

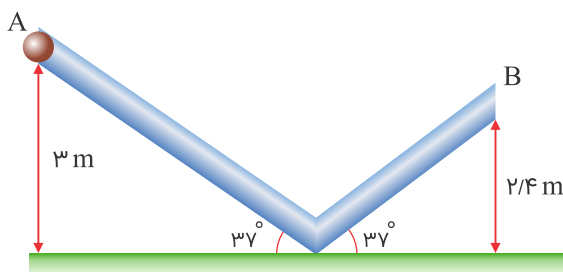


۱ متحرکی با سرعت  $v$  شروع به حرکت می‌کند. تغییرات انرژی جنبشی در لحظه‌ای که سرعت متحرک به  $\frac{v}{2}$  می‌رسد چند درصد انرژی جنبشی اولیه است؟

(۱) ۲۵٪ (۲) ۷۵٪ -

(۳) ۲۵٪ - (۴) ۷۵٪

۲ مطابق شکل جسمی به جرم ۶۰۰ گرم با تندی  $5 \text{ m/s}$  از نقطه  $A$  وارد مسیر شده و با تندی  $2 \text{ m/s}$  از نقطه  $B$  خارج می‌شود. نیروی اصطکاک در این مسیر چند نیوتن است؟  
( $\sin 37^\circ = \cos 53^\circ = 0/6$  و  $g = 10 \text{ N/kg}$ )



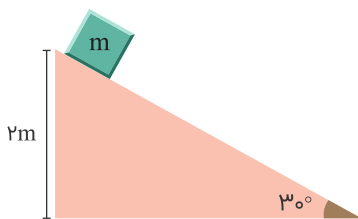
(۱) ۹/۹

(۲) ۱۱

(۳) ۱/۱

(۴) ۹۹

۳ در شکل زیر  $m = 3 \text{ kg}$  بدون سرعت اولیه از نقطه  $A$  رها می‌شود. اگر کار نیروی اصطکاک در مسیر سطح شیب‌دار برابر  $6 \text{ J}$  باشد، کار نیروی وزن تا رسیدن جسم به پایین سطح شیب‌دار چند ژول است؟



(۱) ۵۶

(۲)  $60\sqrt{3}$

(۳)  $56\sqrt{3}$

(۴) ۶۰

۴ اگر در یک ماشین، نسبت توان تلف‌شده به توان مفید،  $\frac{1}{3}$  باشد، بازده این ماشین چند درصد است؟ اگر توان ورودی این ماشین ۴۰۰ وات باشد، کار مفید آن در مدت‌زمان ۱۰۰ ثانیه چند کیلوژول خواهد بود؟

(۲)  $0/4 \text{ kJ} - 25\%$

(۱)  $0/4 \text{ kJ} - 75\%$

(۴)  $30 \text{ kJ} - 25\%$

(۳)  $30 \text{ kJ} - 75\%$

۵

دو متحرک A و B که از نظر جرم و شکل ساختاری، مشابه یکدیگر هستند و با سرعت‌های  $v_A$  و  $v_B$  در مسیر مستقیمی در حال حرکت هستند. اگر  $v_B = 3v$  و  $v_A = 2v$  باشد و این دو متحرک بر سر راه خود مانعی دیده و ترمز کنند تا سرعت حرکتشان به  $v$  برسد و در این فاصله هر کدام به ترتیب جابه‌جایی  $d_B$  و  $d_A$  را داشته باشند، مقدار  $\frac{d_B}{d_A}$  کدام است؟ (نیروی ترمز برای هر دو خودرو یکسان است)

$$\frac{9}{4} \quad (2)$$

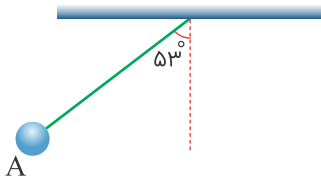
$$\frac{4}{9} \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (1)$$

$$\frac{8}{3} \quad (3)$$

۶

مطابق شکل گلوله آونگی با نخ به طول  $1/2$  متر از نقطه A رها می‌شود. تندی جسم پس از طی مسافت  $1/8$  متری به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟ ( $g \simeq 10 \text{ N/kg}$  و  $\sin 37^\circ = \cos 53^\circ = 0/6$  و  $\pi = 3$ ، از مقاومت هوا صرف‌نظر شود)



$$0/4\sqrt{30} \quad (1)$$

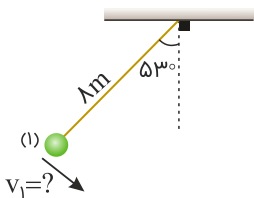
$$1/8 \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$0/4\sqrt{26} \quad (4)$$

۷

مطابق شکل آونگی به طول ۸ متر را که به سقف متصل است با چه تندی از نقطه ۱ روبه‌پایین پرتاب کنیم تا حداکثر انرژی جنبشی آن در مسیر حرکت، ۵ برابر انرژی جنبشی آن در نقطه پرتاب (نقطه ۱) باشد؟ ( $\cos 53^\circ = 0/6$  و  $\sin 53^\circ = 0/8$ ,  $g = 10 \text{ N/kg}$ ) (از اصطکاک و نیروی مقاومت هوا صرف‌نظر شود)



$$4 \quad (1)$$

$$8 \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$8\sqrt{2} \quad (4)$$

۸

قایق بادبانی مخصوص حرکت روی سطوح یخ زده، روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد. اگر نیروی ثابت  $F$  با وزیدن باد به آن وارد شده و قایق از حال سکون شروع به حرکت کند، پس از طی مسافت  $d$  تندی آن به  $v$  می‌رسد. اگر قایق ۲۰ درصد از جرم خود را کم کرده و با افزایش سطح بادبان‌ها نیروی وزش باد را به  $2F$  رسانده و از حال سکون مجدداً شروع به حرکت کند، پس از طی مسافت  $2d$  به چه تندی خواهد رسید؟ (نیروی باد هم‌راستا با جهت حرکت به قایق‌ها وارد می‌شود)

$$2v \quad (2)$$

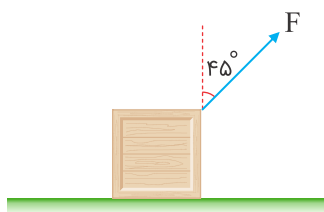
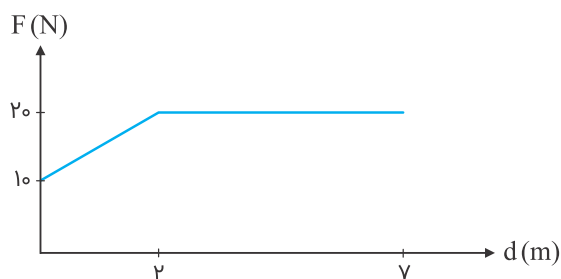
$$4v \quad (4)$$

$$\sqrt{2}v \quad (1)$$

$$\sqrt{5}v \quad (3)$$



نمودار نیرو بر حسب جابه‌جایی یک جسم دو کیلوگرمی مطابق شکل زیر است. اگر نیروی اصطکاک بین جسم با سطح در طول مسیر ثابت و برابر با  $1/5 \text{ N}$  باشد، کار نیروی کل در انتهای مسیر چند ژول است؟  
 $(\sqrt{2} = 1/4 \text{ و } \sqrt{3} = 1/7)$



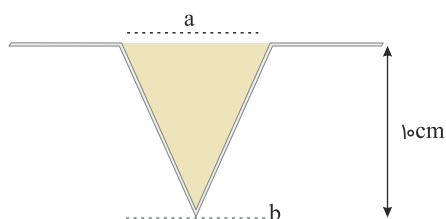
(۱)  $80/5$

(۲)  $119/5$

(۳)  $120/5$

(۴)  $81/5$

مطابق شکل مقداری مایع از درون مخزنی در حال خروج است. اگر تندی حرکت مایع در قسمت (a) برابر با  $F \text{ m/s}$  و سطح مقطع ظرف در این قسمت برابر با  $3 \text{ cm}^2$  باشد، سطح مقطع آب در قسمت (b) چند مترمربع است؟ (تلفات انرژی هنگام حرکت مایع ناچیز است)



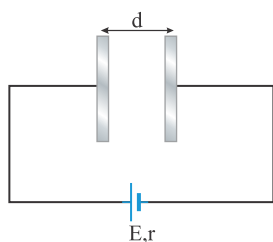
(۱)  $2\sqrt{2} \times 10^{-3}$

(۲)  $2 \times 10^{-2}$

(۳)  $2 \times 10^{-4}$

(۴)  $4 \times 10^{-2}$

در مدار رسم شده بین صفحات خازن ابتدا هواست و مساحت مشترک بین دو صفحه  $A$  و فاصله آن‌ها  $d$  است. در همین حالت که به مولد وصل است یک دی‌الکتریک با ثابت  $K$  که کاملاً عایق نیست و دارای مقاومت ویژه بسیار زیاد  $\rho$  است وارد می‌کنیم، در این حالت بار ذخیره شده روی خازن چند برابر حالت قبل می‌شود؟



(۱)  $K$

(۲) صفر

(۳)  $\frac{Kpd}{pd + Ar}$

(۴)  $\frac{2Kpd}{\rho d + 2Ar}$

اگر بار هر الکترون  $1.6 \times 10^{-19}$  کولن باشد، از سیمی که جریان آن  $2$  آمپر است در هر ثانیه چند الکترون عبور می‌کند؟

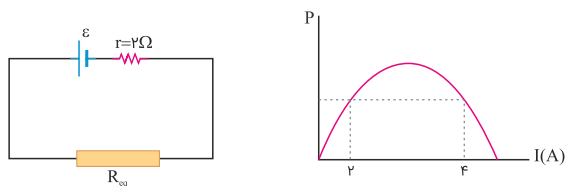
(۲)  $1/93 \times 10^{20}$

(۱)  $1/94 \times 10^5$

(۴)  $1/25 \times 10^{19}$

(۳)  $3/2 \times 10^{19}$

شکل زیر مربوط به مدار یک گرمکن الکتریکی است. اگر نمودار توان مفید برحسب جریان این مولد مطابق شکل رسم شده باشد، در مدت ۷۰ ثانیه بیشترین مقدار جرم آبی که توسط این گرمکن  $10^{\circ}\text{C}$  افزایش دما پیدا می‌کند چند گرم است؟ (  $C = 4200 \text{ J/kgK}$  و تلفات انرژی ناچیز است)



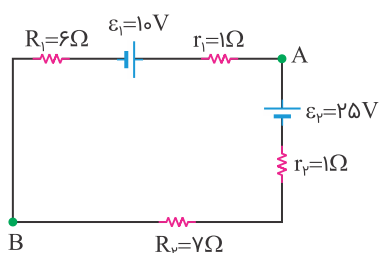
(۱) ۴۰

(۲) ۲۰

(۳) ۹۰

(۴) ۳۰

در مدار شکل زیر، اختلاف پتانسیل بین A و B (  $V_A - V_B$  ) چند ولت است؟



(۱) ۱۷

(۲) ۳

(۳) ۵

(۴) -۳

مفهوم اینکه ضریب دمایی فلزی  $0.007 \text{ K}^{-1}$  است، در کدام گزینه درست بیان شده است؟

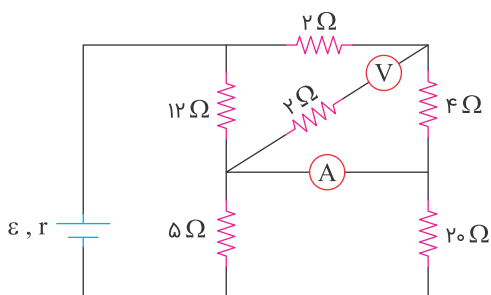
(۱) اگر دمای این فلز را  $0.007 \text{ K}$  افزایش دهیم، مقاومت آن  $1 \Omega$  زیاد می‌شود.

(۲) اگر دمای این فلز را  $1 \text{ K}$  افزایش دهیم، مقاومت آن  $0.007 \Omega$  افزایش می‌یابد.

(۳) اگر دمای قطعه‌ای از این فلز  $1 \text{ K}$  افزایش یابد،  $0.007$  مقاومت اولیه به مقاومت اولیه‌اش افزوده می‌شود.

(۴) اگر دمای قطعه‌ای از این فلز به مقاومت  $1 \Omega$ ،  $0.007^{\circ}\text{C}$  افزایش یابد، به مقاومت آن  $1 \Omega$  افزوده می‌شود.

در مدار شکل زیر، ولت‌سنج عدد ۸ ولت را نشان می‌دهد. آمپرسنج چند آمپر را نمایش می‌دهد؟ (آمپرسنج و ولت‌سنج هر دو ایده‌آل هستند)



(۱) صفر

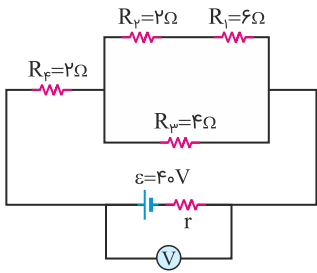
(۲) ۱/۵

(۳) ۱/۴

(۴) ۳/۴



۱۷ در مدار شکل زیر اگر توان مصرفی مقاومت  $R_1$  برابر با  $24\text{ W}$  باشد، عدد ولت‌سنج برحسب ولت کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۲۰

(۳) ۲۸

(۴) ۳۶

۱۸ آمپر-ساعت نوعی از باتری‌های قلمی  $800\text{ mAh}$  است. اگر این باتری جریان ثابت  $40\text{ }\mu\text{A}$  را فراهم سازد، چند دقیقه طول می‌کشد تا به‌طور کامل تخلیه شود؟

(۲)  $1/2 \times 10^5$ (۱)  $1/2 \times 10^6$ (۴)  $2 \times 10^3$ (۳)  $2 \times 10^4$ 

۱۹ کاربرد کدامیک از قطعه‌های الکترونیکی زیر به‌عنوان قطعه اصلی درست نوشته شده است؟

(الف) ترمیستور مورد استفاده در زنگ خطر آتش

(ب) دیود نورگسیل مورد استفاده در تابلوهای تبلیغاتی

(پ) LDR مورد استفاده در دمایا

(ت) LED مورد استفاده در چشم‌های الکترونیکی

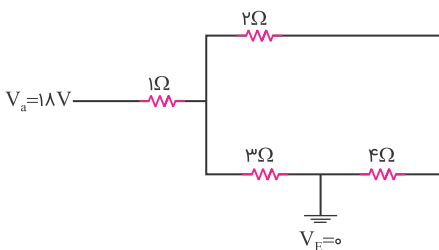
(۲) پ و ب

(۱) پ و ت

(۴) الف و ت

(۳) الف و ب

۲۰ در مدار شکل زیر، شدت جریان عبوری از مقاومت  $4\text{ }\Omega$  اهمی چند آمپر است؟



(۱) ۰/۵

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

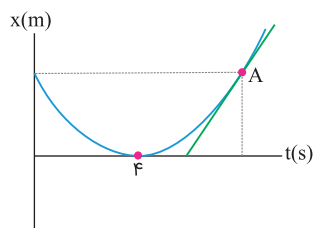
۲۱ گلوله‌ای را در شرایط خلأ از ارتفاع  $H$  رها می‌کنیم. دو ثانیه بعد، گلوله دیگری را از ارتفاع  $H/2$  رها می‌کنیم، سرعت گلوله دوم در لحظه رسیدن به زمین چند برابر سرعت گلوله اول است؟

(۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)  $\sqrt{2}$ 

(۴) ۴

(۳) ۲

نمودار مکان- زمان متحرکی که بر خط راست با شتاب ثابت حرکت می‌کند مطابق شکل زیر است. شیب خطی که در نقطه A بر سهمی مماس است در SI، برابر با ۱۰ است. سرعت متحرک در لحظه  $t = 6$  s چند متر بر ثانیه است؟



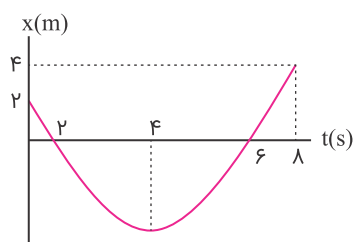
(۱) ۱۰

(۲) ۸

(۳) ۶

(۴) ۵

نمودار مکان- زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند به صورت شکل زیر است، اگر تندی متوسط در بازه زمانی  $(0, 8$  s) به اندازه  $0/25$  m/s بیشتر از اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی  $(4$  s,  $6$  s) باشد، بردار مکان متحرک در SI در لحظه تغییر جهت کدام است؟

(۱)  $-4\vec{i}$ (۲)  $-2\vec{i}$ (۳)  $-6\vec{i}$ (۴)  $-8\vec{i}$ 

گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع  $h$  رها می‌شود و پس از  $t$  ثانیه به زمین می‌رسد. اگر تندی متوسط آن در نیم ثانیه آخر سقوطش  $37/5$  m/s باشد  $t$  چند ثانیه است؟ ( $g = 10$  m/s<sup>2</sup>)

(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۴/۵

(۳) ۳/۵

گلوله A در شرایط خلأ از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌شود. ۲ ثانیه بعد گلوله B در شرایط خلأ و از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین رها می‌شود. کدام گزینه در مورد گلوله‌ها درست است؟ ( $g = 10$  N/kg)

(۱) گلوله‌ها در ارتفاع ۵ متری سطح زمین به هم می‌رسند.

(۲) گلوله A یک ثانیه زودتر از گلوله B به زمین می‌رسد.

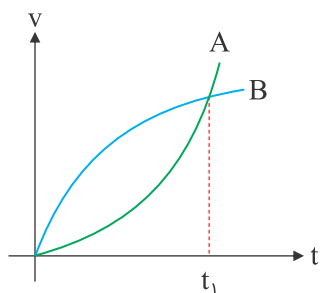
(۳) گلوله‌ها همزمان به زمین می‌رسند.

(۴) سرعت برخورد گلوله A با زمین، ۳ برابر سرعت برخورد گلوله B با زمین است.



نمودار سرعت- زمان دو متحرک A و B در یک دستگاه مطابق شکل زیر رسم شده‌اند. کدام گزینه‌ها به ترتیب عبارات زیر را کامل می‌کنند؟

- در بازه زمانی ۰ تا  $t_1$  اندازهٔ سرعت متوسط متحرک A ..... متحرک B است.
- در بازهٔ زمانی ۰ تا  $t_1$  اندازهٔ شتاب متوسط متحرک A ..... متحرک B است.
- در بازهٔ زمانی ۰ تا  $\frac{t_1}{2}$  اندازهٔ شتاب متوسط متحرک A ..... متحرک B است.

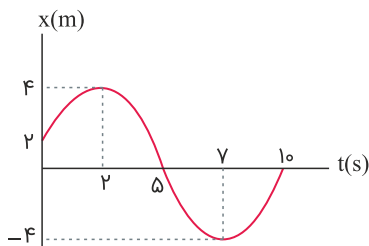


- (۱) کمتر از - کمتر از - کمتر از
- (۲) بیشتر از - برابر با - برابر با
- (۳) کمتر از - برابر با - کمتر از
- (۴) برابر با - برابر با - بیشتر از

معادلهٔ سرعت- زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به صورت  $v = -2t + 4$  است. در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، تندی متحرک برابر  $2 \text{ m/s}$  و جهت حرکت متحرک خلاف جهت محور حرکت است؟

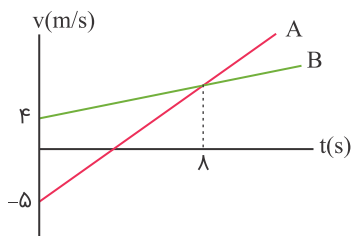
- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) صفر

نمودار مکان- زمان متحرکی که روی محور xها حرکت می‌کند مطابق شکل است. تندی متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ نخست چند متر بر ثانیه بیشتر از اندازهٔ سرعت متوسط آن در همین بازهٔ زمانی است؟



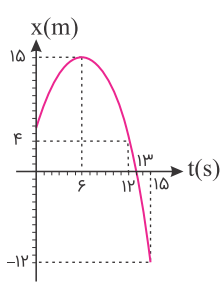
- (۱)  $1/2$
- (۲)  $1/6$
- (۳) ۱
- (۴)  $0/8$

نمودار سرعت- زمان دو متحرک A و B مطابق شکل زیر است، اگر شتاب متحرک B برابر  $2 \text{ m/s}^2$  باشد، تا برابر شدن سرعت دو متحرک (لحظهٔ  $t = 8 \text{ s}$ )، چند ثانیه متحرک A در جهت محور xها در حرکت بوده است؟



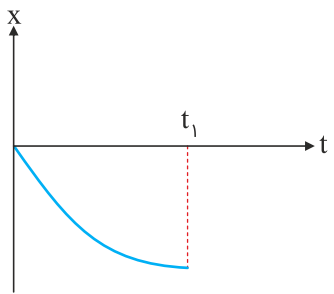
- (۱)  $6/4$
- (۲)  $7/2$
- (۳)  $5/6$
- (۴)  $4/8$

نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور X حرکت می‌کند، در بازه زمانی (۰, ۱۵ s) مطابق شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در مدت زمانی که متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟



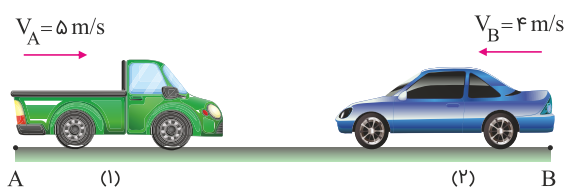
- (۱) ۳
- (۲) -۳
- (۳) -۶
- (۴) ۶

نمودار مکان- زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند به صورت سهمی شکل زیر است. اندازه سرعت لحظه‌ای در زمان‌های مختلف بین ۰ تا  $t_1$  در مقایسه با اندازه سرعت متوسط این متحرک بین دو لحظه ۰ و  $t_1$  ..... است.



