهٔ $x = ۷$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$
۲) $\frac{۱۵}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

www.alirezaafshar.org

۱۳ خودرویی در امتداد خط راست طبق معادلهٔ $d(t) = ۱۰t - t^۲$ حرکت می‌کند که در آن $۰ \le t \le ۵$ برحسب ثانیه است. سرعت متوسط خودرو در بازه‌های $[۲, ۲/۴]$، $[۲, ۲/۳]$، $[۲, ۲/۲]$ و $[۲, ۲/۱]$ به کدام عدد نزدیک می‌شود؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۳

۱۴ در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{۲x}{[x]} - ۱ & ; x \ge ۱ \\ ۳ - |x+۱| & ; x < ۱ \end{cases}$، حاصل $f'_+(۱) + f'_-(۱)$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است)

۱) تابع در $x = ۱$ پیوسته نیست و نمی‌توان هر دو نیم‌مماس را رسم کرد.
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۳

۱۵ اگر $f(x) = \sin^۲ \pi x - \frac{۱}{۲}\cos \pi x$ باشد، مشتق $y = f(f(x))$ در $x = \frac{۱}{۳}$، چند برابر $۳\sqrt{۳}$ است؟

۱) $\frac{\pi}{۸}$
۲) $\frac{\pi}{۴}$
۳) $\frac{\pi^۲}{۸}$
۴) $\frac{\pi^۲}{۴}$

۱۶ مجموع جملات دنبالهٔ $۱, ۲, ۴, ۸, \ldots, ۲^{۶۳}$ کدام است؟

۱) $۲^{۶۴} - ۱$
۲) $۲^{۶۳} - ۱$
۳) $\frac{۲^{۶۴} - ۱}{۲}$
۴) $\frac{۲^{۶۳} - ۱}{۲}$

۱۷ اگر $\alpha + ۱$ و $\beta + ۱$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۴x - ۱ = ۰$ باشند، در این صورت ریشه‌های کدام معادله به‌صورت $\frac{\alpha}{۲}$ و $\frac{\beta}{۲}$ است؟

۱) $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$
۲) $x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$
۳) $۲x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$
۴) $۲x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$

۱۸ چهار ضلعی $ABCD$ با مختصات رئوس $A(۲, -۱)$، $B(-۲, ۴)$، $C(۰, ۳)$ و $D(۱, ۱)$ از چه نوعی است؟

۱) مربع
۲) لوزی
۳) متوازی‌الاضلاع
۴) مستطیل

۱۹ دو نقطه بر خطی به معادلهٔ $y = x - ۱$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $۲x - ۳y = ۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟

۱) $۹, -۱۵$
۲) $۱۱, -۱۵$
۳) $۱۵, -۱۱$
۴) $-۹, ۱۱$

۲۰ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y = \sqrt{x^۲ - ۴|x| + ۴}$ و محور xها کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۲۱ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۳x + \frac{۱}{۴} = ۰$ باشند، مقدار k چقدر باشد تا مجموعه جواب معادلهٔ $x^۲ - kx + ۳ = ۰$ برابر با $\{\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}, \frac{۱}{\sqrt{\beta}}\}$ باشد؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۳

۲۲ معادلهٔ $|۱ - |x|| = x + ۱$ دارای چند ریشهٔ مثبت است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۲۳ نقاط $A(۰, ۳)$، $B(۴, ۳)$ و $C(a, b)$ سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مجموع همه مقادیر ممکن b کدام است؟

۱) صفر
۲) ۴
۳) -۴
۴) ۶

۲۴ نقطهٔ $(a, ۲a)$ مرکز دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ $(۲, ۱)$ و $(-۱, ۴)$ است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۵ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(۲x + ۱)^۲ - x = ۴$ باشند و $(۲\alpha + ۱)^۲$ و $(۲\beta + ۱)^۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲ + mx + n = ۰$ باشند، مقدار m کدام است؟

۱) -۲۹
۲) ۲۹
۳) ۳۱
۴) -۳۱

۲۶ تمام محدودهٔ a کدام باشد تا معادلهٔ $x^۳ + (a + ۱)x^۲ + (a + ۴)x = -۴$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز منفی باشد؟

۱) $(-\infty, ۴) - \{۳\}$
۲) $(۴, +\infty) - \{۵\}$
۳) $(-\infty, ۴)$
۴) $(-\infty, -۴) - \{-۵\}$

۲۷ تعداد جملات یک دنبالهٔ هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۲۸ سه ضلع مثلثی به معادلات $AB : ۲y - x = ۳$، $AC : y - ۲x = ۵$ و $BC : ۲y + ۳x = ۶$ هستند. معادلهٔ ارتفاع AH از مثلث مفروض، کدام است؟

۱) $۶y - ۴x = ۱۵$
۲) $۹y - ۶x = ۱۷$
۳) $۳y - ۲x = ۷$
۴) $۳y + ۲x = ۹$

۲۹ جواب‌های معادله $\sqrt{۲x + ۵} - ۲x = ۵$ چگونه است؟

۱) یک ریشهٔ منفی
۲) دو ریشهٔ منفی
۳) دو ریشهٔ مثبت
۴) یک ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ مثبت

۳۰ مثلث ABC با مختصات رئوس $A(۳ , ۲)$، $B(-۱ , ۳)$ و $C(۱ , ۰)$ مفروض است. نوع مثلث ABC کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) قائم‌الزاویه
۳) متساوی‌الساقین
۴) هیچ‌کدام

ریاضیات گسسته

۳۱ یک گراف کامل از مرتبهٔ ۵ چند دور با طول ۴، دارد؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

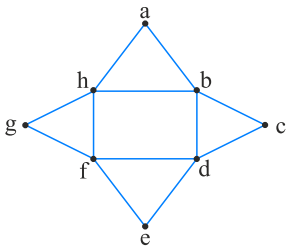
۳۲ گراف $C_۸$ چند ۷–مجموعه دارد؟

۱) ۴
۲) ۷
۳) ۶
۴) ۸

۳۳ در گرافی از مرتبهٔ ۱۷ می‌دانیم $\gamma(G) = ۵$. در این صورت Δ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۳۴ گراف زیر دارای چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی است؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

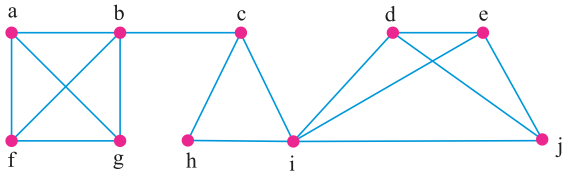
۳۵ گراف ساده و همبند G از مرتبهٔ ۸، حداقل چند یال دارد؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۶
۴) ۷

۳۶ در یک مسابقهٔ تنیس، ۳ نفر از دانش‌آموزان کلاس A با ۴ نفر از دانش‌آموزان کلاس B مسابقه دادند، به‌طوری‌که تمام دانش‌آموزان کلاس A با تمام دانش‌آموزان کلاس B بازی کردند ولی هیچ‌کدام از بازیکنان یک کلاس با هم مسابقه ندادند. در گراف حاصل از بازی‌های این دو تیم، چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

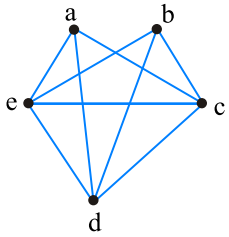
۱) ۱۸
۲) ۱۶
۳) ۱۴
۴) ۱۲

۳۷ گراف G در شکل زیر، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟



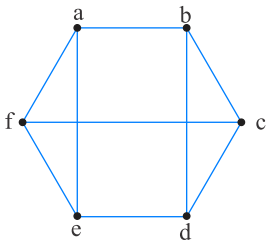
۱) ۲۴
۲) ۲۸
۳) ۳۰
۴) ۳۲

۳۸ در گراف کامل از مرتبهٔ ۵، یال ab حذف شده است. چند دور با طول ۴ در این گراف موجود است؟



۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۳۹ گراف زیر، چند زیرگراف از مرتبهٔ ۶ دارد به‌طوری‌که $\deg(a) = \deg(b) = ۳$ باشد؟

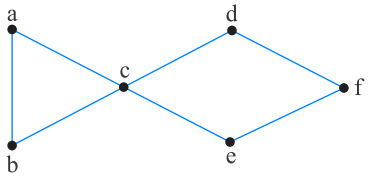


۱) ۴
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۴۰ گراف G یک گراف ۶- منتظم از مرتبهٔ ۱۳ است. اندازهٔ این گراف چقدر است؟

۱) ۵۴
۲) ۲۶
۳) ۴۸
۴) ۳۹

۴۱ گراف زیر چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد؟



۱) ۵

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۲

۴۲ کدام گزینه مجموع درجات رئوس گراف کامل را نشان نمی‌دهد؟

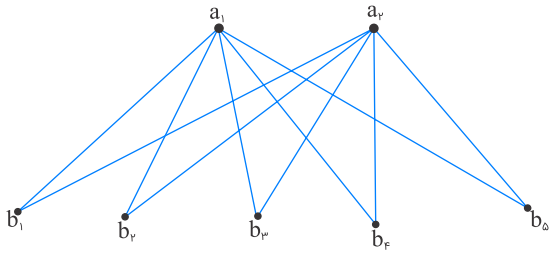
۱) ۷۲

۲) ۳۰

۳) ۱۱۰

۴) ۱۲۳

۴۳ گراف زیر چند $\gamma-$ مجموعه دارد؟



۱) ۶

۲) ۸

۳) ۱۰

۴) ۱۱

۴۴ تعداد مسیرهای به طول k در گراف P_n کدام است؟ $(n \geq k)$

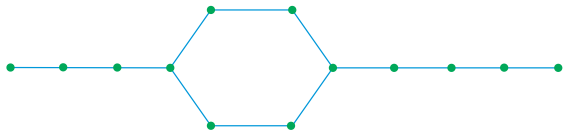
۱) k

۲) $n-k$

۳) $n-k+1$

۴) $n-k+2$

۴۵ $\gamma(G)$ برای گراف زیر کدام است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

هندسه

۴۶ اگر $A(x, y)$ نقطه‌ای روی دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ۶y = -۵$ باشد، کمترین مقدار $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ کدام است؟

۱) ۰/۵

۲) ۰/۷۵

۳) ۱

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴۷ خط $y + ۳x = m$ بر دایره به معادلهٔ $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۳x + y = ۰$ مماس می‌باشد. مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) ۴
۲) -۳
۳) $\frac{۹}{۲}$
۴) $۲ - \sqrt{۱۰}$

۴۸ چند نقطه روی دایرهٔ $C(O , r)$ وجود دارد که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله هستند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) حداکثر ۲

۴۹ دایرهٔ گذرا بر نقطهٔ $(-۲, ۱)$، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

۱) ۴ و ۱
۲) ۵ و ۱
۳) ۴ و ۲
۴) ۵ و ۲

۵۰ خط l و نقاط A و B در صفحه، مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A و B به یک فاصله و از l به فاصلهٔ d باشند؟ $(d > ۰)$

۱) صفر، یک یا دو
۲) صفر، یک یا بی‌شمار
۳) صفر، دو یا بی‌شمار
۴) صفر، یک، دو یا بی‌شمار

۵۱ نقطهٔ $A(۱, -۲)$ داخل کدام‌یک از دایره‌های زیر است؟

۱) $x^۲ + y^۲ = ۱$
۲) $x^۲ + y^۲ = ۲x - ۵$
۳) $x^۲ + y^۲ - ۸x - ۴y - ۵ = ۰$
۴) $x^۲ + y^۲ - ۱۰x + ۸y = ۰$

۵۲ خطی که بر دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y - ۱۷ = ۰$ و خط $۵x + ۲y - ۱۳ = ۰$ عمود باشد، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) -۸
۲) -۸/۵
۳) -۹
۴) -۹/۵

۵۳ دایره‌ای به مرکز $(-۱ , ۲)$ و مماس بر خط به معادلهٔ $x - y = ۱$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۳ و ۱
۲) ۴ و ۱
۳) ۳ و ۲
۴) ۴ و ۱/۵

۵۴ خط مماس بر دایرهٔ $(x + ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۲۵$ در نقطهٔ $A(-۵, ۷)$ از کدام‌یک از نقاط زیر عبور می‌کند؟

۱) $(-۹, ۴)$
۲) $(۷, ۵/۵)$
۳) $(-۷, -۵/۵)$
۴) $(-۸, ۴/۵)$

۵۵ از بین دایره‌های گذرا از نقطهٔ $A(۱,-۴)$ و مماس بر خط‌های $۴x+۳y=۰$ و محور yها، بزرگ‌ترین شعاع دایره، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $\frac{۱۷}{۹}$
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۲۲}{۹}$

۵۶ اگر شعاع دایرهٔ $x^۲+۲y^۲+۲ax+۶y-b=۰$ برابر با $\frac{\sqrt{۱۹}}{۲}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۶

۵۷ در مثلث ABC ضلع BC را ثابت نگه داشته و نقطهٔ A را طوری حرکت می‌دهیم که طول میانهٔ AM ثابت باشد. مکان هندسی محل همرسی میانه‌های مثلث کدام است؟

۱) خطی موازی BC و به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}AM$ از BC
۲) خطی موازی BC و به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}AM$ از BC
۳) دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{۱}{۲}AM$
۴) دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{۱}{۳}AM$

۵۸ اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC که در آن $A(۱,۰)$، $B(۰,۱)$ و $C(۳,۱)$ هستند، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$
۲) $\sqrt{۱۰}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

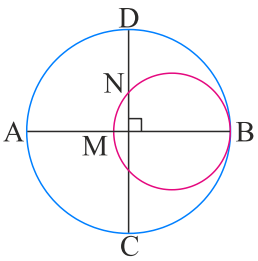
۵۹ در مثلث ABC، حداکثر چند نقطه وجود دارد که از دو سر ضلع BC به یک فاصله و همچنین از دو ضلع AB و AC هم به یک فاصله باشند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) نامتناهی

۶۰ دایره به مرکز $O(۱,-۲)$ و شعاع $\sqrt{۵}$ محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) -۲

۶۱ در شکل زیر، دو دایره برهم مماس و قطرهای AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر برهم عمود هستند. اگر $AM=۱۶$، $DN=۱۰$ باشد، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

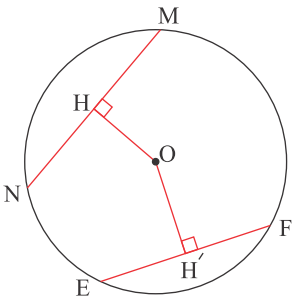


۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۷
۴) ۲۵

۶۲ مساحت هشت ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۲ واحد کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) $۸(\sqrt{۲}-۱)$
۳) $۴(۱+\sqrt{۲})$
۴) $۴(۲+\sqrt{۲})$

۶۳ در شکل زیر $MN > EF$ است. اگر $OH = ۲x+۳$ و $OH' = ۳x-۱$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟



۱) $۲ < x < ۴$
۲) $x > ۴$
۳) $x < ۴$
۴) $x < ۲$

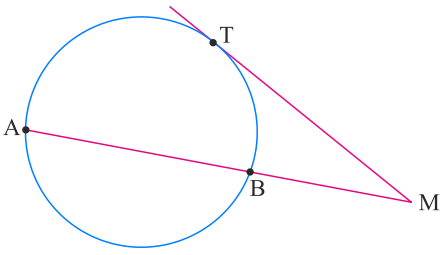
۶۴ دو دایره هم مرکزند. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر ۵ و شعاع دایرهٔ کوچک‌تر ۳ سانتی‌متر است. از نقطه‌ای روی محیط دایرهٔ بزرگ‌تر مماسی بر دایرهٔ کوچک‌تر رسم می‌کنیم، طول مماس کدام است؟

۱) ۸
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۵

۶۵ دو دایره به شعاع‌های r و $۲r$ در نقطهٔ A مماس درون هستند. وتر BC از دایرهٔ بزرگ‌تر موازی خط‌المرکزین و بر دایرهٔ کوچک در نقطهٔ P مماس می‌باشد. اگر $PB \times PC = ۱۸$، اندازهٔ شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) $۲\sqrt{۲}$

۶۶ در شکل زیر، اگر $\overset{\frown}{TB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۴} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۷}$ باشد، زاویهٔ M کدام است؟



۱) ۱۰۰°
۲) ۷۰°
۳) ۹۰°
۴) ۸۰°

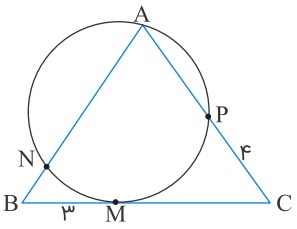
۶۷ طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر ۸ و اندازهٔ خط‌المرکزین ۱۷ است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چقدر بیشتر از شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۵
۴) ۱۸

۶۸ در نیم‌دایره‌ای به قطر AB، دو وتر AM و BN در نقطهٔ P متقاطع هستند. حاصل $AP \times AM + BP \times BN$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $AB^۲$
۳) $۲AB^۲$
۴) $\frac{۳}{۲}AB^۲$

۶۹ ضلع AB از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در نقطهٔ M بر دایره مماس است. طول پاره‌خط AN در کدام بازهٔ زیر قرار دارد؟

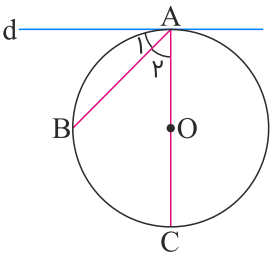


۱) $[۴, ۶)$
۲) $(۸, ۱۰]$
۳) $[۵, ۷)$
۴) $[۷, ۹)$

۷۰ در مثلثی به اضلاع قائم ۲ و $\sqrt{۲}$ واحد دو دایره به قطر این اضلاع رسم شده است. زاویهٔ بین مماس‌ها بر دو دایره مفروض در نقطه تلاقی آن‌ها چند درجه است؟

۱) ۹۰
۲) ۷۵
۳) ۶۰
۴) ۴۵

۷۱ در شکل زیر $\overset{\frown}{BC} + \hat{A}_۱ = ۱۴۰^\circ$ و خط d بر دایره مماس می‌باشد. $\hat{A}_۲$ کدام است؟ (O مرکز دایره است)

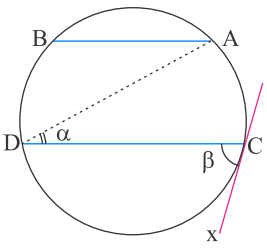


۱) ۳۰°
۲) ۴۰°
۳) ۵۰°
۴) ۷۰°

۷۲ در یک مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محیطی به ترتیب برابر ۶ و ۱۷ است. شعاع بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی چقدر است؟

۱) ۴۰
۲) ۲۵
۳) ۳۴
۴) ۵۶

۷۳ در شکل زیر، وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \| CD$، زاویهٔ $\beta = ۲\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\overset{\frown}{BD}$ چند درجه است؟

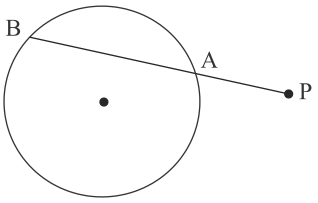


۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۷۵

۷۴ در مثلثی $\angle B + \angle C = ۹۰^\circ$ و $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۳۲$، شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث برابر کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) ۴

۷۵ فاصلهٔ نقطهٔ P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر۶۰ درجه باشد، اندازهٔ PA چند برابر شعاع دایره است؟



۱) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۱} - ۱)$
۲) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳} - ۱)$
۳) $\sqrt{۱۱} - ۲$
۴) $\sqrt{۱۳} - ۲$

فیزیک

۷۶ چگالی مایع A، ۵ برابر چگالی مایع B است. اگر جرم مایع A و B به ترتیب برابر با ۳۰۰ گرم و ۶۰۰ گرم باشد، حجم مایع A چندبرابر حجم مایع B است؟

۱) ۰/۰۲۵
۲) ۳/۵
۳) ۴
۴) ۰/۱

۷۷ دو کرهٔ همگن و توپر A و B در اختیار داریم که قطر آن‌ها d_A و $d_B = d_A - ۵\,cm$ است. اگر $\rho_A = ۲\rho_B$ و $m_A = ۱۶m_B$ باشد، شعاع کرهٔ کوچک‌تر چند سانتی‌متر است؟

۱) ۲/۵
۲) ۵
۳) ۷/۵
۴) ۱۰

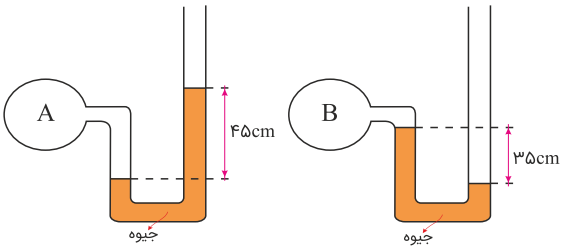
۷۸ کدام‌یک از علائم نوشتاری زیر صحیح نیست؟ (F نماد نیرو و m نماد جرم است)

۱) F
۲) $\vec{F}$
۳) m
۴) $\vec{m}$

۷۹ جرم ۱۵۰ زنبورعسل برابر ۱۵ g است. جرم یک زنبورعسل به‌صورت نماد علمی چند کیلوگرم است؟

۱) ۱×۱۰^{-۳}
۲) ۱×۱۰^{-۴}
۳) $۱/۵ \times ۱۰^{-۵}$
۴) ۱×۱۰^{-۵}

۸۰ اگر فشار هوا در محل آزمایش ۷۵ سانتی‌متر جیوه باشد، فشار گاز درون مخزن A چندبرابر فشار گاز درون مخزن B است؟



۱) $\frac{۹}{۷}$

۲) ۲

۳) $\frac{۱۶}{۷}$

۴) ۳

۸۱ شعاع یک کرهٔ فلزی ۵ سانتی‌متر و جرم آن ۱۰۸۰ گرم و چگالی آن $۲/۷\,g/cm^۳$ است. درون این کره یک حفره وجود دارد. حجم این حفره چند درصد حجم کره را تشکیل می‌دهد؟ $(\pi = ۳)$

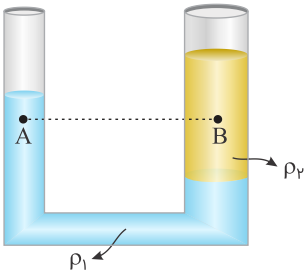
۱) ۱۰

۲) ۱۵

۳) ۲۰

۴) ۲۵

۸۲ کدام گزینه مقایسهٔ درستی را از چگالی مایع‌های (۱) و (۲) و فشار نقاط A و B، نشان می‌دهد؟



۱) $P_A > P_B\ ,\ \rho_۱ > \rho_۲$

۲) $P_A > P_B\ ,\ \rho_۲ > \rho_۱$

۳) $P_A < P_B\ ,\ \rho_۲ > \rho_۱$

۴) $P_A < P_B\ ,\ \rho_۱ > \rho_۲$

۸۳ دو مایع مخلوط‌شدنی A و B در اختیار داریم. اگر نصف حجم یک ظرف را از مایع A و بقیه را از مایع B پُر کنیم، چگالی مخلوط $۰/۶۵۰\,g/cm^۳$ می‌شود و در صورتی که $\frac{۱}{۴}$ حجم ظرف را از مایع A و بقیه را از مایع B پُر کنیم، چگالی مخلوط $۰/۵۴۴\,g/cm^۳$ می‌شود. چگالی مایع‌های A و B به ترتیب از راست به چپ، چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟ (در اثر مخلوط کردن دو مایع، تغییر حجمی رخ نمی‌دهد)

۱) ۲/۵ - ۰/۳۴

۲) ۱ - ۰/۳

۳) ۰/۳ - ۱

۴) ۰/۳ - ۱/۳

۸۴ ۳۰۰ سانتی‌متر مکعب از مایع A با چگالی $\rho_A = ۲g/cm^۳$ را با ۳۰۰ گرم از مایع B به چگالی $\rho_B = ۷۵۰\,g/L$ مخلوط می‌کنیم تا مایعی همگن به چگالی $۱۵۰۰\,kg/m^۳$ به دست آید. طی عمل مخلوط کردن دو مایع چند میلی‌لیتر کاهش حجم رخ داده است؟

۱) ۱۰۰

۲) ۱۵۰

۳) ۲۰۰

۴) ۳۰۰

۸۵ جواهرفروشی در ساختن یک قطعه جواهر به‌جای طلای خالص، مقداری نقره نیز به کار برده است. اگر حجم قطعهٔ ساخته‌شده، ۵ سانتی‌مترمکعب و چگالی آن $۱۳/۶\,g/cm^۳$ باشد، جرم نقرهٔ به‌کاررفته، چند گرم است؟ (چگالی نقره و طلا به ترتیب $۱۰\,g/cm^۳$ و $۱۹\,g/cm^۳$ فرض شود و تغییر حجم نداریم)

۱) ۸
۲) ۳۰
۳) ۳۴
۴) ۳۸

۸۶ دو استوانهٔ همگن A و B دارای جرم و ارتفاع برابرند. استوانهٔ A توپر و استوانهٔ B توخالی است. اگر شعاع خارجی این دو استوانه باهم برابر و چگالی مادهٔ سازندهٔ استوانهٔ B، $\frac{۹}{۸}$ برابر چگالی استوانهٔ A باشد، شعاع داخلی استوانهٔ B چندبرابر شعاع خارجی آن است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۹}$

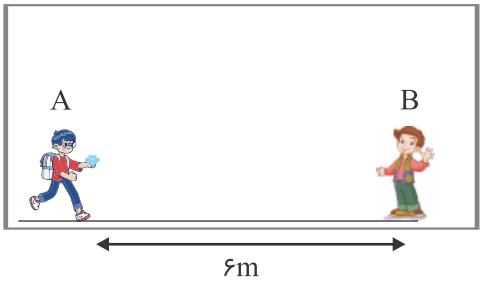
۸۷ قطر هستهٔ اورانیم، $۰/۰۱۷۵\,pm$ است. این عدد در SI و به‌صورت نمادگذاری علمی در کدام گزینه به‌درستی عنوان شده است؟

۱) $۰/۱۷۵ \times ۱۰^{-۱۰}\,m$
۲) $۰/۱۷۵ \times ۱۰^{-۱۳}\,m$
۳) $۱/۷۵ \times ۱۰^{-۱۰}\,m$
۴) $۱/۷۵ \times ۱۰^{-۱۴}\,m$

۸۸ مخروط ناقصی مطابق شکل زیر روی سطح افقی قرار دارد و شعاع قاعدهٔ بزرگ ۳ برابر شعاع قاعدهٔ کوچک آن است. اگر آن را روی قاعدهٔ بزرگ بگذاریم و بخواهیم فشار وارد بر سطح افقی تغییری نکند، وزنه‌ای چند برابر وزن مخروط را باید روی آن قرار دهیم؟

۱) ۸
۲) ۳
۳) ۱۰
۴) ۷

۸۹ مطابق شکل زیر، دو شخص A و B در سالنی حضور دارند و شخص A شیشهٔ عطری در دست دارد. دو حالت در نظر می‌گیریم:
حالت اول: شخص A بدون آنکه حرکت کند در شیشهٔ عطر را باز می‌کند؛ در این حالت مولکول‌های عطر پس از طی مسافت میانگین $۱\,km$ به شخص B می‌رسند.
حالت دوم: شخص A بدون آنکه در شیشهٔ عطر را باز کند با تندی s به‌سمت شخص B حرکت می‌کند و پس از رسیدن به شخص B در شیشهٔ عطر را باز می‌کند.
اگر مدت‌زمانی که طول می‌کشد که شخص B بوی عطر را احساس کند در هر دو حالت یکسان باشد، s چند متر بر ثانیه است؟ (تندی حرکت مولکول‌های هوا را $۵۰۰\,m/s$ فرض کنید)