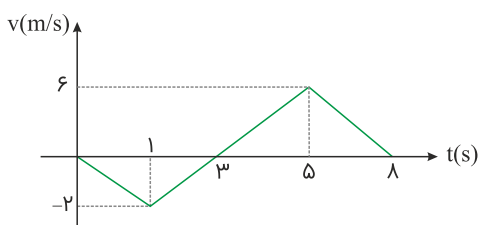
- (۱) همواره بیشتر
- (۲) همواره کمتر
- (۳) ابتدا بیشتر و سپس کمتر
- (۴) ابتدا کمتر و سپس بیشتر

دو اتومبیل A و B مطابق شکل زیر از دو نقطه (۱) و (۲) به سمت یکدیگر با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. اگر اختلاف زمان رسیدن دو اتومبیل به انتهای دیگر مسیر  $\Delta t$  باشد، اختلاف مسافت طی شده توسط دو اتومبیل از لحظه شروع تا لحظه‌ای که به هم می‌رسند، کدام است؟



- (۱)  $\Delta t$
- (۲)  $9\Delta t$
- (۳)  $\frac{20}{9}\Delta t$
- (۴)  $\frac{9}{20}\Delta t$

نمودار سرعت- زمان متحرکی که روی محور X حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اندازه شتاب متوسط متحرک در فاصله زمانی که متحرک به صورت کندشونده در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند چند متر بر مجذور ثانیه است؟



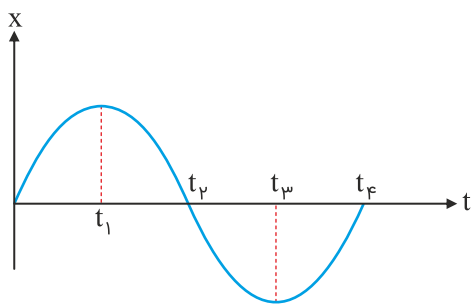
- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴





۳۴

نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در چه بازه زمانی اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط متحرک یکسان نیست؟



(۱)  $t_1 - t_3$

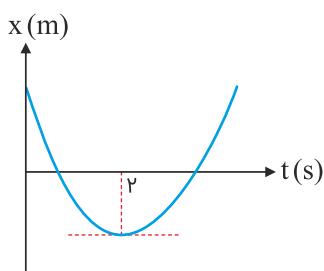
(۲)  $t_2 - t_4$

(۳)  $t_2 - t_3$

(۴)  $t_1 - t_2$

۳۵

نمودار مکان- زمان متحرکی با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی  $t_1 = 1s$  تا  $t_2 = 6s$  برابر  $3 m/s$  باشد، مسافتی که متحرک در بازه زمانی  $t_1 = 0$  تا  $t_2 = 3s$  طی می‌کند چند متر است؟



(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۱۳

(۴) ۴

۳۶

دو متحرک A و B از نقطه‌ای بدون سرعت اولیه بر مسیر مستقیم شروع به حرکت کرده و جابه‌جایی‌های مساوی را می‌پیمایند. اگر اندازه شتاب A،  $3$  برابر اندازه شتاب B باشد، سرعت متوسط متحرک A چندبرابر سرعت متوسط متحرک B است؟

(۱) ۳

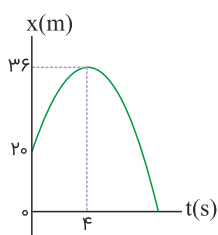
(۲)  $\frac{1}{3}$

(۳)  $\sqrt{3}$

(۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳۷

نمودار مکان- زمان متحرکی به صورت سهمی شکل زیر است. از لحظه شروع تا لحظه‌ای که سرعت متوسط متحرک صفر می‌شود، تندی متوسط و شتاب متوسط در این مدت به ترتیب در SI کدام است؟



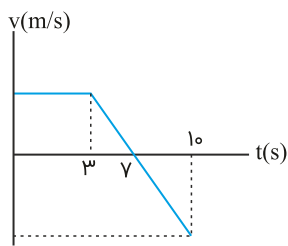
(۱) ۸ و -۱

(۲) ۴ و -۲

(۳) ۸ و -۲

(۴) ۴ و -۱

نمودار سرعت- زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند مطابق شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکت  $7/75 \text{ m/s}$  باشد، تندی متوسط آن در ۱۰ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟



(۱)  $10/25$

(۲)  $11/75$

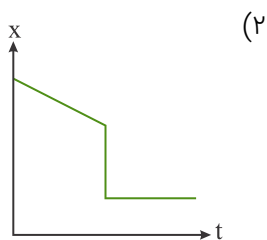
(۳)  $12/25$

(۴)  $13/75$

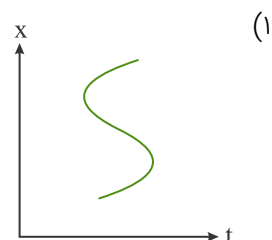
بردار شتاب متوسط در یک بازه زمانی هم‌جهت با بردار ..... است.

- (۱) سرعت  
(۲) تغییرات سرعت  
(۳) جابه‌جایی  
(۴) مکان

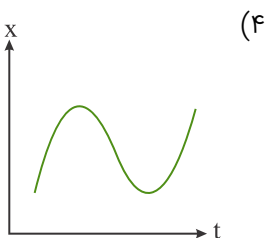
کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند نشان‌دهنده نمودار مکان- زمان یک متحرک باشد؟



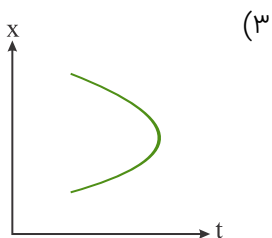
(۲)



(۱)

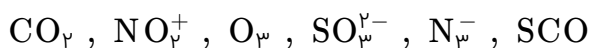


(۴)



(۳)

چند مورد از مطالب، در مورد گونه‌های زیر صدق می‌کنند. (اعداد را از راست به چپ به ترتیب برای الف، ب، پ و ت بخوانید)



الف) ..... گونه ساختار لوویس کاملاً مشابه دارند.

ب) در ساختار لوویس ..... گونه ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

پ) در ساختار لوویس ..... گونه ۴ جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

ت) ساختار لوویس ..... گونه از قاعده هشتایی پیروی نمی‌کند.

(۲) ۱، ۴، ۴، ۲

(۱) ۰، ۴، ۳، ۳

(۴) ۰، ۵، ۴، ۲

(۳) ۰، ۴، ۴، ۳



کدام یک از عبارتهای زیر درست هستند؟  
 الف) نقطه جوش گاز اکسیژن از گاز آرگون بیشتر است.  
 ب) هر اکسید نافلز، اکسید اسیدی است.  
 پ) با افزایش میزان  $\text{CO}_2$  موجود در هوا دمای کره زمین همانند سطح آب دریاها افزایش می‌یابد.  
 ت) بخش قابل توجهی از پرتوهای فرسرخ منتشرشده از زمین وارد فضا می‌شوند.

۱) الف - ب - پ  
 ۲) ب - پ - ت

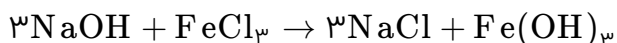
۳) الف - پ - ت  
 ۴) الف - ب - ت

شمار جفت‌الکترون پیوندی چه تعداد از ترکیبات زیر برابر شمار جفت‌الکترون پیوندی کربن دی‌اکسید است؟  
 ( $\text{C}_6$ ,  $\text{O}_8$ ,  $\text{F}_9$ ,  $\text{S}_{16}$ ,  $\text{Cl}_{17}$ )  
 - گوگرد دی‌اکسید - کربن تتراکلرید - گوگرد تری‌اکسید - اکسیژن دی‌فلوئورید

۱) صفر  
 ۲) ۱

۳) ۲  
 ۴) ۴

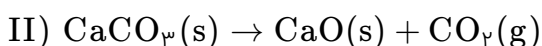
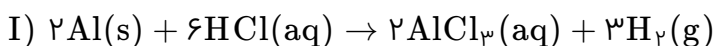
۱۰ گرم محلول سدیم هیدروکسید با غلظت  $120 \text{ ppm}$  با چند مول آهن (III) کلرید مطابق معادله زیر واکنش می‌دهد؟



۱)  $1 \times 10^{-3}$   
 ۲)  $4 \times 10^{-3}$

۳)  $1 \times 10^{-5}$   
 ۴)  $2 \times 10^{-5}$

اگر ۲۵۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار  $\text{HCl}$  با مقدار کافی  $\text{Al}$  در واکنش (I)، با بازده ۸۰٪ شرکت کند و بازده واکنش (II)، ۴۰٪ باشد و در آن ۴۰۰ گرم  $\text{CaCO}_3$  تجزیه شود در مجموع ظرف (I) و (II)، چند لیتر گاز در شرایط STP وجود خواهد داشت؟ ( $\text{Ca} = 40$ ,  $\text{O} = 16$ ,  $\text{C} = 12$ ;  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )



۱) ۸۹/۸۲۴  
 ۲) ۳۶/۱۲

۳) ۳۶/۰۶۴  
 ۴) ۴۴/۹۱۲

کدام مورد از مطالب زیر نادرست است؟ ( $\text{N} = 14$ ,  $\text{C} = 12$ ,  $\text{O} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

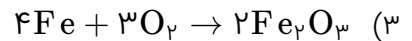
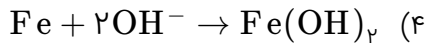
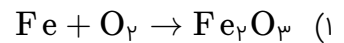
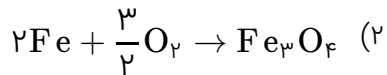
۱) یکی از راه‌حل‌های پیشنهادی برای محافظت از هواکره، دفن کردن کربن دی‌اکسید در زیر زمین، مانند میدان‌های قدیمی گاز است.

۲) اوزون دارای مولکول‌های قطبی است و اوزون تروپوسفری از واکنش نیتروژن دی‌اکسید با اکسیژن هوا به وجود می‌آید.

۳) برای جدا کردن آمونیاک از مخلوط آن با نیتروژن و هیدروژن، می‌توان دمای مخلوط را تا  $-40^\circ\text{C}$  کاهش داد.

۴) در دما و فشار یکسان، حجم ۱۴ گرم گاز نیتروژن با ۴۴ گرم گاز کربن دی‌اکسید برابر است.

۴۷ کدام معادله واکنش اکسایش آهن را بهتر نشان می‌دهد؟



۴۸ ۱۴۰ گرم از آلکینی گازی شکل به چگالی ۲/۵ گرم بر لیتر را وارد مخلوطی حاوی مقدار کافی آب و اسید می‌کنیم تا تحت شرایط مناسب، ۱/۸ مول الکل تولید شود. اگر چگالی گاز موردنظر در شرایط STP محاسبه شده باشد، بازده درصدی واکنش تولید الکل چقدر است؟

(۲) ۴۸

(۱) ۷۲

(۴) ۵۸

(۳) ۳۶

۴۹ عبارت‌های زیر در مورد فرآیند سوختن است. چند عبارت درست در بین آن‌ها وجود دارد؟

- گاز کربن مونوکسید که چگالی کمتری از هوا دارد، فرآورده سوختن ناقص هیدروکربن‌ها است.

- در صورت کافی بودن اکسیژن، گوگرد به هنگام سوختن شعله آبی‌رنگی تولید می‌کند.

- به علت ناپایدار بودن CO، در شرایط مناسب سوختن زیر رخ می‌دهد:  $2\text{CO}(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{CO}_2(\text{g})$

- سوختن الزاماً می‌بایست سریع باشد و در اثر سوختن زغال‌سنگ  $\text{SO}_2$  تولید می‌شود.

(۲) ۳ مورد

(۱) ۴ مورد

(۴) ۲ مورد

(۳) صفر مورد

۵۰ کدام یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟ ( $\text{Cl} = 35/5$ ,  $\text{O} = 16$ :  $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ )

الف) در شرایط STP، با افزایش شمار مول‌های هر گاز، حجم آن افزایش می‌یابد.

ب) در دما و فشار یکسان، شمار اتم‌های ۵/۰ مول گاز کلر از ۵/۰ مول گاز اکسیژن بیشتر است.

پ) قرار دادن بادکنک‌های پرشده از هوا، درون نیتروژن مایع سبب افزایش حجم آن‌ها می‌شود.

ت) گازها برخلاف مایعات و جامدات تراکم‌پذیرند.

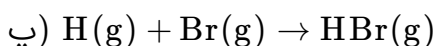
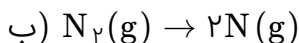
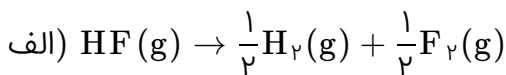
(۲) ب - ت

(۱) الف - ب

(۴) ب - پ

(۳) پ - ت

۵۱ گرمای مبادله‌شده در چه تعداد از واکنش‌های زیر برابر با آنتالپی پیوند است؟



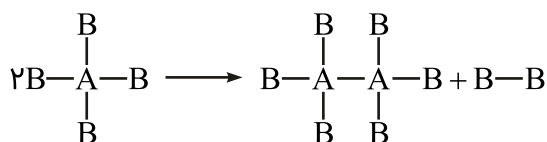
(۲) ۲

(۱) ۳

(۴) ۴

(۳) ۱

اگر آنتالپی پیوند  $A - A$ ، دو برابر آنتالپی پیوند  $B - B$  باشد و آنتالپی واکنش  $A - A + B - B \rightarrow 2A - B$  برابر  $\Delta H$  پیوند  $B - B$  باشد، آنتالپی واکنش زیر کدام خواهد بود؟



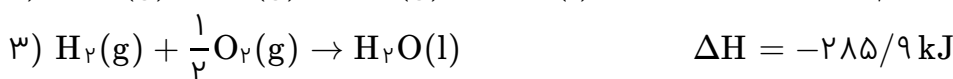
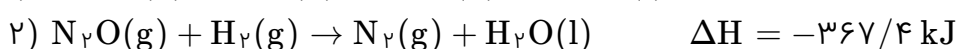
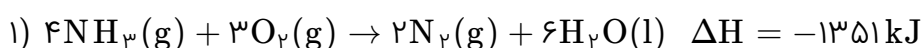
$$\Delta H_{\text{پیوند } B-B} \quad (1)$$

$$-2\Delta H_{\text{پیوند } B-B} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2}\Delta H_{\text{پیوند } B-B} \quad (3)$$

$$-\Delta H_{\text{پیوند } B-B} \quad (4)$$

باتوجه به واکنش‌های زیر، از واکنش ۲۵/۵ گرم آمونیاک با مقدار کافی  $N_2O$  مطابق واکنش  $2NH_3(g) + 3N_2O(g) \rightarrow 4N_2(g) + 3H_2O(l)$  چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟ ( $N = 14$ ,  $H = 1$ :  $g \cdot mol^{-1}$ )



$$(1) \quad -1380 \quad (2) \quad -920$$

$$(3) \quad -690 \quad (4) \quad -860$$

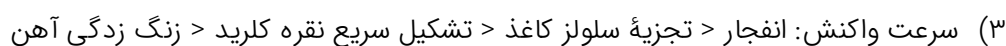
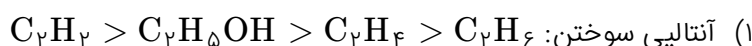
اگر به گاز حاصل از تجزیه کامل ۲۰۰ گرم کلسیم کربنات با خلوص ۹۰ درصد، ۱۳۹۴ ژول گرما دهیم دمای آن از  $23^\circ C$  به  $45^\circ C$  می‌رسد، ظرفیت گرمایی ویژه گاز کربن دی‌اکسید چند  $J \cdot g^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$  است؟ ( $C = 12$ ,  $Ca = 40$ ,  $O = 16$ :  $g \cdot mol^{-1}$ )

(g) گاز کربن دی‌اکسید + (s) کلسیم اکسید  $\rightarrow$  (s) کلسیم کربنات

$$(1) \quad 0/7 \quad (2) \quad 0/75$$

$$(3) \quad 0/8 \quad (4) \quad 0/85$$

کدام مقایسه به درستی صورت گرفته است؟ ( $H = 1$ ,  $C = 12$ :  $g \cdot mol^{-1}$ )



- (۱) گرما میزان سردی و گرمی مواد را نشان می‌دهد.
- (۲) ذرات سازنده مواد تنها در حالت فیزیکی مایع و گاز دارای جنب‌وجوش هستند.
- (۳) بوی غذای گرم آسان‌تر و سریع‌تر از غذای سرد به مشام می‌رسد.
- (۴) گرما میانگین انرژی جنبشی مواد سازنده ماده است.

مقایسه گرمای حاصل از سوختن یک مول اتان، اتن، اتین و اتانول در کدام گزینه به‌درستی آمده است؟

- (۱) اتان < اتین < اتانول < اتن
- (۲) اتانول < اتین < اتن < اتان
- (۳) اتان < اتن < اتانول < اتین
- (۴) اتین < اتن < اتان < اتانول

اگر ۷/۰ گرم پتاسیم هیدروکسید با درصد خلوص ۸۰ را در ۱۰۰ میلی‌لیتر آب  $25^{\circ}\text{C}$  حل کنیم، دمای محلول به  $27^{\circ}\text{C}$  می‌رسد. در این صورت انحلال پتاسیم هیدروکسید در آب ..... بوده و باتوجه به رابطه  $\text{pH} = 14 + \log[\text{OH}^-]$ ، این محلول ..... است. (از تغییر حجم محلول صرف‌نظر کنید و غلظت مولی  $[\text{OH}^-] = \text{OH}^-$ )  
( $\text{K} = 39$  ,  $\text{O} = 16$  ,  $\text{H} = 1$  :  $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ )

- (۱) گرماگیر، ۱۳
- (۲) گرماده، ۱۲
- (۳) گرماگیر، ۱۲
- (۴) گرماده، ۱۳

کدام مقایسه در مورد اندازه آنتالپی سوختن دو ماده داده‌شده درست است؟

- (۱) اتانول < اتان
- (۲) پروپان > پروپین
- (۳) بنزوئیک اسید > پروپن
- (۴)  $\text{C}_9\text{H}_8\text{O}_4$  آسپرین < گلوکز

کدام یک از عبارتهای زیر درست است؟ ( $\text{H} = 1$  ,  $\text{O} = 16$  :  $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ )

- (۱) گرماسنج لیوانی برای اندازه‌گیری گرمای واکنش در حجم ثابت به کار می‌رود که هم‌ارز با آنتالپی واکنش است.
- (۲) سوختگی حاصل از ریختن ۱۰۰ گرم آب  $100^{\circ}\text{C}$  روی پوست، با سوختگی حاصل از ۱۰۰ گرم روغن زیتون با دمای  $100^{\circ}\text{C}$  یکسان است.
- (۳) اگر ظرفیت گرمایی ویژه آب  $4/184 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  باشد، برای افزایش دمای ۲ مول آب به‌اندازه  $2^{\circ}\text{C}$  به ۷۲ کالری گرما نیاز است.
- (۴) گرما را می‌توان هم‌ارز انرژی گرمایی دانست که به علت تفاوت در انرژی گرمایی جاری می‌شود.

مقایسه pH محلول ۰/۱ مولار اسیدها در کدام گزینه به‌درستی انجام شده است؟

- (۱)  $\text{HCl} > \text{HBr} > \text{HI}$
- (۲)  $\text{HNO}_2 > \text{HF} > \text{HNO}_3$
- (۳)  $\text{HCOOH} > \text{CH}_3\text{COOH} > \text{H}_2\text{CO}_3$
- (۴)  $\text{CH}_3\text{COOH} > \text{HCOOH} > \text{HCN}$



کدام داروی ضداسید در شرایط یکسان داروی مؤثرتری برای کاهش خاصیت اسیدی شیرۀ معده است؟

۶۲

(۱) ماده مؤثر دارای یک میلی‌مول منیزیم هیدروکسید و یک میلی‌مول آلومینیم هیدروکسید

(۲) ماده مؤثر دارای یک میلی‌مول منیزیم هیدروکسید و دو میلی‌مول جوش شیرین

(۳) ماده مؤثر دارای دو میلی‌مول آلومینیم هیدروکسید

(۴) ماده مؤثر دارای دو میلی‌مول جوش شیرین

مولکول‌های اسید چرب ..... بوده و بخش قطبی در ساختار آن‌ها ..... است. این مولکول‌ها در ..... حل می‌شوند.

۶۳

(۲) ناقطبی - OH - هگزان

(۱) قطبی -  $\text{C}=\text{O}$  - OH - آب

(۴) ناقطبی -  $\text{C}=\text{O}$  - OH - هگزان

(۳) قطبی - O -  $\text{C}=\text{O}$  - آب

باتوجه به شکل زیر چند مورد از موارد زیر صحیح است؟

۶۴

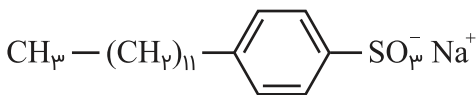
(الف) بخش قطبی آنیون آن سولفات نام دارد.

(ب) نوعی نمک محسوب می‌شود.

(پ) در آب‌های سخت قدرت پاک‌کنندگی خود را از دست می‌دهد.

(ت) نوعی ترکیب آروماتیک محسوب می‌شود.

(ث) شکل، نمایانگر ساختار لوویس یک پاک‌کننده غیرصابونی است.



(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۱

۴۰۰ میلی‌لیتر محلول ۳ درصد جرمی هیدروفلوئوریک اسید در اختیار داریم. اگر ثابت یونش در این دما برابر  $6 \times 10^{-4}$  مول بر لیتر باشد، تعداد مول‌های هیدرونیوم و pH محلول به تقریب کدام است؟ (چگالی محلول را  $1 \text{ g.mL}^{-1}$  در نظر بگیرید،  $\log 3 = 0.48$  و  $F = 19$  ,  $H = 1 : \text{g.mol}^{-1}$ )

۶۵

(۲)  $1/92$  ,  $1/2 \times 10^{-2}$

(۱)  $1/92$  ,  $3 \times 10^{-2}$

(۴)  $1/52$  ,  $1/2 \times 10^{-2}$

(۳)  $1/52$  ,  $3 \times 10^{-2}$

۴۰ میلی‌لیتر از محلول اسید ضعیف HX با درجه یونش ۰/۰۵ و  $\text{pH} = 3$ ، چند لیتر محلول سدیم هیدروکسید ۰/۱ مولار را می‌تواند خنثی کند؟

۶۶

(۲) ۰/۰۴

(۱) ۰/۸

(۴) ۰/۰۰۸

(۳) ۰/۰۱۶

چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟

۶۷

- سوانت آرنیوس نخستین کسی است که اسیدها و بازها را توصیف کرد.
- آرنیوس نشان داد که اسیدها به حالت مایع رسانای جریان الکتریکی هستند.
- شیمی‌دان‌ها پیش از آنکه ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، با برخی واکنش‌های آن‌ها آشنا بودند.
- زندگی همهٔ آبزیان به میزان pH آب وابسته است.

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

در اثر سوختن کامل ۶۲/۴ گرم از یک اسید چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، ۸۹/۶ لیتر گاز کربن دی‌اکسید در شرایط STP تولید شده است. فرمول شیمیایی این اسید چرب کدام است؟ ( $C = ۱۲$  ,  $H = ۱$  ,  $O = ۱۶$  :  $g \cdot mol^{-1}$ )

۶۸

- (۱)  $C_{۱۹}H_{۳۹}COOH$   
(۲)  $C_{۱۷}H_{۳۵}COOH$   
(۳)  $C_{۲۰}H_{۴۱}COOH$   
(۴)  $C_{۱۹}H_{۳۸}O_۳$

کدام یک از عبارتهای زیر در رابطه با نظریهٔ آرنیوس درست است؟

۶۹

- (۱) واکنش  $HCl(g) + NH_3(g) \rightarrow NH_4Cl(g)$  از دیدگاه آرنیوس یک واکنش اسید-باز است.
- (۲) آرنیوس نخستین کسی بود که بر روی اسیدها و بازها مطالعه کرد.
- (۳) رفتار اسید آرنیوس بر مبنای  $H_3O^+(aq)$  سنجیده می‌شود.
- (۴) محلول حاوی گوگرد تری‌اکسید باز آرنیوس به حساب می‌آید.

برای خنثی شدن خاصیت اسیدی هر مول آسپرین چند گرم مادهٔ ضد اسید جوش شیرین با خلوص ۸۴ درصد نیاز است؟ ( $H = ۱$  ,  $C = ۱۲$  ,  $O = ۱۶$  ,  $Na = ۲۳$  :  $g \cdot mol^{-1}$ )

۷۰

- (۱) ۱۰۰  
(۲) ۱۲۶/۲  
(۳) ۸۴  
(۴) ۷۰/۵

برای عددهای طبیعی و متمایز  $a$  و  $b$ ؛  $[a^5, b^5] = [\lambda a^2, \lambda b^2]$  حاصل  $a + b$  کدام است؟

۷۱

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۷  
(۴) ۸

حاصلضرب ۴ عدد صحیح متوالی حتماً بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۷۲

- (۱) ۱۸  
(۲) ۱۶  
(۳) ۲۴  
(۴) ۴۸

اگر  $a|bc^2$  و  $b|c^2$ ، آنگاه کدام یک از روابط زیر همواره برقرار است؟

۷۳

- (۱)  $a|b^2$   
(۲)  $b^2|c$   
(۳)  $a|c^4$   
(۴)  $ab|c^4$



باقی‌مانده تقسیم  $a$  بر  $4$  و  $6$  برابر  $3$  است. باقی‌مانده تقسیم  $1 + 2a$  بر  $12$  کدام است؟

۷۴

- (۱) ۱۰  
(۲) ۵  
(۳) ۳  
(۴) ۷

به ازای چند عدد طبیعی کمتر از  $100$  برای  $n$ ، عدد  $9^{35} + 2n$  بر  $19$  بخش‌پذیر است؟

۷۵

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

$a$  عددی فرد و باقی‌مانده تقسیم  $a^2$  بر  $7$  برابر  $3$  است. باقی‌مانده تقسیم  $a^2$  بر  $56$  کدام است؟

۷۶

- (۱) ۱۷  
(۲) ۲۴  
(۳) ۳۱  
(۴) ۴۲

مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد فرد  $3$  رقمی که در تقسیم بر  $5$  باقی‌مانده  $3$  می‌دهد، کدام است؟

۷۷

- (۱) ۱۰  
(۲) ۱۹  
(۳) ۲۱  
(۴) ۲۳

فرض می‌کنیم  $a$  عددی زوج است. باقی‌مانده  $a^3$  بر  $8$  چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۷۸

- (۱) یک مقدار  
(۲) دو مقدار  
(۳) سه مقدار  
(۴) بی‌شمار مقدار

چند عدد به صورت  $\overline{51xy52}$  بر  $36$  بخش‌پذیر است؟

۷۹

- (۱) ۱۱  
(۲) ۶  
(۳) ۱۴  
(۴) ۹

به ازای چند عدد طبیعی دورقمی  $n$ ، دو عدد  $4n + 7$  و  $6n + 11$  نسبت به هم اول‌اند؟

۸۰

- (۱) صفر  
(۲) ۴۵  
(۳) ۸۹  
(۴) ۹۰

کدام ماتریس هم سطری و هم ستونی است؟

۸۱

- (۱)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$   
(۲)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$   
(۳)  $\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
(۴) ۱۳۵



برای دو ماتریس  $A$  و  $B$  داریم:  $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  و  $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ . حاصل  $AB + BA$  کدام ماتریس است؟

$$\begin{array}{ll} (1) & \begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 11 & 16 \end{bmatrix} \\ (2) & \begin{bmatrix} 17 & 15 \\ -16 & 11 \end{bmatrix} \\ (3) & \begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 11 & -16 \end{bmatrix} \\ (4) & \begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 16 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

اگر حاصل ضرب یک ماتریس اسکالر باشد، کدام یک از ماتریس‌های زیر، قطری است؟

$$\begin{array}{ll} (1) & \begin{bmatrix} a+b & c-a \\ c-3b & b+c \end{bmatrix} \\ (2) & \begin{bmatrix} c & 2a+b \\ b-3c & a+b \end{bmatrix} \\ (3) & \begin{bmatrix} a+b & b-c \\ 3a+c & 2b \end{bmatrix} \\ (4) & \begin{bmatrix} b-a & 2a+c \\ c-3b & 3a \end{bmatrix} \end{array}$$

اگر دو خط  $L_1: (m^2 - 1)x + my = m - 1$  و  $L_2: 3x + my = 1$  موازی و متمایز باشند، دو خط  $L_3: (m + 4)x + (m + 3)y = 1$  و  $L_4: -2mx + (m + 4)y = 2$  نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

- (۱) موازی‌اند  
(۲) منطبق‌اند  
(۳) موازی یا منطبق‌اند  
(۴) متقاطع یا منطبق‌اند

اگر دستگاه معادلات  $\begin{cases} (a+2)x - y = 4 \\ 6x - (a+1)y = 5 \end{cases}$  جواب نداشته باشد، دستگاه معادلات  $\begin{cases} -x - y = 2 \\ -4x + ay = 8 \end{cases}$  چگونه است؟

- (۱) یک جواب دارد  
(۲) جواب ندارد یا یک جواب دارد  
(۳) بی‌شمار جواب دارد یا یک جواب دارد  
(۴) جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد

کدام ماتریس همانی است؟

$$\begin{array}{ll} (1) & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ (2) & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (3) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (4) & \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

اگر  $A$  یک ماتریس قطری باشد و داشته باشیم  $A + 3I_2 = \begin{bmatrix} b+2 & a+3 \\ b-5 & a-2 \end{bmatrix} - 3A$ ، ماتریس  $A + I_2$  به کدام شکل خواهد بود؟

$$\begin{array}{ll} (1) & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ (2) & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ (3) & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ (4) & \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

درایه‌های ماتریس  $A$  با ۶ درایه به صورت  $a_{ij} = i^j$  است. اگر حداکثر تعداد ستون ماتریس  $A$  عددی اول باشد، مجموع درایه‌های سطر اول با مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس  $A$  کدام است؟

۸۸

- (۱) ۵  
(۲) ۳  
(۳) ۱۲  
(۴) ۸

۸۹ اگر  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، ماتریس  $2A$  کدام است؟

۸۹

- (۱)  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$   
(۲)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$   
(۳)  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$   
(۴)  $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

۹۰ اگر  $2A + I = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{1}{5} \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$  باشد، حاصل  $A^3 B$  کدام است؟

۹۰

- (۱)  $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$   
(۲)  $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$   
(۳)  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$   
(۴)  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

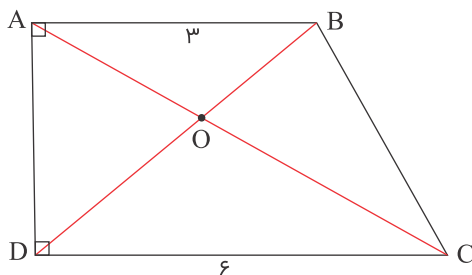
۹۱ قطرهای چهارضلعی  $ABCD$  در نقطه  $O$  متقاطعند و دو مثلث  $OAD$  و  $OBC$  هم‌ارزند (مساحت برابر دارند). در این صورت، چهارضلعی  $ABCD$ :

۹۱

- (۱) متوازی‌الاضلاع است.  
(۲) مستطیل است.  
(۳) دوزنقه است.  
(۴) دوزنقه یا متوازی‌الاضلاع است.

۹۲ باتوجه به شکل زیر، مشخص کنید چند گزاره زیر نادرست است؟

۹۲



- الف)  $S_{\triangle COD} = 4S_{\triangle AOB}$   
ب)  $S_{\triangle AOD} = 2S_{\triangle AOB}$   
ج)  $2S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle BOC}$

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

۹۳ مساحت مثلث  $ABC$  را که در آن  $a = 3$  و  $b = 5$  و داشته باشیم  $\hat{A} + \hat{B} = 135^\circ$  کدام است؟

۹۳

- (۱)  $\frac{15\sqrt{2}}{4}$   
(۲)  $4\sqrt{2}$   
(۳)  $15 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$   
(۴)  $15\sqrt{2}$

۹۴ در یک  $n$  ضلعی منتظم، تعداد اقطار ۲۵ تا از تعداد اضلاع بیشتر است. زاویه بین دو قطر متوالی گذرنده از هر رأس این  $n$  ضلعی کدام است؟

- (۱)  $15^\circ$  (۲)  $24^\circ$   
(۳)  $18^\circ$  (۴)  $21^\circ$

۹۵ یک ۱۰۰ ضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه مرزی دارد؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۳  
(۳) ۱۰۳ (۴) ۲۰۰

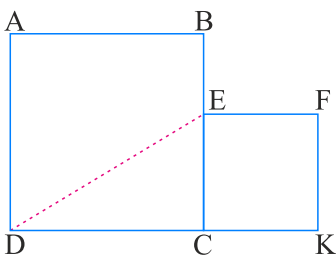
۹۶ در مثلث به طول اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳، فاصله محل برخورد ارتفاع‌ها از محل برخورد عمود منصف‌ها کدام است؟

- (۱)  $6/5$  (۲) ۵  
(۳) ۶ (۴)  $5/5$

۹۷ با معلومات  $BC = 2$ ،  $m_b = 6$  و  $m_c = 9$ ، چند مثلث قابل رسم است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱  
(۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۹۸ در شکل زیر ABCD و EFKC مربع می‌باشند. اگر مجموع مساحت‌های این دو مربع ۶۴ باشد، طول پاره‌خط DE کدام است؟



- (۱) ۶  
(۲) ۵  
(۳) ۷  
(۴) ۸

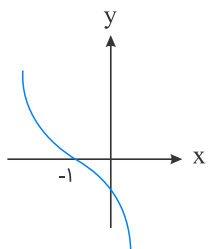
۹۹ در متوازی‌الاضلعی که اندازه اضلاع آن ۵ و ۱۰ و یکی از زاویه‌های آن  $120^\circ$  است، محیط چهار ضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی متوازی‌الاضلاع کدام می‌باشد؟

- (۱)  $5\sqrt{3}$  (۲)  $5 - 5\sqrt{3}$   
(۳)  $5 + 5\sqrt{3}$  (۴) ۵

۱۰۰ در دوزنقه‌ای که طول دو قطر آن ۵ و ۸ سانتی‌متر و اندازه یکی از قاعده‌ها ۲ سانتی‌متر است، قاعده دیگر در چه بازه‌ای تغییر کند تا دوزنقه قابل رسم باشد؟

- (۱) (۳, ۱۳) (۲) (۱, ۱۳)  
(۳) (۳, ۱۱) (۴) (۱, ۱۱)

۱۰۱ تابع  $f$  از درجه سوم و به صورت زیر است، در تابع  $g(x) = \sqrt{(x^2 - x)} f(x)$  بزرگترین مجموعه‌ای که  $x$  می‌تواند به آن تعلق داشته باشد، کدام است؟



(۱)  $D_f$

(۲)  $D_f \cap (-\infty, 0]$

(۳)  $D_f \cap [0, +\infty)$

(۴)  $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$

۱۰۲ یکی از نقاط تقاطع منحنی  $y = \sqrt{-x+1}$  با منحنی وارون خود کدام است؟

(۱)  $(2, 0)$

(۲)  $(3, 3)$

(۳)  $(-2, -1)$

(۴)  $(0, 1)$

۱۰۳ تابع  $f(x) = \frac{x^2}{|x|} (x - 4)$  در بازه  $[a, b]$  نزولی اکید است.  $a + b$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۱

۱۰۴ اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  بر  $x + 1$ ،  $x + 2$  و  $x + 3$  برابر ۹ باشد و بر دو جمله‌ای  $x + 3$  بخش‌پذیر باشد. حاصل  $3a + b + c$  کدام است؟

(۱) ۱۵

(۲) ۵

(۳) ۱۲

(۴) ۱۰

۱۰۵ تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & ; x < 1 \\ \sqrt{x-1} + a & ; x \geq 1 \end{cases}$  روی  $\mathbb{R}$  صعودی اکید است.  $a$  چه مقادیری دارد؟

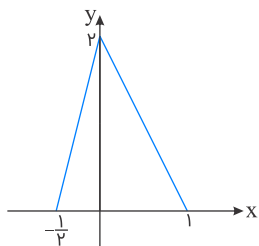
(۱)  $a \geq 1$

(۲)  $a < 1$

(۳)  $a \geq 0$

(۴)  $a < -1$

۱۰۶ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $y = f(x)$  است. دامنه تابع  $y = f \circ f(2x - 2)$  کدام است؟



(۱)  $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$

(۲)  $[-\frac{1}{2}, 1]$

(۳)  $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}] \cup [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$

(۴)  $[\frac{7}{8}, \frac{5}{4}]$

هرگاه  $f(4) = 3$  و  $g(x) = 2f(x - 2) + 3$  باشد، آن گاه کدام نقطه زیر بر روی نمودار تابع  $g(x)$  قرار دارد؟ **۱۰۷**

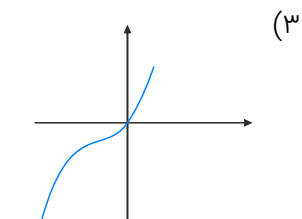
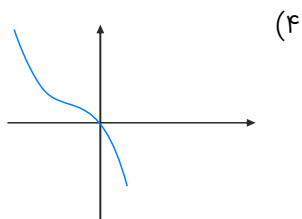
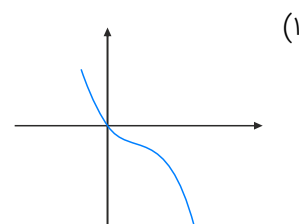
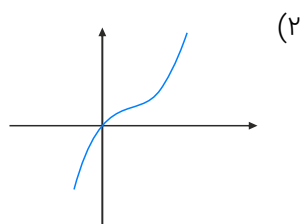
(۲)  $(6, 9)$

(۱)  $(4, 9)$

(۴)  $(4, 0)$

(۳)  $(6, 0)$

نمودار تابع  $f(x) = (1 - x)^3 - 1$  شبیه کدام گزینه است؟ **۱۰۸**



در کدام بازه، نمودار تابع  $f(x) = x^3$  بالاتر از نمودار تابع وارون  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$  قرار دارد؟ **۱۰۹**

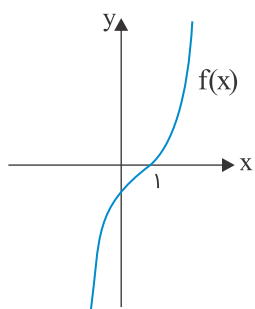
(۲)  $(-\infty, -1)$

(۱)  $(0, +\infty)$

(۴)  $(0, 1)$

(۳)  $(-1, 0)$

اگر  $f(x)$  به صورت زیر باشد، دامنه تابع  $\sqrt{\frac{x}{f(x+1)}}$  کدام است؟ **۱۱۰**



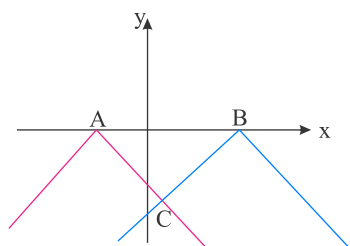
(۱)  $\mathbb{R} - \{-1\}$

(۲)  $\mathbb{R} - \{0\}$

(۳)  $\mathbb{R} - \{1\}$

(۴)  $\mathbb{R}$

نمودار  $y = -|x - 1|$  را یک بار ۳ واحد به سمت راست و بار دیگر  $a$  واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و هر دو نمودار را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. اگر مساحت مثلث  $ABC$  برابر ۹ باشد، مقدار  $a$  کدام است؟ **۱۱۱**



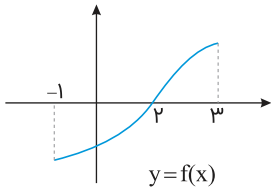
(۱)  $-9$

(۲)  $3$

(۳)  $-3$

(۴)  $9$

اگر نمودار  $f(x)$  به صورت زیر و دامنه تابع  $g(x)$  برابر  $[-2, 4]$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = \frac{f(2x) + g(x-1)}{f(x+1)}$  کدام است؟



(۱)  $[-1, 5]$

(۲)  $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

(۳)  $[-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{3}{2}]$

(۴)  $[-1, 5] - \{1\}$

کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) اگر  $f$  اکیداً یکنوا باشد، الزاماً  $f^{-1}$  هم اکیداً یکنوا است.