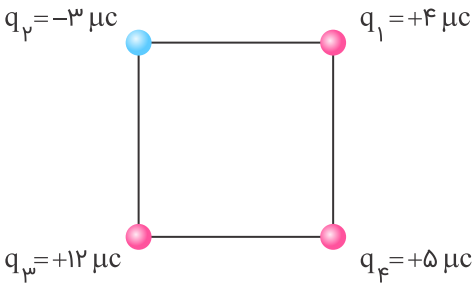
۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

۹۰ از دو مایع به چگالی های $\rho_۱$ و $\rho_۲ = ۳\rho_۱$ به ترتیب جرم‌های $m_۱$ و $m_۲ = ۳m_۱$ را باهم مخلوط می‌کنیم تا مایع همگنی به چگالی ρ' ایجاد شود. اگر مایعات حین مخلوط کردن تغییر حجم ندهند چگالی ρ' برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\rho_۱$ ۲) $۱/۵\rho_۱$

۳) $۲\rho_۱$ ۴) $۲/۵\rho_۱$

۹۱ مطابق شکل زیر چهار بار الکتریکی در رأس‌های مربعی به ضلع $۶\,cm$ قرار دارند. بردار نیروی الکتریکی وارد بر بار الکتریکی $q_۱$ در SI کدام است؟ $(\sqrt{۲} \simeq ۱/۴)$



۱) $-۱۲\vec{i} + ۹۲\vec{j}$

۲) $۱۲\vec{i} + ۹۲\vec{j}$

۳) $-۴۲\vec{i} + ۶۰\vec{j}$

۴) $۴۲\vec{i} + ۶۰\vec{j}$

۹۲ دو بار الکتریکی $q_۱$ و $q_۲$ از فاصلهٔ r به هم نیروی F را وارد می‌کنند و اگر فاصلهٔ بارها از هم نصف شود، نیروی بین آن‌ها $۶۰\,N$ افزایش می‌یابد. دو بار از فاصلهٔ $۲r$ به هم چه نیرویی را وارد خواهند کرد؟

۱) $۲۰\,N$ ۲) $۱۰\,N$

۳) $۵\,N$ ۴) $۱\,N$

۹۳ ۶۴ قطرهٔ هم‌اندازهٔ جیوه که دارای بارهای الکتریکی برابرند، به هم چسبیده و قطرهٔ بزرگ‌تری می‌سازند. چگالی سطحی بار الکتریکی این قطره چند برابر چگالی سطحی هریک از قطره‌های اولیه است؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۸ ۴) ۱۶

۹۴ ظرفیت خازنی $۱۸\,\mu F$ است و بار الکتریکی آن q است. اگر $۶\,\mu C$ بار الکتریکی را از صفحهٔ منفی جدا کرده و به صفحهٔ مثبت منتقل کنیم، انرژی ذخیره‌شده در خازن به اندازهٔ $۵\,\mu J$ زیاد می‌شود. q چقدر است؟

۱) $۶\,\mu C$ ۲) $۱۲\,\mu C$

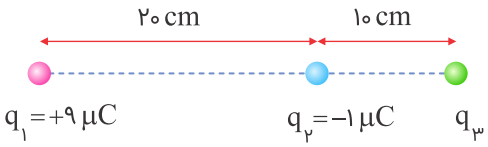
۳) $۱۸\,\mu C$ ۴) $۲۴\,\mu C$

۹۵ سه ذرهٔ باردار $q_۱ = ۱۲\,\mu C$، $q_۲ = ۳\,\mu C$ و $q_۳$ در صفحهٔ x و y به ترتیب در مختصات $(x_۱ = ۴\,cm\,,\, y_۱ = ۳\,cm)$، $(x_۲ = -۸\,cm\,,\, y_۲ = ۱۲\,cm)$ و $(x_۳\,,\, y_۳)$ قرار دارند. اگر برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر هر ذره صفر باشد، $q_۳$ چند میکروکولن است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۱۶}{۳}$

۹۶ در شکل زیر سه ذرهٔ $q_۱$ ، $q_۲$ و $q_۳$ بر روی یک خط راست ثابت شده‌اند و برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر بار $q_۳$ برابر با برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر بار $q_۱$ است. بار $q_۳$ چند میکروکولن است؟



۱) $+۴$

۲) $+\frac{۹}{۴}$

۳) -۴

۴) $-\frac{۹}{۴}$

۹۷ دو بار الکتریکی $q_۱$ و $q_۲$ در فاصلهٔ r از یکدیگر قرار دارند و به یکدیگر نیروی الکتریکی F را وارد می‌کنند. اگر اندازهٔ یکی از بارها دو برابر و فاصلهٔ بین دو بار، نصف شود، نیروی الکتریکی بین آن‌ها چندبرابر می‌شود؟

۱) ۱۶

۲) ۸

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

۹۸ ظرفیت خازنی ۵ میکروفاراد و بار الکتریکی آن q است. اگر $۳\,mC$ بار الکتریکی را از صفحهٔ منفی جداکرده و به صفحهٔ مثبت منتقل کنیم، انرژی ذخیره‌شده در خازن به اندازهٔ $۴/۵\,J$ افزایش می‌یابد. q چند میلی کولن است؟

۱) ۳

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۲

۹۹ جسمی بر اثر مالش دارای بار الکتریکی شده است. این جسم چند کولن الکتریسیته نمی تواند داشته باشد؟ $(e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\ C)$

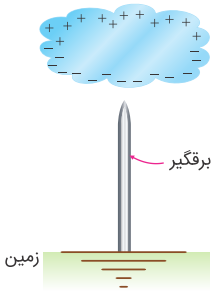
۱) ۸×۱۰^{-۱۹}

۲) ۴×۱۰^{-۱۸}

۳) ۹×۱۰^{-۱۹}

۴) $۱/۲۸ \times ۱۰^{-۱۸}$

۱۰۰ شکل زیر، ابری را نشان می‌دهد که بالای یک برق‌گیر رسیده است. سطح زیرین ابر دارای بار منفی است. کدام گزینه پدیده‌ای را که اتفاق می‌افتد، درست بیان می‌کند؟



۱) بار الکتریکی از ابر به برق‌گیر شارش می‌کند و ازآنجا، به زمین منتقل می‌شود

۲) الکترون‌های آزاد از نوک‌تیز برق‌گیر خارج‌شده و به ابر منتقل می‌شوند

۳) بارهای مثبت از نوک‌تیز برق‌گیر خارج‌شده و به ابر منتقل می‌شوند

۴) الکترون‌های آزاد برق‌گیر، از نوک‌تیز آن به زمین منتقل می‌شوند و در نوک‌تیز، بار مثبت خواهیم داشت

۱۰۱ میدان الکتریکی از بار الکتریکی نقطه‌ای $۲۰\mu C$ در فاصلهٔ یک متری آن، چند نیوتون بر کولن است؟ $K = ۹ \times ۱۰^{۹}\ N m^{۲}/C^{۲}$

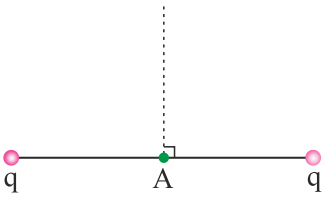
۱) ۲×۱۰^{۳}

۲) ۲×۱۰^{۶}

۳) $۱/۸ \times ۱۰^{۴}$

۴) $۱/۸ \times ۱۰^{۵}$

۱۰۲ در شکل زیر، بارهای الکتریکی همنام و هم‌اندازه هستند. تغییرات میدان برآیند روی عمودمنصف خط واصل دو بار از فواصل بسیار دور تا مرکز فاصلهٔ دو بار چگونه است؟



۱) پیوسته افزایش می‌یابد.

۲) پیوسته کاهش می‌یابد.

۳) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

۴) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۱۰۳ نیروی محرکهٔ یک باتری ۱۲ ولت است. اگر پتانسیل الکتریکی پایانهٔ مثبت باتری را $۳\ \mathrm{V}$ ولت فرض کنیم، پتانسیل الکتریکی پایانهٔ منفی آن چند ولت است؟

۱) -۹ ۲) -۱۵

۳) ۹ ۴) ۱۵

۱۰۴ ذره‌ای با بار الکتریکی $۴۰\ \mu\mathrm{C}$ از نقطهٔ A با پتانسیل الکتریکی $۴۰\ \mathrm{V}$ با سرعت ثابت به نقطهٔ B با پتانسیل الکتریکی $\mathrm{V_B}$ منتقل شده و $۳\mathrm{mj}$ انرژی مصرف شده است. $\mathrm{V_B}$ برحسب ولت کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۱۱۵

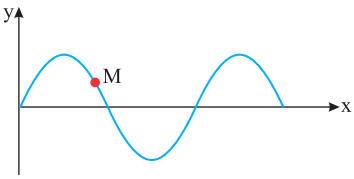
۳) ۵۵ ۴) ۹۵

۱۰۵ صفحات یک خازن به‌صورت دایره است. اگر قطر سطح مقطع صفحات این خازن ۳ برابر شده و فاصلهٔ بین صفحات آن نصف شود، ظرفیت خازن جدید چه کسری از ظرفیت خازن اولیه است؟

۱) $\frac{۱}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) ۱۸ ۴) ۶

۱۰۶ شکل زیر نقش یک موج عرضی را نشان می‌دهد. جهت نوسان نقطه M و جهت انتشار موج به ترتیب در کدام گزینه از راست به چپ به‌درستی رسم شده است؟



۱) $\rightarrow$ و $\rightarrow$

۲) $\rightarrow$ و $\leftarrow$

۳) $\downarrow$ و $\rightarrow$

۴) $\downarrow$ و $\leftarrow$

۱۰۷ تراز شدت صوتی ۶۶ دسی‌بل است. شدت این صوت چند وات بر متر مربع است؟ $(\mathrm{I_۰} = ۱۰^{-۱۲}\mathrm{W/m^۲}, \log ۲ = ۰/۳)$

۱) ۴×۱۰^{-۶} ۲) ۴×۱۰^{-۱۰}

۳) ۶×۱۰^{-۶} ۴) ۶×۱۰^{-۱۰}

۱۰۸ نوسانگری روی پاره‌خطی به طول ۳/۲ متر نوسان می‌کند. اگر ۷/۲ ثانیه طول بکشد تا از لحظهٔ $t = ۰$ برای سومین بار از نقطهٔ مبدأ حرکتش عبور کند، چند ثانیه پس از لحظه‌ای که مسافت طی‌شده به ۱۳/۶ متر می‌رسد، نوسانگر دارای بیشترین انرژی جنبشی می‌شود؟

۱) ۰/۷۵
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۳

۱۰۹ نوسانگری روی پاره‌خطی به طول $۴۰\,cm$ در مدت ۳ ثانیه ۱۵۰ نوسان کامل انجام می‌دهد. بیشترین تندی متوسط حرکت نوسانگر در جابه‌جایی به‌اندازهٔ دامنهٔ حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۲۰
۲) ۶۰
۳) ۶
۴) ۱۲

۱۱۰ رابطهٔ انرژی پتانسیل نوسانگر ساده‌ای به جرم $۱۰۰\,g$ برحسب مکان در SI به‌صورت $U = ۲۰x^۲$ است. اگر بیشینهٔ تندی نوسانگر $۲\,m/s$ باشد، تندی نوسانگر در لحظهٔ $t = \frac{\pi}{۱۵}\,s$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۳}$

۱۱۱ کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد امواج الکترومغناطیس الزاماً صحیح نیست؟

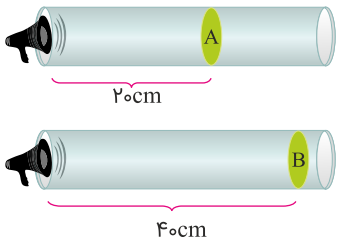
۱) نوترون شتابدار نمی‌تواند امواج الکترومغناطیسی تولید کند.

۲) در یک موج الکترومغناطیس، بسامد، طول موج و دامنهٔ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی باهم برابر هستند.

۳) راستای انتشار میدان الکتریکی و مغناطیسی برهم عمود است.

۴) در یک موج الکترومغناطیس اگر جهت میدان الکتریکی به سمت شرق و جهت میدان مغناطیسی به سمت پائین باشد، جهت انتشار موج الکترومغناطیس به سمت شمال می‌باشد.

۱۱۲ توسط دو منبع صوت یکسان درون دو لوله مشابه که حاوی گازهای یکسان هستند، صوت ایجاد می‌شود؛ تراز شدت صوت در سطح A درون لولهٔ (۱) چند دسی‌بل بیشتر از تراز شدت صوت در سطح B درون لولهٔ (۲) است؟ $(\log ۲ = ۰/۳)$



۱) ۲
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۳
۴) صفر

www.alirezaafshar.org

۱۱۳ نوسانگری در لحظهٔ $t = ۰$ در $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ بعد بیشینه بوده و به‌سمت مرکز نوسان در حرکت است. اگر در ثانیهٔ اول حرکت بعد از یک‌بار تغییر جهت مجدداً در $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ بعد بیشینه قرار گیرد، دورهٔ حرکت چند ثانیه است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۷}{۳}$

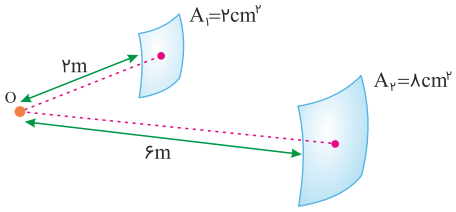
۱۱۴ توان یک چشمهٔ صوت ۵۰۰ میلی‌وات است. اگر در یک فضای باز، شنونده‌ای در فاصلهٔ ۲۰ متری از چشمه، صوت حاصل را با بلندی ۸۰ دسی‌بل احساس کند، در انتشار صوت در این فاصله چند درصد توان توسط محیط جذب شده است؟ ($\pi = ۳$ و $I_۰ = ۱۰^{-۱۲}\ W/m^۲$)

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۲۰
۴) ۴۰

۱۱۵ معادلهٔ مکان- زمان نوسانگری در SI به‌صورت $x = ۰/۳\cos ۸\pi t$ است. مسافتی که نوسانگر در مدت ۲ ثانیهٔ اول حرکت خود می‌پیماید، چند متر است؟

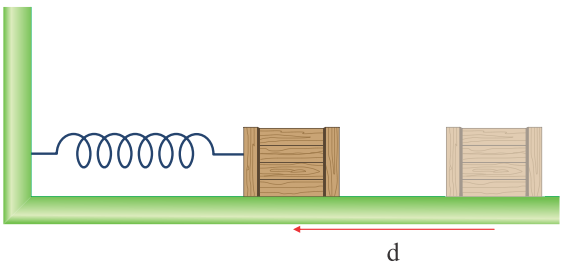
۱) ۲/۴
۲) ۴/۸
۳) ۹/۶
۴) ۱۴/۴

۱۱۶ مطابق شکل منبع صوت O، صوت را به‌صورت کره‌هایی در فضا پخش می‌کند. اگر انرژی صوتی رسیده به صفحهٔ $A_۱$ در مدت ۱۰ ثانیه برابر $۲۴۰\ \mu J$ باشد، انرژی رسیده به صفحهٔ $A_۲$ در مدت یک دقیقه چند میکروژول است؟



۱) ۸۰
۲) ۶۴۰
۳) $\frac{۸۰}{۹}$
۴) $\frac{۳۲۰}{۳}$

۱۱۷ مطابق شکل زیر، جسمی با انرژی جنبشی $۳۰\ J$ با فنر برخورد و آن را فشرده می‌کند. اگر در لحظهٔ توقف جسم، انرژی پتانسیل کشسانی $۲۵\ J$ باشد، کار نیروی کشسانی فنر در این جابجایی چند ژول است؟



۱) -۵
۲) ۲۵
۳) -۲۵
۴) ۳۰

۱۱۸ سیمی به طول یک متر و جرم ۴ گرم بین دو نقطهٔ ثابت بسته شده است. اگر نیروی کشش سیم ۱۰ نیوتن باشد، سرعت انتقال امواج عرضی در آن چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۴۰
۴) ۵۰

۱۱۹ چه تعداد از جمله‌های زیر در مورد موج‌های مکانیکی درست است؟

الف) با دو برابر شدن بسامد منبع موج، سرعت انتشار موج نیز دو برابر می‌شود.

ب) با نصف شدن بسامد منبع موج، بیشینهٔ سرعت ارتعاش ذرات محیط نیز نصف می‌شود.

ج) مسافتی که موج در مدت‌زمان یک ثانیه طی می‌کند، طول موج است.

د) در موج طولی فنر، در مکان‌هایی که بیشترین جمع شدگی رخ می‌دهد، جابه‌جایی از وضعیت تعادل نیز بیشینه است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲۰ اگر تراز شدت صوتی ۷۶ دسی‌بل باشد، شدت آن چند وات بر متر مربع است؟ $(\log ۲ = ۰/۳,\ I_۰ = ۱۰^{-۶}\mu W/m^۲)$

۱) ۴×۱۰^{-۵}
۲) ۴×۱۰^{-۷}
۳) ۶×۱۰^{-۵}
۴) ۶×۱۰^{-۷}

شیمی

۱۲۱ در واکنش $۲ZnS(s) + ۳O_۲(g) \rightarrow ۲ZnO(s) + ۲SO_۲(g)$، اگر اختلاف جرم مواد جامد برابر با ۱۹/۲ گرم و اختلاف حجم گاز برابر با $۱۹/۲\,L$ باشد چگالی گاز $SO_۲$ در این شرایط چند $g.L^{-۱}$ است؟ $(Zn = ۶۵\ ,\ S = ۳۲\ ,\ O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۱/۷۵
۴) ۱/۵

۱۲۲ یک مول گاز کلر شامل ۲۰ درصد جرمی $^{۳۵}_{۱۷}Cl$ و ۸۰ درصد جرمی $^{۳۷}_{۱۷}Cl$ است. چگالی این گاز در شرایطی که حجم مولی گازها برابر ۳۰ لیتر باشد، چند $g.L^{-۱}$ است؟ (عدد جرمی را به‌تقریب، برابر اتم‌گرم هر ایزوتوپ در نظر بگیرید) (با کمی تغییر)

۱) ۱/۱۸
۲) ۲/۴۴
۳) ۱/۳۵
۴) ۱/۲۲

www.alirezaafshar.org

۱۲۳ در فرآیند هال، چگالی آلومینیوم از الکترولیت مورداستفاده ..... است و به ازای تولید ۵۴۰ کیلوگرم آلومینیوم، ..... مترمکعب کربن دی‌اکسید با چگالی $۱/۶\ g.L^{-۱}$ تولید می‌شود؟ $(C = ۱۲\ ,\ O = ۱۶\ ,\ Al = ۲۷ : g.mol^{-۱})$

$$Al_۲O_۳(s) + C(s) \rightarrow Al(l) + CO_۲(g)$$

۱) بیشتر - ۴۱۲/۵

۲) بیشتر - ۴۱۵

۳) کمتر - ۴۱۲/۵

۴) کمتر - ۴۱۵

۱۲۴ کدام گزینه نادرست است؟

۱) تغییر دما در هواکره دلیلی بر لایه بودن آن است.

۲) با افزایش ارتفاع از سطح زمین، فشار هوا کاهش می‌یابد.

۳) رطوبت هوا متغیر بوده و میانگین بخار آب در هوا، حدود یک درصد است.

۴) حدود ۷۵ درصد از جرم هواکره، در نزدیک‌ترین لایه به زمین یعنی استراتوسفر قرار دارد.

۱۲۵ اگر تفاوت شمار نوترون با الکترون در یون $^{۵۹}A^{۲+}$ برابر با ۵ باشد، نسبت شمار الکترون با عدد کوانتومی فرعی $l = ۱$ به شمار الکترون با عدد کوانتومی فرعی $l = ۲$ در یون $A^{۲+}$ کدام است؟

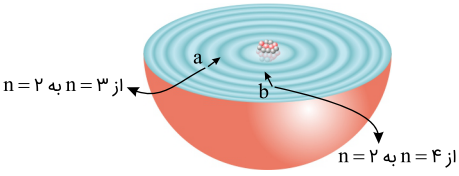
۱) ۱/۵

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) ۲

۴) ۰/۵

۱۲۶ دو پرتوی a و b به ترتیب از $n = ۳$ به $n = ۲$ و از $n = ۴$ به $n = ۲$ منتقل می‌شوند. باتوجه‌به این جمله کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟



۱) میزان انرژی آزادشده b بیشتر از a است.

۲) طول موج b می‌تواند ۴۸۶ nm باشد.

۳) طول موج a در طیف نشری- خطی هیدروژن به رنگ سبز دیده می‌شود.

۴) میزان جابه‌جایی یک الکترون در یک اتم معین، متناسب با میزان انرژی داده شده است.

۱۲۷ عبارت‌های زیر در مورد فرآیند سوختن است. چند عبارت درست در بین آن‌ها وجود دارد؟

- گاز کربن مونوکسید که چگالی کمتری از هوا دارد، فرآوردهٔ سوختن ناقص هیدروکربن‌ها است.
- در صورت کافی بودن اکسیژن، گوگرد به هنگام سوختن شعلهٔ آبی‌رنگی تولید می‌کند.
- به علت ناپایدار بودن CO، در شرایط مناسب سوختن زیر رخ می‌دهد: $۲CO(g) + O_۲(g) \rightarrow ۲CO_۲(g)$
- سوختن الزاماً می‌بایست سریع باشد و در اثر سوختن زغال‌سنگ $SO_۲$ تولید می‌شود.

۱) ۴ مورد

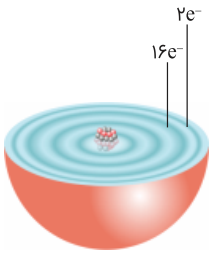
۲) ۳ مورد

۳) صفر مورد

۴) ۲ مورد

www.alirezaafshar.org

۱۲۸ باتوجه‌به شکل، چه تعداد از موارد زیر در مورد این عنصر درست است؟



- به گروه ده جدول دوره‌ای عنصرها تعلق دارد.
- دارای ده الکترون در لایهٔ ظرفیت خود است.
- جزء نافلزها محسوب می‌شود.
- نیتینول آلیاژی است که در آن از این عنصر استفاده شده است.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۲۹ چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ واکنش فلز روی با محلول آهن (III) کلرید، درست است؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود) (باکمی تغییر)

$$FeCl_3(aq) + Zn(s) \rightarrow ZnCl_2(aq) + Fe(s)$$

الف) با تغییر عدد اکسایش دو فلز همراه است.
ب) قدرت اکسندگی یون آهن (III) از یون روی بیشتر است.
پ) همراه تشکیل هر مول روی کلرید، ۲ مول فلز آهن آزاد می‌شود.
ت) به ازای مصرف هر مول روی، نیم مول آهن (III) کلرید، مصرف می‌شود.
ث) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ آن، برابر ۱۰ است.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۳۰ فرض کنیم در فرآیند هابر ۵/۶ لیتر گاز نیتروژن مصرف شود. گاز هیدروژن مصرفی در این شرایط کدام است؟

۱) ۵/۶

۲) $۲ \times ۵/۶$

۳) $۴ \times ۵/۶$

۴) هیچ‌کدام

۱۳۱ میزان اکسیژن موجود در ۴۵ گرم آب در چند مول کربن دی‌اکسید وجود دارد؟ $(H = ۱ \ , \ O = ۱۶ \ , \ C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$

۱) ۲/۵

۲) ۲

۳) ۱/۷۵

۴) ۱/۲۵

۱۳۲ چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست هستند؟

الف) تعداد الکترون‌های لایهٔ ظرفیت هر عنصر با شمارهٔ گروه آن عنصر برابر است.

ب) تعداد الکترون‌های لایهٔ ظرفیت عنصر $_{14}Si$ برابر ۶ است.

پ) تعداد الکترون‌های لایهٔ ظرفیت عنصر $_{7}N$ بیشتر از $_{16}S$ است.

ت) همهٔ عناصر گروه ۱۶ دارای ۶ الکترون ظرفیتی هستند.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۳ چند مورد از عبارت‌های داده‌شده، درست است؟

الف) در میان سیاره‌های سامانهٔ خورشیدی، تنها زمین اتمسفری دارد که امکان زندگی در آن وجود دارد.

ب) گازهای هواکره حداکثر تا ارتفاع ۱۲ کیلومتری از سطح زمین امتداد دارند.

پ) جاذبهٔ زمین، گازهای هواکره را در پیرامون زمین نگه داشته و مانع از خروج آن‌ها از اتمسفر می‌شود.

ت) انرژی گرمایی ذرات تشکیل‌دهندهٔ اتمسفر سبب می‌شود تا پیوسته آن‌ها در حال جنبش باشند.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۴ چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟

الف) نیلز بور با استفاده از بررسی تعداد جایگاه خطوط در طیف نشری خطی عنصرها توانست نخستین مدل اتمی را برای عنصرها ارائه کند.

ب) بر اساس مدل اتمی بور، الکترون اتم هیدروژن در لایهٔ اول با $n = ۱$ قرار دارد و به دور هسته می‌چرخد.

پ) در مدل کوانتومی اتم هر الکترون دارای n و l ویژه‌ای است، به‌گونه‌ای که الکترون‌های یک لایه دارای lهای متفاوتی هستند.

ت) در ساختار لایه‌ای اتم، الکترون‌ها در بخشی از یک لایه قرار دارند که آن را پررنگ‌تر نشان می‌دهند.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۵ اتم عنصر واسطه‌ای می‌تواند کاتیونی پایدار با آرایش الکترونی هشت‌تایی در لایهٔ آخر خود تشکیل دهد. کدام عدد اتمی را می‌توان به این عنصر نسبت داد؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۱

۳) ۲۹ ۴) ۲۸

۱۳۶ از واکنش محلول مجهولی از Fe_xCl_y به همراه سدیم هیدروکسید کافی، رسوبی سبزرنگ حاصل می‌شود. اگر از ۶۳/۵ گرم مادهٔ مجهول Fe_xCl_y با خلوص ۸۰ درصد برای تهیهٔ محلول استفاده کنیم، ۳۵/۱ گرم محلول سدیم کلرید حاصل می‌شود. بازدهٔ درصدی این واکنش کدام است؟ $(Fe = ۵۶ \ , \ Cl = ۳۵/۵ \ , \ Na = ۲۳ : g.mol^{-۱})$

۱) ۷۰ ۲) ۷۵

۳) ۸۰ ۴) ۸۵

۱۳۷ چند مورد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف) بیشتر عنصرهای جدول دوره‌ای را فلزها تشکیل می‌دهند که به‌طور عمده در سمت چپ و مرکز جدول قرار دارند.

ب) خواص فیزیکی شبه‌فلزها بیشتر به نافلزها شبیه بوده درحالی‌که رفتار شیمیایی آن‌ها همانند فلزها است.

پ) خواص فیزیکی و شیمیایی عنصرها به‌صورت دوره‌ای تکرار می‌شود که به قانون دوره‌ای عنصرها معروف است.