(۲) اگر گودی تابع  $f$  روبه  $y$  های مثبت باشد، الزاماً گودی  $f^{-1}$  روبه  $y$  های منفی است.

(۳)  $f$  و  $f^{-1}$  می‌توانند یکدیگر را روی  $y = x$  قطع نکنند.

(۴) ترکیب هر تابع با وارونش می‌تواند  $y = x$  یا قسمتی از آن باشد.

باقی‌مانده چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $x - 1$  و  $x + 1$  به ترتیب ۳ و ۴ است. باقی‌مانده  $f(x) + x^2 + x^6 - 1$  بر  $x^2$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{7}{2}x$

(۲)  $-\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}$

(۴)  $-\frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$

(۳)  $-\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$

در نمودار تابع  $f(x) = x^2$ ، به ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم: انتقال ۴ واحد به طرف  $x$  های منفی- قرینه نسبت به محور  $x$  ها- دو برابر کردن برد- انتقال ۳ واحد به طرف  $y$  های منفی- معادله نمودار حاصل کدام است؟

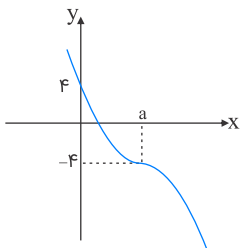
(۲)  $y = 2x^2 - 16x - 29$

(۱)  $y = 2x^2 - 8x - 11$

(۴)  $y = -2x^2 + 16x - 35$

(۳)  $y = -2x^2 - 16x - 35$

نمودار تابع  $y = (a - x)^3 - b$  به شکل زیر است.  $a$  کدام است؟



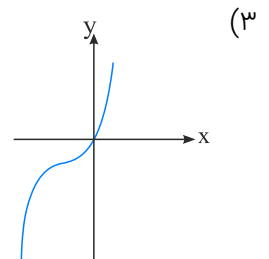
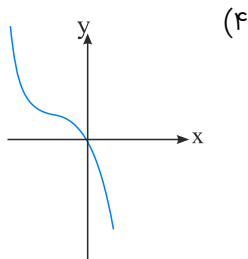
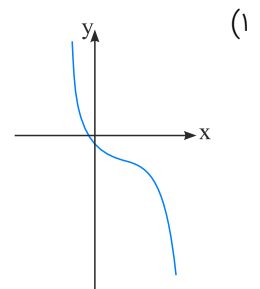
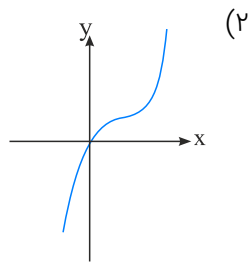
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) -۱

(۴) -۲

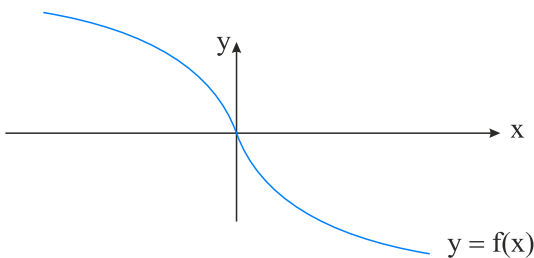




**۱۱۸** اگر تابع  $f(x) = \log_{(2-|4m|)} 2x$  صعودی باشد، حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $0 < m < \frac{1}{4}$
- (۲)  $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4}$
- (۳)  $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$
- (۴)  $m < -\frac{1}{4}$  یا  $m > \frac{1}{4}$

**۱۱۹** نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل زیر رسم شده است. این تابع در چند نقطه نمودار وارون خودش را قطع می‌کند؟



- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

**۱۲۰** در چه تعداد از موارد زیر توابع  $f$  و  $g$  باهم مساوی‌اند؟

- (الف)  $f(x) = \frac{1}{[x] + [-x]}$  و  $g(x) = \frac{1}{[-\sin^2 \pi x]}$
- (ب)  $f(x) = \sqrt{-x[x]}$  و  $g(x) = \frac{[\sqrt{-x^2 + x}]}{x - 1}$
- (پ)  $f(x) = \sqrt{x^6 - 2x^2 + 1}$  و  $g(x) = x^2 - 1$

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

**۱۲۱**  $f(x)$  تابعی چندجمله‌ای است. اگر  $f(x) + f^{-1}(x) = -2x + 4$  باشد، حاصل  $f(4) + f^{-1}(4)$  کدام است؟

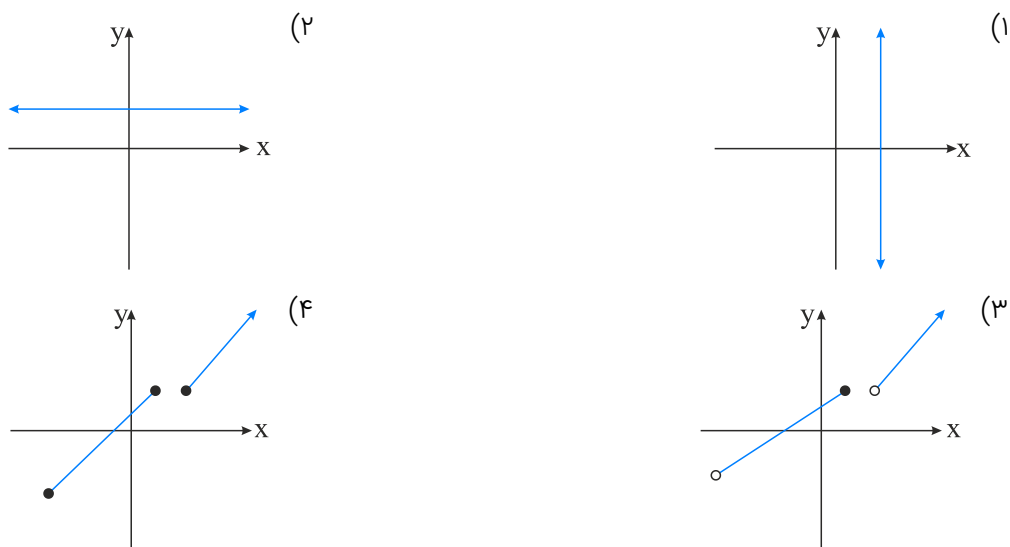
- (۱) -۲
- (۲) -۴
- (۳) -۶
- (۴) -۸



۱۲۲ اگر  $[x] + x = 5 + [x^2 + 1]$ ، آنگاه مجموع ریشه‌های این معادله کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۲  
(۳) -۴  
(۴) ۴

۱۲۳ کدام یک از نمودارهای زیر، یک تابع یک‌به‌یک را نشان می‌دهد؟



۱۲۴ دامنه تابع  $f(x) = b - \sqrt{x+a}$  و برد تابع  $g(x) = \sqrt{x+1} - 2$  یکسان هستند. اگر دو تابع ریشه مشترک داشته باشند، حاصل  $b^2 - a$  کدام است؟

- (۱) ۰  
(۲) ۱  
(۳) ۳  
(۴) ۷

۱۲۵ دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - [x]}$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$   
(۲)  $\mathbb{R}$   
(۳)  $\mathbb{R} - [0, 1]$   
(۴)  $(1, +\infty)$

۱۲۶ در کدام مورد دو تابع باهم مساوی هستند؟

- (۱)  $g(x) = \frac{1}{x}$ ،  $f(x) = \frac{x}{x^2}$   
(۲)  $g(x) = x$ ،  $f(x) = \frac{x^2}{x}$   
(۳)  $g(x) = x$ ،  $f(x) = \sqrt{x^2}$   
(۴)  $g(x) = \frac{1}{x+1}$ ،  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

۱۲۷ مجموعه جواب معادله  $[x^2 - 1] = -1$ ، معادل کدام گزینه است؟

- (۱)  $(-1, 1)$   
(۲)  $[0, 1)$   
(۳)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$   
(۴)  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

۱۲۸ کدام یک از توابع زیر وارون پذیرند؟

$$g = \{(1, 2), (3, 4), (5, 2)\} \quad (۲)$$

$$f = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\} \quad (۱)$$

$$h = \{(4, 1), (5, 2), (6, 1)\} \quad (۴)$$

$$k = \{(1, 1), (2, 5), (3, 6)\} \quad (۳)$$

۱۲۹ دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2x - |x|}{\sqrt{2x - x^2 + 3}}$  کدام است؟

$$(-1, 3) \quad (۲)$$

$$[-1, 3] \quad (۱)$$

$$(1, 3) \quad (۴)$$

$$[0, 3) \quad (۳)$$

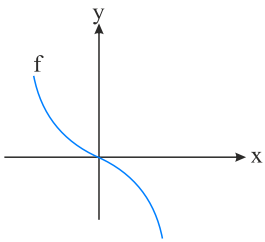
۱۳۰ اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، دامنه تعریف  $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x}}$  کدام است؟

$$\emptyset \quad (۱)$$

$$D_f \quad (۲)$$

$$D_f - \{0\} \quad (۳)$$

$$\mathbb{R} \quad (۴)$$





استاد علیرضا افشار

”همایش ها“

@hamayesh\_dr\_afshar



گزینه ۲

۱

$$\Delta k = k_2 - k_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}v^2 - v^2\right) = \frac{1}{2}m\left(-\frac{3}{4}v^2\right)$$

$$\frac{\Delta k}{k_1} = \frac{\frac{1}{2}mv^2\left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}mv^2} = -\frac{3}{4} = -\%75$$

گزینه ۳

۲

$$E_A + W_{f_k} = E_B \Rightarrow U_A + K_A + W_{f_k} = U_B + K_B$$

$$\Rightarrow mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 + W_{f_k} = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow 2gh_A + v_A^2 + \frac{2W_{f_k}}{m} = 2gh_B + v_B^2$$

$$\Rightarrow 2(10)(3) + (5)^2 + \frac{2W_{f_k}}{m} = 2(10)(2/4) + (2)^2 \Rightarrow 60 + 25 + \frac{2W_{f_k}}{m} = 48 + 4$$

$$\Rightarrow \frac{2W_{f_k}}{m} = -33 \Rightarrow W_{f_k} = \frac{-33 \times 0/6}{2} \Rightarrow W_{f_k} = -9/9 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -f_k d = -f_k \left( \frac{h_A}{\sin 37^\circ} + \frac{h_B}{\sin 37^\circ} \right) = -9/9$$

$$\Rightarrow f_k(5 + 4) = 9/9 \Rightarrow f_k = 1/1 \text{ N}$$

گزینه ۴

۳

دقت شود که نیروی وزن در هر ارتفاعی از سطح زمین مقداری ثابت و برابر با  $mg$  دارد و دانستن کار نیروی اصطکاک در مسیر سطح شیب‌دار کمکی به حل نمی‌کند. جابه‌جایی جسم نیز از بالای سطح شیب‌دار تا پایین آن به اندازه  $2 \text{ m}$  است. پس داریم:

$$W = mgd \cos \theta$$

از طرفی نیروی وزن قائم و روبه‌پایین بوده که جهت آن با جهت ارتفاع سطح شیب‌دار یکسان است. پس:

$$\cos \theta = 1 \Rightarrow W = 3 \times 10 \times 2 = 60 \text{ (J)}$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{توان مفید}}{\text{توان کل (ورودی)}} \times 100$$

$$\frac{P_{\text{تلف شده}}}{P_{\text{مفید}}} = \frac{1}{3} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = 3P_{\text{تلف شده}} \Rightarrow P_{\text{ورودی}} = P_{\text{مفید}} + P_{\text{تلف شده}} = P_{\text{مفید}} \times \frac{4}{3}$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{مفید}} \times \frac{4}{3}} \times 100 = \frac{3}{4} \times 100 = 75\%$$

$$\frac{75}{100} = \frac{\text{توان مفید}}{400} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = 300 \text{ W}$$

$$\Rightarrow W_{\text{مفید}} = P_{\text{مفید}} t = 300 \times 100 = 30000 \text{ J} = 30 \text{ kJ}$$

طبق قضیه کار و انرژی داریم:

$$W_{A \text{ کل}} = (K_2 - K_1)_A = \frac{1}{2} m_A (v^2 - 4v^2) = \frac{1}{2} m_A (-3v^2)$$

$$W_{B \text{ کل}} = (K_2 - K_1)_B = \frac{1}{2} m_B (v^2 - 9v^2) = \frac{1}{2} m_B (-8v^2)$$

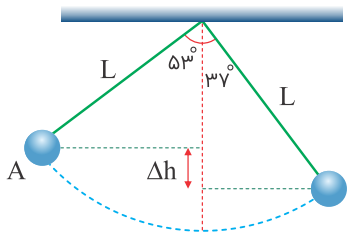
$$m_A = m_B = m \quad F_A = F_B = F$$

$$\left. \begin{aligned} F d_A &= \frac{1}{2} m (-3v^2) \\ F d_B &= \frac{1}{2} m (-8v^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d_B}{d_A} = \frac{8}{3}$$

مسیر طی شده توسط وزنه به صورت کمانی از دایره است؛ پس  $r\theta = 1/8$  شده است.

$$\Rightarrow 1/2\theta = 1/8 \Rightarrow \theta = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{3}{2} = 1/5 \text{ rad}$$

از آنجاکه  $(\pi = 3)$  در نظر گرفته شده، پس  $(\theta = \frac{\pi}{2})$  است. بنابراین بعد از طی مسافت  $1/8$  متری توسط وزنه تغییر زاویه آن نسبت به محور قائم برابر  $90^\circ$  درجه است:



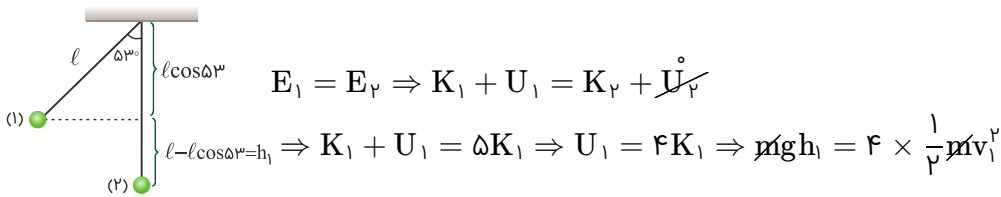
$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_B - K_A \Rightarrow mg\Delta h = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\Rightarrow 2g\Delta h = v_B^2 \Rightarrow 2g(0/2L) = v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{4L}$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{4/8} \Rightarrow v_B = 0/4\sqrt{30}$$

$$\Delta h = L \cos 37^\circ - L \cos 53^\circ \Rightarrow \Delta h = L(0/8 - 0/6) \Rightarrow \Delta h = 0/2L$$

حداکثر انرژی جنبشی آونگ در پایین‌ترین نقطه مسیر (که حداقل انرژی پتانسیل را داریم) رخ می‌دهد. اگر آن نقطه را ۲ بنامیم، طبق پایستگی انرژی مکانیکی داریم:



برای سهولت محاسبات، محل آونگ در پایین‌ترین وضعیت را مبنای پتانسیل فرض می‌کنیم:

$$10 \times 3/2 = 2v_1^2 \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$$

کار برآیند وارد بر جسم (که در این سؤال برابر با کار نیروی باد است) برابر است با تغییرات انرژی جنبشی جسم:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{حالت اول } W_t = \Delta K \Rightarrow W_F = K_2 - K_1 \Rightarrow F d \cos 0^\circ &= \frac{1}{2} m v^2 \\
 \text{حالت دوم } W'_t = \Delta K \Rightarrow W'_F = K'_2 - K'_1 \Rightarrow 2F \times 2d \times \cos 0^\circ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} m v'^2
 \end{aligned} \right\}$$

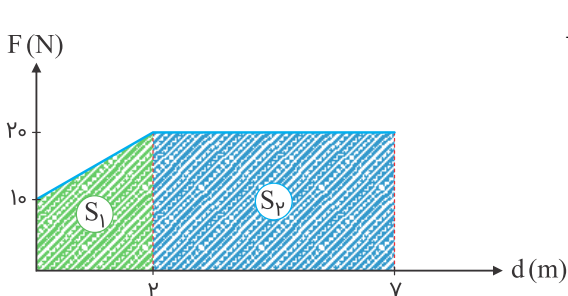
$$\xrightarrow{\text{تقسیم روابط بر هم}} \frac{F \times d}{2F \times 2d} = \frac{mv^2}{\frac{4}{5}mv'^2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{v^2}{v'^2} \Rightarrow v' = \sqrt{5}v$$

کار نیروی F در جابه‌جایی d از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W_F = F d \cos 45^\circ$$

برای محاسبه F d از مساحت زیر نمودار استفاده می‌کنیم:

$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow S = \left( \frac{10 + 20}{2} \right) 2 + 5(20) \Rightarrow S = 30 + 100 = 130 \text{ J}$$



$$\begin{aligned}
 W_F &= (130) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = (130)(0.7) = 91 \text{ J} \\
 \Rightarrow W_{f_k} &= -f_k d = -1/5(7) = -10/5 \text{ J} \\
 \Rightarrow W_t &= W_F + W_{f_k} = 91 - 10/5 = 80/5 \text{ J}
 \end{aligned}$$

با استفاده از قانون پایستگی انرژی ابتدا تندی خروج مایع از قسمت (b) را حساب می‌کنیم.

$$E_a = E_b \Rightarrow U_a + K_a = U_b + K_b$$

$$\Rightarrow mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_b^2 \Rightarrow 10(0/1) + \frac{1}{2}(4)^2 = \frac{1}{2}v_b^2$$

$$\Rightarrow v_b^2 = 2(1 + \lambda) \Rightarrow v_b^2 = 18 \Rightarrow v_b = 3\sqrt{2} \text{ m/s}$$

اکنون با استفاده از معادله پیوستگی می‌توان نوشت:

$$A_a v_a = A_b v_b \Rightarrow 30 \times 10^{-6} \times 4 = A_b \times 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{30 \times 10^{-6} \times 4}{3\sqrt{2}} = A_b \Rightarrow A_b = \frac{10^{-3} \times 4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow A_b = 2\sqrt{2} \times 10^{-3}$$

در ابتدا خازن به مولد وصل است و از مدار جریانی عبور نمی‌کند و ولتاژ دو سر خازن برابر  $E$  خواهد بود، پس داریم:

$$q_1 = C_1 V_1 = \epsilon_0 \frac{A}{d} \times E$$

در حالت دوم چون دی‌الکتریک عایق کامل نیست کمی جریان در مدار خواهیم داشت و ولتاژ دو سر باتری با اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر است و داریم:

$$V_{\text{دو سر خازن}} = V_{\text{دو سر باتری}} = E - rI = \frac{R \cdot E}{R + r}$$

که در این رابطه  $R = \rho \frac{d}{A}$  خواهد بود پس داریم:  $V = \frac{\rho \frac{d}{A} \cdot E}{\rho \frac{d}{A} + r} = \frac{\rho d E}{\rho d + Ar}$  و بار ذخیره شده در حالت جدید

$$q_2 = C_2 V_2 = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \times \frac{\rho d E}{\rho d + Ar}$$

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\kappa \epsilon_0 \cdot A \cdot E \rho}{\rho d + Ar} = \frac{\kappa \rho d}{\rho d + Ar}$$

باری که در هر ثانیه از سیم عبور می‌کند برابر است با:

$$q = I \cdot t = 2 \times 1 = 2 \text{ C}$$

اگر تعداد الکترون‌ها را  $n$  فرض کنیم، داریم:

$$q = ne \Rightarrow 2 = n \times 1/6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = 1/25 \times 10^{19}$$