ت) فلزها تمایل به از دست دادن الکترون دارند و بیشترین خصلت فلزی در عنصرهای سمت چپ و پایین جدول دوره‌ای دیده می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۸ برای نوشتن نام یون حاصل از چه تعداد از عنصرهای زیر، باید عدد رومی به کار ببریم؟

الف) منگنز ب) نقره پ) باریم ت) مس ث) روی ج) اسکاندیم چ) آلومینیم

۱) ۲ ۲) ۱

۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۹ در شرایط STP چگالی کدام‌یک از گزینه‌های زیر تقریباً برابر $۰/۷۱ g.L^{-۱}$ است؟ $(C = ۱۲ \ , \ H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) اتان ۲) پروپان

۳) بوتان ۴) متان

۱۴۰ نسبت شمار پیوندهای $C - C$ به $C - H$ در یک آلکان برابر با ۰/۳ است. چند مورد از مطالب زیر در مورد آن می‌تواند درست باشد؟

الف) از سوختن هر مول از آن در شرایط STP، چهار مول گاز به دست می‌آید.

ب) در دمای اتاق به حالت گاز است.

پ) برای آن دو ساختار متفاوت می‌توان رسم کرد.

ت) از آن به‌عنوان سوخت فندک استفاده می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۱ بر پایهٔ واکنش: $۳Cu(s) + ۸HNO_۳(aq) \rightarrow ۳Cu(NO_۳)_۲(aq) + ۲NO(g) + ۴H_۲O(l)$، برای تهیهٔ ۱۴/۱ گرم مس (II) نیترات، چند میلی‌لیتر محلول ۲ مولار نیتریک اسید لازم است؟ (بازدهٔ درصدی واکنش، $٪۸۰$ است.) $(N = ۱۴ \ , \ O = ۱۶ \ , \ Cu = ۶۴ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۰۰

۳) ۵۰ ۴) ۲۵

۱۴۲ همهٔ گزینه‌های زیر درست هستند؛ به‌جز .....

۱) فولاد زنگ‌نزن، فولادی است که پس از طی مراحل طولانی از سنگ معدنی به دست می‌آید.

۲) لیوان‌های شیشه‌ای از شن و ماسه ساخته می‌شوند.

۳) جرم کل مواد در کرهٔ زمین ثابت می‌ماند.

۴) مواد طبیعی برخلاف مواد مصنوعی از کرهٔ زمین به دست می‌آیند.

۱۴۳ کدام گزینه ترتیب عنصرهای زیر را به‌درستی نشان می‌دهد؟

الف) تنها نافلزی که رسانایی الکتریکی دارد.

ب) دارای سطح براق بوده و در شرایط مناسب الکترون از دست می‌دهد.

پ) رسانای کم جریان برق، درخشان و شکننده است.

ت) در شرایط مناسب الکترون می‌گیرد و سطح درخشان ندارد.

۱) $\mathrm{Pb, C, Cl, Si}$

۲) $\mathrm{Cl, Si, Pb, C}$

۳) $\mathrm{Cl, C, Pb, Si}$

۴) $\mathrm{Pb, Si, Cl, C}$

۱۴۴ چه تعداد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف) برای تأمین مقدار معینی از یک مادهٔ خالص، همواره باید مقدار بیشتری از مادهٔ ناخالص به کار ببریم.

ب) مقدار فرآورده‌ای که با مصرف کامل یک یا تمام واکنش‌دهنده‌ها تولید شود و درواقع بیشترین مقدار فرآوردهٔ قابل انتظار از یک واکنش موازنه‌شده، مقدار نظری است.

پ) درصد خلوص ماده‌ای که در هر نمونهٔ ۲۵۰ گرمی از آن ۲۲۰ گرم ناخالصی وجود دارد، ۸۸ درصد است.

ت) مقدار عملی در یک واکنش از مقدار فرآوردهٔ مورد انتظار کمتر بوده و بازدهٔ درصدی واکنش از ۱۰۰ کمتر است.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۴۵ مطابق واکنش زیر مقدار ۵ لیتر گاز کربن دی‌اکسید با چگالی $۱/۱\,\mathrm{g.L^{-1}}$ و بازدهٔ ۸۰ درصدی تولید شده است. به‌تقریب چند گرم کلسیم کربنات با خلوص ۷۵ درصد مصرف شده است؟ $(\mathrm{Ca}=۴۰\ ,\ \mathrm{C}=۱۲\ ,\ \mathrm{O}=۱۶ : \mathrm{g.mol^{-1}})$

$$\mathrm{CaCO_3(s) + 2HI(aq) \rightarrow CaI_2(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)}$$

۱) ۳۸/۰۳

۲) ۳۰/۳۸

۳) ۲۸/۰۳

۴) ۲۰/۸۳

۱۴۶ کدام گزینه در ارتباط با فلزات می‌تواند درست باشد؟

۱) تمام ویژگی‌های فلزات اصلی و فلزات واسطه مشابه است.

۲) تمام فلزات جدول دوره‌ای قابلیت ایجاد یون مثبت را دارند.

۳) این عناصر اکثریت جدول تناوبی را تشکیل می‌دهند.

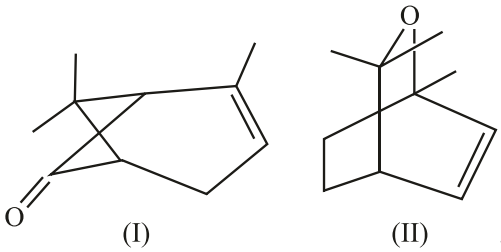
۴) در یک دوره از جدول تناوبی بیشترین خصلت فلزی مربوط به فلزات با توانایی ایجاد یون +۲ است.

۱۴۷ مطابق واکنش موازنه‌نشدهٔ زیر، هرگاه اختلاف جرم فرآورده‌های تولیدشده برابر با جرم دی‌نیتروژن پنتااکسید باقی‌مانده شود، بازدهٔ واکنش کدام است؟ $(N = ۱۴ \ , \ O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

$$N_۲O_۵ \rightarrow NO_۲ + O_۲$$

۱) $\%۵۶/۲$
۲) $\%۲۹/۳$
۳) $\%۵۸/۷$
۴) $\%۸۸/۵$

۱۴۸ کدام مطلب، دربارهٔ ترکیب‌هایی با ساختارهای "نقطه- خط" زیر، درست است؟ $(H = ۱ \ , \ C = ۱۲ \ , \ O = ۱۶ \ , \ Br = ۸۰ : g.mol^{-۱})$



(I) (II)

۱) تفاوت جرم مولی دو ترکیب برابر با ۴ گرم است.
۲) ۳/۸ گرم از ترکیب (II) با ۶ گرم برم واکنش کامل می‌دهد.
۳) دو ترکیب، همپارند و ترکیب (I)، یک عامل کتونی دارد.
۴) برای سوختن کامل ۷/۵ گرم ترکیب I، ۱۴/۵۶ لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP مصرف می‌شود.

۱۴۹ مقدار کافی از نمک آهن (III) کلرید به ۱۳۵ گرم محلول سدیم هیدروکسید اضافه می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که ۴۲/۸ گرم آن رسوب قرمزرنگ تولید می‌شود. اگر بازدهٔ درصدی این واکنش ۸۰ درصد باشد، چند گرم آب در محلول سدیم هیدروکسید وجود داشته است؟ $(H = ۱ \ , \ O = ۱۶ \ , \ Na = ۲۳ \ , \ Fe = ۵۶ : g.mol^{-۱})$

۱) ۶۰
۲) ۸۵
۳) ۱۰۰
۴) ۷۵

۱۵۰ با اضافه کردن محلول سدیم هیدروکسید به آهن (II) کلرید، رسوبی ..... رنگ تولید می‌گردد. ازطرفی اگر به مقداری زنگ آهن، محلول هیدروکلریک اسید افزوده شود، محلولی با فرمول شیمیایی ..... حاصل می‌گردد.

۱) سبز - $FeCl_۳$
۲) قرمز قهوه‌ای - $FeCl_۳$
۳) سبز - $FeCl_۲$
۴) قرمز قهوه‌ای - $FeCl_۲$

۱۵۱ هرچه تفاوت بین نقطه ذوب و جوش یک ماده خالص ..... باشد، آن ماده در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع بوده و نیروهای جاذبه میان ذره‌های سازنده آن ..... است.

۱) کمتر، قوی‌تر
۲) بیشتر، قوی‌تر
۳) بیشتر، ضعیف‌تر
۴) کمتر، ضعیف‌تر

۱۵۲ گرافن تک‌لایه‌ای از گرافیت و ..... است. مقاومت کششی آن ..... برابر فولاد بوده و یک گونهٔ شیمیایی ..... می‌باشد. طول پیوند کربن- کربن در آن به ..... نزدیک‌تر است.

۱) شفاف و انعطاف‌پذیر ، ۱۰۰ ، دوبعدی ، سیکلوهگزان
۲) شفاف و انعطاف‌پذیر ، ۱۰۰ ، دوبعدی ، بنزن
۳) کدر و انعطاف‌پذیر ، ۵ ، سه‌بعدی ، سیکلوهگزان
۴) کدر و انعطاف‌پذیر ، ۵ ، سه‌بعدی ، بنزن

۱۵۳ شکل هندسی کدام دو مولکول، یکسان و شمار الکترون‌های ناپیوندی لایهٔ ظرفیت اتم‌های آن‌ها، با هم برابر است؟

۱) N_2O , CS_2
۲) SO_2 , NO_2
۳) SO_3 , NCl_3
۴) OCl_2 , $BeCl_2$

۱۵۴ الماس ..... گرافیت ..... و یخ ..... گرافن .....

۱) برخلاف، دارای پیوند بین‌مولکولی نبوده، همانند، یک جامد مولکولی است.

۲) برخلاف، ساختاری سه‌بعدی داشته، همانند، ساختار مشبک شش‌ضلعی دارد.

۳) همانند، رسانای ضعیف جریان الکتریسیته بوده، همانند، فقط دارای پیوندهای اشتراکی است.

۴) همانند، دارای پیوند بین‌مولکولی بوده، همانند، یک جامد مولکولی است.

۱۵۵ چند مورد از مطالب زیر صحیح هستند؟

الف) در شبکهٔ بلوری یخ‌مانند سیلیس، حلقه‌های شش‌ضلعی وجود دارد و مانند آن یک جامد کووالانسی است.

ب) در هر مولکول آب در ساختار یخ ۲ پیوند کووالانسی وجود داشته و هر مولکول می‌تواند ۴ پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

پ) گرافیت یک جامد کووالانسی بوده و همه پیوندهای موجود در آن از نوع اشتراکی است و به همین دلیل دمای ذوب بالایی دارد.

ت) خواص شیمیایی آب به‌طور عمده به پیوندهای هیدروژنی موجود در بین مولکول‌های آن بستگی دارد.

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۱۵۶ در بین عبارت‌های زیر چند عبارت درست است؟

الف) در گرافیت بین همهٔ عنصرهای کربن پیوند کووالانسی وجود دارد.

ب) گرافیت از لایه‌هایی حاصل شده است که این لایه‌ها ازطریق نیروهای واندروالسی به هم متصل هستند.

پ) در گرافیت هر اتم کربن به ۳ اتم کربن دیگر متصل است، درحالی‌که در الماس هر اتم کربن به ۴ اتم کربن دیگر متصل است.

ت) آند و کاتد در سلول هال، جامدی کووالانسی است.

ث) نحوهٔ چینش اتم‌های کربن در گرافن و گرافیت درست مشابه هم است.

ج) در بین اجزای سازندهٔ خاک رُس، یک جامد کووالانسی حضور دارد.

۱) ۱
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

۱۵۷ چند مورد از مطالب زیر نادرست نیستند؟

- سیلیسیم در طبیعت به‌طور خالص وجود نداشته و فقط به‌صورت سیلیس یافت می‌شود.
- عنصرهای سازندهٔ جامدهای کووالانسی کربن و سیلیسیم است.
- گرافن به دلیل ساختار سه‌بعدی خود استحکام بسیار بالاتری دارد.
- جامدهای کووالانسی رسانای گرما بوده ولی رسانای الکتریسیته نیستند.
- در ساختار گرافن، گرافیت و الماس الکترون‌ها تحرک بسیار پایینی دارند.

۱) هیچ‌کدام
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

۱۵۸ کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

الف) سیلیسیم تنها شبه‌فلز گروه ۱۴ و دورهٔ سوم جدول تناوبی است.

ب) تنها مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ کوارتز سیلیس است.

پ) حالت فیزیکی سیلیسیم در دمای اتاق مشابه با مولکول ید است.

ت) درصد جرمی سیلیسیم در پوستهٔ زمین بیش از ۹۰٪ است.

ث) از ترکیبات سیلیسیم در ساخت ابزار برش شیشه و سنباده استفاده می‌شود.

ج) سیلیسیم به‌صورت خالص یافت نمی‌شود.

۱) الف - ت - ث - ج
۲) الف - پ - ث
۳) ب - پ - ج
۴) الف - ب - ت - ث

۱۵۹ کدام دو عنصر زیر عناصر اصلی سازندهٔ جامدهای کووالانسی در طبیعت هستند؟

۱) O , Si
۲) O , C
۳) C , Si
۴) H , C

۱۶۰ جدول زیر درصد جرمی مواد سازندهٔ دو نوع خاک رس را نشان می‌دهد. چند مطلب درست است؟

ماده	SiO_2	Al_2O_3	H_2O	Fe_2O_3	MgO	Na_2O	K_2O
درصد جرمی در خاک رس (I)	۴۵/۵	۳۶/۵	۱۴/۵	۱	۰/۵	۱/۵	۰
درصد جرمی در خاک رس (II)	۵۸	۱۲	۲	۹	۸	۶	۵

الف) در اثر پخته شدن خاک رس (II) کاهش جرم بیشتری خواهد داشت.

ب) خاصیت بازی در خاک رس (II) بیشتر است.

ج) سفال پخته‌شده از خاک رس (II) رنگ سرخ‌تری دارد.

د) مجموع درصد جرمی اکسید فلزات موجود در خاک رس (II) کمتر از خاک رس (I) است.

هـ) در اثر پخته شدن خاک رس (I) درصد جرمی Al_2O_3 به عدد حدوداً ۴۲/۷ تغییر می‌کند.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۶۱ کدام گزینه درست است؟

۱) در کلسیم سیلیکات نسبت شمار الکترون‌های ناپیوندی آنیون به شماره کاتیون‌ها برابر با ۱۲ است.

۲) شمار الکترون‌های با $n + l = 5$ کاتیون در محلول سبزرنگ از نمک وانادیم برابر با ۳ است.

۳) آلیاژی که در ساخت استنت برای رگ‌ها به کار می‌رود شامل عنصرهای شمارهٔ ۲۲ و ۲۷ جدول دوره‌ای است.

۴) نیم‌واکنش $Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$ پتانسیل کاهشی بزرگ‌تری از نیم‌واکنش $V^{3+}(aq) + e^- \rightarrow V^{2+}(aq)$ دارد.

۱۶۲ کدام گزینهٔ زیر نادرست است؟

۱) مقاومت کششی یک لایه از گرافیت حدود ۱۰۰ برابر فولاد است.

۲) سیلیس از دسته جامدهای کووالانسی است که در دما و فشار اتاق به حالت جامد است.

۳) کوارتز ازجمله نمونه‌های خالص SiO_2 است.

۴) در یخ همانند سیلیس همهٔ اتم‌ها با پیوندهای اشتراکی به هم متصل شده‌اند.

۱۶۳ کدام گزینه نادرست است؟ $(N = ۱۴ \ , \ O = ۱۶ \ , \ Mg = ۲۴ \ , \ Al = ۲۷ \ , \ Mn = ۵۵ : g.mol^{-1})$

۱) درصد جرمی نیتروژن در آلومینیم نیترید بیش از دو برابر درصد جرمی نیتروژن در آلومینیم نیترات است.

۲) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور پتاسیم یدید از آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور لیتیم فلوئورید کمتر است.

۳) شبکهٔ بلور یونی، آرایش سه‌بعدی منظم یون‌ها در بلور جامد یونی است.

۴) بیش از ۹ درصد جرم منیزیم پرمنگنات را منیزیم تشکیل می‌دهد.

۱۶۴ برای چند مورد از موارد زیر نمی‌توان واژهٔ فرمول مولکولی به کار برد؟

$SiO_2(s) \ , \ NaOH(s) \ , \ CaCl_2(s) \ , \ C_6H_{14}(l) \ , \ CO_2(g) \ , \ NH_3(g) \ , \ Cl_2(g)$

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

۱۶۵ کدام گزینهٔ زیر پیرامون ماده‌ای که از آن برای ساخت ابزار برش شیشه استفاده می‌شود، نادرست است؟

۱) چگالی آن بیشتر از دگرشکل دیگر طبیعی کربن است.

۲) یک جامد کووالانسی به حساب می‌آید.

۳) چینش اتم‌های آن به‌صورت سه‌بعدی است.

۴) ساختاری لایه‌ای دارد.

استاد علیرضا افشار
”همایش ها“
@hamayesh_dr_afshar

www.alirezaafshar.org

حسابان

۱

گزینه ۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=۱$ تا $x=۱/۴۴$ را با استفاده از رابطهٔ $\frac{f(۱/۴۴)-f(۱)}{۰/۴۴}$ به دست می‌آوریم.

ب) برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=۱$ باید ضابطهٔ مشتق تابع یا همان $f'(x)$ و سپس $f'(۱)$ را محاسبه کنیم. اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای به‌عنوان جواب تست در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۱/۴۴)-f(۱)}{۰/۴۴} = \frac{\frac{۰/۴۴}{\sqrt{۱/۴۴}}-۰}{۰/۴۴} = \frac{۱}{\sqrt{۱/۴۴}} = \frac{۱}{۱/۲} = \frac{۱}{\frac{۶}{۵}} = \frac{۵}{۶}$$

$$f(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-\frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{x}$$

$$=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\frac{۱}{۲x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$۱-\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

۲

گزینه ۳

گام اول

الف) $f'_+(۰)$ بیانگر مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۰$ و $f'_-(۰)$ بیانگر مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۰$ است.

ب) می‌دانیم: $|x|=\begin{cases} x & ;x\geq ۰ \\ -x & ;x<۰ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به ازای $x>۰$ و $x<۰$ تعیین و مشتق چپ و راست آن را در نقطهٔ $x=۰$ محاسبه می‌کنیم.

$$x>۰ : |x|=x \ , \ [x]=۰ \Rightarrow f(x)=x\times ۰=۰ \Rightarrow f'_+(۰)=۰$$
$$x<۰ : |x|=-x \ , \ [x]=-۱ \Rightarrow f(x)=(-x)(-۱)=x \Rightarrow f'_-(۰)=۱$$

بنابراین:

$$f'_-(۰)-f'_+(۰)=۱-۰=۱$$

۳ گزینه ۱

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، باید همواره نامنفی باشد.

ب) پیوستگی تابع در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است.

ج) مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

گام دوم

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \Rightarrow D_f=[-1,1]$$

تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است (باتوجه‌به اینکه گزینهٔ "وجود ندارد" نداریم، پس تابع حتماً در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است و برای یافتن مشتق چپ در این نقطه، نیازی به بررسی پیوستگی نیست). اکنون مشتق چپ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت زیر رادیکال صورت ضرب می‌کنیم تا عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج حذف شود:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-1+x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

چون داریم:

$$x\to 0^- \quad\Rightarrow\quad x<0 \quad\Rightarrow\quad |x|=-x$$

بنابراین:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-0}}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴ گزینه ۴

نکته: اگر $g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع $f(x)=\sqrt[3]{g(x)}$ در ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ $g(x)=0$ دارای مماس قائم است.

در اینجا $x=1$ و $x=b$ ریشه‌های داخل رادیکال هستند:

$$x^2+ax+2=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها ۱ و b هستند}} \begin{cases}\text{ضرب ریشه‌ها}: 1\times b=2\\ \text{جمع ریشه‌ها}: 1+b=-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\ a=-3\end{cases}$$

درنتیجه:

$$a-b=-3-2=-5$$

۵ گزینه ۲

نکته: تابع $f(x)=\sqrt[۳]{ax^۲+bx+c}$ در ریشه‌های سادهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ مشتق ندارد (زیرا مشتق آن ∞ می‌شود)، پس باید $x=۱$ و $x=b$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+x+a=۰$ باشد.

$$x=۱\Rightarrow ۱+۱+a=۰\Rightarrow a=-۲\Rightarrow x^۲+x-۲=۰\Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰\Rightarrow b=-۲$$

۶ گزینه ۲

گام اول

الف) عرض از مبدأ یک خط، به ازای جایگذاری $x=۰$، در معادلهٔ آن به دست می‌آید.
ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.
ج) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y-y_۱=m\,(x-x_۱)$$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم. طبق قسمت "ب" از گام اول، شیب این خط برابر است با:

$$y=\sqrt{x^۲+۳x}\Rightarrow y'=\frac{۲x+۳}{۲\sqrt{x^۲+۳x}}$$
$$y'(۱)=\frac{۲+۳}{۲\sqrt{۱+۳}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۴}}=\frac{۵}{۲\times ۲}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{۵}{۴}$$

$$x=۱\Rightarrow y=\sqrt{۱+۳}=\sqrt{۴}=۲\Rightarrow y(۱)=۲$$

بنابراین، طبق قسمت "ج" از گام اول، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(۱,۲)$ برابر است با:

$$y-y(۱)=y'(۱)(x-۱)\Rightarrow y-۲=\frac{۵}{۴}(x-۱)$$
$$\Rightarrow y=\frac{۵}{۴}x-\frac{۵}{۴}+۲\Rightarrow y=\frac{۵}{۴}x+\frac{۳}{۴}$$

با جایگذاری $x=۰$ در معادلهٔ خط مماس، داریم:

$$\xrightarrow{x=۰} y=\frac{۵}{۴}(۰)+\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی، برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

۷ گزینه ۲

$$f(۰)=۰,\ f(x)=\sin(x+۲f(x))$$
$$\xrightarrow[\text{مشتق می‌گیریم}]{\text{از دو طرف}} f'(x)=(۱+۲f'(x))\cos(x+۲f(x))$$

$$\xrightarrow{x=۰} f'(۰)=(۱+۲f'(۰))\cos(۰)\Rightarrow f'(۰)=-۱\quad \text{I}$$

$$\text{II}:(fof)'_{x=۰}=f'(۰)\times f'(f(۰))\xrightarrow{f(۰)=۰}(f'(۰))^۲\overset{\text{I}}{=}۱$$

پس دو واحد بزرگ‌تر است.

۸ گزینه ۳

ریشه‌های سادهٔ عبارت‌های داخل قدر مطلق مشتق‌ناپذیرند:

$$x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \xrightarrow{x>۰} x = ۱ \quad (I)$$
$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \quad (II)$$

نقطهٔ انفصال دامنه را هم بررسی می‌کنیم. در این نقطه حدود چپ و راست و مقدار تابع باهم برابرند، پس پیوسته است؛ ولی مشتق‌های چپ و راست نابرابرند:

$$f'_+(۰) = (۱ - x^۲)' = -۲x \xrightarrow{x=۰} f'_+(۰) = ۰$$
$$f'_-(۰) = (۲ - x - ۱)' = -۱$$

پس در $x = ۰$ هم مشتق‌ناپذیر است.

۹ گزینه ۱

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از $x_۱$ تا $x_۲$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱}$$

ب) آهنگ آنی یا لحظه‌ای در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ آنی خواسته‌شده را به دست می‌آوریم سپس اختلاف آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۲/۵۶) - f(۲/۲۵)}{۲/۵۶ - ۲/۲۵} = \frac{\sqrt{۲/۵۶} - \sqrt{۲/۲۵}}{۰/۳۱} = \frac{۱/۶ - ۱/۵}{۰/۳۱} = \frac{۰/۱}{۰/۳۱} = \frac{۱۰}{۳۱}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$x = ۲/۲۵ \text{ آهنگ آنی در نقطهٔ } = f'(۲/۲۵) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲/۲۵}} = \frac{۱}{۲ \times ۱/۵} = \frac{۱}{۳}$$

اختلاف آهنگ آنی و آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$f'(۲/۲۵) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱۰}{۳۱} = \frac{۳۱ - ۳۰}{۹۳} = \frac{۱}{۹۳}$$

۱۰ گزینه ۴

$$f(x)=\begin{cases}x^{۳}+۱ & ;x>۱\\ -۱ & ;x=۱\\ ۲x^{۲}-۱ & ;x<۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۱^{+}} x^{۳}+۱=۱+۱=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}} ۲x^{۲}-۱=۲-۱=۱$$

$$f(۱)=-۱$$

تابع $f(x)$ در گزینهٔ ۱، در $x=۱$ پیوسته نیست؛ بنابراین مشتق‌پذیر نیست.

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x\geq ۱\\ \frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲} & ;x<۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱^{+}} g(x)=\sqrt{۱}=۱=g(۱)$$

$$\lim_{x\to ۱^{-}} g(x)=\frac{۱}{۲}(۱)+\frac{۱}{۲}=۱$$

$\Rightarrow$ تابع $g(x)$ در $x=۱$ پیوسته است

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲\sqrt{x}} & ;x\geq ۱\\ \frac{۱}{۲} & ;x<۱\end{cases}$$

$\Rightarrow$ تابع $g(x)$ مشتق‌پذیر و در $x=۱$ مشتق اول آن برابر $\frac{۱}{۲}$ است

$$\Rightarrow g'_{+}(۱)=\frac{۱}{۲},\ g'_{-}(۱)=\frac{۱}{۲}$$

$$g''(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{۴x\sqrt{x}} & ;x>۱\\ ۰ & ;x<۱\end{cases}$$

$\Rightarrow g''_{+}(۱)=-\frac{۱}{۴}\ ,\ g''_{-}(۱)=۰\Rightarrow$ تابع $g'(x)$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست

$$h(x)=\begin{cases}۴-۳x & ;x\geq ۱\\ ۳-۲x^{۳} & ;x<۱\end{cases}\quad \lim_{x\to ۱^{+}} h(x)=\lim_{x\to ۱^{+}} ۴-۳x=۴-۳=۱=h(۱)\quad \lim_{x\to ۱^{-}} h(x)=\lim_{x\to ۱^{-}} ۳-۲x^{۳}=۳-۲=۱$$

$\Rightarrow$ تابع $h(x)$ در $x=۱$ پیوسته است

$$h'(x)=\begin{cases}-۳ & ;x>۱\\ -۶x^{۲} & ;x<۱\end{cases}$$

$\Rightarrow h'_{+}(۱)=-۳,\ h'_{-}(۱)=-۶(۱)=-۶\Rightarrow$ تابع $h(x)$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست

$$k(x)=\begin{cases}x^{۳}+۳x-۱ & ;x\geq ۱\\ ۳x^{۲} & ;x<۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^{+}} k(x)=\lim_{x\to ۱^{+}} x^{۳}+۳x-۱=۳=k(۱),\lim_{x\to ۱^{-}} k(x)=\lim_{x\to ۱^{-}} ۳x^{۲}=۳$$

$$k'(x)=\begin{cases}۳x^{۲}+۳ & ;x\geq ۱\\ ۶x & ;x<۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow k'_{+}(۱)=۳(۱)+۳=۶,k'_{-}(۱)=۶(۱)=۶$$

$$k''(x)=\begin{cases}۶x & ;x\geq ۱\\ ۶ & ;x<۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow k''_{+}(۱)=۶,\ k''_{-}(۱)=۶$$

درنتیجه $k(x)$ پیوسته و مشتق‌پذیری اول و دوم نیز دارد، پس $k'(x)$ مشتق‌پذیر است.