باتوجه به رابطه  $P = \frac{Q}{t}$ ، در مدت زمان ثابت هنگامی گرما بیشترین مقدار خود را دارد که توان مفید باتری دارای بیشترین مقدار خود باشد؛ بنابراین ابتدا بیشترین توان مفید مولد را حساب می‌کنیم. برای محاسبه این کمیت ابتدا نیروی محرکه باتری را حساب می‌کنیم. باتوجه به نمودار می‌توان جریانی که به ازای آن توان دارای بیشترین مقدار می‌شود را حساب کرد.

$$I = \frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \text{ A}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{2r} \Rightarrow 3 = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \varepsilon = 12 \text{ V}$$

اکنون برای محاسبه بیشترین توان مفید داریم:

$$P = \varepsilon I - rI^2 = 12(3) - 2(3)^2 = 18 \text{ W}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$P = \frac{Q}{t} \Rightarrow 18 = \frac{mc\Delta T}{t} \Rightarrow 18 \times 70 = m \times 4200 \times 10 \Rightarrow m = 30 \text{ g}$$

باتوجه به اینکه  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  است، بنابراین جهت جریان را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم:

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R + \sum r} = \frac{25 - 10}{6 + 7 + 1 + 1} = 1 \text{ A}$$

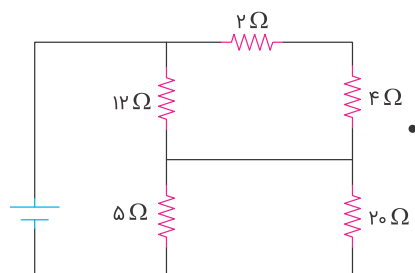
$$V_A - Ir_1 - \varepsilon_1 - IR_1 = V_B \Rightarrow V_A - V_B = 1 \times 1 + 10 + 1 \times 6 = 17 \text{ V}$$

$$\frac{\Delta R}{R_1} = \alpha \Delta T = \frac{\alpha = 0.007}{\Delta T = 1} \frac{\Delta R}{R_1} = 0.007 \Rightarrow \Delta R = 0.007 R_1$$





مقاومت ولت‌سنج ایده‌آل بی‌نهایت است و از آن مدار جریانی عبور نمی‌کند. (مقاومت  $2\Omega$  که سری با ولت‌سنج است جریانی عبور نمی‌کند) مقاومت آمپرسنج ایده‌آل صفر است و می‌توان سیم بدون مقاومت در نظر گرفت. ساده‌شده مدار به صورت زیر است. ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت  $4\Omega$  را نشان می‌دهد و برابر با  $8$  ولت است. در نتیجه جریان عبوری از مقاومت  $4\Omega$  برابر با  $2A$  است.  $(V = RI)$  مقاومت  $2\Omega$  و  $4\Omega$  سری هستند؛ پس جریان عبوری از مقاومت  $2\Omega$  هم برابر با  $2A$  است. مقاومت  $12\Omega$  و مقاومت معادل موازی  $4\Omega$  و  $2\Omega$  موازی هستند.



$$\Delta V_{AB} = \Delta V_{CD} \Rightarrow I \times 12 = 2 \times 6 \Rightarrow I = 1A$$

در نتیجه جریان کل  $3A$  است. جریان بین مقاومت  $5\Omega$  و  $2\Omega$  موازی هستند به نسبت  $5$  تقسیم می‌شود.

$$\Delta V_{BE} = \Delta V_{DF}$$

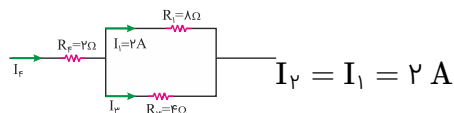
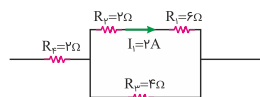
$$I_{R=5\Omega} \times 5 = I_{R=2\Omega} \times 2 \Rightarrow I_{R=5\Omega} = 4I_{R=2\Omega}$$

$$\Rightarrow I_{R=5\Omega} + I_{R=2\Omega} = 3 \Rightarrow I_{R=5\Omega} = 2/4A, \quad 2/4 - 1 = 1/4A = \text{آمپرسنج}$$

گام اول: ابتدا جریان الکتریکی عبوری از  $R_1$  را به دست می‌آوریم. طبق رابطه  $P = RI^2$  داریم:

$$P = RI^2 \Rightarrow 24 = 6I_1^2 \Rightarrow I_1 = 2A$$

گام دوم: باتوجه به مدار زیر جریان هر یک از مقاومت‌ها برابر است با:



$$\frac{I_1}{I_3} = \frac{R_3}{R_{1,2}} \Rightarrow \frac{2}{I_3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow I_3 = 4A$$

$$I_F = I_1 + I_3 = 2 + 4 = 6A$$

گام سوم: اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل مقاومت معادل مدار است.

$$V = R_{eq} I_F = \left(2 + \frac{8 \times 4}{8 + 4}\right) \times 6 = \left(\frac{14}{3} \times 6\right) = 28V$$

در رابطه زیر بار عبوری را بر حسب آمپرساعت (Ah) و زمان را بر حسب ساعت (h) جایگذاری می‌کنیم:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow 400 \times 10^{-6} = \frac{800 \times 10^{-3}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{8 \times 10^{-1}}{4 \times 10^{-5}} = 2 \times 10^4 h = 120 \times 10^6 \text{ min} = 1/2 \times 10^6 \text{ min}$$

ترمیستور مقاومتی است که بر اثر تغییرات دما به صورت محسوسی تغییر می‌کند پس می‌تواند به‌عنوان زنگ خطر آتش مورد استفاده قرار گیرد. دیود نور گسیل نیز در تابلوهای تبلیغاتی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مقاومت  $۲\Omega$  و  $۴\Omega$  متوالی و حاصل آن‌ها با مقاومت  $۳\Omega$  موازی است؛ بنابراین مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

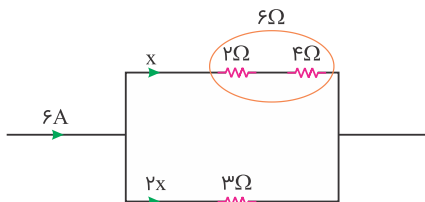
$$R_1 = \frac{(۴ + ۲) \times ۳}{(۴ + ۲) + ۳} = \frac{۱۸}{۹} = ۲\Omega$$

مقاومت  $R_1$  و مقاومت  $۱$  اهمی متوالی هستند؛ بنابراین مقاومت معادل مدار برابر با  $R_{eq} = ۱ + ۲ = ۳\Omega$  خواهد بود. در نتیجه شدت جریان کل مدار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$I = \frac{V_a}{R_{eq}} = \frac{۱۸}{۳} = ۶A$$

در آخر جریان را به نسبت عکس اندازه مقاومت‌ها بین مقاومت‌های  $۶\Omega$  و  $۳\Omega$  تقسیم می‌کنیم:

$$x + ۲x = ۶A \Rightarrow x = ۲A$$



سرعت گلوله در لحظه رسیدن به زمین به اختلاف زمانی بین دو گلوله بستگی ندارد.

$$v = \sqrt{۲gh} \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \sqrt{\frac{h_۲}{h_۱}} = \sqrt{\frac{H}{H}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

شیب خط مماس در نقطه  $A$ ،  $+۱۰$  است؛ بنابراین سرعت در این لحظه  $+۱۰\text{ m/s}$  می‌باشد. از طرفی  $x_A = x_0$  است، پس سرعت اولیه متحرک  $-۱۰\text{ m/s}$  می‌باشد. سرعت متحرک در لحظه  $t = ۴\text{ s}$  است؛ بنابراین داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = ۴a - ۱۰ \Rightarrow a = ۲/۵\text{ m/s}^۲$$

حالا معادله سرعت متحرک را نوشته و سرعت را در لحظه  $t = ۶\text{ s}$  به دست می‌آوریم:

$$v = ۲/۵t - ۱۰ \Rightarrow v = ۲/۵ \times ۶ - ۱۰ \Rightarrow v = ۵\text{ m/s}$$

باتوجه به نمودار، متحرک در  $t = ۴ \text{ s}$  تغییر جهت داده است. مکان این لحظه را  $x_{Fs}$  در نظر می‌گیریم. باتوجه به نمودار تندی متوسط در بازه  $(۰, ۸ \text{ s})$  و اندازه سرعت متوسط در بازه  $(۴ \text{ s}, ۶ \text{ s})$  برابر است با:

$$\begin{cases} S_{av}(0, 8 \text{ s}) = \frac{|x_{Fs} - ۲| + |۴ - x_{Fs}|}{۸} \xrightarrow{x_{Fs} < 0} S_{av} = \frac{۲ - x_{Fs} + ۴ - x_{Fs}}{۸} = \frac{۶ - ۲x_{Fs}}{۸} \\ |v_{av}(۴ \text{ s}, ۶ \text{ s})| = \frac{|0 - x_{Fs}|}{۲} \xrightarrow{x_{Fs} < 0} |v_{av}(۴ \text{ s}, ۶ \text{ s})| = \frac{-x_{Fs}}{۲} \end{cases}$$

باتوجه به گفته سؤال، اختلاف دو مقدار به دست آمده را برابر  $۰/۲۵ \text{ m/s}$  قرار می‌دهیم تا  $x_{Fs}$  به دست بیاید

$$\begin{aligned} S_{av}(0, 8 \text{ s}) - |v_{av}(۴ \text{ s}, ۶ \text{ s})| &= ۰/۲۵ \\ \Rightarrow \frac{۶ - ۲x_{Fs}}{۸} - \frac{-x_{Fs}}{۲} &= \frac{۱}{۴} \\ \Rightarrow ۳ - x_{Fs} + ۲x_{Fs} &= ۱ \Rightarrow x_{Fs} = -۲ \text{ m} \end{aligned}$$

بنابراین متحرک در مکان  $x_{Fs} = -۲ \text{ m}$  تغییر جهت داده است و بردار مکان آن به صورت  $\vec{x} = (-۲ \text{ m})\vec{i}$  است.

برای سادگی در حل مسئله جهت پایین را مثبت اختیار می‌کنیم.

$$\begin{aligned} v &= gt \Rightarrow v_1 = ۱۰t, v_2 = ۱۰ \times (t + ۰/۵) = ۱۰t + ۵ \Rightarrow v_2 = v_1 + ۵ \\ v_{av} &= \frac{v_1 + v_2}{۲} \Rightarrow ۳۷/۵ = \frac{v_1 + v_1 + ۵}{۲} \Rightarrow v_1 = ۳۵ \text{ m/s}, v_2 = ۴۰ \text{ m/s} \end{aligned}$$

متحرک ۴ ثانیه سقوط کرده است  $t_2 = ۴ \text{ s}$  است  $v_2 = ۴۰ = ۱۰t_2 \Rightarrow t_2 = ۴ \text{ s}$

در گام اول زمان برخورد گلوله‌ها را با زمین محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}gt^2 \\ \text{A گلوله: } ۸۰ &= \frac{1}{2} \times ۱۰ \times t_A^2 \Rightarrow t_A^2 = ۱۶ \Rightarrow t_A = ۴ \text{ s} \\ \text{B گلوله: } ۲۰ &= \frac{1}{2} \times ۱۰ \times t_B^2 \Rightarrow t_B^2 = ۴ \Rightarrow t_B = ۲ \text{ s} \end{aligned}$$

چون گلوله B دو ثانیه دیرتر از گلوله A رها شده، پس هر دو گلوله همزمان به زمین می‌رسند.

نکته: سرعت متوسط برابر است با نسبت جابجایی به زمان و ضمناً اندازه جابجایی برابر است با مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور  $t$ .

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{سطح زیر نمودار}}{\Delta t}$$

نکته: شتاب متوسط برابر است با نسبت تغییرات سرعت به زمان پس:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$S_B > S_A \Rightarrow \Delta x_B > \Delta x_A \Rightarrow v_{av(B)} > v_{av(A)}$$

$$t_1 \text{ در بازه } \Rightarrow \Delta v_A = \Delta v_B \Rightarrow a_{av(A)} = a_{av(B)}$$

$$\frac{t_1}{2} \text{ در بازه } \Rightarrow \Delta v_B > \Delta v_A \Rightarrow a_{av(B)} > a_{av(A)}$$

در لحظه‌ای که تندی متحرک  $2 \text{ m/s}$  است، جهت حرکت آن خلاف جهت محور است، بنابراین سرعت متحرک در این لحظه  $v = -2 \text{ m/s}$  است.

$$v = -2t + 4 \xrightarrow{v=-2 \text{ m/s}} -2t + 4 = -2 \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

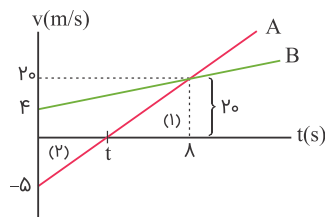
باتوجه به نمودار مکان- زمان مسیر حرکت متحرک مطابق شکل است.

$$\Delta x = x_{10s} - x_0 = 0 - 2 = -2 \text{ m} \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-2}{10} = -0.2 \text{ m/s}$$

$$\ell = |4 - 2| + |-4 - 4| + |0 - (-4)| = 14 \text{ m} \Rightarrow S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{14}{10} = 1.4 \text{ m/s}$$

$$S_{av} - |v_{av}| = 1.4 - 0.2 = 1.2 \text{ m/s}$$

باتوجه به اینکه شتاب حرکت متحرک B،  $2 \text{ m/s}^2$  است (شیب نمودار B)، پس سرعت متحرک B بعد از  $8 \text{ s}$ ، به  $20 \text{ m/s}$  می‌رسد: باتوجه به اینکه دو مثلث ۱ و ۲ متشابه‌اند، می‌توان نوشت:



$$\frac{20}{5} = \frac{\lambda - t}{t} \Rightarrow 4t = \lambda - t \Rightarrow 5t = \lambda \Rightarrow t = 1/6 \text{ s}$$

متحرک A از  $t = 1/6 \text{ s}$  تا  $t = 8 \text{ s}$  (باتوجه به برابر شدن سرعت‌ها) در جهت محور  $x$ ‌ها بوده است:

$$8 - 1/6 = 6/4 \text{ s}$$

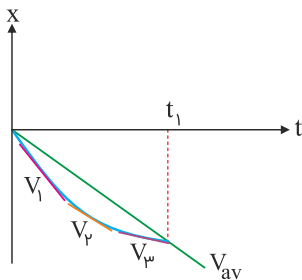
با توجه به نمودار صورت سؤال، متحرک در بازه زمانی  $t_1 = 6\text{ s}$  تا  $t_2 = 15\text{ s}$  در خلاف جهت محور  $x$  حرکت می‌کند و مسافت طی شده توسط آن برابر است با:

$$L = 15 + 12 = 27\text{ m}$$

بنابراین تندی متوسط در این بازه زمانی برابر است با:

$$\bar{S}_{(6-15)} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{27}{9} = 3\text{ m/s}$$

همان‌طور که در شکل مشخص است ابتدا اندازه شیب خط مماس (اندازه سرعت لحظه‌ای) از اندازه شیب خط واصل بین دو لحظه  $t_1$  تا  $t_2$  (اندازه سرعت متوسط) بیشتر است و کم‌کم اندازه شیب خط مماس از اندازه شیب خط واصل بین  $t_1$  تا  $t_2$  کمتر می‌شود.



طول مسیر را  $\Delta x$  در نظر می‌گیریم. ابتدا مدت زمان رسیدن دو متحرک به انتهای دیگر مسیر و اختلاف زمان آن‌ها ( $\Delta x$ ) را به دست می‌آوریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} 5 = \frac{\Delta x}{t_A} \Rightarrow t_A = \frac{\Delta x}{5} \\ 4 = \frac{\Delta x}{t_B} \Rightarrow t_B = \frac{\Delta x}{4} \end{cases} \Rightarrow \Delta t = t_B - t_A = \frac{\Delta x}{20}$$

لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند ( $t'$ ) را به دست می‌آوریم. در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، مجموع مسافت طی شده آن‌ها برابر  $\Delta x$  است؛ پس:

$$L_A + L_B = \Delta x \Rightarrow 5t' + 4t' = \Delta x \Rightarrow t' = \frac{\Delta x}{9}$$

حالا اختلاف مسافت دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$L_A - L_B = 5t' - 4t' = t' = \frac{\Delta x}{9} \xrightarrow{\Delta x = 20\Delta t} t' = \frac{20}{9}\Delta t$$

همان طور که می‌دانید هرگاه اندازه سرعت یک متحرک در یک بازه زمانی به طور مرتب افزایش یابد، حرکت تندشونده و اگر به طور مرتب کاهش یابد، حرکت کندشونده است؛ بنابراین باتوجه به نمودار داده شده در بازه‌های زمانی  $(0 - 1s)$  و  $(3s - 5s)$  حرکت تندشونده و در بازه‌های زمانی  $(1s - 3s)$  و  $(5s - 8s)$  حرکت کندشونده است. از طرفی از بین دو بازه زمانی  $(1s - 3s)$  و  $(5s - 8s)$  که دارای حرکت کندشونده هستند، فقط در بازه زمانی  $(1s - 3s)$  حرکت متحرک در خلاف جهت محور  $x$  است  $(v < 0)$ ، بنابراین:

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - (-2)}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m/s}^2$$

اگر متحرک تغییر جهت ندهد اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان خواهد بود. می‌دانیم متحرک در نمودار مکان - زمان در رئوس سهمی تغییر جهت می‌دهد پس فقط در بازه  $t_2$  تا  $t_4$  اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان نیست.

در  $t = 2s$  سرعت متحرک صفر است. پس در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 2s$  داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 2a + v_0 \Rightarrow v_0 = -2a$$

$$v_1 = 1 \times a - 2a = -a, \quad v_2 = 2a - 2a = 0$$

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{-a + 0}{2} = -\frac{a}{2} \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = -2a = -4 \text{ m/s}$$

باتوجه به تغییر جهت متحرک در لحظه  $t = 2s$ ، مسافت طی شده در  $t = 0$  تا  $t = 3s$  برابر است با مجموع اندازه جابه‌جایی متحرک در بازه  $t = 0$  تا  $t = 2s$ ، پس داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow \Delta x_{0 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2 - 4 \times 2 = -4 \text{ m}$$

$$\Delta x_{2 \rightarrow 3} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1^2 + 0 \times 1 = 1 \text{ m}$$

$$l = |\Delta x_{0 \rightarrow 2}| + |\Delta x_{2 \rightarrow 3}| = 4 + 1 = 5 \text{ m}$$



چون جابه‌جایی‌ها مساوی است، برای به دست آوردن رابطه سرعت دو متحرک از معادله سرعت- جابه‌جایی استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} v_A^y - v_{oA}^y &= \gamma a_A \Delta x \\ v_B^y - v_{oB}^y &= \gamma a_B \Delta x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} v_A^y = \gamma (\gamma a_B) \Delta x \\ v_B^y = \gamma a_B \Delta x \end{cases}$$

$$\left( \frac{v_A}{v_B} \right)^y = \gamma \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\gamma}$$

از طرفی در حرکت با شتاب ثابت  $v_{av} = \frac{v + v_o}{\gamma}$  داریم؛ داریم:

$$\frac{v_{avA}}{v_{avB}} = \frac{\frac{v_A + v_{oA}}{\gamma}}{\frac{v_B + v_{oB}}{\gamma}} = \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\gamma}$$

نکته: وقتی دو متحرک از حال سکون حرکت کنند و جابه‌جایی‌های مساوی داشته باشند، نسبت سرعت متوسط آن‌ها با نسبت سرعت آن‌ها برابر خواهد بود.

۴ ثانیه طول می‌کشد تا سرعت متحرک صفر شود بنابراین ۴ ثانیه دیگر طول می‌کشد تا متحرک به نقطه شروع بازگردد پس  $\Delta t = 8 \text{ s}$  است. مسافت طی شده توسط متحرک در این رفت و برگشت  $16 + 16 = 32 \text{ m}$  است پس داریم:

$$S = \frac{d}{\Delta t} = \frac{32}{8} = 4 \text{ m/s}$$

اکنون شتاب متحرک را محاسبه می‌کنیم:

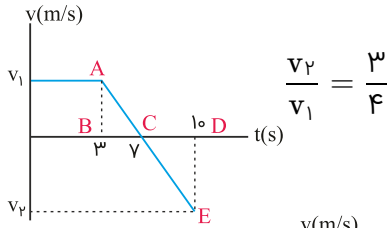
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v + v_o}{\gamma} \Rightarrow \frac{16}{4} = \frac{0 + v_o}{\gamma} \Rightarrow v_o = 8 \text{ m/s}$$

$$v = at + v_o \Rightarrow 0 = 4a + 8 \Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2$$

چون شتاب حرکت ثابت است بنابراین شتاب متوسط نیز  $-2 \text{ m/s}^2$  است.