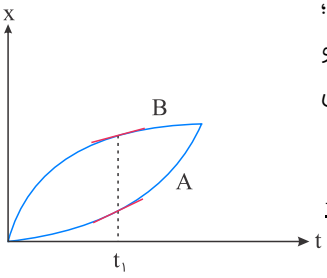
۱۱ گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌های ۱ و ۴: باتوجه‌به نمودار از لحظه‌ای که دو دونده به هم می‌رسند به بعد، دوندهٔ A جلوتر خواهد بود و این به این معنا است که دوندهٔ A زودتر به مقصد می‌رسد؛ اما به شرطی که حرکت آن‌ها ادامه می‌داشت اما در لحظهٔ $t = t'$ حرکت آن‌ها تمام می‌شود و هر دو باهم به مقصد می‌رسند.

گزینهٔ ۲: باتوجه‌به نمودار، در لحظه $t = t_۱$ بیشترین مقدار فاصله رخ می‌دهد و در این لحظه شیب خط مماس بر منحنی دو نمودار یکسان است و ازآنجاکه شیب نمودار مکان برحسب زمان، تعیین‌کنندهٔ سرعت لحظه‌ای است، می‌توان گفت در این لحظه سرعت دو دونده برابر است.

گزینهٔ ۳: سرعت متوسط از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = a$ برابر شیب خط واصل بین دو نمودار در این دو نقطه است؛ باتوجه‌به آنکه مبدأ زمانی برای هر دو متحرک $t = ۰$ درنظر گرفته شده است، باید در هنگام $t = a$ مکان دو متحرک هم یکسان باشد که این اتفاق فقط یکبار رخ می‌دهد. به‌بیان‌دیگر اگر توابع مکان برحسب زمان دونده‌های A و B را به ترتیب $A(t)$ و $B(t)$ بنامیم باید داشته باشیم:



$$\frac{A(a) - A(۰)}{a - ۰} = \frac{B(a) - B(۰)}{a - ۰} \Rightarrow A(a) = B(a)$$

۱۲ گزینه ۱

گام اول

الف) فاصلهٔ نقطهٔ $M(x, y)$ از مبدأ مختصات از رابطهٔ $T = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ به دست می‌آید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

در رابطهٔ T از قسمت الف از گام اول، عبارت $y = \sqrt{x + ۸}$ را جایگزین می‌کنیم تا T برحسب متغیر x به دست آید.

$$T = \sqrt{x^۲ + y^۲} \xrightarrow{y=\sqrt{x+۸}} T = \sqrt{x^۲ + \left(\sqrt{x + ۸}\right)^۲} = \sqrt{x^۲ + x + ۸}$$

از T نسبت به x مشتق گرفته و مقدار آن را در $x = ۷$ حساب می‌کنیم:

$$T' = \frac{۲x + ۱}{۲\sqrt{x^۲ + x + ۸}}$$

$$\Rightarrow T'(۷) = \frac{۲(۷) + ۱}{۲\sqrt{۷^۲ + ۷ + ۸}} = \frac{۱۴ + ۱}{۲\sqrt{۴۹ + ۷ + ۸}} = \frac{۱۵}{۲\sqrt{۶۴}} = \frac{۱۵}{۲ \times ۸} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

۱۳ گزینه ۳

می‌دانیم هرقدر بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم تا به $t = ۲$ نزدیک شویم، سرعت متوسط به‌سرعت لحظه‌ای در $t = ۲$ نزدیک می‌شود. سرعت لحظه‌ای در $t = ۲$ برابر است با:

$$d'(۲) = ۱۰ - ۲(۲) = ۶$$

۱۴ گزینه ۳

تابع در $x = ۱$ پیوسته است؛ زیرا:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(۱) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۲x-۱-۱}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۲(x-۱)}{x-۱} = ۲ \\ f'_-(۱) = \lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{۳-(x+۱)-۱}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{-(x-۱)}{x-۱} = -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(۱) + f'_-(۱) = ۲ - ۱ = ۱$$

۱۵ گزینه ۳

گام اول

اگر $y = f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم: $y' = u'f'(u)$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$y = f(f(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x)\,f'(f(x))$$

ابتدا لازم است ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست آوریم، داریم:

$$f(x) = \sin^۲ \pi x - \frac{۱}{۲}\cos \pi x$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = ۲\pi \cos \pi x \ \sin \pi x + \frac{\pi}{۲}\sin \pi x$$

$$= \pi(۲\sin \pi x \ \cos \pi x) + \frac{\pi}{۲}\sin \pi x = \pi \sin ۲\pi x + \frac{\pi}{۲}\sin \pi x$$

قبل از محاسبهٔ مقدار $y'\left(\frac{۱}{۳}\right)$، مقادیر $f'\left(\frac{۱}{۳}\right)$ و $f'\left(f\left(\frac{۱}{۳}\right)\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'\left(\frac{۱}{۳}\right) = \pi \sin \frac{۲\pi}{۳} + \frac{\pi}{۲}\sin \frac{\pi}{۳} = \pi\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + \frac{\pi}{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{۳\pi}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}\frac{\pi}{۴}$$

$$f\left(\frac{۱}{۳}\right) = \sin^۲ \frac{\pi}{۳} - \frac{۱}{۲}\cos \frac{\pi}{۳} = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ - \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$f'\left(f\left(\frac{۱}{۳}\right)\right) = f'\left(\frac{۱}{۲}\right) = \pi \sin \pi + \frac{\pi}{۲}\sin \frac{\pi}{۲} = ۰ + \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲}$$

بعد از انجام این محاسبات طاقت‌فرسا، می‌رسیم به محاسبه $y'\left(\frac{۱}{۳}\right)$:

$$y'\left(\frac{۱}{۳}\right) = f'\left(\frac{۱}{۳}\right) f'\left(f\left(\frac{۱}{۳}\right)\right) = f'\left(\frac{۱}{۳}\right) f'\left(\frac{۱}{۲}\right) = \left(۳\sqrt{۳}\frac{\pi}{۴}\right)\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \left(۳\sqrt{۳}\right)\frac{\pi^۲}{۸}$$

پس حاصل $y'\left(\frac{۱}{۳}\right)$، برابر $۳\sqrt{۳}\,\frac{\pi^۲}{۸}$ است.

۱۶ گزینه ۱

اول: $a_۱ = ۱$ است و $q = ۲$ می‌باشد و $۲^{۶۳}$ همان جملهٔ ۶۴ام دنباله است. $(۲^{n-۱} = ۲^{۶۳} \Rightarrow n = ۶۴)$

دوم: مجموع ۶۴ جملهٔ اول دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q} \Rightarrow S_{۶۴} = \frac{۱ \times (۱ - ۲^{۶۴})}{۱ - ۲} = ۲^{۶۴} - ۱$$

۱۷ گزینه ۲

اگر $\alpha + ۱$ و $\beta + ۱$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۴x - ۱ = ۰$ باشند:

$$S = \frac{-b}{a} = (\alpha + ۱) + (\beta + ۱) = -۴ \Rightarrow \alpha + \beta = -۶$$
$$P = \frac{c}{a} = (\alpha + ۱)(\beta + ۱) = \alpha\beta + \underbrace{\alpha + \beta}_{-۶} + ۱ = -۱ \Rightarrow \alpha\beta = ۴$$

اگر $\frac{\alpha}{۲}$ و $\frac{\beta}{۲}$ ریشه‌های معادلهٔ خواسته‌شده باشند:

$$S = \frac{\alpha}{۲} + \frac{\beta}{۲} = \frac{۱}{۲}(\alpha + \beta) = \frac{۱}{۲}(-۶) = -۳$$
$$P = (\frac{\alpha}{۲})(\frac{\beta}{۲}) = \frac{۱}{۴}(\alpha\beta) = \frac{۱}{۴}(۴) = ۱$$

و در آخر معادله را به دست می‌آوریم:

$$y = x^۲ - Sx + P = x^۲ + ۳x + ۱$$

۱۸ گزینه ۲

$$AB = \sqrt{(۴ - ۲)^۲ + (-۲ + ۱)^۲} = \sqrt{۵}\ ,\ BC = \sqrt{(۳ - ۴)^۲ + (۰ + ۲)^۲} = \sqrt{۵}$$
$$CD = \sqrt{(۱ - ۳)^۲ + (۱ - ۰)^۲} = \sqrt{۵}\ ,\ AD = \sqrt{(۱ - ۲)^۲ + (۱ + ۱)^۲} = \sqrt{۵}$$

طول اضلاع چهار ضلعی باهم برابر است، پس چهار ضلعی مربع یا لوزی می‌باشد.

$$m_{AB} = \frac{-۲ + ۱}{۴ - ۲} = -\frac{۱}{۲}\ ,\ m_{BC} = \frac{۰ + ۲}{۳ - ۴} = -۲$$

ازآن‌جاکه دو ضلع مجاور بر هم عمود نیستند، پس لوزی است.

۱۹ گزینه ۲

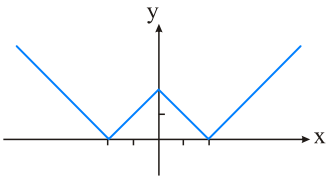
هر نقطه که روی خط $y = x - ۱$ قرار دارد به‌صورت $A(x\ ,\ x - ۱)$ است. حال فاصلهٔ A را از خط $۲x - ۳y - ۵ = ۰$ به دست می‌آوریم.

$$|AH| = \frac{|۲x - ۳(x - ۱) - ۵|}{\sqrt{۴ + ۹}} = \frac{|-x - ۲|}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$
$$\Rightarrow\ |x + ۲| = ۱۳\ \Rightarrow\ x + ۲ = \pm ۱۳\ \Rightarrow\ x = ۱۱\ ,\ -۱۵$$

۲۰ گزینه ۳

تابع مفروض را خلاصه می‌کنیم $y = \sqrt{x^۲ - ۴|x| + ۴} = \sqrt{(|x| - ۲)^۲}$ یا $y = ||x| - ۲|$، در حالت $x \geq ۰$ تابع $y = |x - ۲|$ را رسم می‌کنیم. برای حالت $x < ۰$ کافی است قرینهٔ قسمت اول را نسبت به محور yها به دست آوریم. مساحت محدود به نمودار تابع و محور xها یک مثلث به‌قاعدهٔ ۴ واحد و ارتفاع ۲ واحد است، پس:

$$S = \frac{۲ \times ۴}{۲} = ۴$$



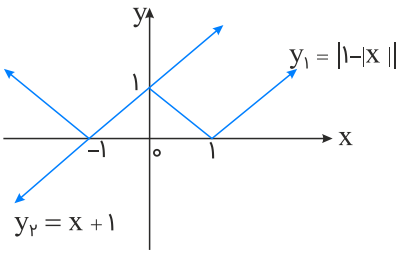
۲۱ گزینه ۱

$$x^۲ - ۳x + \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = ۳ \\ P = \alpha.\beta = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$k = \frac{۱}{\sqrt{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{S + ۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{۳ + ۱}}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

۲۲ گزینه ۱

از روش هندسی کمک می‌گیریم. همان‌طور که دیده می‌شود، تمام بازهٔ $[-۱ , ۰]$ ریشه‌های این معادله $(y_۱ = y_۲)$می‌باشند که شامل هیچ عدد مثبتی نمی‌باشد.



۲۳ گزینه ۴

$$|AB| = \sqrt{۱۶+۰} = ۴$$

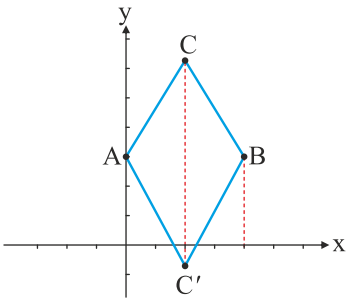
$$|AC| = \sqrt{a^۲ + (b-۳)^۲}\ ,\ |BC| = \sqrt{(a-۴)^۲ + (b-۳)^۲}$$

چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است پس طول سه ضلع باهم برابرند.

$$(I)\ \sqrt{a^۲ + (b-۳)^۲} = \sqrt{(a-۴)^۲ + (b-۳)^۲}$$
$$\Rightarrow a^۲ = (a-۴)^۲ \Rightarrow a^۲ = a^۲ - ۸a + ۱۶ \Rightarrow a = ۲$$
$$(II)\ \sqrt{a^۲ + (b-۳)^۲} = ۴ \Rightarrow a^۲ + (b-۳)^۲ = ۱۶$$
$$\xrightarrow{a=۲} (b-۳)^۲ = ۱۲ \Rightarrow b - ۳ = \pm\sqrt{۱۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_۱ = ۳ + \sqrt{۱۲} \\ b_۲ = ۳ - \sqrt{۱۲} \end{cases} \Rightarrow b_۱ + b_۲ = ۶$$

برای نقطه C دو مقدار به دست آمده است برای فهم بهتر شکل زیر را ببینید.



۲۴ گزینه ۱

طبق تعریف دایره، فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ $(a\ ,\ ۲a)$ از هریک از نقاط $(۱\ ,\ ۲)$ و $(-۱\ ,\ ۴)$، ابتدا مقدار a و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} R = \sqrt{(a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲} \\ R = \sqrt{(a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲} = \sqrt{(a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲ = (a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲$$
$$\Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ + ۴a^۲ - ۴a + ۱ = a^۲ + ۲a + ۱ + ۴a^۲ - ۱۶a + ۱۶$$
$$\Rightarrow -۸a + ۵ = -۱۴a + ۱۷ \Rightarrow ۶a = ۱۲ \Rightarrow a = ۲$$
$$\Rightarrow R = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۴-۱)^۲} = \sqrt{۳^۲} = ۳$$

پس دایره‌ای به مرکز $(۲\ ,\ ۴)$ و شعاع ۳ داریم.

۲۵ گزینه ۱

$$(۲x+۱)^۲ - x = ۴ \Rightarrow (۲x+۱)^۲ = x+۴ \Rightarrow \begin{cases} (۲\alpha+۱)^۲ = \alpha+۴ \\ (۲\beta+۱)^۲ = \beta+۴ \end{cases}$$

$$(۲x+۱)^۲ - x - ۴ = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ + ۴x + ۱ - x - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ + ۳x - ۳ = ۰ \Rightarrow \alpha+\beta = -\frac{۳}{۴}$$

$$S_{\text{جدید}} = (۲\alpha+۱)^۲ + (۲\beta+۱)^۲ = \alpha+۴+\beta+۴ = (\alpha+\beta)+۸ = -\frac{۳}{۴} + ۸ = \frac{۲۹}{۴}$$

$$۴x^۲ + mx + n = ۰ \Rightarrow S_{\text{جدید}} = -\frac{m}{۴} = \frac{۲۹}{۴} \Rightarrow m = -۲۹$$

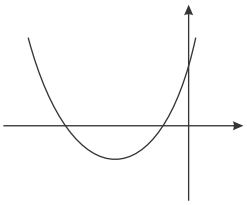
$$x^۳+(a+۱)x^۲+(a+۴)x+۴=۰$$

چون مجموع ضرایب توان‌های فرد با مجموع ضرایب توان‌های زوج باهم برابرند، عبارت درجهٔ سوم بالا بر $x+۱$ بخش‌پذیر است ($x=-۱$ عبارت بالا را صفر می‌کند)، پس $x^۳+(a+۱)x^۲+(a+۴)x+۴$ را بر $x+۱$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} x^۳+(a+۱)x^۲+(a+۴)x+۴ \;\Big|\; \dfrac{x+۱}{x^۲+ax+۴} \\ \underline{-x^۳-x^۲} \\ \quad ax^۲+(a+۴)x+۴ \\ \quad \underline{-ax^۲-ax} \\ \quad\quad ۴x+۴ \\ \quad\quad \underline{-۴x-۴} \\ \quad\quad\quad ۰ \end{array}$$

$$x^۳+(a+۱)x^۲+(a+۴)x+۴=(x+۱)(x^۲+ax+۴)$$

برای اینکه معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی منفی باشد، باید معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲+ax+۴$ دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد؛ یعنی به‌صورت زیر باشد.



$$\begin{cases} x^۲\text{ضریب} > ۰ \\ \text{مجموع ریشه‌ها} < ۰ \Rightarrow \dfrac{-a}{۱} < ۰ \\ \Delta > ۰ \Rightarrow \Delta = a^۲-۱۶ > ۰ \Rightarrow a^۲ > ۱۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > ۰ \quad (۱) \\ \begin{cases} a > ۴ \\ \text{یا} \\ a < -۴ \end{cases} \quad (۲) \end{cases} \xrightarrow{(۱)\cap(۲)} a > ۴$$

اما توجه کنید چون در صورت سؤال گفته سه ریشهٔ متمایز، پس $x=-۱$ نباید ریشهٔ $x^۲+ax+۴$ باشد؛ پس $a-۱+۴=۰$ یعنی a نباید $+۵$ باشد، زیرا اگر a، $+۵$ باشد، داریم:

$$(x+۱)(x^۲+۵x+۴)=(x+۱)(x+۱)(x+۴)$$

در این صورت معادله دارای ریشهٔ مضاعف (-۱) و ریشهٔ سادهٔ -۴ خواهد بود؛ پس جواب به‌صورت $(۴,+\infty)-\{۵\}$ خواهد بود.

۲۷ گزینه ۳

گام اول

ظاهر تست ممکن است کمی گیج کننده به نظر برسد. اما اگر مرحله‌به‌مرحله گفته‌های تست را به زبان ریاضی برگردانیم حل تست کار چندان دشواری نخواهد بود.

الف) تست به ما گفته تعداد جملات یک دنبالهٔ هندسی، زوج است. ما فرض می‌کنیم تعداد جملات این دنباله برابر $۲n$ و قدر نسبت آن برابر q باشد.

ب) جملات با شماره‌های فرد تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت $q^۲$ می‌دهند. اگر تعداد کل جملات برابر $۲n$ باشد، پس تعداد جملات فرد برابر n است.

گام دوم

باتوجه‌به اینکه مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت q از رابطهٔ $S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$ به دست می‌آید، داریم:

$$S_{۲n} = ۳S_n \Rightarrow \frac{a_۱(۱-q^{۲n})}{۱-q} = ۳ \times \frac{a_۱(۱-(q^۲)^n)}{۱-q^۲} \Rightarrow \frac{a_۱(۱-q^{۲n})}{۱-q} = ۳ \times \frac{a_۱(۱-q^{۲n})}{۱-q^۲} \Rightarrow \frac{۱}{۱-q} = \frac{۳}{۱-q^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱-q} = \frac{۳}{(۱-q)(۱+q)} \Rightarrow \frac{۳}{۱+q} = ۱ \Rightarrow q+۱ = ۳ \Rightarrow q = ۲$$

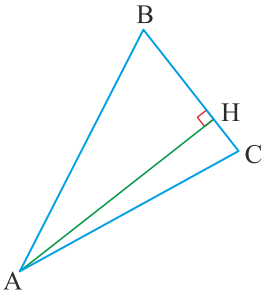
بنابراین قدر نسبت دنبالهٔ هندسی برابر ۲ می‌شود.

روش دوم (تستی): می‌توانیم تعداد جملات را $n = ۲$ فرض کنیم، پس:

$$a_۱ + a_۲ = ۳a_۱ \Rightarrow a_۱ + a_۱q = ۳a_۱ \Rightarrow a_۱(۱+q) = ۳a_۱$$
$$۱+q = ۳ \Rightarrow q = ۲$$

۲۸ گزینه ۲

معادلهٔ ارتفاع AH، خطی است که از نقطهٔ A می‌گذرد و بر خط BC عمود است.



پس ابتدا محل تلاقی دو خط AB و AC را به دست می‌آوریم تا مختصات نقطهٔ A به دست آید.

$$\begin{cases} AB: & ۲y - x = ۳ \\ AC: & y - ۲x = ۵ \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{۷}{۳}, \frac{۱}{۳}\right)$$

$$m_{AH} = \frac{-۱}{m_{BC}} = \frac{-۱}{-\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

$$AH: \quad y - \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۲}\left(x + \frac{۷}{۳}\right) \Rightarrow \quad ۲y - ۱ = ۳x + \frac{۱۴}{۳}$$

$$۲y - ۳x = \frac{۱۷}{۳} \xrightarrow{\times(۳)} \quad ۶y - ۹x = ۱۷$$

۲۹ گزینه ۲

$$\sqrt{۲x + ۵} - ۲x = ۵ \Rightarrow \sqrt{۲x + ۵} = ۲x + ۵$$

با تغییر متغیر $t = ۲x + ۵$ داریم:

$$\sqrt{t} = t \Rightarrow t^۲ = t \Rightarrow t^۲ - t = ۰ \Rightarrow t(t - ۱) = ۰ \Rightarrow t = ۰ \text{ یا } ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۵ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۵}{۲} \\ \text{یا} \\ ۲x + ۵ = ۱ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

پس دو ریشهٔ منفی دارد.

۳۰ گزینه ۴

$$\left.\begin{aligned} AB &= \sqrt{(۳+۱)^۲ + (۲-۳)^۲} = \sqrt{۱۶+۱} = \sqrt{۱۷} \\ AC &= \sqrt{(۳-۱)^۲ + (۲-۰)^۲} = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸} \\ BC &= \sqrt{(۱+۱)^۲ + (۰-۳)^۲} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{مختلف‌الاضلاع}$$

$AB^۲ \neq AC^۲ + BC^۲ \Rightarrow$ (قائم‌الزاویه نیست)

www.alirezaafshar.org

۳۱ گزینه ۴

گام اول

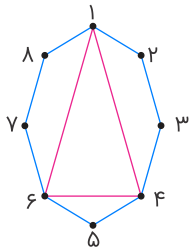
تعداد دورهای به طول m در یک گراف کامل K_p برابر است با: $\binom{p}{m}\frac{(m-۱)!}{۲}$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، تعداد دورهای به طول ۴، در گراف $K_۵$ برابر است با:

$$\binom{۵}{۴}\frac{(۴-۱)!}{۲}=۵\times\frac{۳!}{۲}=۵\times\frac{۶}{۲}=۵\times۳=۱۵$$

۳۲ گزینه ۴



می‌دانیم $\gamma(C_۸)=۳$ است. یکی از مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم، $\{۱,۴,۶\}$ می‌باشد. این ۷−مجموعه را به رأس یک نظیر می‌کنیم. با چرخش مثلث ایجادشده در گراف $C_۸$، می‌توان ۸ مجموعهٔ احاطه‌گر دیگر معرفی کرد. پس جواب گزینهٔ ۴ است.

۳۳ گزینه ۱

می‌دانیم: $\gamma(G)\leq\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil$

پس در رابطهٔ $\gamma\leq\left\lceil\frac{۱۷}{\Delta+۱}\right\rceil$ گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

اگر $\Delta=۲$ انتخاب شود، داریم $\left\lceil\frac{۱۷}{۲+۱}\right\rceil=\lceil۵/۶۶\rceil=۶$ که درست نیست. پس گزینهٔ ۱ صحیح است.

۳۴ گزینه ۳

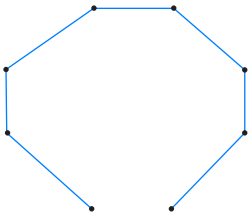
مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی در این گراف عبارت‌اند از:

۱) $\{g,a,d\}$ ۲) $\{a,c,f\}$ ۳) $\{c,e,h\}$ ۴) $\{e,g,b\}$

۵) $\{h,b,e\}$ ۶) $\{b,d,g\}$ ۷) $\{d,f,a\}$ ۸) $\{f,h,c\}$

۳۵ گزینه ۴

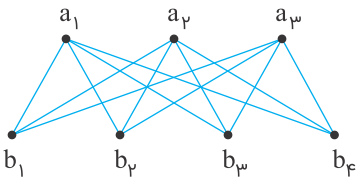
نکته: گرافی که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر باشد، همبند است. در هر گراف ساده و همبند از مرتبهٔ p حداقل $p-۱$ یال وجود دارد.
گراف G از مرتبهٔ ۸، دارای حداقل $۸-۱=۷$ یال است.



۳۶ گزینه ۱

برای آنکه دوری به طول چهار ایجاد شود، کافی است ۲ رأس از ۳ رأس بالا و ۲ رأس از ۴ رأس پایین را انتخاب کنیم. لذا داریم:

$$\binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۲} = ۳ \times ۶ = ۱۸$$



۳۷ گزینه ۲

مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ۲ عضوی :
$$\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یکی از a,b,f,g}} \times \underbrace{\binom{۱}{۱}}_{\text{انتخاب i}} = ۴$$

مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی :
$$\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یکی از a,b,f,g}} \times \underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{یکی از c,h}} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یکی از j,e,d}} = ۲۴$$

$\xrightarrow{(+)}$ ۲۸

مجموعه‌های احاطه‌گر با بیش از ۳ عضو اصلاً مینیمال نیستند.

۳۸ گزینه ۳

نکته: تعداد دورهای به طول m در گراف کامل K_p برابر است با:

$$\binom{p}{m}\frac{(m-۱)!}{۲}$$

تعداد دورهای به طول ۴ در گراف $K_۵$ برابر است با:

$$\binom{۵}{۴}\times\frac{(۴-۱)!}{۲}=۵\times۳=۱۵$$

دورهایی به طول ۴ که شامل یال ab هستند، عبارت‌اند از:

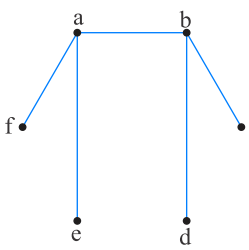
$$abcda, abdca, abcea, abeca, abdea, abeda$$

یعنی با حذف یال ab،۶ دور به طول ۴ حذف می‌شود، پس تعداد دورهای به طول ۴ در گراف باقی‌مانده برابر است با:

$$۱۵-۶=۹$$

۳۹ گزینه ۳

باید $p=۶$ و درجهٔ رأس‌های a و b مساوی ۳ باشد، بنابراین گراف زیر را رسم می‌کنیم:



حال از یال‌های fe, ed, cd, fc هرکدام می‌توانند به دلخواه رسم شوند یا رسم نشوند؛ یعنی هرکدام دو حالت دارند.

پس تعداد زیرگراف‌های رسم‌شده با مختصات خواسته‌شده برابر است با:

$$۲^۴=۱۶$$

۴۰ گزینه ۴

گراف منتظم گرافی است که درجهٔ تمام رئوس آن برابر باشد و به‌صورت $r-$ منتظم خوانده می‌شود. r نشان‌دهندهٔ درجهٔ هر رأس است. در هر گراف منتظم داریم:

$$\sum deg(v_i)=۲q\Rightarrow rp=۲q\Rightarrow ۶\times۱۳=۲q\Rightarrow q=۳۹$$

۴۱ گزینه ۱

تمام ۷–مجموعه‌های گراف موردنظر را می‌نویسیم:

$$\{c,f\},\{c,d\},\{c,e\},\{a,f\},\{b,f\}$$

۵ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم داریم.

۴۲ گزینه ۴

می‌دانیم منظور از مجموع درجات رئوس گراف همان $۲q$ است. ازطرفی در گراف کامل داریم:

$$q = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

درنتیجه:

$$۲q = p(p-۱)$$

بنابراین مجموع درجات هم باید زوج باشد و هم بتوانیم به‌صورت حاصل‌ضرب دو عدد متوالی بنویسیم. تنها عدد ۱۲۳ این دو شرط را ندارد.

۴۳ گزینه ۴

باتوجه‌به:

$$\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil \Rightarrow \gamma \geq \left\lceil \frac{۷}{۵ + ۱} \right\rceil = ۲$$

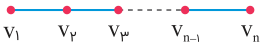
مثلاً $\{a_۱, b_۱\}$ یک $\gamma-$ مجموعه است.
پس تعداد $\gamma-$ مجموعه‌ها برابر است با:

$$\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱} + \binom{۲}{۲} = ۱۱$$

یعنی ۱۱ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یا $\gamma-$ مجموعه خواهد داشت. مانند: $\{a_۱, b_۱\}$

۴۴ گزینه ۲

فرض کنید P_n را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



برای پیدا کردن مسیری به طول k، می‌توانیم از یکی از رأس‌های $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$، ... ، v_{n-k} شروع و مسیری به طول k را طی کنیم. این مسیرها عبارت‌اند از:

$$\begin{array}{ccccccc} v_۱ & , & v_۲ & , & \cdots & , & v_{k+۱} \\ v_۲ & , & v_۳ & , & \cdots & , & v_{k+۲} \\ v_۳ & , & v_۴ & , & \cdots & , & v_{k+۳} \\ v_۴ & , & v_۵ & , & \cdots & , & v_{k+۴} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n-k} & & & & & , & v_n \end{array}$$

بنابراین تعداد مسیرهای موردنظر برابر با $n-k$ است.

۴۵ گزینه ۲

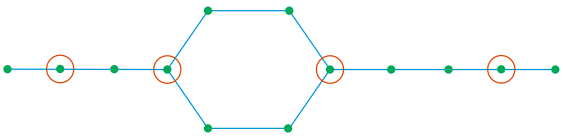
در این گراف می‌دانیم $p = ۱۳$ و $\Delta = ۳$. از طرفی در هر گراف می‌دانیم: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta + ۱} \right\rceil$

درنتیجه داریم:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۳}{۳ + ۱} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq \lceil ۳/۲۵ \rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq ۴$$

بنابراین گزینهٔ (۱) رد می‌شود.

حال شکل زیر را ببینید. با انتخاب ۴ رأس نمایش داده‌شده می‌توان این گراف را احاطه نمود؛ یعنی $\gamma(G) = ۴$.



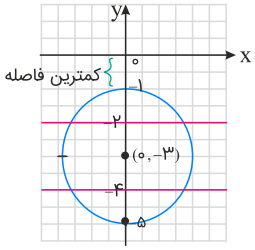
هندسه

۴۶ گزینه ۳

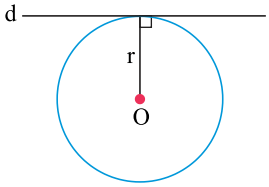
معادلهٔ دایره را استاندارد می‌کنیم:

$$x^۲ + y^۲ + ۶y + ۵ = ۰ \Rightarrow x^۲ + (y + ۳)^۲ - ۹ + ۵ = ۰ \Rightarrow x^۲ + (y + ۳)^۲ = ۴$$

دایره‌ای به مرکز $(۰, -۳)$ و شعاع ۲ داریم. اگر $M(x, y)$ نقطه‌ای روی دایره باشد، در این صورت $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ فاصلهٔ این نقطه تا مبدأ مختصات است. کمترین مقدار $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ برابر با کمترین فاصلهٔ نقاط روی دایره تا مبدأ مختصات می‌شود که باتوجه‌به شکل برابر با ۱ واحد است.



۴۷ گزینه ۱



چون خط بر دایره مماس است، پس فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره می‌باشد.

$$۲x^۲ + ۲y^۲ - ۳x + y = ۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - \frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲}y = ۰$$

مرکز دایره : $O = (\frac{۳}{۴} , -\frac{۱}{۴})$

شعاع دایره : $r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۹}{۴} + \frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$

اکنون فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $y + ۳x = m$ را برابر شعاع دایره قرار می‌دهیم:

$$\frac{|-\frac{۱}{۴} + \frac{۹}{۴} - m|}{\sqrt{۱+۹}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \Rightarrow \frac{|۲ - m|}{\sqrt{۱۰}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \Rightarrow |۲ - m| = \frac{۵}{۲}$$

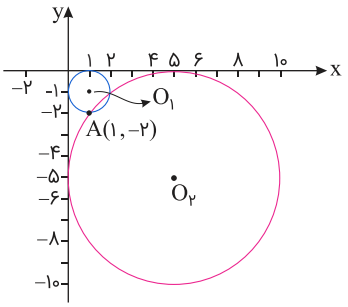
$$\Rightarrow \begin{cases} ۲ - m = \frac{۵}{۲} \\ ۲ - m = -\frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{۱}{۲} \\ m = \frac{۹}{۲} \end{cases}$$

مجموع مقادیر m : $\frac{۹}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۴$

۴۸ گزینه ۴

مکان هندسی نقطه‌هایی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. این خط (عمودمنصف پاره‌خط AB) دایره را حداکثر در ۲ نقطه قطع می‌کند.

۴۹ گزینه ۲



شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که ۲تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطهٔ $A(1,-2)$ می‌گذرند. به‌علاوه مرکز دایره‌ها به‌صورت $O(r,-r)$ است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورها برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز $O(r,-r)$ و شعاع r هستند. معادلهٔ آن‌ها به این صورت است:

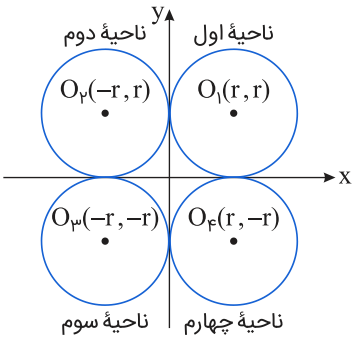
$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2 \xrightarrow{(1,-2)} (1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$$

$$1-2r+r^2+4-4r+r^2=r^2 \Rightarrow r^2-6r+5=0$$

$$\Rightarrow (r-1)(r-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ r=5 \end{cases}$$

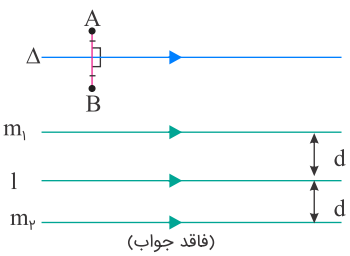
همان‌طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای r به دست آوردیم.

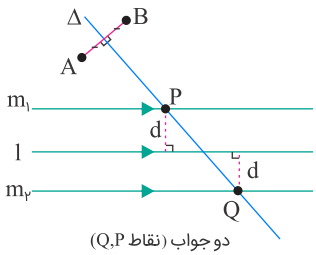
نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به‌صورت زیر است:

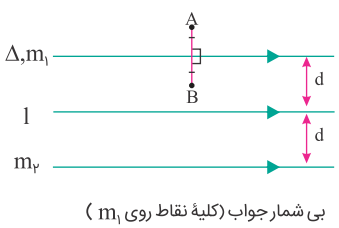


۵۰ گزینه ۳

اولاً مکان هندسی نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله باشند، خط Δ عمودمنصف AB است. ثانیاً مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط l به فاصلهٔ d باشند، دو خط m_1 و m_2 به موازات و در طرفین l است، پس جواب مسئله، محل برخورد خط Δ با m_1 یا m_2 است که حالت‌های زیر را داریم:







۵۱ گزینه ۴

نکته: دایرهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم $f(x,y)=x^۲+y^۲+ax+by+c$ باشد. در این صورت به ازای هر نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ داریم:

$$f(A)=f(x_۰,y_۰)=x_۰^۲+y_۰^۲+ax_۰+by_۰+c$$

حال برای تشخیص وضعیت نقطهٔ A نسبت به این دایره خواهیم داشت:

$f(A)>۰ \Leftrightarrow$ A خارج دایره

$f(A)=۰ \Leftrightarrow$ A روی دایره

$f(A)<۰ \Leftrightarrow$ A درون دایره

طبق نکتهٔ فوق داریم:

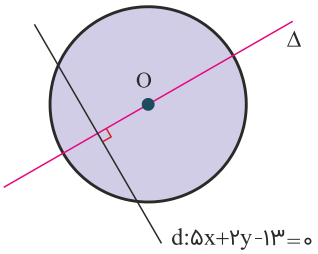
۱) $f(x,y)=x^۲+y^۲-۱ \Rightarrow f(A)=f(۱,-۲)=۱+۴-۱=۴>۰ \Rightarrow$ خارج دایره

۲) $f(x,y)=x^۲+y^۲-۲x+۵ \Rightarrow f(A)=f(۱,-۲)=۱+۴-۲+۵=۸>۰ \Rightarrow$ خارج دایره

۳) $f(x,y)=x^۲+y^۲-۸x-۴y-۵ \Rightarrow f(A)=f(۱,-۲)=۱+۴-۸+۸-۵=۰ \Rightarrow$ روی دایره

۴) $f(x,y)=x^۲+y^۲-۱۰x+۸y \Rightarrow f(A)=f(۱,-۲)=۱+۴-۱۰-۱۶=-۲۱<۰ \Rightarrow$ داخل دایره

۵۲ گزینه ۴



می‌دانیم اگر خطی بر یک دایره عمود باشد، باید از مرکز دایره بگذرد؛ بنابراین کافی است معادلهٔ خط گذرنده از مرکز دایره و عمود بر خط $۵x+۲y-۱۳=۰$ را بیابیم؛ پس داریم:

$$x^۲+y^۲+۴x-۶y-۱۷=۰ \Rightarrow O(-۲,۳)$$

$$d: ۵x+۲y-۱۳=۰ \Rightarrow m_d=\frac{-۵}{۲} \Rightarrow m_\Delta=\frac{۲}{۵}$$

$$\Delta: y-۳=\frac{۲}{۵}(x+۲) \xrightarrow[\text{تلاقی با محور x}]{y=۰} ۰-۳=\frac{۲}{۵}(x+۲)$$

$$\Rightarrow -۱۵=۲x+۴ \Rightarrow x=\frac{-۱۹}{۲}=-۹/۵$$

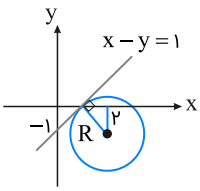
۵۳ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصلهٔ یک نقطه با مختصات $(x_۰, y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

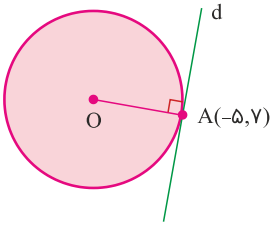
$$R = \frac{|۲ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \sqrt{۲}$$



معادلهٔ دایره : $(x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۲ \xrightarrow{y=۰} (x - ۲)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$

۵۴ گزینه ۱

می‌دانیم در یک دایره، شعاع بر خط مماس در نقطهٔ تماس عمود است؛ پس کافی است معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ A و عمود بر OA را بیابیم:



$$(x + ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۲۵ \Rightarrow O(-۲, ۳)$$

$$m_{OA} = \frac{۷ - ۳}{-۵ + ۲} = \frac{۴}{-۳} \Rightarrow m_d = \frac{-۱}{m_{OA}} = \frac{۳}{۴}$$

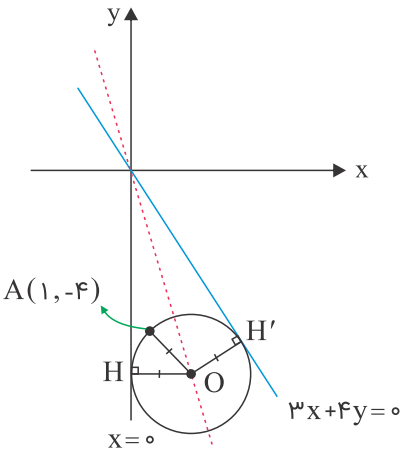
$$d : y - ۷ = \frac{۳}{۴}(x + ۵) \Rightarrow ۴y - ۲۸ = ۳x + ۱۵$$

$$\Rightarrow ۳x - ۴y + ۴۳ = ۰$$

فقط نقطهٔ $(-۹, ۴)$ در معادلهٔ خط به‌دست‌آمده صدق می‌کند.

۵۵ گزینه ۲

چون دایره بر محور yها (خط $x=0$) و خط $4x+3y=0$ مماس است، مرکز آن (نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$) روی نیمساز زاویهٔ بین این دو خط قرار دارد. پس ابتدا معادلهٔ نیمساز را می‌یابیم:



$$\frac{|4x+3y|}{\sqrt{3^2+4^2}}=|x|\Rightarrow|4x+3y|=5|x|\Rightarrow 4x+3y=\pm 5x\Rightarrow\begin{cases}-x+3y=0\\ \text{یا}\\ 9x+3y=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{چهارم قرار دارد}]{\text{دایره در ناحیهٔ}}\text{نیمساز}: 9x+3y=0\Rightarrow\text{نیمساز}: 3x+y=0$$

$$\xrightarrow[\text{قرار دارد.}]{\text{O روی نیمساز}} 3\alpha+\beta=0\Rightarrow\beta=-3\alpha\quad(*)$$

$$\text{شعاع دایره}=|OA|=|OH|\Rightarrow\sqrt{(\alpha-1)^2+(\beta+4)^2}=|\alpha|$$

$$\xrightarrow{(*)}(\alpha-1)^2+(-3\alpha+4)^2=\alpha^2\Rightarrow 10\alpha^2-26\alpha+17=\alpha^2$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2-26\alpha+17=0\xrightarrow[\text{برابر صفر است}]{\text{مجموع ضرایب}}\begin{cases}\alpha=1\\ \text{یا}\\ \alpha=\frac{17}{9}\end{cases}\Rightarrow\text{حداکثر شعاع}=\frac{17}{9}$$

۵۶ گزینه ۳

معادلهٔ $ax^2+2y^2+2ax+6y-b=0$ دایره است، درنتیجه باید ضریب x^2 با ضریب y^2 برابر باشد؛ پس داریم:

$$a=2\Rightarrow 2x^2+2y^2+4x+6y-b=0$$

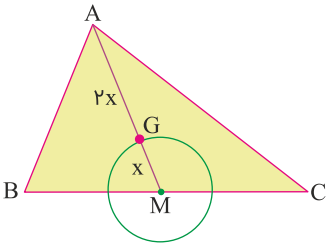
$$\xrightarrow{\div 2}x^2+y^2+2x+3y-\frac{b}{2}=0$$

$$a'=2\ ,\ b'=3\ ,\ c'=\frac{-b}{2}$$

$$R=\sqrt{\frac{a'^2+b'^2-4c'}{4}}\Rightarrow\frac{\sqrt{19}}{2}=\sqrt{\frac{4+9+2b}{4}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{13+2b}=\sqrt{19}\Rightarrow 13+2b=19\Rightarrow b=3\Rightarrow a+b=5$$

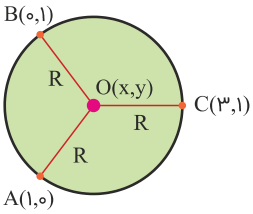
۵۷ گزینه ۴



اگر نقطهٔ G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، $GM = \frac{۱}{۳}AM$. ازآنجاکه طول میانهٔ AM ثابت است، طول GM نیز ثابت است؛ بنابراین نقطهٔ G از نقطهٔ ثابت M به فاصلهٔ ثابت $\frac{۱}{۳}AM$ است؛ پس مکان هندسی نقطهٔ G، دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{۱}{۳}AM$ است. توجه کنید که نقاط برخورد این دایره با BC جزء مکان هندسی نیستند، زیرا در این صورت نقاط A، B و C در یک امتداد قرار می‌گیرند.

۵۸ گزینه ۱

مطابق شکل با فرض $O(x,y)$ داریم:



$$|OA| = |OB| = |OC| = R$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{(x-۱)^۲ + y^۲}}_{(۱)} = \underbrace{\sqrt{x^۲ + (y-۱)^۲}}_{(۲)} = \underbrace{\sqrt{(x-۳)^۲ + (y-۱)^۲}}_{(۳)}$$

$$(۲),(۳) \Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = (x-۳)^۲ + (y-۱)^۲ \Rightarrow x^۲ = x^۲ - ۶x + ۹$$

$$\Rightarrow ۶x = ۹ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ = x^۲ + y^۲ - ۲y + ۱$$

$$\Rightarrow x = y = \frac{۳}{۲} \Rightarrow O(\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲})$$

$$\Rightarrow R = |OA| = \sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۵۹ گزینه ۴

مجموعهٔ نقطه‌های موردنظر، نقاط مشترک عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویهٔ A هستند. چون حداکثر تعداد نقاط را می‌خواهد، با فرض اینکه مثلث در رأس A متساوی‌الساقین باشد، عمودمنصف پاره‌خط BC و نیمساز زاویهٔ A منطبق هستند، در این حالت نامتناهی نقطه به دست می‌آید.

۶۰ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۵$$

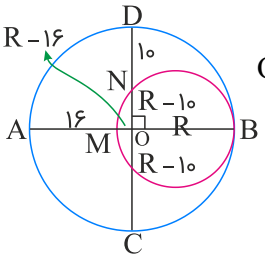
برای یافتن نقاط برخورد دایره با محور xها، در معادلهٔ دایره به‌جای y عدد صفر را قرار می‌دهیم:

$$(x-۱)^۲+(۰+۲)^۲=۵\Rightarrow(x-۱)^۲=۱\Rightarrow x-۱=\pm۱\Rightarrow x=۰,۲$$

۶۱ گزینه ۳

شعاع دایرهٔ بزرگ را R فرض می‌کنیم. پس $OB=R$، $OM=R-۱۶$ و $ON=R-۱۰$، ضمناً چون دایره‌ها مماس داخل‌اند، BM قطر دایرهٔ کوچک‌تر است و چون $BM\perp CN$، $OP=ON=R-۱۰$ است.

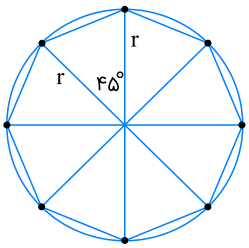
حال طبق روابط طولی در دایرهٔ کوچک، داریم:



$$ON.OP=OB.OM\Rightarrow(R-۱۰)^۲=R(R-۱۶)$$
$$\Rightarrow R^۲-۲۰R+۱۰۰=R^۲-۱۶R\Rightarrow ۴R=۱۰۰$$
$$\Rightarrow R=۲۵\Rightarrow BM=۲R-۱۶=۳۴$$
$$\text{شعاع دایرهٔ کوچک}=\frac{۱}{۲}BM=۱۷$$

۶۲ گزینه ۱

وقتی هشت‌ضلعی منتظم داخل دایره محاط می‌شود به این معنا است که مرکز دایره بر مرکز هشت‌ضلعی منتظم منطبق شده است. در چنین حالتی اگر مرکز هشت ضلعی را به رئوس‌اش وصل کنیم، ۸ تا مثلث متساوی‌الساقین همنهشت با طول ساقی برابر با شعاع دایره به وجود می‌آید که زاویهٔ رأس هرکدام برابر با $\frac{۳۶۰^\circ}{۸}=۴۵^\circ$؛ بنابراین برای مساحت یکی از آن‌ها داریم (مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها):



$$S=\frac{r\times r\times\sin ۴۵^\circ}{۲}=\frac{۲\times ۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

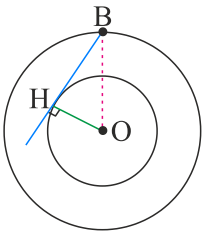
بنابراین مساحت هشت‌ضلعی منتظم برابر است با:

$$S_{\text{هشت ضلعی منتظم}}=۸S=۸\sqrt{۲}$$

۶۳ گزینه ۲

$$MN>EF\Rightarrow OH<OH'\Rightarrow ۲x+۳<۳x-۱\Rightarrow x>۴$$

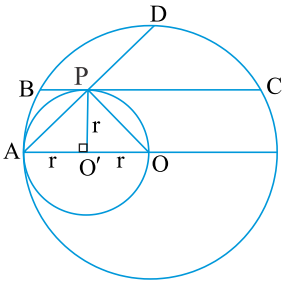
۶۴ گزینه ۲



$$OH^{۲} + HB^{۲} = OB^{۲} \quad \Rightarrow \quad ۹ + HB^{۲} = ۲۵ \Rightarrow HB = ۴$$

۶۵ گزینه ۲

۱) از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.



توجه کنید که دایرهٔ کوچک از مرکز دایرهٔ بزرگ می‌گذرد. زاویهٔ P در دایرهٔ کوچک، زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر است $\hat{P} = ۹۰^\circ$، درنتیجه OP، AD را نصف می‌کند.

۲) بنا بر روابط طولی در دایره:

$$PB \times PC = PA \times PD \xrightarrow{PA=PD} PB \times PC = PA^{۲}$$

۳) مثلث $O'AP$ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، پس:

$$AP = \sqrt{۲}r$$

۴) اکنون از (۲) و (۳) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} PB \times PC = ۲r^{۲} \\ \text{بنا بر فرض : } PB \times PC = ۱۸ \end{cases} \Rightarrow ۲r^{۲} = ۱۸ \Rightarrow r = ۳$$

۶۶ گزینه ۳

در محاسبهٔ M، کمان‌های AT و BT را لازم داریم:

$$\overset{\frown}{BT} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۴} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۷} = \frac{\overset{\frown}{BT} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AT}}{۱+۴+۷} = \frac{۳۶۰^\circ}{۱۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BT} = ۳۰^\circ$$

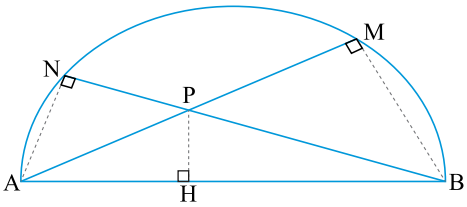
$$\overset{\frown}{AT} = ۲۱۰^\circ \Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{۲} = \frac{۲۱۰^\circ - ۳۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

۶۷ گزینه ۳

$$TT'^{۲} = OO'^{۲} - (R - R')^{۲} \Rightarrow ۸^{۲} = ۱۷^{۲} - (R - R')^{۲}$$
$$\Rightarrow ۱۷^{۲} - ۸^{۲} = (R - R')^{۲} \Rightarrow R - R' = ۱۵$$

۶۸ گزینه ۲

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن از P عمود PH را بر AB رسم می‌کنیم.



چهار ضلعی‌های $NPHA$ و $PMBH$ محاطی هستند، چون در هرکدام دو زاویهٔ مقابل مکمل هستند:

$$\hat{N} + \hat{H} = \hat{M} + \hat{H} = ۱۸۰^\circ$$

اکنون بنا بر روابط طولی در دایره‌های محیطی این دو چهار ضلعی ($NPHA$ و $PMBH$) داریم:

$$\begin{cases} AP \times AM = AH \times AB \\ BP \times BN = BH \times AB \end{cases}$$

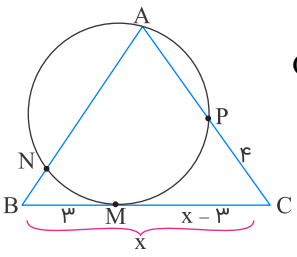
می‌نویسیم:

$$AP \times AM + BP \times BN = AH \times AB + BH \times AB$$
$$= AB \times (AH + BH) = AB \times AB = AB^{۲}$$

۶۹ گزینه ۴

ضلع مثلث را x می‌نامیم:

برای مماس CM رابطهٔ طولی را می‌نویسیم:



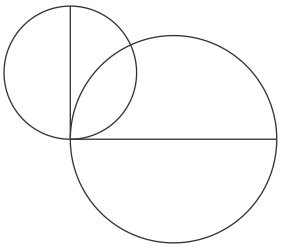
$$CM^{۲} = CP \times AC$$
$$\Rightarrow (x - ۳)^{۲} = ۴x \Rightarrow x^{۲} - ۶x + ۹ = ۴x$$
$$\Rightarrow x^{۲} - ۱۰x + ۹ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۹ \end{cases} \text{غ‌ق‌ق}$$

حال برای مماس BM رابطهٔ طولی را می‌نویسیم:

$$BM^{۲} = BN \times AB \Rightarrow ۹ = BN \times ۹ \Rightarrow BN = ۱ \Rightarrow AN = ۸$$

۷۰ گزینه ۱

دایره‌ای به قطر هر ضلع قائم مثلث بر ضلع دیگر آن در رأس قائمه مماس است.
درنتیجه زاویه بین مماس‌ها در رأس برابر ۹۰ درجه است.



۷۱ گزینه ۳

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}} \hat{A}_۱ + \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = ۹۰^\circ \\ \overset{\frown}{BC} + \hat{A}_۱ = ۱۴۰^\circ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-} \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = ۵۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۰۰^\circ$$

$$\hat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۱۰۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$$

۷۲ گزینه ۱

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه اگر a وتر، r_a شعاع بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی باشد، آنگاه:

$$r_a = r + a$$

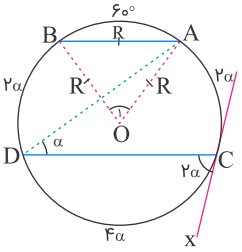
در مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایرهٔ محیطی نصف وتر است؛ پس طول وتر در این مثلث برابر ۳۴ می‌باشد.

$$r_a = r + a \Rightarrow r_a = ۳۴ + ۶ = ۴۰$$

۷۳ گزینه ۴

فرض کنیم O مرکز دایره است. پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است و چون $\hat{O}_۱ = ۶۰^\circ$ و چون زاویهٔ $\hat{O}_۱$ مرکزی است، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$. زاویهٔ D محاطی است، پس $\overset{\frown}{AC} = ۲\hat{D} = ۲\alpha$ و چون $BA||DC$، نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} = ۲\alpha$. ضمناً چون زاویهٔ β ظلی است، $\overset{\frown}{CD} = ۲\beta$ و چون $\beta = ۲\alpha$، نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{CD} = ۴\alpha$. حال چون مجموع تمام کمان‌های روی دایره ۳۶۰° است، داریم:

$$۴\alpha + ۲\alpha + ۲\alpha + ۶۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۸\alpha = ۳۰۰^\circ \xrightarrow{\overset{\frown}{BD} = ۲\alpha} \overset{\frown}{BD} = \frac{۳۰۰^\circ}{۴} = ۷۵^\circ$$



۷۴ گزینه ۳

چون $\angle B + \angle C = ۹۰^\circ$، پس $\angle A = ۹۰^\circ$. یعنی مثلث ABC قائم‌الزاویه است و $a^۲ = b^۲ + c^۲$. اکنون از فرض نتیجه می‌گیریم:

$$a^۲ + \underbrace{b^۲ + c^۲}_{a^۲} = ۳۲ \Rightarrow ۲a^۲ = ۳۲ \Rightarrow a^۲ = ۱۶$$

یعنی $a = ۴$. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه شعاع دایرهٔ محیطی برابر نصف وتر است. پس:

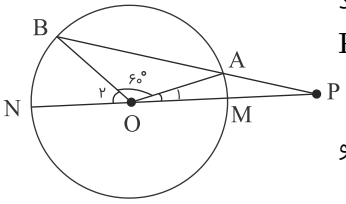
$$R = \frac{a}{۲} = ۲$$

۷۵ گزینه ۲

گام اول

الف) بار دیگر شکل را با جزئیات گفته‌شده رسم می کنیم:

$$PN = ۳R \ , \ \overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$$



ب) با توجه به این که $PN = ۳R$ و $MN = ۲R$ (قطر دایره) است، $PM = R$ به دست می آید. امتداد دو وتر از دایره رسم شده است بنابراین طبق روابط طولی در دایره رابطهٔ $PA \times PB = PM \times PN$ برقرار است.