گام اول: از روی نمودار و باتوجهبه تشابه مثلث‌های ABC و CDE داریم:



گام دوم: مساحت‌های  $S_1$  و  $S_2$  را برحسب  $v_1$  به دست می‌آوریم:

$$S_1 = \frac{7+3}{2} \times v_1 = 5v_1$$

$$S_2 = \frac{3}{2} v_2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} v_1 = \frac{9}{8} v_1$$

گام سوم: باتوجهبه اینکه سرعت متوسط در ۱۰ ثانیه اول  $7/75 \text{ m/s}$  است، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= 5v_1 \\ \Delta x_2 &= -\frac{9}{8}v_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 7/75 = \frac{5v_1 - \frac{9}{8}v_1}{10}$$

$$\Rightarrow 77/5 = \frac{31v_1}{8} \Rightarrow v_1 = 20 \text{ m/s}$$

گام چهارم: حالا با جایگذاری  $v_1$  در  $\Delta x_1$  و  $\Delta x_2$  تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= 5 \times 20 = 100 \text{ m} \\ \Delta x_2 &= -\frac{9}{8} \times 20 = -22.5 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ell = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| \Rightarrow \ell = 122.5 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{122.5}{10} = 12.25 \text{ m/s}$$

در هر حرکتی بردار شتاب متوسط هم‌جهت با بردار تغییرات سرعت است.

در نمودار مکان-زمان، متحرک در هر لحظه فقط در یک مکان می‌تواند باشد.



$\ddot{\text{O}}=\text{C}=\ddot{\text{O}}$	$[\ddot{\text{O}}=\text{N}=\ddot{\text{O}}]^+$	$\begin{array}{c} \ddot{\text{O}} \\ // \quad \backslash \\ \text{O} \quad \text{O} \end{array}$	$[\ddot{\text{O}}:\ddot{\text{S}}:\ddot{\text{O}}:]^{2-}$	$[\ddot{\text{N}}-\text{N}\equiv\text{N}]^-$	$\ddot{\text{S}}=\text{C}=\ddot{\text{O}}$	ساختار
۴	۴	۳	۳	۴	۴	جفت الکترون پیوندی
۴	۴	۶	۱۰	۴	۴	جفت الکترون ناپیوندی
بله	بله	بله	بله	بله	بله	پیروی از ساختار هشتایی

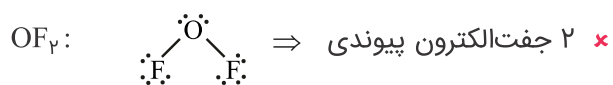
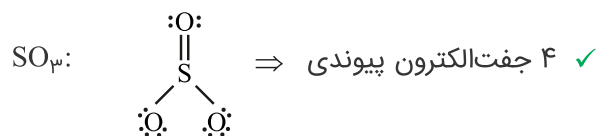
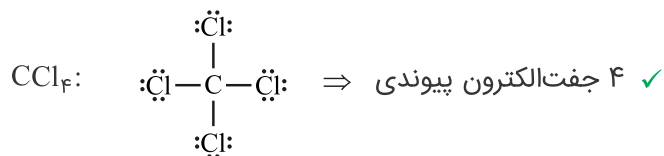
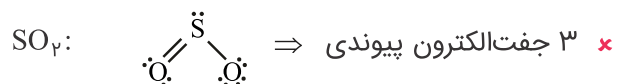
همه عبارت‌ها به جز عبارت "ب" درست هستند.

بررسی عبارت نادرست:

(ب) CO اکسید نافلزی است، اما اکسید اسیدی نیست، لذا هر اکسید نافلزی لزوماً اکسید اسیدی نیست.



بررسی ساختار لوویس ترکیبات:



روش اول:

$$120 = \frac{x}{10} \times 10^6 \Rightarrow x = 1/2 \times 10^{-3} \text{ g NaOH}$$

$$\text{NaOH} = 23 + 16 + 1 = 40$$

$$? \text{ mol FeCl}_3 = 1/2 \times 10^{-3} \text{ g NaOH} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{40 \text{ g NaOH}} \times \frac{1 \text{ mol FeCl}_3}{3 \text{ mol NaOH}} = 1 \times 10^{-5} \text{ mol FeCl}_3$$

روش دوم:

$$\begin{array}{ccc} \text{گرم NaOH} & \text{میلیون قسمت} & \\ 120 \text{ g} & 1000000 & \Rightarrow x = 1/2 \times 10^{-3} \text{ g NaOH} \\ x & 10 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{گرم NaOH} & \text{مول FeCl}_3 & \\ 3 \times 40 & 1 & \Rightarrow x = 1 \times 10^{-5} \text{ mol FeCl}_3 \\ 1/2 \times 10^{-3} & x & \end{array}$$



ابتدا حجم گاز تولیدی در واکنش (I):

$$\frac{0/25 \times 0/1 \times 0/8}{6} = \frac{x}{22/4} \Rightarrow x = 0/224 \text{ L}$$

حجم گاز تولیدی در واکنش (II):

$$\frac{400}{100} \times 0/4 = \frac{x}{22/4} \Rightarrow x = 35/84 \text{ L}$$

گزینه‌های "۱"، "۲" و "۳" درست هستند.

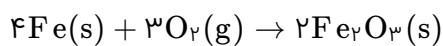
بررسی گزینه ۴:

شمار مول‌های هر گاز را با توجه به اینکه  $N_2 = 28 \text{ g.mol}^{-1}$  و  $CO_2 = 44 \text{ g.mol}^{-1}$  حساب می‌کنیم.

$$? \text{ mol } N_2 = 14 \text{ g } N_2 \times \frac{1 \text{ mol } N_2}{28 \text{ g } N_2} = 0/5 \text{ mol } N_2$$

$$? \text{ mol } CO_2 = 44 \text{ g } CO_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{44 \text{ g } CO_2} = 1 \text{ mol } CO_2$$

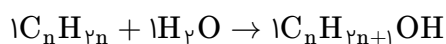
در شرایط فشار و دمای یکسان، حجم ۴۴ گرم  $CO_2$  دو برابر ۱۴ گرم  $N_2$  است.



محاسبه جرم مولی آلکن موردنظر:

$$\frac{2/5 \text{ g}}{1 \text{ L}} \times \frac{22/4 \text{ L}}{1 \text{ mol}} = 56 \text{ g.mol}^{-1}$$

معادله موازنه‌شده واکنش:



$$? \text{ mol } C_nH_{2n+1}OH : 140 \text{ g } C_nH_{2n} \times \frac{1 \text{ mol } C_nH_{2n}}{56 \text{ g } C_nH_{2n}} \times \frac{1 \text{ mol } C_nH_{2n+1}OH}{1 \text{ mol } C_nH_{2n}} = 2/5 \text{ mol } C_nH_{2n+1}OH$$

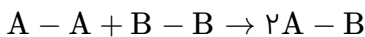
$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار فرآورده عملی}}{\text{مقدار فرآورده نظری}} \times 100 = \frac{1/8}{2/5} \times 100 = 62.5\%$$

سوختن واکنش شیمیایی است که در آن یک ماده با اکسیژن به سرعت واکنش می‌دهد. سوختن ناقص که در عدم حضور اکسیژن کافی رخ می‌دهد باعث زرد شدن رنگ شعله، تولید گاز کربن مونوکسید و دود خواهد شد. کربن مونوکسید بسیار ناپایدار است و در صورت فراهم بودن شرایط و در اختیار بودن اکسیژن مجدداً دوباره می‌سوزد و  $\text{CO}_2$  تولید می‌گردد. سوختن زغال‌سنگ تولید  $\text{SO}_2$ ،  $\text{CO}_2$ ، نور و گرما و بخار آب می‌کند.

بررسی عبارت‌های نادرست:  
 (ب) شمار اتم‌های  $\text{O}/5$  مول گاز کلر ( $\text{Cl}_2$ ) با  $\text{O}/5$  مول گاز اکسیژن ( $\text{O}_2$ ) با هم برابر است.  
 (پ) قرار دادن بادکنک‌های پرشده از هوا، درون نیتروژن مایع سبب می‌شود که حجم آن‌ها به شدت کاهش یابد.

فقط گرمای واکنش (ب) برابر با یک آنتالپی پیوند است. (آنتالپی پیوند  $\text{N} \equiv \text{N}$ )  
 بررسی سایر واکنش‌ها:  
 الف) محصولات باید اتم‌های مجزا باشند نه مولکول.  
 پ) پیوند باید شکسته شود. در این واکنش پیوند تشکیل شده است.  
 ت) محصولات باید اتم‌های مجزا باشند نه یون.

ابتدا مقدار آنتالپی پیوند  $\text{A} - \text{B}$  را از واکنش زیر به دست می‌آوریم:

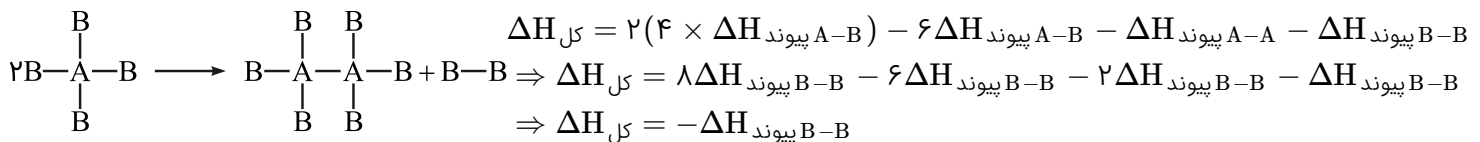


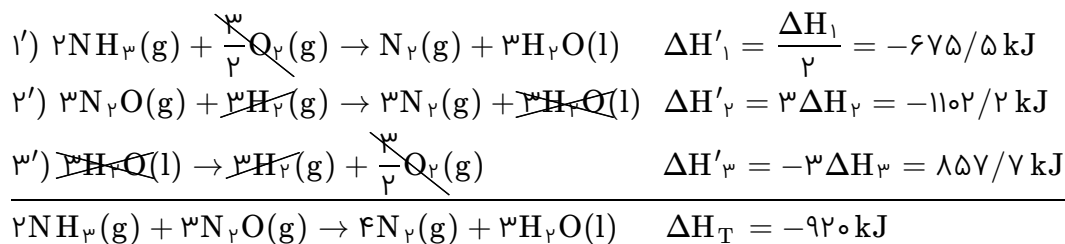
$$\Delta H = \left[ \text{مجموع آنتالپی پیوند} \right]_{\text{در مواد واکنش دهنده}} - \left[ \text{مجموع آنتالپی پیوند} \right]_{\text{در مواد فرآورده}}$$

$$\Delta H_{\text{B-B}} = (\Delta H_{\text{پیوند A-A}} + \Delta H_{\text{پیوند B-B}}) - (2\Delta H_{\text{پیوند A-B}})$$

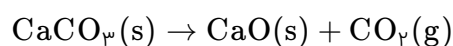
$$\Rightarrow \Delta H_{\text{پیوند A-B}} = \Delta H_{\text{پیوند B-B}}$$

حال آنتالپی واکنش داده شده را محاسبه می‌کنیم:





$$? \text{ kJ} = 25/5 \text{ g NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol NH}_3}{17 \text{ g NH}_3} \times \frac{-920 \text{ kJ}}{2 \text{ mol NH}_3} = -690 \text{ kJ}$$



$$\begin{aligned}
 ? \text{ g CO}_2 &= 200 \text{ g CaCO}_3 \times \frac{90 \text{ g CaCO}_3 \text{ خالص}}{100 \text{ g CaCO}_3 \text{ ناخالص}} \times \frac{1 \text{ mol CaCO}_3}{100 \text{ g CaCO}_3} \\
 &\times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol CaCO}_3} \times \frac{44 \text{ g CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} = 79/2 \text{ g CO}_2
 \end{aligned}$$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 1394 = 79/2 \times c \times 22 \Rightarrow c = 0/8 \text{ J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 2 \text{ mol C}_2\text{H}_6 &\times \frac{30 \text{ g C}_2\text{H}_6}{1 \text{ mol C}_2\text{H}_6} = 60 \text{ g C}_2\text{H}_6 \\
 1 \text{ mol C}_3\text{H}_8 &\times \frac{44 \text{ g C}_3\text{H}_8}{1 \text{ mol C}_3\text{H}_8} = 44 \text{ g C}_3\text{H}_8
 \end{aligned}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست. با تعداد اتم‌های کربن برابر، آنتالپی سوختن آلکان و آلکن نسبت به آنتالپی سوختن الکل بزرگ‌تر است و الکل‌ها نیز بیشتر از آلکن می‌باشد.

گزینه ۲: نادرست. هرچه تعداد اتم‌های کربن بیشتر باشد ارزش سوختی نیز بیشتر است.

گزینه ۳: نادرست. سرعت واکنش انفجار بیشتر از تشکیل سریع رسوب نقره کلرید است.

سرعت واکنش: انفجار < تشکیل سریع نقره کلرید < زنگ زدگی آهن < تجزیه سلولز کاغذ

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست. دما میزان سردی و گرمی مواد را نشان می‌دهد.

گزینه ۲: نادرست. ذرات سازنده ماده در تمامی حالت‌های فیزیکی دارای جنب‌وجوش هستند.

گزینه ۴: نادرست. دما میانگین تندی و انرژی جنبشی ذرات ماده است.

هرچه جرم مولی هیدروکربنی بیشتر باشد، آنتالپی سوختن یک مول از آن بیشتر خواهد بود. از طرفی گرمای سوختن مولی الکل‌هایی که یک گروه OH دارند، از گرمای سوختن مولی آلکان‌های هم‌کربن آن‌ها کمتر است.

اتین > اتانول > اتن > اتان : گرمای سوختن

باتوجه به اینکه دمای محلول افزایش یافته، انحلال گرماده بوده است.  
در اثر انحلال گرماده، مقداری گرما آزاد شده و به آب‌های اطراف می‌رسد؛ بنابراین محلول گرم شده و دمای آن افزایش می‌یابد.  
برای محاسبه pH، طبق رابطه داده شده، ابتدا باید غلظت مولی  $\text{OH}^-$  را تعیین کنیم:

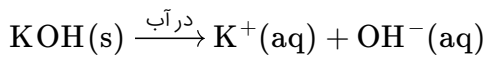
$$[\text{OH}^-] = \frac{\text{مول } \text{OH}^-}{\text{لیتر محلول}}$$

واضح است که هم نیاز به محاسبه مول  $\text{OH}^-$  داریم و هم نیاز به محاسبه لیتر محلول. ابتدا جرم  $\text{KOH}$  خالص را حساب می‌کنیم:

$$\text{KOH درصد خلوص} = \frac{\text{جرم KOH خالص}}{\text{جرم KOH ناخالص}} \times 100$$

$$\Rightarrow 80 = \frac{\text{جرم KOH خالص}}{0.7 \text{ g}} \times 100 \Rightarrow \text{جرم KOH خالص} = 0.56 \text{ g}$$

سپس از روی جرم  $\text{KOH}$  خالص، مول  $\text{OH}^-$  باتوجه به معادله انحلال  $\text{KOH}$ ، محاسبه می‌شود:



$$\text{KOH مولی جرم} = 39 + 16 + 1 = 56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$? \text{ mol OH}^- = 0.56 \text{ g KOH} \times \frac{1 \text{ mol KOH}}{56 \text{ g KOH}} \times \frac{1 \text{ mol OH}^-}{1 \text{ mol KOH}} = 0.01 \text{ mol OH}^-$$

لیتر محلول هم به راحتی محاسبه می‌شود:

$$? \text{ L محلول} = 100 \text{ mL محلول} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} = 0.1 \text{ L محلول}$$

بنابراین غلظت مولی  $\text{OH}^-$  به دست می‌آید:

$$[\text{OH}^-] = \frac{\text{مول } \text{OH}^-}{\text{لیتر محلول}} = \frac{0.01 \text{ mol}}{0.1 \text{ L}} = 0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

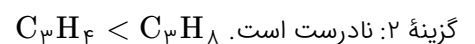
و در نهایت باتوجه به رابطه " $\text{pH} = 14 + \log[\text{OH}^-]$ " pH محلول را حساب می‌کنیم:

$$\text{pH} = 14 + \log[\text{OH}^-] = 14 + \log 0.1 = 14 + (-1) = 13$$

در مقایسه اندازه آنتالپی سوختن دو ترکیب آلی هرچه شمار اتم‌های C و H بیشتر باشد، گرمای آزاد شده بیشتر است.  
از سویی گرمای آزاد شده از سوختن هر اتم کربن بیشتر از گرمای آزاد شده از سوختن هر اتم هیدروژن است؛ بنابراین:



زیرا گرمای آزاد شده از سوختن آلکان در مقایسه با الکل هم کربن با آن بیشتر است.



گزینه ۴: درست است. شمار اتم‌های هیدروژن در گلوکز ( $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ ) از شمار اتم‌های هیدروژن در آسپرین بیشتر است ولی شمار اتم‌های کربن در آسپرین بیشتر است، ولی باتوجه به اینکه اهمیت اتم‌های C از H بیشتر است، پس گرمای آزاد شده از سوختن آسپرین بیشتر است.

$$m = 2 \text{ mol} \times \frac{18 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 36 \text{ g}$$

$$Q = mc\Delta\theta = 36 \times 4/184 \times 2 = 72 \times 4/184 \text{ kJ}$$

$$Q = 72 \times 4/184 \text{ J} \times \frac{1 \text{ cal}}{4/184 \text{ J}} = 72 \text{ cal}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: گرماسنج لیوانی برای اندازه‌گیری گرمای واکنش در فشار ثابت به کار می‌رود که هم‌ارز با آنتالپی واکنش است.

گزینه ۲: سوختگی حاصل از ریختن ۱۰۰ گرم آب  $100^\circ\text{C}$  روی پوست، بیشتر از ۱۰۰ گرم روغن زیتون با دمای  $100^\circ\text{C}$  است، زیرا ظرفیت گرمایی ویژه آب بیشتر از روغن زیتون است.

گزینه ۴: گرما را می‌توان هم‌ارز انرژی گرمایی دانست که به علت تفاوت در دما جاری می‌شود.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱:  $\text{pH}$  محلول ۰/۱ مولار هر سه اسید نام‌برده برابر با ۱ است.

گزینه ۲: قدرت اسیدی  $\text{HNO}_3 < \text{HF} < \text{HNO}_2$  و  $\text{pH}$  محلول ۰/۱ مولار آن‌ها نیز  $\text{HNO}_3 > \text{HF} > \text{HNO}_2$  است.

گزینه ۳: قدرت اسیدی  $\text{H}_2\text{CO}_3 > \text{CH}_3\text{COOH} > \text{HCOOH}$  و  $\text{pH}$  محلول ۰/۱ مولار آن‌ها نیز  $\text{HCOOH} < \text{CH}_3\text{COOH} < \text{H}_2\text{CO}_3$  است.

گزینه ۴: قدرت اسیدی  $\text{HCN} < \text{CH}_3\text{COOH} < \text{HCOOH}$  و  $\text{pH}$  محلول ۰/۱ مولار آن‌ها نیز  $\text{HCN} > \text{CH}_3\text{COOH} > \text{HCOOH}$  است.

یک مول از سه ماده جوش شیرین ( $\text{NaHCO}_3$ )،  $\text{Mg}(\text{OH})_2$  و  $\text{Al}(\text{OH})_3$  به ترتیب می‌توانند ۱، ۲ و ۳ مول  $\text{H}^+$  را خنثی کنند، پس ۲ میلی‌مول  $\text{Al}(\text{OH})_3$  می‌تواند ۶ میلی‌مول  $\text{H}^+$  را خنثی کند که در مقایسه با سایر گزینه‌ها بیشتر است.

اسید چرب کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی هستند که مولکول‌های آن‌ها ناقصی بوده و در هگزان حل می‌شوند.

موارد "ب" و "ت" درست هستند.

الف)  $\text{R} - \text{SO}_3^-$  یون سولفات نام دارد.

پ) سازه نمایش داده شده یک پاک‌کننده غیرصابونی را نمایش می‌دهد که در حقیقت در آب‌های سخت نیز قدرت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کند.

ث) برای نمایش ساختار لوویس باید تمامی پیوندها و الکترون‌های ناپیوندی رسم شوند.

اول با استفاده از حجم محلول، درصد جرمی HF و چگالی محلول، مول HF را به دست می‌آوریم:

$$\text{جرم مولی HF} = 1 + 19 = 20 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{mol HF} = 400 \text{ mL محلول} \times \frac{1 \text{ g محلول}}{1 \text{ mL محلول}} \times \frac{3 \text{ g HF}}{100 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol HF}}{20 \text{ g HF}} = 0.6 \text{ mol HF}$$

حال مولاریته HF به راحتی حساب می‌شود:

$$\text{HF مولاریته} = M_a = \frac{0.6 \text{ mol}}{0.4 \text{ L}} = \frac{3}{2} \text{ mol.L}^{-1}$$

چون سؤال مقادیر را به تقریب خواسته است، از رابطه تقریبی استفاده می‌کنیم:

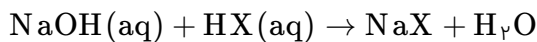
$$k_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M_a} \Rightarrow [\text{H}^+] = \sqrt{k_a \cdot M_a} = \sqrt{6 \times 10^{-4} \times \frac{3}{2}} = 3 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

تعداد مول‌های هیدرونیوم برابر است با:

$$\text{mol H}^+ = 400 \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{3 \times 10^{-2} \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 1/2 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

pH محلول برابر است با:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 3 \times 10^{-2} = 2 - \log 3 = 2 - 0.48 = 1.52$$



$$\begin{cases} [\text{H}^+] = M \cdot n \cdot \alpha \Rightarrow 10^{-3} = M \times 1 \times 0.05 \Rightarrow M = 0.02 \text{ mol.L}^{-1} \\ \text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow -\log[\text{H}^+] = 3 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \end{cases}$$

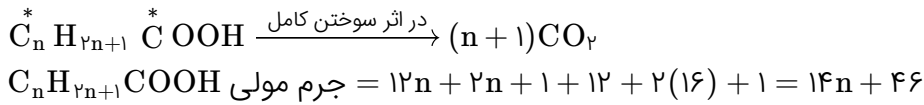
$$? \text{ L NaOH} = 40 \text{ mL HX} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{0.02 \text{ mol HX}}{1 \text{ L HX}} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ mol HX}} \times \frac{1 \text{ L NaOH}}{0.1 \text{ mol NaOH}} = 0.08$$

- سوانت آرنیوس نخستین کسی است که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.
- آرنیوس نشان داد که اسیدها به حالت محلول رسانای جریان الکتریکی هستند.
- زندگی اغلب آبزیان به میزان pH آب وابسته است.





در هنگام سوختن کامل یک ترکیب آلی به تعداد اتم‌های کربن موجود در آن، گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود. از طرف دیگر می‌دانیم اسیدهای چرب کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی هستند، که فرمول مولکولی آن‌ها به صورت  $C_nH_{2n+1}COOH$  می‌باشد. بنابراین:



روش اول: کسر تبدیل

$$62/4 \text{ g (اسید چرب)} \times \frac{1 \text{ mol (اسید چرب)}}{(14n + 46) \text{ g (اسید چرب)}} \times \frac{(n+1) \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol (اسید چرب)}} \times \frac{22/4 \text{ L } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 89/6 \text{ L } CO_2$$

$$n = 19 \xrightarrow{\text{در فرمول مولکولی عمومی کربوکسیلیک اسید}} C_{19}H_{39}COOH$$

به جای n عدد ۱۹ قرار می‌دهیم

روش دوم: تناسب

$$\frac{\text{g ماده}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} = \frac{\text{L گاز در شرایط STP}}{22/4 \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{62/4}{1 \times (14n + 46)} = \frac{89/6 \text{ L } CO_2}{(n+1) \times 22/4}$$

$$\Rightarrow n = 19 \Rightarrow \text{فرمول اسید چرب: } C_{19}H_{39}COOH$$

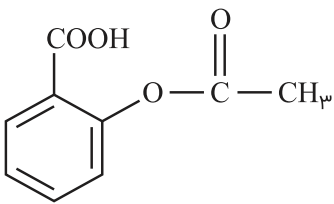
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست. نظریه آرنیوس محدود به محلول‌های آبی است. در این واکنش خبری از حالت محلول نیست.

گزینه ۲: نادرست. آنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر اساس یک نظریه علمی معرفی کرد.

گزینه ۴: نادرست. اکسید نافلزات عمدتاً اسید آرنیوس هستند.

فرمول ساختاری آسپرین به صورت زیر است:



در این ساختار یک گروه عاملی اسیدی وجود دارد؛ پس برای خنثی شدن آن به یک مول ماده ضد اسید جوش شیرین یا  $NaHCO_3$  نیاز است.

$$? \text{ g } NaHCO_3 = 1 \text{ mol آسپرین} \times \frac{1 \text{ mol } NaHCO_3}{1 \text{ mol آسپرین}} \times \frac{84 \text{ g } NaHCO_3 \text{ خالص}}{1 \text{ mol } NaHCO_3} \times \frac{100 \text{ g خالص}}{84 \text{ g خالص}} = 100$$

فرض کنید  $[a, b] = m$ . در این حالت برابری داده شده در مسئله به صورت زیر می شود:

$$m^{\Delta} = \lambda m^{\nu}$$

در نتیجه:  $m^{\Delta} = 8$  یعنی  $m = 2$ .

باتوجه به اینکه ک.م.م دو عدد طبیعی متمایز  $a$  و  $b$  برابر با ۲ است، پس یکی از آن ها برابر ۱ و دیگری برابر ۲ است، در نتیجه:  $a + b = 3$

گزینه ۳

۷۲

نکته: حاصلضرب  $n$  عدد صحیح متوالی حتماً بر  $n!$  بخش پذیر است.

گزینه ۳

۷۳

$$\begin{cases} a|bc^{\nu} \\ b|c^{\nu} \end{cases} \xrightarrow{\times} ab|bc^{\nu} \xrightarrow{\div b} a|c^{\nu}$$

گزینه (۳) صحیح است.

گزینه ۴

۷۴

$$\left. \begin{matrix} a \equiv 3^f \\ a \equiv 3^f \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \equiv_{[f, f]} 3^f \Rightarrow a \equiv 3^f \Rightarrow 2a + 1 \equiv 2(3) + 1 \equiv 7$$



راه حل اول:

$$9^{35} = (3^2)^{35} = 3^{70}$$

$$3^4 \equiv 81 \equiv 5 \pmod{19} \xrightarrow{\text{توان } 2} 3^8 \equiv 5 \times 5 \equiv 25 \equiv 6 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 3^9 \equiv 18 \equiv -1 \pmod{19} \Rightarrow 3^{18} \equiv 1 \pmod{19}$$

$$3^{18} \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 4} 3^{72} \equiv 1 - 19 = -18 \xrightarrow[\substack{\div 9 \\ (9,19)=1}}{\div 9} 3^{70} \equiv -2 \pmod{19}$$

$$2n + 9^{35} \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow 2n - 2 \equiv 0 \xrightarrow{\div 2} n \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow n = 19k + 1$$

$$1 \leq 19k + 1 < 100 \Rightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 5$$

یعنی شش جواب کمتر از ۱۰۰ برای n وجود دارد.

راه حل دوم:

$$9^{35} = (3^2)^{35} = 3^{70}$$

$$3^{18} \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 4} 3^{72} \equiv 1 - 19 = -18 \xrightarrow[\substack{\div 9 \\ (9,19)=1}}{\div 9} 3^{70} \equiv -2 \pmod{19}$$

$$2n + 9^{35} \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow 2n - 2 \equiv 0 \xrightarrow{\div 2} n \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow n = 19k + 1$$

$$1 \leq 19k + 1 < 100 \Rightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 5$$

یعنی شش جواب کمتر از ۱۰۰ برای n وجود دارد.

مربع هر عدد فرد به صورت  $8k + 1$  است، پس  $a^2 = 8k + 1$  از طرفی  $a^2 = 7k' + 3$  پس:

$$\begin{cases} \times 7 \left\{ a^2 = 8k + 1 \Rightarrow 7a^2 = 56k + 7 \right. \\ \times 8 \left\{ a^2 = 7k' + 3 \Rightarrow 8a^2 = 56k' + 24 \right. \end{cases} \xrightarrow{-} a^2 = 56q + 17$$

یعنی باقی‌مانده  $a^2$  بر ۵۶ برابر ۱۷ است.

$$\text{نکته: } a \equiv b \pmod{m}, a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m,n]}$$

فرض کنیم a بزرگ‌ترین عدد فرد ۳ رقمی باشد که در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده ۳ می‌دهد. لذا داریم:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{5} \text{ (a فرد است)} \Rightarrow a \equiv 1 + 2 \pmod{5} \text{ (I)} \\ a \equiv 3 \pmod{5} \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} a \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow a \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow a = 10k + 3$$

$$\Rightarrow 100 \leq a \leq 999 \Rightarrow 100 \leq 10k + 3 \leq 999 \Rightarrow 9/7 \leq k \leq 99/6$$

$$\Rightarrow k_{\max} = 99 \Rightarrow a_{\max} = 10 \times 99 + 3 = 993 \Rightarrow 9 + 9 + 3 = 21$$

هر عدد زوج صحیح به یکی از دو فرم  $۴k + ۲$  یا  $۴k$  است. یعنی:

$$a = ۴k \Rightarrow a^۳ = ۶۴k^۳ = \lambda(\underbrace{\lambda k^۳}_q) = \lambda q \Rightarrow \text{باقی مانده} = ۰$$

$$a = ۴k + ۲ \Rightarrow a^۳ = (۴k + ۲)^۳ = ۶۴k^۳ + ۹۶k^۲ + ۴۸k + ۸ = \lambda(\underbrace{\lambda k^۳ + ۱۲k^۲ + ۶k + ۱}_q)$$

$$\Rightarrow a^۳ = \lambda q \Rightarrow \text{باقی مانده} = ۰$$

$$\overline{\omega 1xy\omega ۲} \equiv ۰ \Rightarrow \omega ۲ \equiv ۰$$

$$\overline{\omega 1xy\omega ۲} \equiv ۰ \Rightarrow \omega + ۲ + y + x + ۱ + \omega \equiv ۰ \Rightarrow x + y \equiv -۱۳ \equiv ۵ \xrightarrow{۰ \leq x+y \leq ۱۸} x + y = ۵ \text{ یا } ۱۴$$

$$x+y=۵ \rightarrow \begin{array}{c|cccccc} x & ۵ & ۴ & ۳ & ۲ & ۱ & ۰ \\ \hline y & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{array}$$

$$x+y=۱۴ \rightarrow \begin{array}{c|cccccc} x & ۹ & ۸ & ۷ & ۶ & ۵ \\ \hline y & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ \end{array}$$

در مجموع ۱۱ جواب وجود دارد.

فرض کنیم  $d = (۶n + ۱۱, ۴n + ۷)$  آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} d|۴n + ۷ &\xrightarrow{\times ۶} d|۲۴n + ۴۲ \xrightarrow{(-)} d|۲ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } d = ۲ \\ d|۶n + ۱۱ &\xrightarrow{\times ۴} d|۲۴n + ۴۴ \end{aligned}$$

می‌دانیم اعداد  $۶n + ۱۱$  و  $۴n + ۷$  فرد هستند، بنابراین ب.م.م آن‌ها نمی‌تواند ۲ باشد، پس  $d = ۲$  غیرقابل قبول است، بنابراین همواره داریم  $d = ۱$ ، در نتیجه این دو عدد همواره نسبت به هم اول‌اند و تمامی اعداد دورقمی  $n$  جواب مسئله است، بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

گزینه ۱: ماتریس مربعی از مرتبه  $۳ \times ۳$  است (مرتبه ۳).

گزینه ۲: ماتریس مربعی از مرتبه  $۲ \times ۲$  است (مرتبه ۲).

گزینه ۳: ماتریس از مرتبه  $۳ \times ۱$  است (این ماتریس فقط ستونی است).

گزینه ۴: این ماتریس فقط یک سطر و یک ستون دارد.

پس گزینه ۴ صحیح است.

نکته: هر عدد حقیقی یک ماتریس مربعی از مرتبه  $۱ \times ۱$  می‌باشد، که هم سطری و هم ستونی است.

نکته: ماتریس مربعی که هم سطری باشد و هم ستونی، همواره ماتریس  $۱ \times ۱$  است، پس هریک از اعداد حقیقی چنین خاصیتی را دارند.

باتوجه به رابطه  $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$  جواب را پیدا می‌کنیم:

$$(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 18 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 18 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + AB + BA$$

$$\Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 18 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 16 & 11 \end{bmatrix}$$

طبق فرض داریم:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2 & b \\ c & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a + 6 + c & -9 + 3b \\ 4a - 2 + 2c & 14 - b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ماتریس اسکالر است}} \begin{cases} -2a + 6 + c = 14 - b \\ -9 + 3b = 0 \\ 4a - 2 + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b + c = 8 \\ 3b = 9 \\ 4a + 2c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر  $a$ ,  $b$  و  $c$  در گزینه‌ها، نتیجه می‌شود گزینه ۳ ماتریس قطری است، زیرا:

$$\begin{bmatrix} a + b & b - c \\ 3a + c & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$



چون  $L_1$  و  $L_2$  موازی و متمایزند، دستگاه دو معادله - دو مجهولی که با این دو خط تشکیل می‌شود، فاقد جواب است. پس اولاً دترمینان ضرایب آن صفر است و داریم:

$$\begin{vmatrix} m^2 - 1 & m \\ 3 & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m \begin{vmatrix} m^2 - 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m(m^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

حال با جایگذاری مقدار  $m$  در معادله خطوط  $L_1$  و  $L_2$ ، وضعیتی که دستگاه فاقد جواب است را می‌یابیم:

$$m = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x = -1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{فاقد جواب}$$

$$m = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\frac{3}{3} = \frac{2}{2} = \frac{1}{1}} \text{بی‌شمار جواب}$$

$$m = -2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\frac{3}{3} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-3}{1}} \text{فاقد جواب}$$

پس  $m = 0$  و  $m = -2$  قابل قبول‌اند. در نهایت با جایگذاری این مقادیر در معادله خطوط  $L_3$  و  $L_4$ ، وضعیت این دو خط را می‌یابیم:

$$m = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 4y = 2 \end{cases}, |A| \neq 0$$

بنابراین جواب منحصر به فرد است و در نتیجه  $L_3$  و  $L_4$  متقاطع‌اند.

$$m = -2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

معادله بی‌شمار جواب دارد، در نتیجه  $L_3$  و  $L_4$  منطبق‌اند.

دستگاه  $\begin{cases} (a+2)x - y = 4 \\ 6x - (a+1)y = 5 \end{cases}$  هنگامی جواب ندارد که دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد، یعنی:

$$\begin{vmatrix} a+2 & -1 \\ 6 & -(a+1) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underbrace{-(a+1)(a+2) + 6}_{a^2 + 3a + 2} = 0 \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -4 \end{cases}$$

حال با قرار دادن  $a = 1$  در دستگاه  $\begin{cases} -x - y = 2 \\ -4x + ay = 8 \end{cases}$ ، دستگاه دارای یک جواب خواهد بود و با قرار دادن  $a = -4$  در دستگاه دوم، دستگاه بی‌شمار جواب خواهد داشت.

هر ماتریس همانی یک ماتریس مربعی است که تمامی درایه‌ها روی قطر اصلی عدد یک است و بقیه درایه‌ها (بالا و پایین قطر اصلی) عدد صفر می‌باشد (ماتریس‌های همانی را با  $I$  نمایش می‌دهیم)، پس گزینه ۳ صحیح است. چون گزینه ۳ از مرتبه ۳، پس  $I_{3 \times 3}$  یا  $I_3$  می‌نویسیم.

گزینه ۱: ماتریس اسکالر است. در واقع ماتریس مربعی که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر است و بقیه درایه‌ها صفر است.

گزینه ۲: ماتریس  $3 \times 3$  ولی همانی نیست.

گزینه ۴: این ماتریس قطری است، ماتریس مربعی که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن اعدادی حقیقی و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشد، قطری نام دارد (البته می‌تواند قطر اصلی هم صفر باشد).

$$A + 3A = \begin{bmatrix} b+2 & a+3 \\ b-5 & a-2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 4A = \begin{bmatrix} b-1 & a+3 \\ b-5 & a-5 \end{bmatrix}$$

از آنجا که  $A$  ماتریس قطری است، در نتیجه:

$$a+3=0 \Rightarrow a=-3$$

$$b-5=0 \Rightarrow b=5 \Rightarrow 4A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$A$  ماتریس با ۶ درایه است پس این ماتریس یکی از حالات  $6 \times 1$ ،  $1 \times 6$ ،  $2 \times 3$  و  $3 \times 2$  است چون حداکثر تعداد ستون ماتریس  $A$  عددی اول است، پس این ماتریس از مرتبه  $2 \times 3$  می‌باشد. در این صورت،  $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$  است، در نتیجه:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

چون  $a_{ij} = i^j$ ، پس در این صورت ماتریس  $A$  به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1^1 & 1^2 & 1^3 \\ 2^1 & 2^2 & 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{مجموع درایه سطر اول} : 1+1+1=3 \\ \text{مجموع درایه ستون دوم} : 1+4=5 \end{cases} \Rightarrow 3+5=8$$

در نتیجه گزینه ۴ صحیح است.

می‌دانیم  $(A^{-1})^{-1} = A$ . پس:

$$A = \frac{1}{\lambda-6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\lambda-6} & -\frac{1}{\lambda-6} \\ -\frac{3}{\lambda-6} & \frac{1}{\lambda-6} \end{bmatrix}$$

اکنون به دست می‌آید:

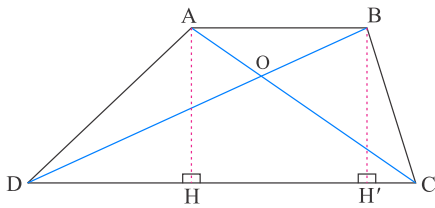
$$2A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

در نتیجه:

$$2A + I = -I \Rightarrow 2A = -2I \Rightarrow A = -I \Rightarrow A^3 = -I$$

$$A^3 B = -IB = -B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

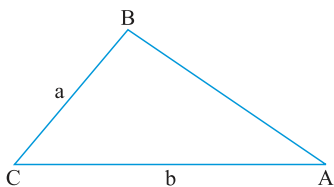


طبق فرض، داریم:

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAD} &= S_{\triangle OBC} \Leftrightarrow S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OCD} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} \\ \Leftrightarrow S_{\triangle ACD} &= S_{\triangle BCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} CD \times AH = \frac{1}{2} CD \times BH' \\ \Leftrightarrow AH &= BH' \Leftrightarrow AB \parallel DC \\ \Leftrightarrow \text{چهارضلعی } ABCD &\text{ دوزنقه یا متوازی‌الاضلاع است} \end{aligned}$$

از آنجاکه  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ، پس  $AB \parallel CD$ ، پس چهارضلعی دوزنقه است. می‌دانیم  $\triangle AOB \sim \triangle DOC$  و نسبت تشابه  $\frac{1}{2}$  می‌باشد، پس گزاره الف صحیح است.

از آنجاکه نسبت تشابه  $\frac{1}{2}$  است، پس  $\frac{OB}{OD} = \frac{1}{2}$ ، در نتیجه گزاره ب نیز صحیح است و از آنجاکه  $\frac{AC}{OC} = \frac{3}{2}$  گزاره ج نیز صحیح می‌شود. هر سه گزاره صحیح هستند.



$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$$s = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{4}$$



تعداد قطرهای هر  $n$  ضلعی محدب  $\frac{n(n-3)}{2}$  است، پس:

$$\frac{n(n-3)}{2} = n + 25 \Rightarrow n^2 - 3n = 2n + 50$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n - 50 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+5) = 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 10$$

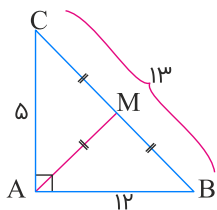
پس مسئله ما برای ۱۰ ضلعی منتظم طرح شده است. هر زاویه داخلی ده ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{(10-2) \times 180^\circ}{10} = 144^\circ$$

از هر رأس ۷ قطر رسم می‌شود که زوایای متوالی آن‌ها  $18^\circ$  است.  $\frac{144}{8} = 18^\circ$

یک  $n$  ضلعی شبکه‌ای حداقل  $n$  نقطه مرزی دارد، زیرا برای این که چندضلعی شبکه‌ای باشد باید هر رأس آن روی نقطه شبکه‌ای قرار داشته باشد، ولی مسلماً تعداد نقطه‌های مرزی می‌تواند از  $n$  بیشتر باشد، زیرا هر ضلع آن می‌تواند شامل چندین نقطه شبکه‌ای دیگر باشد.