ج) در مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$، $OA = OB = R$,$\hat{O} = ۶۰^\circ$ است پس این مثلث متساوی الاضلاع بوده و $AB = R$ است.

گام دوم

$$PN = ۳R, PM = R, AB = R \Rightarrow PB = PA + R$$
$$PA \times PB = PM \times PN \Rightarrow PA(PA + R) = R(۳R)$$
$$\xrightarrow{PA=x} \Rightarrow x^۲ + xR = ۳R^۲ \Rightarrow x^۲ + xR - ۳R^۲ = ۰$$
$$\Delta = R^۲ - ۴(۱)(-۳R^۲) = R^۲ + ۱۲R^۲ = ۱۳R^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \dfrac{-R + \sqrt{۱۳}R}{۲} = \dfrac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳} - ۱)R \\ x_۲ = \dfrac{-R - \sqrt{۱۳}R}{۲} = \dfrac{۱}{۲}(-\sqrt{۱۳} - ۱)R \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین اندازهٔ PA ، $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳} - ۱)$ برابر شعاع دایره است.

فیزیک

۷۶ گزینه ۴

با مقایسهٔ چگالی دو مایع نسبت به یکدیگر، به‌سادگی می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow ۵ = \frac{۳۰۰}{۶۰۰} \times \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = ۰/۱$$

۷۷ گزینه ۱

ابتدا با داشتن نسبت جرم و چگالی دو کره نسبت حجم آن‌ها را محاسبه می‌کنیم و سپس نسبت حجم کره‌ها را از فرمول‌های هندسی می‌نویسیم:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{m_A}{\rho_A}}{\frac{m_B}{\rho_B}} = \frac{\frac{۱۶m_B}{۲\rho_B}}{\frac{m_B}{\rho_B}} = ۸ \Rightarrow \frac{\frac{۴}{۳}\pi r_A^۳}{\frac{۴}{۳}\pi r_B^۳} = ۸ \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{d_A}{d_B} = ۲ \Rightarrow \frac{d_A}{d_A - ۵} = ۲ \Rightarrow d_A = ۱۰\,cm$$

قطر $d_B = ۵\,cm$

شعاع کرهٔ کوچک‌تر $r_B = ۲/۵\,cm$

۷۸ گزینه ۴

کمیت‌های عددی (جرم) را نمی‌توان با پیکان بیان کرد، اما اگر کمیت‌های برداری بدون پیکان بیایند منظور اندازهٔ آن کمیت است.

۷۹ گزینه ۲

جرم یک زنبورعسل برابر است با $\frac{۱۵}{۱۵۰}\,g = ۱۰^{-۱}\,g$ حال این جرم را به کیلوگرم تبدیل می‌کنیم.

$$۱۰^{-۱} \times ۱۰^{-۳}\,kg = ۱۰^{-۴}\,kg$$

۸۰ گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} P_A = ۷۵ + ۴۵ = ۱۲۰\,cmHg \\ P_B = ۷۵ - ۳۵ = ۴۰\,cmHg \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{۱۲۰}{۴۰} = ۳$$

۸۱ گزینه ۳

گام اول

الف) شعاع یک کرهٔ فلزی ۵ سانتی‌متر ← $r = ۵\,cm$

ب) و جرم آن ۱۰۸۰ گرم ← $m = ۱۰۸۰\,g$

ج) و چگالی آن $۲/۷\,g/cm^۳$ است ← $\rho = ۲/۷\,g/cm^۳$

د) حجم این حفره چند درصد حجم کره را تشکیل می‌دهد؟ ← $?= \frac{V_{\text{حفره}}}{V_{\text{ظاهری}}} \times ۱۰۰$

گام دوم

حجم واقعی کره از رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ و حجم ظاهری آن از رابطهٔ $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ به دست آورده و سپس درصد نسبت حجم حفره به حجم ظاهری را محاسبه می‌کنیم.

$$\rho = \frac{m}{V_{\text{واقعی}}} \Rightarrow V_{\text{واقعی}} = \frac{۱۰۸۰}{۲/۷} = ۴۰۰\,cm^۳$$

$$V_{\text{ظاهری}} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \xrightarrow{\pi=۳} V_{\text{ظاهری}} = \frac{۴}{۳} \times ۳ \times ۵^۳ = ۵۰۰\,cm^۳$$

$$V_{\text{حفره}} = V_{\text{ظاهری}} - V_{\text{واقعی}} = ۵۰۰ - ۴۰۰ = ۱۰۰\,cm^۳$$

$$\frac{V_{\text{حفره}}}{V_{\text{ظاهری}}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۰۰}{۵۰۰} \times ۱۰۰ = ۲۰\%$$

۸۲ گزینه ۴

مایع با چگالی $\rho_۱$ پایین‌تر از مایع با چگالی $\rho_۲$ قرار گرفته است بنابراین چگالی بیشتری دارد: $\rho_۱ > \rho_۲$

نقاط A و B هم‌ترازند، در این حالت نقطه‌ای که در مایع با چگالی کمتر قرار گرفته است فشار بیشتری دارد: $P_B > P_A$

۸۳ گزینه ۳

با استفاده از رابطهٔ چگالی مخلوط، داریم:

$$\text{چگالی مخلوط در حالت اول}: \rho_۱ = \frac{\rho_A V_A + \rho_B V_B}{V} \xrightarrow{V_A = V_B = \frac{V}{۲}} ۰/۶۵۰ = \frac{\rho_A \times \frac{V}{۲} + \rho_B \times \frac{V}{۲}}{V}$$

$$\Rightarrow ۰/۶۵۰ = \frac{\rho_A + \rho_B}{۲} \Rightarrow \rho_A + \rho_B = ۱/۳\,\frac{g}{cm^۳} \quad (۱)$$

$$\text{چگالی مخلوط در حالت دوم}: \rho_۲ = \frac{\rho_A V'_A + \rho_B V'_B}{V}$$

$$\xrightarrow{V'_A = \frac{V}{۴}, V'_B = \frac{۳}{۴}V} ۰/۵۴۴ = \frac{\rho_A \times \frac{V}{۴} + \rho_B \times \frac{۳}{۴}V}{V}$$

$$\Rightarrow ۰/۵۴۴ = \frac{\rho_A}{۴} + \frac{۳\rho_B}{۴} \Rightarrow \rho_A + ۳\rho_B = ۲/۱۷۶ \simeq ۲/۲\,\frac{g}{cm^۳} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} \begin{cases} \rho_A + \rho_B = ۱/۳ \\ \rho_A + ۴\rho_B = ۲/۲ \end{cases} \xrightarrow{\times(-۱)} \begin{cases} -\rho_A - \rho_B = -۱/۳ \\ \rho_A + ۴\rho_B = ۲/۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳\rho_B = ۰/۹ \Rightarrow \rho_B = \frac{۰/۹}{۳} = ۰/۳\,\frac{g}{cm^۳} \xrightarrow{(۱)} \rho_A = ۱\,\frac{g}{cm^۳}$$

۸۴ گزینه ۱

چگالی آلیاژ مخلوط دو ماده از رابطهٔ $\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2 \pm \Delta V}$ به دست می‌آید که در آن ΔV تغییرات حجم احتمالی دو ماده در اثر مخلوط کردن است. (کاهش حجم با علامت منفی و افزایش حجم با علامت مثبت)

اگر تغییر حجمی رخ ندهد، حجم آلیاژ برابر است با مجموع حجم دو جسم:

$$\left.\begin{array}{l} V_A = ۳۰۰\,cm^۳ \\ V_B = \frac{m_B}{\rho_B} = \frac{۳۰۰}{۷۵۰} = ۰/۴\,Lit = ۴۰۰\,cm^۳ \end{array}\right\} \Rightarrow V_{\text{کل}} = ۳۰۰ + ۴۰۰ = ۷۰۰\,cm^۳$$

$$\rho_{\text{آلیاژ}} = \frac{\text{جرم آلیاژ}}{\text{حجم آلیاژ}} = \frac{m_A + m_B}{V_{\text{آلیاژ}}} \Rightarrow ۱/۵ g/cm^۳ = \frac{۶۰۰ + ۳۰۰}{V_{\text{آلیاژ}}} \Rightarrow V_{\text{آلیاژ}} = ۶۰۰\,cm^۳$$

$$(m_A = \rho_A V_A = ۲ \times ۳۰۰ = ۶۰۰\,g)$$

$$\text{تغییر حجم آلیاژ} = ۷۰۰ - ۶۰۰ = ۱۰۰\,cm^۳ = ۱۰۰\,mL$$

۸۵ گزینه ۲

با استفاده از رابطهٔ چگالی مخلوط، داریم: (Au نماد شیمیایی طلا و Ag نماد شیمیایی نقره است)

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_{\text{مخلوط}}}{V_{\text{مخلوط}}} \Rightarrow \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_{Au} + m_{Ag}}{V_{Au} + V_{Ag}} \Rightarrow \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\rho_{Au} V_{Au} + \rho_{Ag} V_{Ag}}{V_{Au} + V_{Ag}}$$

$$\xrightarrow[\rho_{Au}=۱۹\,g/cm^۳\,,\,\rho_{Ag}=۱۰\,g/cm^۳]{\rho_{\text{مخلوط}}=۱۳/۶\,g/cm^۳\,,\,V_{Au}+V_{Ag}=۵\,cm^۳} ۱۳/۶ = \frac{۱۹V_{Au} + ۱۰V_{Ag}}{۵} \Rightarrow ۱۹V_{Au} + ۱۰V_{Ag} = ۶۸$$

اگر دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنیم، مقادیر V_{Au} و V_{Ag} به دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۱۹V_{Au} + ۱۰V_{Ag} = ۶۸ \\ V_{Au} + V_{Ag} = ۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۹V_{Au} + ۱۰V_{Ag} = ۶۸ \\ ۱۹V_{Au} + ۱۹V_{Ag} = ۹۵ \end{cases}$$

$$۹V_{Ag} = ۲۷ \Rightarrow V_{Ag} = ۳\,cm^۳\,,\; V_{Au} = ۲\,cm^۳$$

خواستهٔ مسئله محاسبهٔ جرم نقرهٔ به‌کاررفته است؛ پس طبق تعریف چگالی داریم:

$$\rho_{Ag} = \frac{m_{Ag}}{V_{Ag}} \xrightarrow[V_{Ag}=۳\,cm^۳]{\rho_{Ag}=۱۰\,g/cm^۳} ۱۰ = \frac{m_{Ag}}{۳} \Rightarrow m_{Ag} = ۱۰ \times ۳ = ۳۰\,g$$

۸۶ گزینه ۲

شعاع خارجی استوانه‌ها را R و شعاع داخلی حفرهٔ استوانهٔ B را r فرض کرده و حجم مادهٔ سازندهٔ استوانه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} V_A = \pi R^2 h \\ V_B = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi(R^2 - r^2)h \end{cases}$$

با استفاده از تعریف چگالی می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \frac{V_A}{V_B} \xrightarrow[\rho_B = \frac{9}{8}\rho_A]{m_A = m_B} \frac{9}{8} = \frac{V_A}{V_B} \Rightarrow \frac{\pi R^2 h}{\pi(R^2 - r^2)h} = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{R^2 - r^2} = \frac{9}{8}$$

$$8R^2 = 9R^2 - 9r^2 \Rightarrow R^2 = 9r^2 \Rightarrow r = \frac{R}{3}$$

۸۷ گزینه ۴

$$0/0175\,\text{pm} = 1/75 \times 10^{-2}\,\text{pm} \times \frac{10^{-12}\,\text{m}}{1\,\text{pm}} = 1/75 \times 10^{-14}\,\text{m}$$

۸۸ گزینه ۱

حالت اول $P_1 = \frac{mg}{A}$ $\quad P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{mg}{A} = \frac{mg + W}{9A} \Rightarrow 9mg = mg + W \Rightarrow W = 8mg$

حالت دوم $P_2 = \frac{mg+W}{9A}$

۸۹ گزینه ۳

در حالت اول پس از آنکه شخص A در شیشهٔ عطر را باز می‌کند به دلیل پدیدهٔ پخش در گازها مولکول‌های عطر در سرتاسر سالن حرکت تصادفی می‌کنند و سرانجام به شخص B می‌رسند؛ مدت‌زمان لازم برای رخ دادن آن برابر است با:

$$t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{1000}{500} = 2\text{s}$$

درنتیجه در حالت دوم برای اینکه شخص A بتواند در مدت ۲s، شیشهٔ عطر را به شخص B برساند، لازم است تا با تندی s به‌سمت آن حرکت کند، درنتیجه:

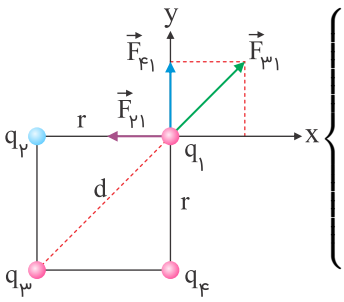
$$s = \frac{d_2}{t_2} \xrightarrow{(t_2 = t_1 = 2\text{s})} s = \frac{6}{2} = 3\text{m/s}$$

۹۰ گزینه ۳

$$\rho_{\text{آلیاژ}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}} = \frac{m_1 + 3m_1}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{3m_1}{3\rho_1}} = \frac{4m_1}{2\frac{m_1}{\rho_1}} = 2\rho_1$$

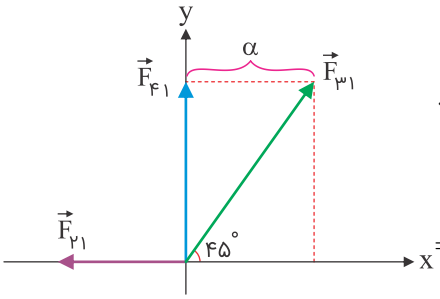
۹۱ گزینه ۲

مطابق شکل زیر، نیروهای وارد بر بار q_1 را رسم کرده و اندازهٔ هر یک را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} F_{21} = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2} = \dfrac{9\times10^9\times(4\times10^{-6})\times(3\times10^{-6})}{(6\times10^{-2})^2} = 30\,N \\ F_{31} = k\dfrac{q_1 q_3}{d^2} = \dfrac{9\times10^9\times(4\times10^{-6})\times(12\times10^{-6})}{(6\sqrt{2}\times10^{-2})^2} = 60\,N \\ F_{41} = k\dfrac{q_1 q_4}{r^2} = \dfrac{9\times10^9\times(4\times10^{-6})\times(5\times10^{-6})}{(6\times10^{-2})^2} = 50\,N \end{cases}$$

در ادامه با انتخاب محورهای مختصات داریم ($\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0/7$):



$$\begin{cases} \vec{F}_{21} = -30\vec{i} + 0\vec{j} \\ \vec{F}_{31} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = F_{31}\cos\theta = 60\cos45^\circ \simeq 42 \\ \beta = F_{31}\sin\theta = 60\sin45^\circ \simeq 42 \end{cases} \\ \vec{F}_{41} = 0\vec{i} + 50\vec{j} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{31} \simeq 42\vec{i} + 42\vec{j}$$

نیروی برآیند : $\vec{R} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41}$

$$\Rightarrow \vec{R} = (-30 + 42 + 0)\vec{i} + (0 + 42 + 50)\vec{j} = 12\vec{i} + 92\vec{j}$$

۹۲ گزینه ۳

ابتدا نیروها در دو حالت اول را محاسبه و از هم کم می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} F &= k\frac{q_1 q_2}{r^2} \\ F + 60 &= k\frac{q_1 q_2}{(\frac{r}{2})^2} = 4k\frac{q_1 q_2}{r^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k\frac{q_1 q_2}{r^2} + 60 = 4k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$\Rightarrow 60 = 3k\frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow k\frac{q_1 q_2}{r^2} = 20\,N$$

با داشتن نسبت $k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ نیروی بین دو بار از فاصلهٔ $2r$ را محاسبه می‌کنیم:

$$F' = k\frac{q_1 q_2}{(2r)^2} = \frac{1}{4}k\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4}\times20 = 5\,N$$

۹۳ گزینه ۲

بار الکتریکی قطرهٔ بزرگ‌تر،۶۴ برابر بار هر قطره است و حجم قطرهٔ بزرگ‌تر نیز ۶۴ برابر حجم هریک از قطره‌ها است. اگر شعاع هر قطره را r و شعاع قطرهٔ بزرگ‌تر را R فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{حجم قطره بزرگ}}{\text{حجم قطره کوچک}} = (\frac{R}{r})^{۳} \Rightarrow ۶۴ = (\frac{R}{r})^{۳} \Rightarrow \frac{R}{r} = ۴ \Rightarrow R = ۴r$$

اگر مساحت قطره‌های بزرگ و کوچک را به ترتیب A و a بنامیم و بار الکتریکی آن‌ها را هم به ترتیب Q و q فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{چگالی سطحی قطره بزرگ}}{\text{چگالی سطحی قطره کوچک}} = \frac{\frac{Q}{A}}{\frac{q}{a}} \xrightarrow[A=۱۶a]{Q=۶۴q} \frac{\frac{۶۴q}{۱۶a}}{\frac{q}{a}} = \frac{۶۴}{۱۶} = ۴$$

۹۴ گزینه ۲

پیش از انتقال بار، بار صفحات q بوده است و پس از انتقال $q + \Delta q$ است. بنابراین برای تغییرات انرژی پتانسیل با استفاده از فرمول $U = \frac{q^{۲}}{۲C}$ داریم:

$$\Delta U = \frac{(q+\Delta q)^{۲}}{۲C} - \frac{q^{۲}}{۲C} = \frac{q^{۲} + ۲q(\Delta q) + (\Delta q)^{۲} - q^{۲}}{۲C} = \frac{۲q(\Delta q) + (\Delta q)^{۲}}{۲C}$$

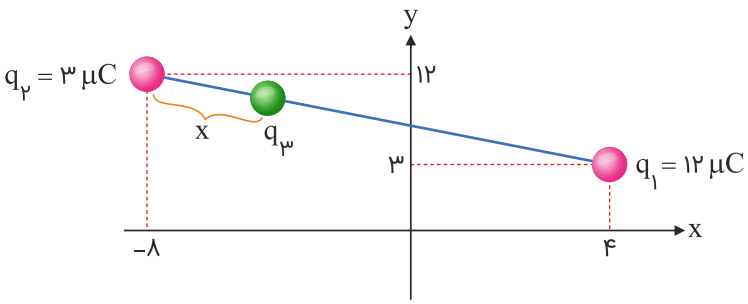
چون تمام کمیت‌های داده‌شده برحسب میکرو هستند، نیاز به تبدیل واحد نداریم:

$$۵ = \frac{۲q(۶) + ۳۶}{۲ \times ۱۸} \Rightarrow \frac{۱}{۳}q + ۱ = ۵ \Rightarrow \frac{q}{۳} = ۴ \Rightarrow q = ۱۲\,\mu C$$

۹۵ گزینه ۳

چون برآیند نیروهای وارد بر $q_۳$ صفر است، پس $q_۳$ روی خط واصل $q_۱$ و $q_۲$ و نزدیک به بار کوچک‌تر ($q_۲$) قرار می‌گیرد از طرفی برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۲$ نیز صفر است، پس $q_۱$ و $q_۳$ باید ناهمنام باشند، بنابراین $q_۳$ منفی است.

$$\text{فاصلهٔ } q_۲, q_۱ = \sqrt{۴ - (-۸)^{۲} + (۱۲ - ۳)^{۲}} = ۱۵\,cm$$



$$F_{۲۳} = F_{۱۳} \Rightarrow \frac{k \times ۳ \times q_۳ \times ۱۰^{-۱۲}}{x^{۲} \times ۱۰^{-۴}} = \frac{k \times ۱۲ \times q_۳ \times ۱۰^{-۱۲}}{(۱۵ - x)^{۲} \times ۱۰^{-۴}} \Rightarrow x = ۵\,cm$$

$$F_{۱۲} = F_{۳۲} \Rightarrow \frac{k \times ۱۲ \times ۳ \times ۱۰^{-۱۲}}{۱۵^{۲} \times ۱۰^{-۴}} = \frac{k \times q_۳ \times ۳ \times ۱۰^{-۱۲}}{۵^{۲} \times ۱۰^{-۴}} \Rightarrow |q_۳| = \frac{۴}{۲}\,\mu C \Rightarrow q_۳ = -\frac{۴}{۳}\,\mu C$$

۹۶ گزینه ۲

اگر بار $q_۳$ را مثبت فرض کنیم، نیروی الکتریکی که بار $q_۲$ بر $q_۳$ وارد می کند به‌صورت جاذبه و نیروی الکتریکی که بار $q_۱$ بر $q_۳$ وارد می کند به‌صورت دافعه خواهد بود. بنابراین می توان نوشت:

$$F_{۱۳}=k\frac{|q_۱||q_۳|}{r^۲}=\frac{k\times ۹q_۳}{۰/۰۹}=۱۰۰kq_۳\ ,\ F_{۲۳}=k\frac{|q_۲||q_۳|}{r'^{۲}}=\frac{k\times ۱\times q_۳}{۰/۰۱}=۱۰۰kq_۳$$

همان طور که مشاهده می شود، $|F_{۱۳}|=|F_{۲۳}|=۰$ است. بنابراین برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر بار $q_۳$ صفر بوده و $q_۳$ در حالت تعادل قرار دارد، ازطرفی طبق صورت سؤال برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر بار $q_۱$ نیز صفر می باشد، پس داریم:

$$|F_{۲۱}|=|F_{۳۱}|\ \Rightarrow\ \frac{k\times ۱\times ۹}{۰/۰۴}=\frac{kq_۳\times ۹}{۰/۰۹}\ \Rightarrow\ q_۳=+\frac{۹}{۴}$$

چون $q_۲<۰$ است، برای آنکه برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر بار $q_۱$ صفر شود، $q_۳$ باید مثبت باشد.

۹۷ گزینه ۲

با استفاده از رابطهٔ $F=\frac{kq_۱q_۲}{r^۲}$ داریم:

$$\frac{F_۲}{F_۱}=\frac{\frac{kq'_۱q'_۲}{r'^{۲}_۲}}{\frac{kq_۱q_۲}{r^۲}}=\frac{\frac{۲q_۱q_۲}{\frac{۱}{۴}r^۲}}{\frac{q_۱q_۲}{r^۲}}=۸$$

۹۸ گزینه ۲

$$\begin{cases}Q'=Q+۳\,mC\\ U=۴/۵\,J=۴۵۰۰\,mJ\\ C=۵\,\mu F=۵\times ۱۰^{-۳}\,mF\end{cases}\Rightarrow \Delta U=\frac{۱}{۲}\frac{Q'^{۲}}{C}-\frac{۱}{۲}\frac{Q^۲}{C}=\frac{Q'^{۲}-Q^۲}{۲C}$$

$$۴۵۰۰\,mJ=\frac{(Q+۳)^۲-Q^۲}{۲\times ۵\times ۱۰^{-۳}}\Rightarrow ۴۵=(Q+۳)^۲-Q^۲$$
$$\Rightarrow ۴۵=Q^۲+۹+۶Q-Q^۲\Rightarrow Q=۶\,mC$$

۹۹ گزینه ۳

باتوجه‌به رابطهٔ $q=\pm ne$، بار الکتریکی باید مضرب صحیحی از بار الکترون باشد، بنابراین با بررسی گزینه‌ها داریم:

$$n=\frac{q}{e}\rightarrow\begin{cases}۱)\ n=\frac{۸\times ۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۵\ \surd\\ ۲)\ n=\frac{۴\times ۱۰^{-۱۸}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۲۵\ \surd\\ ۳)\ n=\frac{۹\times ۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۵/۶۲۵\ \times\\ ۴)\ n=\frac{۱/۲۸\times ۱۰^{-۱۸}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۸\ \surd\end{cases}$$

۱۰۰ گزینه ۴

بار منفی سطح زیرین ابر، در نوک‌تیز برق‌گیر بار مثبت القا می‌کند و الکترون‌های آزادی که از نوک‌تیز رانده می‌شوند، به زمین انتقال می‌یابند.

۱۰۱ گزینه ۴

گام اول

الف) بار الکتریکی نقطه‌ای $۲۰\mu C$ $\leftarrow$ $q = ۲۰\mu C$

ب) در فاصله یک متری $\leftarrow$ $r = ۱m$

ج) میدان الکتریکی چند نیوتون بر کولن است؟ $\leftarrow$ $E = ?N/C$

گام دوم

کافی است رابطه میدان الکتریکی برای بار نقطه‌ای را بنویسیم:

$$\begin{cases} E = k\dfrac{q}{r^۲} \\ K = ۹ \times ۱۰^۹ \, N m^۲/C^۲ \end{cases} \Rightarrow E = \frac{۹ \times ۱۰^۹ \times ۲۰ \times ۱۰^{-۶}}{۱} = ۱/۸ \times ۱۰^۵ N/C$$

۱۰۲ گزینه ۴

باتوجه‌به رابطهٔ $E = k\dfrac{|q|}{r^۲}$ میدان الکتریکی هریک از بارها با نزدیک شدن و کاهش فاصله افزایش می‌یابد و درعین‌حال روی مرکز خط واصل دو بار دو میدان هم‌اندازه در دو سوی مخالف ایجاد می‌شود که برآیندشان صفر است؛ بنابراین میدان برآیند پس از افزایش حتماً با کاهش مواجه بوده که روی خط واصل برآیندش به صفر رسیده است.

۱۰۳ گزینه ۱

اختلاف‌پتانسیل دو سر باتری را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\Delta V = V_+ - V_-$$

که ΔV همان نیروی محرکهٔ باتری است:

$$\varepsilon = \Delta V$$
$$\Rightarrow ۱۲ = ۳ - V_- \Rightarrow V_- = ۳ - ۱۲ = -۹V$$

پس پتانسیل پایانهٔ منفی باتری -۹ ولت خواهد بود.

۱۰۴ گزینه ۲

طبق تعریف، اختلاف‌پتانسیل بین دو نقطه برابر است با: تغییر انرژی پتانسیل یکای بار مثبت وقتی‌که با سرعت ثابت از یک نقطه به نقطهٔ دیگر منتقل شود؛ لذا:

$$V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q}$$

اما اگر در انتقال، انرژی مصرف شود آنگاه $\Delta U > ۰$ و اگر انرژی آزاد شود آنگاه $\Delta U < ۰$ است؛ پس:

$$\Delta U = +۳\,mJ = ۳ \times ۱۰^{-۳}\,J$$
$$\Rightarrow V_B - ۴۰ = \frac{۳ \times ۱۰^{-۳}}{۴۰ \times ۱۰^{-۶}} = ۰/۷۵ \times ۱۰^{۲} = ۷۵V$$
$$\Rightarrow V_B = ۷۵ + ۴۰ = ۱۱۵\,V$$

۱۰۵ گزینه ۳

$$C = \kappa\varepsilon_۰ \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C'}{C} = \frac{A'}{A} \times \frac{d}{d'}$$
$$\frac{C'}{C} = \left(\frac{r'}{r}\right)^{۲} \times \frac{d}{d'} = \left(\frac{۳r}{r}\right)^{۲} \times \left(\frac{d}{\frac{d}{۲}}\right) = ۹ \times ۲ = ۱۸ \Rightarrow C' = ۱۸C$$

۱۰۶ گزینه ۴

چون موج عرضی است گزینهٔ ۱ و ۲ حذف می‌شود.

گزینهٔ ۳: وقتی موج به سمت راست حرکت کند، نقطهٔ M تحت تأثیر نقاط قبل از خودش قرار گرفته و به سمت بالا نوسان می‌کند. پس گزینهٔ ۳ نادرست است.

گزینهٔ ۴: وقتی موج به سمت چپ حرکت می‌کند، نقطهٔ M تحت تأثیر نقاط قبل از خودش، به سمت پایین حرکت می‌کند که این مورد در گزینهٔ ۴ بیان شده است.

۱۰۷ گزینه ۱

گام اول

الف) تراز شدت صوتی ۶۶ دسی‌بل $\leftarrow \beta = ۶۶\,dB = ۶/۶B$

ب) شدت صوت؟ $\leftarrow I = ?$

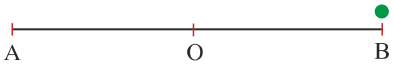
گام دوم

با استفاده از معادلهٔ $\beta = \log \frac{I}{I_۰}$، شدت صوت را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \beta = \log \frac{I}{I_۰} \\ I_۰ = ۱۰^{-۱۲}\,W/m^{۲} \\ \log ۲ = ۰/۳ \Rightarrow ۱۰^{۰/۳} = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۶/۶ = \log \frac{I}{۱۰^{-۱۲}} \Rightarrow I = ۱۰^{-۱۲} \times ۱۰^{۶/۶} = ۱۰^{-۱۲} \times ۱۰^{۶} \times \left(۱۰^{۰/۳}\right)^{۲} = ۴ \times ۱۰^{-۶}\,W/m^{۲}$$

۱۰۸ گزینه ۴

ابتدا مسافت طی‌شده در مدت ۷/۲ ثانیه را حساب می‌کنیم که باتوجه‌به مسیر نوسان داریم:



$$\text{مسافت طی‌شده : } BA + AB + BA + AB = \text{۲ دور نوسان} = \text{۸ برابر دامنه}$$
$$\Rightarrow \text{۲ دور نوسان به مدت } T \text{ طول می‌کشد} \Rightarrow ۲T = ۷/۲ \Rightarrow T = ۳/۶\,s$$

وقتی نوسانگر ۱۳/۶ متر طی کرده یعنی به‌اندازهٔ $۸/۵\,A$ طی کرده است ($A = ۱/۶\,m$):

$$A = ۱/۶ \Rightarrow ۱۳/۶ = ۸/۵A$$

وضعیت نوسانگر را در طی مسافت $۸/۵\,A$ بررسی می‌کنیم: ($۸/۵A = ۸A + ۰/۵A$)
وقتی نوسانگر $۸\,A$ اول مسافت را طی می‌کند، دوباره به مکان اول خود بازمی‌گردد بنابراین کافی است مسافت $۰/۵A$ باقی‌مانده را بررسی می‌کنیم:

$$x = A\cos(\omega t) = \frac{A}{۲} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳/۶} \times t = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow t = ۰/۶\,s$$

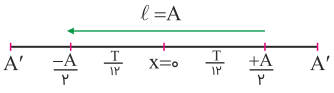
بیشترین انرژی جنبشی در نقطهٔ تعادل ($x = ۰$) اتفاق می‌افتد:

$$x = ۰ \Rightarrow A\cos(\omega t') = ۰ \Rightarrow \omega t' = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳/۶}t' = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow t' = ۰/۹\,s$$

زمان موردنظر اختلاف دو لحظهٔ t و t' است:

$$t' - t = ۰/۹ - ۰/۶ = ۰/۳$$

۱۰۹ گزینه ۲



طول پاره‌خط نوسان دو برابر دامنهٔ حرکت است. در این صورت خواهیم داشت:

$$AA' = ۴۰\,cm \Rightarrow A = ۲۰\,cm$$

برای محاسبهٔ بیشترین تندی متوسط در حالتی که جابه‌جایی برابر با دامنهٔ حرکت باشد، باید نوسانگر از مکان $x = \pm\frac{A}{۲}$ به‌سمت مرکز در حال حرکت بوده و به مکان $x = \mp\frac{A}{۲}$ برسد. در این صورت داریم:

$$T = \frac{\Delta t}{n} \Rightarrow T = \frac{۳}{۱۵۰} = \frac{۱}{۵۰}\,s$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{A}{۲(\frac{T}{۱۲})} = \frac{A}{\frac{T}{۶}} = \frac{۲۰ \times ۱۰^{-۲}}{\frac{۱}{۳۰۰}}$$

$$\Rightarrow s_{av} = ۶۰۰۰ \times ۱۰^{-۲} = ۶۰\,m/s$$

۱۱۰ گزینهٔ ۴

گام اول: با استفاده از رابطهٔ انرژی پتانسیل برحسب مکان و بیشینهٔ تندی نوسانگر $(v_{max} = ۲\,m/s)$، A و ω را به دست آورده و معادلهٔ مکان-زمان نوسانگر را مشخص می‌کنیم:

$$U = ۲۰x^۲$$

$$(x = A \Rightarrow U = U_{max}) \Rightarrow U_{max} = ۲۰A^۲ \Rightarrow E = ۲۰A^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}kA^۲ = ۲۰A^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}k = ۲۰ \Rightarrow k = ۴۰ \Rightarrow m\omega^۲ = ۴۰$$

$$\Rightarrow ۰/۱\omega^۲ = ۴۰ \Rightarrow \omega^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow \omega = ۲۰\,rad/s$$

$$v_{max} = A\omega \Rightarrow ۲ = A \times ۲۰ \Rightarrow A = ۰/۱\,m$$

$$x = A\cos\omega t = ۰/۱\cos ۲۰t \quad (I)$$

گام دوم: برای لحظهٔ $t = \frac{\pi}{۱۵}\,s$، مکان را از معادلهٔ (I) و انرژی پتانسیل آن را از رابطهٔ داده‌شده به دست می‌آوریم:

$$x = ۰/۱\cos ۲۰t$$

$$t_۱ = \frac{\pi}{۱۵}\,s \Rightarrow x_۱ = ۰/۱\cos\frac{۲۰\pi}{۱۵} = ۰/۱\cos\frac{۴\pi}{۳} = ۰/۱ \times (-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۲۰}\,m$$

$$U_۱ = ۲۰x_۱^۲ = ۲۰ \times (-\frac{۱}{۲۰})^۲ = \frac{۱}{۲۰}\,J$$

گام سوم: در پایان با نوشتن قانون بقاء انرژی مکانیکی در لحظهٔ $t = \frac{\pi}{۱۵}\,s$ خواستهٔ تست را به دست می‌آوریم:

$$E = U_۱ + K_۱ \Rightarrow U_{max} = U_۱ + K_۱ \Rightarrow ۲۰A^۲ = \frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$\Rightarrow ۲۰ \times (۰/۱)^۲ = ۰/۰۵ + \frac{۱}{۲} \times ۰/۱ \times v_۱^۲ \Rightarrow ۰/۱۵ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۱ \times v_۱^۲$$

$$\Rightarrow v_۱^۲ = \frac{۲ \times ۰/۱۵}{۰/۱} = ۳ \Rightarrow v_۱ = \sqrt{۳}\,m/s$$

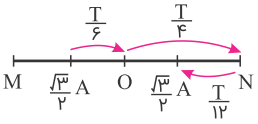
۱۱۱ گزینهٔ ۲

دامنهٔ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی الزاماً باهم برابر نیست.

۱۱۲ گزینهٔ ۴

چون دو منبع یکسان هستند، دامنه و بسامد تولیدی آن‌ها یکسان است. بنابراین انرژی تولیدی دو منبع برابر است. چون صوت در یک راستا پخش می‌شود و پراکندگی در محیط ندارد، تمام انرژی تولیدشده هر دو منبع در هر واحد زمان از تمام سطوح عمود بر راستای انتشار صوت عبور می‌کند و فاصله از چشمه تأثیری در شدت صوت و درنتیجه تراز شدت صوت ندارد. بنابراین تراز شدت صوت در سطح هر دو صفحه باهم برابر است.

۱۱۳ گزینه ۱



$$\Delta t = \frac{T}{۶} + \frac{T}{۴} + \frac{T}{۱۲}$$
$$\Delta t = \frac{T}{۲} = ۱ \Rightarrow T = ۲\,s$$

۱۱۴ گزینه ۲

باتوجه‌به رابطهٔ تراز شدت صوت داریم:

$$B = ۱۰\log\frac{I}{I_۰} \Rightarrow ۸۰ = ۱۰\log\frac{I}{I_۰}$$
$$\Rightarrow ۸ = \log\frac{I}{I_۰} \Rightarrow ۸ = \log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}} \Rightarrow ۱۰^{۸} = \frac{I}{۱۰^{-۱۲}} \Rightarrow I = ۱۰^{-۴}\,W/m^{۲}$$

اکنون توان صوت را که در فاصلهٔ ۲۰ متری به شنونده می‌رسد محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow P = IA = ۱۰^{-۴} \times ۴\pi r^{۲}$$
$$P = ۱۰^{-۴} \times ۴ \times ۳ \times (۲۰)^{۲} = ۴۰۰ \times ۱۲ \times ۱۰^{-۴} = ۴۸۰۰ \times ۱۰^{-۴} = ۴۸۰ \times ۱۰^{-۳}\,W = ۴۸۰\,mW$$

پس توان به‌اندازهٔ $(۵۰۰ - ۴۸۰ = ۲۰\,mW)$ کاهش یافته است. درصد کاهش توان را به دست می‌آوریم:

$$\text{درصد تغییرات توان چشمهٔ صوت} = \frac{P - P_۰}{P_۰} \times ۱۰۰ = \frac{۴۸۰ - ۵۰۰}{۵۰۰} \times ۱۰۰ = -۴\% \Rightarrow \text{توان } ۴\% \text{ کاهش یافته است}$$

۱۱۵ گزینه ۳

گام اول: دورهٔ تناوب حرکت نوسانی را محاسبه می‌کنیم:

$$۸\pi = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{۱}{۴}\,s$$

گام دوم: تعداد نوسان‌ها را در $۲\,s$ اول به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{۲\,s}{\frac{۱}{۴}} = ۸$$

گام سوم: نوسانگر در هر نوسان مسافتی معادل $۴\,A$ را طی می‌کند، پس:

$$\ell = (۴\,A) \times \pi = ۴ \times ۰/۳ \times ۸ = ۹/۶\,m$$

۱۱۶ گزینه ۲

گام اول: ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{P_۲}{P_۱}\times(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$، نسبت شدت صوت در محل در صفحه را به دست می‌آوریم.

$$\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{p_۲}{p_۱}\times(\frac{r_۱}{r_۲})^۲\xrightarrow[r_۱=۲m\ ,\ r_۲=۶m]{p_۲=p_۱}\frac{I_۲}{I_۱}=۱\times(\frac{۲}{۶})^۲=\frac{۱}{۹}$$

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ $I=\frac{E}{t.A}$، انرژی رسیده به صفحهٔ $A_۲$ را محاسبه می‌کنیم.

$$I=\frac{E}{t.A}\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{E_۲}{E_۱}\times\frac{t_۱}{t_۲}\times\frac{A_۱}{A_۲}\Rightarrow\frac{۱}{۹}=\frac{E_۲}{۲۴۰}\times\frac{۱۰s}{۶۰s}\times\frac{۲cm^۲}{۸cm^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۹}=\frac{E_۲}{۲۴۰}\times\frac{۱}{۲۴}\Rightarrow E_۲=۶۴۰\mu J$$

۱۱۷ گزینه ۳

کار نیروی کشسانی فنر برابر با منفی تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی آن است:

$$W_{\text{فنر}}=-\Delta U_{\text{کشسانی}}=-(U_۲-U_۱)$$

انرژی پتانسیل کشسانی اولیهٔ فنر برابر صفر است، زیرا فنر تغییرات طولی ندارد.

$$U_۱=۰\quad,\quad U_۲=۲۵J$$
$$\Rightarrow W_{\text{فنر}}=-(۲۵-۰)=-۲۵J$$

نکته: به دلیل این‌که در مدت‌زمان تماس جسم با فنر، فنر نیرویی در خلاف جهت حرکت جسم به آن وارد می‌کند تا مانع از فشردگی خود شود، بنابراین $\theta=۱۸۰^\circ$ است و کار نیروی فنر منفی است.

۱۱۸ گزینه ۴

گام اول

الف) سیمی به طول یک متر $\leftarrow l=۱m$

ب) جرم ۴ گرم $\leftarrow m=۴g=۰/۰۰۴kg$

ج) نیروی کشش سیم ۱۰ نیوتن $\leftarrow F=۱۰N$

د) سرعت انتقال امواج عرض در سیم چند متر بر ثانیه؟ $\leftarrow v=?$

گام دوم

با استفاده از معادلهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F.l}{m}}$، سرعت انتقال امواج را محاسبه می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F.l}{m}}=\sqrt{\frac{۱۰\times۱}{۰/۰۰۴}}=۵۰m/s$$

www.alirezaafshar.org

۱۱۹ گزینه ۱

موارد "الف"، "ج" و "د" نادرست و فقط مورد "ب" درست است.

الف) سرعت انتشار ارتباطی به بسامد ندارد. (نادرست)

ب) از رابطهٔ $v_m = A\omega$ با نصف شدن بسامد، v_m هم نصف می‌شود. (درست)

ج) مسافتی که موج در یک ثانیه طی می‌کند، تندی انتشار موج است. (نادرست)

د) در موج طولی در مکان‌هایی که بیشترین جمع شدگی رخ می‌دهد، جابه‌جایی از وضعیت تعادل صفر است. (نادرست)

۱۲۰ گزینه ۱

گام اول

الف) تراز شدت صوتی ۷۶ دسی‌بل $\leftarrow \beta = ۷۶dB = ۷/۶\ B$

ب) شدت صوت؟ $\leftarrow I = ?$

گام دوم

با استفاده از معادلهٔ $\beta = \log \frac{I}{I_۰}$، شدت صوت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \beta = \log \frac{I}{I_۰} \\ I_۰ = ۱۰^{-۶}\mu W/m^۲ = ۱۰^{-۱۲} W/m^۲ \\ \log ۲ = ۰/۳ \Rightarrow ۱۰^{۰/۳} = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۷/۶ = \log \frac{I}{۱۰^{-۱۲}} \Rightarrow I = ۱۰^{-۱۲} \times ۱۰^{۷/۶}$$

$$= ۱۰^{-۴/۴} = ۱۰^{-۵} \times ۱۰^{۰/۶} = ۱۰^{-۵} \times (۱۰^{۲\times ۰/۳}) = ۱۰^{-۵} \times (۱۰^{۲\log ۲}) = ۱۰^{-۵} \times (۱۰^{\log ۲^۲}) = ۱۰^{-۵} \times ۲^۲ = ۴ \times ۱۰^{-۵} W/m^۲$$

www.alirezaafshar.org

۱۲۱ گزینه ۱

روش اول:

مطابق معادلهٔ موازنه‌شده به ازای واکنش ۲ مول ZnS در مواد اولیه، ۲ مول ZnO در فرآورده‌ها حاصل می‌شود. ازاین‌رو می‌توان اختلاف جرم مواد جامد را محاسبه کرد.

$$۲\,mol\,ZnS - ۲\,mol\,ZnO \Rightarrow ۲(۶۵+۳۲) - ۲(۶۵+۱۶) = ۳۲\,g$$

$$?\,mol\,ZnS = ۱۹/۲\,g\ \text{اختلاف} \times \frac{۲\,mol\,ZnS}{۳۲\,g\ \text{اختلاف}} = ۱/۲\,mol\,ZnS$$

و باز طبق معادلهٔ موازنه‌شده به ازای هر ۲ مول ZnS تفاوت مول‌های گازهای مواد اولیه و فرآورده برابر با ۱ مول خواهد بود.

$$?\ \text{اختلاف مول گاز} = ۱/۲\,mol\,ZnS \times \frac{۱\,mol\,\text{گاز}}{۲\,mol\,ZnS} = ۰/۶\,mol\,\text{گاز}$$

حال هر ۰/۶ مول گاز، ۱۹/۲ لیتر حجم دارد؛ پس می‌توان نوشت:

$$?\,L = ۱mol \times \frac{۱۹/۲\,L}{۰/۶\,mol} = ۳۲ \Rightarrow d = \frac{M}{V} = \frac{۶۴}{۳۲} = ۲\,g.L^{-۱}$$

روش دوم:

$$۲\,mol\,ZnS \sim ۲\,mol\,ZnO \Rightarrow ۱mol\,ZnS \sim ۱mol\,ZnO$$

$$\left.\begin{matrix}۱mol\,ZnO = ۶۵+۱۶\\ ۱mol\,ZnS = ۶۵+۳۲\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{اختلاف جرم} = (۶۵+۳۲) - (۶۵+۱۶) = ۱۶\,g$$

$$\begin{matrix}ZnS\ (\text{مول}) & \text{اختلاف جرم}\\ ۱ & ۱۶\\ x & ۱۹/۲\end{matrix} \Rightarrow x = ۱/۲\,mol \Rightarrow \begin{matrix}ZnS\ (\text{مول}) & \text{اختلاف مول گاز}\,(L)\\ ۲ & ۱\\ ۱/۲ & x\end{matrix} \Rightarrow x = ۰/۶\,mol$$

$$\begin{matrix}\text{مول گاز} & \text{حجم}\\ ۰/۶ & ۱۹/۲\\ ۱ & x\end{matrix} \Rightarrow x = ۳۲\,L$$

$$SO_۲ = ۳۲ + (۱۶ \times ۲) = ۶۴ \Rightarrow d = \frac{M}{V} = \frac{۶۴}{۳۲} = ۲\,g.L^{-}$$

به ازای هر ۲ مول ZnS که در واکنش شرکت می‌کند، حجم گازها ۱ مول کاهش خواهد داشت. در طرف اول ۳ مول گاز اکسیژن و در سمت فرآورده ۲ مول گاز $SO_۲$ داریم. (حال که ۱/۲ مول ZnS داریم، پس تغییرات مول‌های گازی برابر ۰/۶ مول خواهد بود که حجمی معادل ۱۹/۲ لیتر دارد)

۱۲۲ گزینه ۲

درصد جرمی ایزوتوپ‌های کلر نشان می‌دهد که فراوانی ^{۳۵}Cl برابر ۲۰ درصد و فراوانی ^{۳۷}Cl برابر ۸۰ درصد است؛ ابتدا جرم اتمی میانگین کلر را حساب می‌کنیم:

$$M = \frac{M_۱F_۱ + M_۲F_۲}{F_۱ + F_۲}$$

($M_۱$ و $M_۲$: جرم اتمی هر یک از ایزوتوپ‌ها، $F_۱$ و $F_۲$: فراوانی هر ایزوتوپ)

$$M = \frac{(۳۵ \times ۲۰) + (۳۷ \times ۸۰)}{۲۰ + ۸۰} = \frac{۳۶۶۰}{۱۰۰} = ۳۶/۶$$

عدد جرمی یک اتم به‌لحاظ عددی تقریباً با جرم مولی اتم (اتم‌گرم) برابر است (این مطلب، در صورت سؤال نیز تأکید شده است) بنابراین جرم اتمی میانگین به‌دست‌آمده برای کلر نیز به‌لحاظ عددی تقریباً با جرم مولی کلر برابر است.
برای محاسبهٔ چگالی گاز کلر، کافی است جرم مولی گاز کلر را بر حجم مولی آن تقسیم کنیم.

$$d = \frac{m}{V} = \frac{\text{جرم مولی گاز کلر}}{\text{حجم مولی گاز کلر}} = \frac{۲(۳۶/۶)\,g.mol^{-۱}}{۳۰\,L.mol^{-۱}} = ۲/۴۴\,g.L^{-۱}$$

۱۲۳ گزینه ۱

در فرآیند هال برای تولید آلومینیوم، چگالی آلومینیوم مذاب تولیدشده بیشتر از الکترولیت مورداستفاده در سلول الکترولیتی است و از دریچهٔ پایینی ظرف خارج می‌شود.

$$۲Al_۲O_۳(s) + ۳C(s) \rightarrow ۴Al(l) + ۳CO_۲(g)$$

$$?\,L\,CO_۲ = ۵۴۰\,kg\,Al \times \frac{۱۰۰۰\,g}{۱\,kg} \times \frac{۱\,mol\,Al}{۲۷\,g\,Al} \times \frac{۳\,mol\,CO_۲}{۴\,mol\,Al} \times \frac{۴۴\,g\,CO_۲}{۱\,mol\,CO_۲}$$
$$\times \frac{۱\,L\,CO_۲}{۱/۶\,g\,CO_۲} \times \frac{۱\,m^۳\,CO_۲}{۱۰۰۰\,L\,CO_۲} = ۴۱۲/۵\,m^۳\,CO_۲$$

۱۲۴ گزینه ۴

نزدیک‌ترین لایهٔ هواکره به سطح زمین تروپوسفر است.

۱۲۵ گزینه ۱

$$^{۵۹}A^{۲+}: \begin{cases} n + p = ۵۹ \\ n - e = ۵ \\ p = e + ۲ \end{cases} \Rightarrow n = ۳۱\,,\ p = ۲۸\,,\ e = ۲۶$$

$$_{۲۸}A^{۲+}: ۱s^۲\ ۲s^۲۲p^۶\ ۳s^۲۳p^۶۳d^۸$$

$$\frac{\text{شمار الکترون با } l = ۱ \text{ (زیرلایهٔ p)}}{\text{شمار الکترون با } l = ۲ \text{ (زیرلایهٔ d)}} = \frac{۱۲}{۸} = ۱/۵$$

۱۲۶ گزینه ۳

در طیف نشری- خطی هیدروژن با انتقال از لایهٔ $n = ۳$ به $n = ۲$ به رنگ قرمز دیده می‌شود.

www.alirezaafshar.org

۱۲۷ گزینه ۱

سوختن واکنش شیمیایی است که در آن یک ماده با اکسیژن به‌سرعت واکنش می‌دهد.
سوختن ناقص که در عدم حضور اکسیژن کافی رخ می‌دهد باعث زرد شدن رنگ شعله، تولید گاز کربن مونوکسید و دود خواهد شد.
کربن مونوکسید بسیار ناپایدار است و در صورت فراهم بودن شرایط و در اختیار بودن اکسیژن مجدداً دوباره می‌سوزد و CO_2 تولید می‌گردد.
سوختن زغال‌سنگ تولید SO_2، CO_2، نور و گرما و بخار آب می‌کند.

۱۲۸ گزینه ۳

آرایش الکترونی آن:

$$_{28}A : [_{10}Ne]\ \underbrace{3s^2 3p^6 3d^8}_{\substack{16e^- \\ \downarrow \\ \text{در لایهٔ سوم}}}\ 4s^2$$

ده الکترون در لایه ظرفیت خود دارد. $3d^8 4s^2 \rightarrow 10e^-$
متعلق به گروه ۱۰ جدول دوره‌ای عنصرها است.
عنصر $_{28}Ni$ است و در آلیاژ نیتینول به کار می‌رود و جزء فلزها است.

۱۲۹ گزینه ۳

عبارت‌های "الف"، "ب" و "ث" درست هستند.
ابتدا معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش و تغییر عدد اکسایش عنصرها را در آن، مشخص می‌کنیم:

$$\overset{0}{3Zn(s)} + 2\overset{+3}{FeCl_3}(aq) \rightarrow 3\overset{+2}{ZnCl_2}(aq) + 2\overset{0}{Fe}(s)$$

بررسی عبارت‌ها:
الف) مطابق معادلهٔ واکنش ملاحظه می‌کنید که عدد اکسایش فلز روی و فلز آهن تغییر کرده است.
ب) در این واکنش، فلز روی یون‌های آهن (III) را به فلز آهن کاهش داده است؛ بنابراین قدرت کاهندگی فلز روی از آهن بیشتر است. این مقایسه در مورد قدرت اکسندگی کاتیون مربوط به آن‌ها دقیقاً برعکس است:

$$\text{قدرت کاهندگی : } Zn > Fe \Rightarrow \text{قدرت اکسندگی : } Zn^{2+} < Fe^{3+}$$

پ) مطابق معادلهٔ واکنش، همراه تشکیل هر مول روی کلرید، $\frac{2}{3}$ مول فلز آهن آزاد می‌شود.

$$?\,mol\,Fe = 1\,mol\,ZnCl_2 \times \frac{2\,mol\,Fe}{3\,mol\,ZnCl_2} = \frac{2}{3}mol\,Fe$$

ت) به ازای مصرف هر مول فلز روی، $\frac{2}{3}$ مول آهن (III) کلرید مصرف می‌شود.

$$?\,mol\,FeCl_3 = 1\,mol\,Zn \times \frac{2\,mol\,FeCl_3}{3\,mol\,Zn} = \frac{2}{3}mol\,FeCl_3$$

ث) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ موازنه‌شده، برابر ۱۰ است.

$$3 + 2 + 3 + 2 = 10$$

۱۳۰ گزینه ۴

$$N_۲ + ۳H_۲ \rightarrow ۲NH_۳$$

$$?\,L\,H_۲ = ۵/۶\,L\,N_۲ \times \frac{۱\,mol\,N_۲}{۲۲/۴\,L\,N_۲} \times \frac{۳\,mol\,H_۲}{۱\,mol\,N_۲} \times \frac{۲۲/۴\,L}{۱\,mol\,H_۲} = ۱۶/۸\,L\,H_۲$$

۱۳۱ گزینه ۴

$$?\,mol\,O = ۴۵\,g\,H_۲O \times \frac{۱\,mol\,H_۲O}{۱۸\,g\,H_۲O} \times \frac{۱\,mol\,O}{۱\,mol\,H_۲O} = ۲/۵\,mol\,O$$

$$?\,mol\,CO_۲ = ۲/۵\,mol\,O \times \frac{۱\,mol\,CO_۲}{۲\,mol\,O} = ۱/۲۵\,mol\,CO_۲$$

۱۳۲ گزینه ۳

عبارت‌های "الف"، "ب" و "پ" نادرست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) برای عنصرهای دستهٔ p الکترون‌های لایهٔ ظرفیت برابر یکان شمارهٔ گروه است.

ب) $_{۱۴}Si : [Ne]۳s^۲۳p^۲$ ⇐ ۴ الکترون ظرفیت

پ) $_{۱۶}S : [Ne]۳s^۲۳p^۴$ ⇐ ۶ الکترون ظرفیت و $_{۷}N : [Ne]۲s^۲۲p^۳$ ⇐ ۵ الکترون ظرفیت

۱۳۳ گزینه ۳

باتوجه‌به کتاب درسی عبارت‌های "الف"، "پ" و "ت" درست هستند.

بررسی عبارت نادرست:

ب) تا ارتفاع ۱۲ کیلومتری تروپوسفر است که پس از آن هواکره رقیق و رقیق‌تر می‌شود.

۱۳۴ گزینه ۴

الف) نادرست. مدل اتمی بور فقط قادر به تفسیر طیف نشری خطی هیدروژن بوده و این مدل برای سایر عنصرها کاربرد نداشت.

ب) نادرست. بر اساس مدل اتمی بور، الکترون اتم هیدروژن در مداری دایره‌ای به دور هسته گردش می‌کند. مفهوم لایهٔ الکترونی مربوط به مدل کوانتومی اتم است.

پ) نادرست. الکترون‌های یک لایه ممکن است lهای یکسانی داشته باشند؛ برای مثال $n = ۱$ دارای گنجایش دو الکترون است که هر ۲ الکترون دارای $l = ۰$ هستند.

ت) نادرست. در ساختار لایه‌ای الکترون‌ها در تمام بخش‌های یک لایه، الکترون‌ها قرار دارند ولی در بخش‌های پررنگ‌تر احتمال حضور الکترون بیشتر است.

۱۳۵ گزینه ۲

$_{۲۱}Sc : [Ar]۳d^۱\ ۴s^۲ \Rightarrow Sc^{۳+} : [Ar]$ ✓

$_{۲۶}Fe : [Ar]۳d^۶\ ۴s^۲ \Rightarrow Fe^{۸+}$ ×

$_{۲۹}Cu : [Ar]۳d^{۱۰}\ ۴s^۱ \Rightarrow Cu^{۱۱+}$ ×

$_{۲۸}Ni : [Ar]۳d^۸\ ۴s^۲ \Rightarrow Ni^{۱۰+}$ ×

۱۳۶ گزینه ۲

می‌دانیم اگر به محلول حاوی یون $Fe^{۲+}$ مانند آهن (II) کلرید، مقداری محلول سدیم هیدروکسید اضافه کنیم، یون $Fe^{۲+}$ با یون OH^- رسوب سبزرنگ آهن (II) هیدروکسید را تشکیل می‌دهد.

$$FeCl_۲(aq) + ۲NaOH(aq) \rightarrow Fe(OH)_۲(s) + ۲NaCl(aq)$$

$$?\,g\,NaCl = ۶۳/۵\,g\,FeCl_۲ \times \frac{۸۰\,g\,FeCl_۲\ \text{خالص}}{۱۰۰\,g\,FeCl_۲\ \text{ناخالص}} \times \frac{۱\,mol\,FeCl_۲}{۱۲۷\,g\,FeCl_۲} \times \frac{۲\,mol\,NaCl}{۱\,mol\,FeCl_۲}$$

$$\times \frac{۵۸/۵\,g\,NaCl}{۱\,mol\,NaCl} = ۴۶/۸\,g\,NaCl$$

$$\text{بازدهٔ درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{بازدهٔ درصدی} = \frac{۳۵/۱}{۴۶/۸} \times ۱۰۰ = \%۷۵$$

۱۳۷ گزینه ۳

عبارت‌های "الف"، "پ" و "ت" درست هستند.

بررسی عبارت‌های "ب" و "ت":

ب) نادرست. خواص فیزیکی شبه‌فلزها بیشتر به فلزها شبیه بوده درحالی‌که رفتار شیمیایی آن‌ها همانند نافلزها است.

ت) درست. می‌دانیم که در هردوره عناصر سمت چپ دوره و در هرگروه عناصر پایین گروه خصلت فلزی بیشتری دارند.

۱۳۸ گزینه ۱

برای موارد "الف" و "ت" باید عدد رومی به کار ببریم.

الف) منگنز (Mn)

ت) مس (Cu)

چون این فلزها دو نوع کاتیون تولید می‌کنند.

۱۳۹ گزینه ۴

$$\text{چگالی گاز} = \frac{\text{جرم مولی}}{\text{حجم مولی گاز}}$$

ابتدا جرم مولی گاز موردنظر را که چگالی آن برابر $۰/۷۱$ است، حساب می‌کنیم:

$$۰/۷۱ = \frac{\text{جرم ولی}}{۲۲/۴} \Rightarrow \text{جرم ولی} \simeq ۱۶\,g.mol^{-۱}$$

باتوجه‌به گزینه‌ها و محاسبه جرم مولی گاز داده شده، به راحتی می‌توان دریافت که گاز مورد نظر، متان است.

$$CH_۴ = ۱۲ + ۴(۱) = ۱۶\,g.mol^{-۱}$$

۱۴۰ گزینه ۴

فرمول همگانی آلکان‌ها C_nH_{2n+2} است که بر این اساس شمار پیوندهای $C-C$ در آن برابر با $n-1$ و شمار پیوندهای $C-H$ در آن برابر با $2n+2$ است؛ بنابراین:

$$\frac{n-1}{2n+2}=\frac{3}{10}\Rightarrow 10n-10=6n+6\Rightarrow 4n=16\Rightarrow n=4\Rightarrow C_4H_{10}$$

الف) درست.

$$C_4H_{10}(g)+\frac{13}{2}O_2(g)\rightarrow 4CO_2(g)+5H_2O(l)$$

در شرایط STP، حالت فیزیکی H_2O به‌صورت مایع است، نه گاز!

ب) درست. آلکان‌های یک تا چهار کربن در دمای اتاق گازی‌شکل هستند.

پ) درست.

$$CH_3-CH_2-CH_2-CH_3 \quad , \quad CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3$$

ت) درست. از گاز بوتان برای پر کردن فندک استفاده می‌شود.

۱۴۱ گزینه ۱

روش اول:

$$\begin{matrix}\frac{8HNO_3}{8\times 1000} & \rightarrow & \frac{3Cu(NO_3)_2}{3\times 188}\\ V\times 2\times\frac{80}{100} & & 14/1\end{matrix}\qquad \Rightarrow V=125\,mL$$

روش دوم:

مسئله را با روش ضریب تبدیل حل می‌نماییم:

$$?\,mL\,HNO_3=\underbrace{\overbrace{14/1\,g}^{\text{مقدار عملی}}\times\frac{100\,g}{80\,g}}_{\substack{\text{مقدار نظری}\\ Cu(NO_3)_2}}\times\frac{1\,mol\,Cu(NO_3)_2}{188\,g\,Cu(NO_3)_2}\times\frac{8\,mol\,HNO_3}{3\,mol\,Cu(NO_3)_2}\times\frac{1000\,mL\,HNO_3}{2\,mol\,HNO_3}=125\,mL\,HNO_3$$

۱۴۲ گزینه ۴

همهٔ مواد طبیعی و مصنوعی از کرهٔ زمین به دست می‌آیند.

۱۴۳ گزینه ۲

الف) تنها نافلزی که رسانایی الکتریکی دارد $\Leftarrow C$

ب) دارای سطح براق بوده و در شرایط مناسب الکترون از دست می‌دهد $\Leftarrow Pb$

پ) رسانای کم جریان برق، درخشان و شکننده است $\Leftarrow Si$

ت) در شرایط مناسب الکترون می‌گیرد و سطح درخشان ندارد $\Leftarrow Cl$

۱۴۴ گزینه ۳

عبارت‌های "الف"، "ب" و "ت" درست هستند.

بررسی عبارت نادرست:

پ) در خلوص این نمونه از ماده $\frac{۳۰}{۲۵۰} \times ۱۰۰$ یا ۱۲٪ است. دقت‌کنید که جرم ناخالصی‌ها ۲۲۰ گرم است نه مقدار خالص.

۱۴۵ گزینه ۴

$$\text{جرم مولی } CO_۲ = ۱۲ + ۲(۱۶) = ۴۴$$

$$\text{جرم مولی } CaCO_۳ = ۴۰ + ۱۲ + ۳(۱۶) = ۱۰۰$$

$$\text{بازدهٔ درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۸۰ = \frac{۵}{x} \times ۱۰۰ \Rightarrow x = ۶/۲۵\,L$$

$$?\,g\,CaCO_۳ = ۶/۲۵\,L\,CO_۲ \times \frac{۱/۱\,g\,CO_۲}{۱\,L} \times \frac{۱\,mol\,CO_۲}{۴۴\,g\,CO_۲} \times \frac{۱\,mol\,CaCO_۳}{۱\,mol\,CO_۲}$$
$$\times \frac{۱۰۰\,g\,CO_۳}{۱\,mol\,CaCO_۳} \times \frac{۱۰۰}{۷۵} \simeq ۲۰/۸۳\,g\,CaCO_۳$$

۱۴۶ گزینه ۳

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. فلزات ویژگی‌های مختص به خود نیز دارند.

گزینهٔ ۲: نادرست. خیر مثل Be.

گزینهٔ ۴: نادرست. مربوط به فلزات با توانایی تشکیل یون +۱ است.

۱۴۷ گزینه ۳

معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش:

$$۲N_۲O_۵ \rightarrow ۴NO_۲ + ۱O_۲$$

$m_۱ : N_۲O_۵$ جرم اولیهٔ

$m_۲ : N_۲O_۵$ جرم مصرف‌شدهٔ

$$?\,g\,NO_۲ : m_۲\,g\,N_۲O_۵ \times \frac{۱\,mol\,N_۲O_۵}{۱۰۸\,g\,N_۲O_۵} \times \frac{۴\,mol\,NO_۲}{۲\,mol\,N_۲O_۵} \times \frac{۴۶\,g\,NO_۲}{۱\,mol\,NO_۲} = ۰/۸۵m_۲\,g\,NO_۲$$

$$?\,g\,O_۲ : m_۲\,g\,N_۲O_۵ \times \frac{۱\,mol\,N_۲O_۵}{۱۰۸\,g\,N_۲O_۵} \times \frac{۱\,mol\,O_۲}{۲\,mol\,N_۲O_۵} \times \frac{۳۲\,g\,O_۲}{۱\,mol\,O_۲} = ۰/۱۴۸m_۲\,g\,O_۲$$

جرم $N_۲O_۵$ باقی‌مانده = اختلاف جرم فرآورده‌ها

$$۰/۸۵m_۲ - ۰/۱۴۸m_۲ = m_۱ - m_۲ \Rightarrow ۱/۷۰۲\,m_۲ = m_۱$$

$$\text{بازدهٔ درصدی} = \frac{\text{جرم مصرف‌شده } N_۲O_۵}{\text{جرم اولیه } N_۲O_۵} \times ۱۰۰ = \frac{m_۲}{m_۱} \times ۱۰۰ = \frac{m_۲}{۱/۷۰۲m_۲} \times ۱۰۰ \simeq ٪۵۸/۷$$

www.alirezaafshar.org

۱۴۸ گزینه ۴

فرمول مولکولی ترکیب I، $C_{۱۰}H_{۱۴}O$ و فرمول مولکولی ترکیب II، $C_{۱۰}H_{۱۶}O$ است.
معادلهٔ واکنش سوختن ترکیب I:

$$C_{۱۰}H_{۱۴}O + ۱۳O_۲ \rightarrow ۱۰CO_۲ + ۷H_۲O$$

$$?\,L\,O_۲ = ۷/۵\,g\,C_{۱۰}H_{۱۴}O \times \frac{۱\,mol\,C_{۱۰}H_{۱۴}O}{۱۵۰\,g\,C_{۱۰}H_{۱۴}O} \times \frac{۱۳\,mol\,O_۲}{۱\,mol\,C_{۱۰}H_{۱۴}O} \times \frac{۲۲/۴\,L\,O_۲}{۱\,mol\,O_۲} = ۱۴/۵۶\,L\,O_۲$$

بررسی سایر گزینه‌ها:
گزینهٔ ۱: تفاوت فرمول مولکولی دو ترکیب در دو اتم هیدروژن است، بنابراین تفاوت جرم مولی آن‌ها ۲ گرم است.
گزینهٔ ۲: هر مولکول از ترکیب (II) با یک مولکول برم واکنش می‌دهد، چون یک پیوند دوگانه میان اتم‌های کربن دارد.

$$C_{۱۰}H_{۱۶}O + Br_۲ \rightarrow C_{۱۰}H_{۱۶}Br_۲O$$

$$?\,g\,Br_۲ = ۳/۸\,g\,C_{۱۰}H_{۱۶}O \times \frac{۱\,mol\,C_{۱۰}H_{۱۶}O}{۱۵۲\,g\,C_{۱۰}H_{۱۶}O} \times \frac{۱\,mol\,Br_۲}{۱\,mol\,C_{۱۰}H_{۱۶}O} \times \frac{۱۶۰\,g\,Br_۲}{۱\,mol\,Br_۲} = ۴\,g\,Br_۲$$

گزینهٔ ۳: دو ترکیب همپار نیستند، زیرا فرمول مولکولی یکسان ندارند.

۱۴۹ گزینه ۴

معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش:

$$۱FeCl_۳(aq) + ۳NaOH(aq) \rightarrow ۱Fe(OH)_۳(s) + ۳NaCl(aq)$$

$$\text{بازدهٔ درصدی} = \frac{\text{مقدار فرآوردهٔ عملی}}{\text{مقدار فرآوردهٔ نظری}} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۸۰ = \frac{۴۲/۸}{\text{مقدار فرآوردهٔ نظری}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{مقدار فرآوردهٔ نظری} = ۵۳/۵\,g$$

$$?\,g\,NaOH : ۵۳/۵\,g\,Fe(OH)_۳ \times \frac{۱\,mol\,Fe(OH)_۳}{۱۰۷\,g\,Fe(OH)_۳} \times \frac{۳\,mol\,NaOH}{۱\,mol\,Fe(OH)_۳} \times \frac{۴۰\,g\,NaOH}{۱\,mol\,NaOH} = ۶۰\,g\,NaOH$$

$$\text{جرم محلول} - \text{جرم حل‌شونده} = \text{جرم حلال (آب)} \Rightarrow ۱۳۵ - ۶۰ = ۷۵\,g$$

۱۵۰ گزینه ۱

اگر محلول سدیم هیدروکسید به محلول (II) کلرید اضافه شود، رسوبی سبزرنگ با فرمول شیمیایی $Fe(OH)_۲$ مشاهده می‌گردد. از طرف دیگر باتوجه‌به فرمول شیمیایی زنگ آهن ($Fe_۲O_۳$)، این ماده ضمن واکنش با هیدروکلریک اسید (HCl)، طبق واکنش زیر، محلولی با فرمول شیمیایی $FeCl_۳$ حاصل می‌شود.

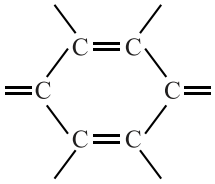
$$Fe_۲O_۳(s) + ۶HCl(aq) \rightarrow ۲FeCl_۳(aq) + ۳H_۲O(l)$$

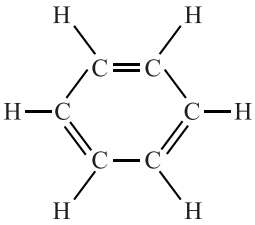
۱۵۱ گزینه ۲

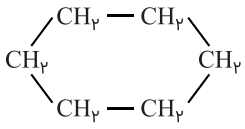
۱۵۲ گزینه ۱

گرافن تک‌لایه‌ای از گرافیت و شفاف و انعطاف‌پذیر است؛ رسانایی الکتریکی بالایی دارد و کربن‌ها با پیوندهای اشتراکی حلقه‌های شش‌گوشه‌ای تشکیل دادند و الگویی مانند کندوی زنبور عسل به وجود آورده‌اند و مقاومت کششی آن ۱۰۰ برابر فولاد بوده و ضخامت آن به‌اندازهٔ یک اتم C و گونهٔ شیمیایی دوبعدی است.

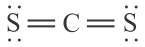
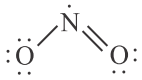
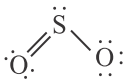
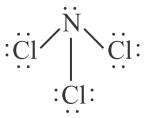
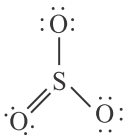
همان‌طور که می‌بینیم، طول پیوندهای کربن- کربن در گرافن (مرتبهٔ پیوند $\frac{۴}{۳}$) به بنزن (مرتبهٔ پیوند $\frac{۳}{۲}$) نزدیک‌تر است تا سیکلوهگزان (مرتبهٔ پیوند ۱)


گرافن

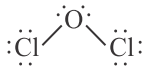

بنزن


سیکلوهگزان

۱۵۳ گزینه ۱

گزینه	نام مولکول	ساختار لوویس	شکل هندسی	شمار الکترون‌های ناپیوندی
۱	CS_2		خطی	۸
۱	N_2O		خطی	۸
۲	NO_2		خمیده	۱۱
۲	SO_2		خمیده	۱۲
۳	NCl_3		هرم با قاعدهٔ سه‌ضلعی	۲۰
۳	SO_3		سه‌ضلعی مسطح	۱۶
۴	$BeCl_2$		خطی	۱۲

www.alirezaafshar.org

		$:\ddot{Cl}-Be-\ddot{Cl}:$		
۱۶	خمیده		OCl_2	۴

همان‌طور که در جدول مشخص است دو مولکول گزینهٔ ۱ دارای شکل هندسی یکسان و شمار الکترون‌های ناپیوندی برابر می‌باشند.

۱۵۴ گزینه ۲

الماس، گرافیت و گرافن به دلیل پیوندهای اشتراکی میان میلیون‌ها اتم کربن جامد کووالانسی بوده و یخ به دلیل دارا بودن هم‌زمان پیوندهای اشتراکی و بین مولکولی (در اینجا از نوع هیدروژنی) که از ویژگی‌های یک ترکیب مولکولی است، جامد مولکولی محسوب می‌شود. در میان الماس، گرافیت و گرافن، تنها گرافن ساختاری دوبعدی داشته ولی چینش اتم‌ها در گرافیت و گرافن دوبعدی است. پیوندهای موجود در الماس و گرافن فقط از نوع اشتراکی (کووالانسی بوده) و در گرافیت به دلیل ساختار لایه‌لایه و منسجم آن هم پیوند اشتراکی (در لایه‌ها) و هم پیوند بین مولکولی واندروالسی (برای اتصال لایه‌ها به هم) وجود دارد. همهٔ این ترکیب‌ها ساختار مشبک شش‌ضلعی دارند.

۱۵۵ گزینه ۴

الف) نادرست. در شبکهٔ بلوری یخ‌مانند سیلیس، حلقه‌های شش‌ضلعی وجود دارد، اما یخ جامد مولکولی و سیلیس جامد کووالانسی است.

ب) درست. در ساختار آب هر اتم اکسیژن به دو اتم هیدروژن با پیوند اشتراکی و به دو اتم هیدروژن از مولکول‌های دیگر با پیوندهای هیدروژنی متصل است. هر هیدروژن آب نیز با پیوند هیدروژنی به مولکول آب دیگری متصل شده و جمعاً ۴ پیوند هیدروژنی تشکیل می‌دهد.

پ) نادرست. گرافیت جامد کووالانسی بوده و دمای ذوب بالایی دارد ولی در ساختار آن پیوندهای ضعیف واندروالسی در بین لایه‌های آن نیز وجود دارد.

ت) نادرست. آب یک ترکیب مولکولی است و رفتار شیمیایی آن به‌طور عمده به پیوندهای اشتراکی (جفت الکترون‌های پیوندی) و جفت الکترون‌های ناپیوندی موجود در مولکول وابسته است نه پیوندهای بین‌مولکولی (در اینجا هیدروژنی) آن.

۱۵۶ گزینه ۴

عبارت "الف" نادرست است؛ زیرا بین لایه‌های گرافیت نیروهای ضعیف واندروالسی وجود دارد.

ب) درست.

پ) درست.

ت) درست. آند و کاتد در سلول هال از جنس گرافیت هستند و می‌دانیم که گرافیت یک جامد کووالانسی محسوب می‌شود.

ث) درست. گرافن لایه‌ای از گرافیت است.

ج) درست. SiO_2 جامد کووالانسی محسوب می‌شود.

۱۵۷ گزینه ۱

بررسی عبارت‌ها:

- نادرست. سیلیسیم در طبیعت به‌طور خالص وجود نداشته و غالباً به‌صورت سیلیس یافت می‌شود.
- نادرست. عنصرهای اصلی سازندهٔ جامدهای کووالانسی کربن و سیلیسیم است. در ساختار سیلیس اکسیژن نیز وجود دارد.
- نادرست. گرافن ساختار دوبعدی دارد.
- نادرست. جامدهای کووالانسی نظیر گرافن رسانای بسیار خوب الکتریسیته است و گرافن نیز رسانایی کمی دارد.
- نادرست. تحرک الکترون‌ها به مفهوم رسانایی ماده است. به دلیل رسانایی خوب گرافن، الکترون‌ها در آن می‌توانند تحرک بیشتری داشته باشند. در گرافیت این تحرک کم و در الماس تقریباً صفر است.

۱۵۸ گزینه ۱

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست. در گروه ۱۴ سیلیسیم و ژرمانیم شبه‌فلز هستند.

ب) درست. کوارتز ماده‌ای خالص متشکل از سیلیس است.

پ) درست. سیلیسیم خالص در دمای اتاق همانند ید جامد است.

ت) نادرست. مطابق متن کتاب ترکیب‌های گوناگون از سیلیسیم و اکسیژن در پوستهٔ زمین بیش از ۹۰ درصد جرمی است.

ث) نادرست. از SiC در ساخت سنباده و از الماس در ساخت ابزار برش شیشه استفاده می‌شود.

ج) نادرست. سیلیسیم خالص در طبیعت یافت نمی‌شود ولی می‌توان آن را تهیه نمود.

۱۵۹ گزینه ۳

عنصرهای اصلی سازندهٔ جامدهای کووالانسی در طبیعت، کربن و سیلیسیم هستند.

۱۶۰ گزینه ۳

جمله‌های "ب"، "ج" و "هـ" درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) کاهش جرم به‌دلیل از دست رفتن آب در اثر گرمای داده‌شده است؛ چون خاک رس (I) آب بیشتری دارد، پس کاهش جرم بیشتری پیدا می‌کند.

ب) خاصیت بازی به‌دلیل وجود اکسیدهای فلزی گروه‌های اول و دوم است و چون درصد جرمی این نوع اکسیدها در خاک رس (II) بیشتر است، پس خاصیت بازی این نوع خاک رس هم زیادتر است.

ج) رنگ سرخ خاک رس به‌دلیل وجود Fe_2O_3 در آن است، پس خاک رس (II) رنگ سرخ‌تری دارد.

د)

$$\text{در خاک رس (I)}: \underset{(Al_2O_3)}{۳۶/۵} + \underset{(Fe_2O_3)}{۱} + \underset{(MgO)}{۰/۵} + \underset{(Na_2O)}{۱/۵} = ۳۹/۵$$

$$\text{در خاک رس (II)}: \underset{(Al_2O_3)}{۱۲} + \underset{(Fe_2O_3)}{۹} + \underset{(MgO)}{۸} + \underset{(Na_2O)}{۶} + \underset{(K_2O)}{۵} = ۴۰$$

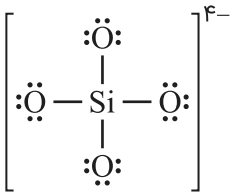
هـ) پس از کم کردن درصد جرمی آب $\frac{۳۶/۵}{۸۵/۵} \times ۱۰۰ = ۴۲/۶۹$ از دست داده‌شده خواهیم داشت:

$$۱۰۰ - ۱۴/۵ = ۸۵/۵$$

۱۶۱ گزینه ۱

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: کلسیم سیلیکات دارای فرمول شیمیایی Ca_2SiO_4 است و ساختار لوویس آنیون سیلیکات به‌صورت زیر است:



$$\frac{\text{شمار الکترون‌های ناپیوندی آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

گزینهٔ ۲: محلول نمک وانادیم با عدد اکسایش (III) یعنی $V^{3+}(aq)$ به رنگ سبز است.

$$_{23}V^{3+} : 1s^2\ 2s^2 2p^6\ 3s^2 3p^6 3d^2$$

الکترون‌های زیرلایهٔ $3d$ دارای $n + l = 5$ هستند که دو الکترون این ویژگی را دارند.

گزینهٔ ۳: نیتینول آلیاژی از تیتانیم ($_{22}Ti$) و نیکل ($_{28}Ni$) بوده که به آلیاژ هوشمند معروف است. این آلیاژ در ساخت فرآورده‌های صنعتی و پزشکی مانند استنت برای رگ‌ها به کار می‌رود.

۱۶۲ گزینه ۴

در یخ هر اتم اکسیژن به دو اتم هیدروژن با پیوند اشتراکی و به دو اتم هیدروژن از مولکول‌های دیگر با پیوندهای هیدروژنی متصل است. این در حالی است که در سیلیس همهٔ اتم‌ها با پیوندهای اشتراکی به یکدیگر متصل شده‌اند.

۱۶۳ گزینه ۱

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱:

$$\text{درصد جرمی N در } AlN = \frac{۱۴}{۲۷ + ۱۴} \times ۱۰۰ = \%۳۴/۱۴$$

$$\text{درصد جرمی N در } Al(NO_3)_3 = \frac{۱۴ \times ۳}{۲۷ + ۳ \times ۶۲} \times ۱۰۰ = \%۱۹/۷۱$$

بنابراین درصد جرمی نیتروژن در AlN کمتر از دو برابر این درصد در $Al(NO_3)_3$ است.

$$۱۹/۷۱ \times ۲ = \%۳۹/۴۲ > \%۳۴/۱۴$$

گزینهٔ ۲: هم شعاع آنیون و هم شعاع کاتیون KI در مقایسه با LiF بیشتر است و از آنجا که شعاع یونی با آنتالپی فروپاشی شبکه بلور رابطهٔ عکس دارد، پس آنتالپی فروپاشی شبکه بلور KI کمتر از LiF است.

گزینهٔ ۳: آرایش سه‌بعدی و منظم اتم‌ها، مولکول‌ها یا یون‌ها در یک بلور، شبکه بلور گفته می‌شود. البته در شبکه بلور یونی، آرایش سه‌بعدی منظم یون ها مورد نظر است.

گزینهٔ ۴:

$$\text{درصد جرمی Mg در } Mg(MnO_4)_2 = \frac{۲۴}{۲۴ + ۲(۶۴ + ۵۵)} \times ۱۰۰ = ۹/۱۶\%$$

بنابراین درصد جرمی منیزیم در منیزیم پرمنگنات بیش از ۹ درصد است.

۱۶۴ گزینه ۲

فقط برای $CaCl_2$، $NaOH$ و SiO_2 نمی‌توان واژهٔ فرمول مولکولی را به کار برد.

نکات آموزشی

- اغلب ترکیب‌های آلی جزء مواد مولکولی هستند.
- برای مواد مولکولی می‌توان فرمول مولکولی و نیروهای بین‌مولکولی را برای توصیف آن‌ها به کار برد.
- مواد مولکولی واحدهای سازنده و مجزایی به نام مولکول دارند.

۱۶۵ گزینه ۴

در ساخت مته‌ها و ابزار برش شیشه از الماس استفاده می‌شود. چگالی الماس و گرافیت به ترتیب ۳/۵۱ و ۲/۲۷ گرم بر سانتی‌مترمکعب گزارش شده است. گرافیت ساختاری دوبعدی و لایه‌ای دارد درحالی‌که الماس دارای ساختار سه‌بعدی است.