طول اضلاع در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند:  $13^2 = 12^2 + 5^2$



بنابراین مثلث موردنظر قائم‌الزاویه می‌باشد. اما می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه:

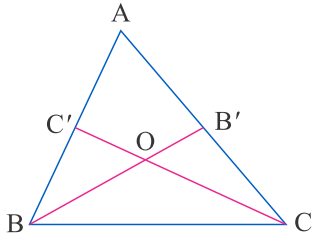
(۱) محل برخورد ارتفاع‌ها روی رأس زاویه قائمه قرار دارد.

(۲) محل برخورد عمود منصف‌ها در وسط وتر قرار دارد.

بنابراین باید طول  $AM$  را بیابیم اما می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس:

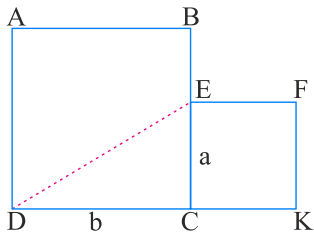
$$AM = 13 \div 2 = 6.5$$

فرض کنیم  $O$  مرکز ثقل مثلث باشد. باتوجه به اینکه میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند، داریم:



$$OB = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}(6) = 4, \quad OC = \frac{2}{3}CC' = \frac{2}{3}(9) = 6$$

باتوجه به اینکه  $OC \not\perp BC + OB$  نتیجه می‌گیریم مثلث  $BOC$  قابل رسم نیست و در نتیجه مثلث  $ABC$  قابل رسم نخواهد بود.



طول ضلع‌های مربع  $EFKC$  را  $a$  و طول ضلع‌های مربع  $ABCD$  را  $b$  فرض می‌کنیم:

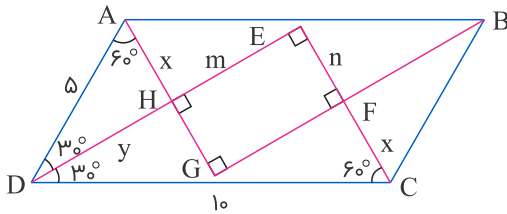
$$\left. \begin{array}{l} S_{EFKC} = a^2 \\ S_{ABCD} = b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموع مساحت‌ها} = a^2 + b^2$$

طبق فرض  $a^2 + b^2 = 64$ ، از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه  $DEC$  داریم:

$$\begin{aligned} DE^2 &= DC^2 + CE^2 \Rightarrow DE^2 = a^2 + b^2 \\ \Rightarrow DE^2 &= 64 \Rightarrow DE = 8 \end{aligned}$$

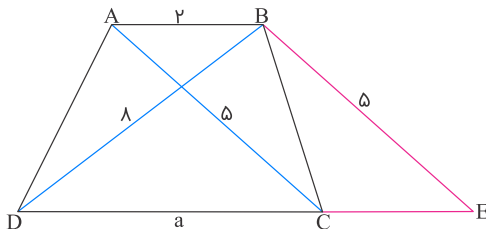


می‌دانیم چهار ضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی متوازی‌الاضلاع، یک مستطیل است.



$$\begin{aligned} \triangle ADH : \begin{cases} x = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \triangle CED : \begin{cases} m + y = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 \Rightarrow m = \frac{10\sqrt{3}}{2} - y \Rightarrow m = \frac{10\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ n + x = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \Rightarrow n = 5 - x \Rightarrow n = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$EF GH \text{ محیط مستطیل} = 2(n + m) = 2 \times \left( \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \right) = 5 + 5\sqrt{3}$$



ابتدا از رأس C موازی و مساوی ضلع AB جلو می‌رویم تا به رأس E برسیم.  
چهارضلعی ABEC متوازی‌الاضلاع است، پس  $BE = AC = 5 \text{ cm}$ .  
حال در مثلث BDE نامساوی مثلثی را می‌نویسیم  $(CD = a)$ :

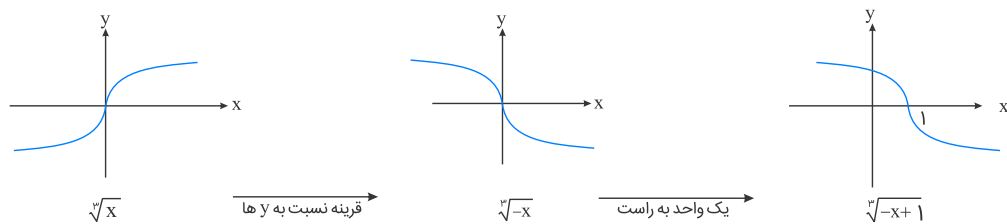
$$\begin{cases} \lambda + 5 > a + 2 \Rightarrow a < 11 \\ \lambda + a + 2 > 5 \Rightarrow a > -5 \\ 5 + a + 2 > \lambda \Rightarrow a > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < a < 11$$

$$D_g : (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

x		-1	0	1	
x		-	-	o	+
(x-1)		-	-	-	o
f(x)=(x+1)h(x)		+	o	-	-
g(x)		+	-	+	-

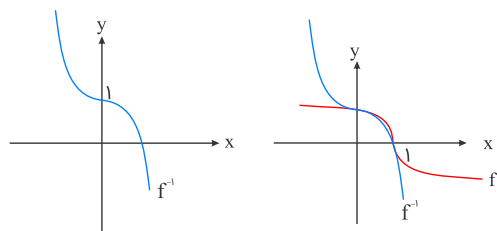
گزینه ۴

۱۰۲



$$y = \sqrt[3]{-x+1} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} y^3 = -x+1 \Rightarrow x = -y^3+1$$

$$y = -x^3+1 = f^{-1}(x)$$



طبق شکل می بینیم یک نقطه برخورد  $f$  و  $f^{-1}$ ،  $(0, 1)$  است.

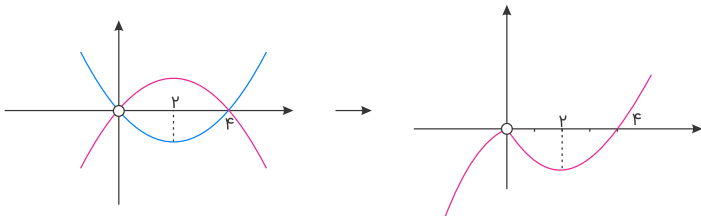
$$A(0, 1) \in f(x) = \sqrt[3]{-x+1}$$

$$A(0, 1) \in f^{-1}(x) = -x^3+1$$

توجه کنید  $x^2 = |x|^2$ ، با فرض  $x \neq 0$  داریم:  $\frac{x^2}{|x|} = |x|$ . در نتیجه:

$$f(x) = |x|(x - 4) = \begin{cases} x(x - 4) & ; x > 0 \\ -x(x - 4) & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



باتوجه به شکل، تابع در بازه  $(0, 2]$  نزولی اکید است. پس:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x + 1$ ،  $x + 2$  و  $x$ ، ۹ است، بنابراین  $f$  به صورت  $f(x) = ax(x + 1)(x + 2) + 9$  است. حال چون  $f$  بر  $x + 3$  بخش‌پذیر است، پس  $f(-3) = 0$ :

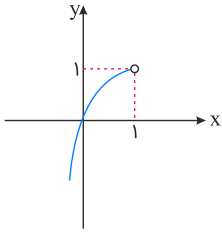
$$f(-3) = a(-3)(-3 + 1)(-3 + 2) + 9 = 0 \Rightarrow -6a = -9 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x(x + 1)(x + 2) + 9 = \frac{3}{2}(x^3 + 3x^2 + 2x) + 9$$

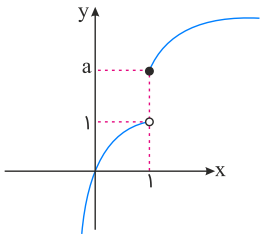
$$\Rightarrow 3a + b + c = \frac{3}{2}(3 + 3 + 2) = 12$$



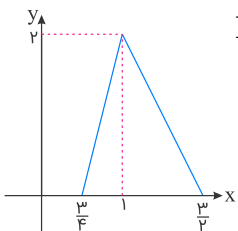
باتوجه به اینکه  $1 + (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ ، نمودار این ضابطه را در  $x < 1$  رسم می‌کنیم.



برای آنکه تابع  $f$  اکیداً صعودی باشد، کافی است عرض نقطهٔ توپُر، از عرض نقطهٔ توخالی بزرگ‌تر یا مساوی باشد (در سایر نقاط هر دو ضابطه روند صعودی خود را طی می‌کند و نیازی به بررسی نیست) یعنی:  $a \geq 1$ . بنابراین یکی از حالت‌های نمودار می‌تواند به صورت زیر باشد:



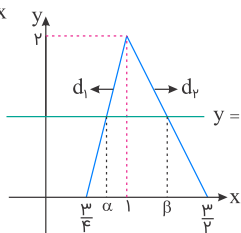
ابتدا تابع  $f(2x-2)$  را رسم می‌کنیم. برای این کار لازم است نمودار را ۲ واحد به سمت راست منتقل کرده و سپس طول نقاط را نصف کرد.



$$D_{f \circ f(2x-2)} = \left\{ x \mid x \in D_{f(2x-2)}, R_{f(2x-2)} \in D_{f(x)} \right\}$$

$$= \left\{ x \mid x \in \left[ \frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right], R_{f(2x-2)} \in \left[ \frac{-1}{2}, 1 \right] \right\}$$

باتوجه به شکل، مقادیری را می‌خواهیم که زیر خط  $y = 1$  قرار بگیرد. برای محاسبهٔ  $\alpha$  و  $\beta$  باید معادلات خطی  $d_1$  و  $d_2$  را به دست آوریم.



$$d_1 \Rightarrow \left( \frac{3}{4}, 0 \right), (1, 2) \Rightarrow a_{d_1} = \frac{2-0}{1-\frac{3}{4}} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

$$y - 2 = 8(x - 1) \Rightarrow y = 8x - 6$$

$$d_2 \Rightarrow (1, 2), \left( \frac{3}{2}, 0 \right) \Rightarrow a_{d_2} = \frac{2-0}{1-\frac{3}{2}} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$$

$$y - 2 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 6$$

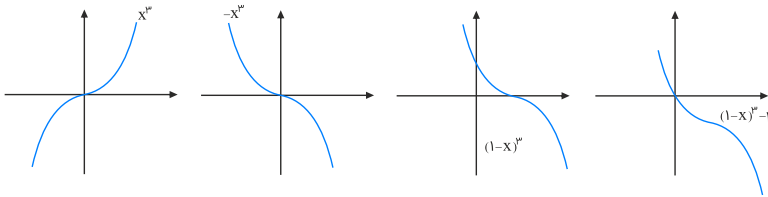
$$f(2x-2) = \begin{cases} 8x - 6 & ; \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \\ -4x + 6 & ; 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 6 = 1 \Rightarrow x = \frac{7}{8} \\ -4x + 6 = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

پس دامنهٔ تابع  $f \circ f(2x-2)$  برابر  $\left[ \frac{3}{4}, \frac{7}{8} \right] \cup \left[ \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right]$  است.

برای به دست آوردن نمودار تابع  $g(x)$  از روی نمودار  $f$  ابتدا به طول نقاط ۲ واحد اضافه کرده (نمودار دو واحد به سمت راست منتقل شده است) سپس عرض نقاط را دو برابر کرده و ۳ واحد به آنها می‌افزاییم:

$$f(4) = 3 : (4, 3) \xrightarrow{\text{افزایش ۲ واحدی طول}} (6, 3) \\ \xrightarrow{\text{دو برابر شدن عرض نقطه}} (6, 6) \xrightarrow{\text{افزایش دو واحدی عرض}} (6, 9)$$

مرحله به مرحله جلو می‌رویم:



ابتدا تابع وارون  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0, g(x) \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0, g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y^{-1} = x^2 \\ -\sqrt{-x} = y \Rightarrow -x = y^2 \Rightarrow y^{-1} = -x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

دقت کنید دامنه‌ها در تابع  $g^{-1}$ ، همان برد ضابطه‌ها در تابع  $g$  است. حال تعیین می‌کنیم تابع  $f$  در چه بازه‌هایی بالای تابع  $g^{-1}$  قرار دارد:

$$x \geq 0 \Rightarrow x^3 > x^2 \Rightarrow x > 1 \xrightarrow{x \geq 0 \text{ با } \cap} x > 1$$

$$x < 0 \Rightarrow x^3 > -x^2 \Rightarrow x^2(x+1) > 0 \Rightarrow x > -1 \xrightarrow{x < 0 \text{ با } \cap} -1 < x < 0$$

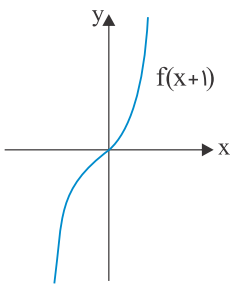
پس گزینه ۳ درست است.

تذکر: تعیین وارون تابع  $g$  و پیدا کردن بازه‌ای که  $f$  بالای آن است، از طریق رسم دقیق نمودار هم به سادگی ممکن است.

نمودار  $f(x)$  را یک واحد در راستای محور  $x$ ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

برای به دست آوردن دامنه باید نامعادله  $\frac{x}{f(x+1)} \geq 0$  را حل کنیم.  $x$  و  $f(x+1)$  باید هم‌علامت باشند و مخرج هم صفر نشود. طبق نمودار،  $x$  و  $f(x+1)$  هم‌علامت هستند.

$$f(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$$



گزینه ۲

۱۱۱

ابتدا نمودار را ۳ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم، پس  $y = -|x - ۴|$  می‌شود.

$$B \Rightarrow y_B = 0 \Rightarrow x_B = ۴$$

بار دیگر نمودار را  $a$  واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. ( $a > 0$ )

$$y = -|x - ۱ + a|$$

$$A \Rightarrow y_A = 0 \Rightarrow x_A = ۱ - a$$

$$C \Rightarrow -|x - ۴| = -|x - ۱ + a| \Rightarrow \begin{cases} x - ۴ = x - ۱ + a \Rightarrow a = -۳ \quad \times \\ x - ۴ = -x + ۱ - a \Rightarrow ۲x = ۵ - a \Rightarrow x = \frac{۵ - a}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_C = \frac{۵ - a}{۲}$$

$$y = -\left| \frac{۵ - a}{۲} - ۴ \right| = -\left| \frac{-۳ - a}{۲} \right|$$

$$\xrightarrow{a > 0} y = -\frac{۳ + a}{۲} \Rightarrow y_C = -\frac{۳ + a}{۲}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{۲} AB \times |y_C| = ۹ \Rightarrow \frac{(۴ - ۱ + a) \times (۳ + a)}{۲} = ۱۸$$

$$\Rightarrow (۳ + a)^۲ = ۳۶ \Rightarrow \begin{cases} ۳ + a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \quad \checkmark \\ ۳ + a = -۶ \Rightarrow a = -۹ \quad \times \end{cases}$$

گزینه ۳

۱۱۲

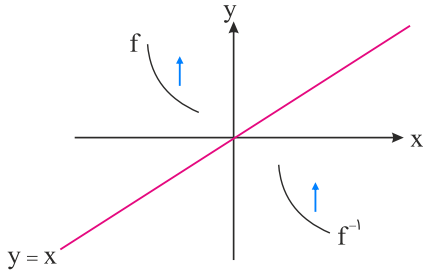
دامنه  $f(x)$  برابر  $[-۱, ۳]$  است، پس دامنه تابع  $f(۲x)$  برابر  $[-\frac{1}{۲}, \frac{۳}{۲}]$  است. دامنه تابع  $g(x)$  برابر  $[-۲, ۴]$  است؛ بنابراین دامنه تابع  $g(x-۱)$  برابر  $[-۱, ۵]$  است.

$$f(x+۱) = 0 \Rightarrow x+۱ = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

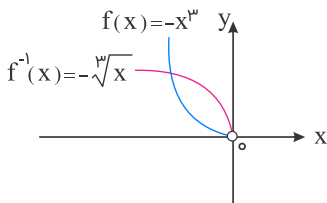
$$D_g = [-\frac{1}{۲}, \frac{۳}{۲}] \cap [-۱, ۵] - \{1\} = [-\frac{1}{۲}, 1) \cup (1, \frac{۳}{۲}]$$



با در نظر گرفتن یک حالت نقض می‌توان نشان داد گزینه ۲ درست نیست.



چون  $f$  و  $f^{-1}$  نسبت به  $y = x$  قرینه‌اند، از نظر صعودی و نزولی مثل هم هستند و گزینه (۱) درست است. توابع  $f(x) = -x^3; x < 0$  و  $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}, x < 0$  یکدیگر را روی  $y = -x$  قطع می‌کنند.



پس ترکیب  $f$  و  $f^{-1}$  می‌تواند خود  $y = x$  یا بخشی از آن باشد. می‌دانیم 
$$\begin{cases} y = f(f^{-1}(x)) = x; x \in D_{f^{-1}} \\ y = f^{-1}(f(x)) = x; x \in D_f \end{cases}$$

باقی‌مانده  $f(x)$  بر  $x - 1$  برابر  $-3$  است یعنی  $f(1) = -3$  و بر  $x + 1$  برابر  $4$  است یعنی  $f(-1) = 4$ . پس داریم:

$$x^2 + x^2 + f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + (ax + b)$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 + 1 + f(1) = 0 + a + b$$

$$\Rightarrow 2 + (-3) = a + b \Rightarrow a + b = -1 \quad (1)$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 + 1 + f(-1) = 0 - a + b$$

$$\Rightarrow 2 + 4 = -a + b \Rightarrow -a + b = 6 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{7}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow R(x) = -\frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$$

به ترتیب اعمال مورد نظر را انجام می‌دهیم.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f_1(x) = (x + 4)^2$$

$$f_2(x) = -(x + 4)^2 \Rightarrow f_3(x) = -2(x + 4)^2$$

$$f_4(x) = -2(x + 4)^2 - 3 = -2(x^2 + 8x + 16) - 3$$

در نتیجه:

$$y = -2x^2 - 16x - 35$$

باتوجه به شکل مقدار تابع در  $x = a$  برابر با  $-۴$  می‌شود؛ پس:

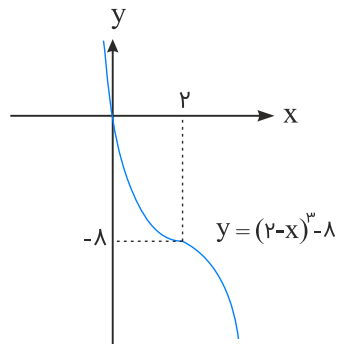
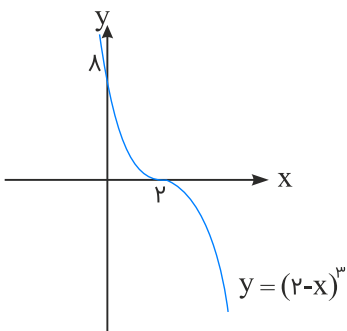
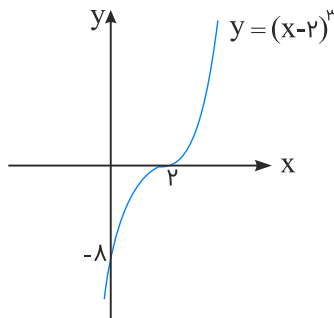
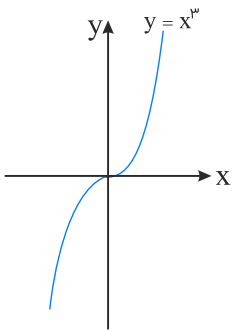
$$y = (a - x)^۳ - b \xrightarrow{x=a} -b = -۴ \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow y = (a - x)^۳ - ۴$$

تابع در  $y = ۴$  محور  $y$  ها را قطع می‌کند، یعنی:

$$y(۰) = ۴ \Rightarrow (a)^۳ - ۴ = ۴ \Rightarrow a^۳ = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

$$f(x) = \underbrace{۶x^۲ - x^۳ - ۱۲x + ۸}_{(۲-x)^۳} - ۸ = (۲-x)^۳ - ۸$$

حال با انتقال نمودار  $y = x^۳$  نمودار تابع موردنظر را رسم می‌کنیم. مراحل به صورت زیر انجام می‌شود:

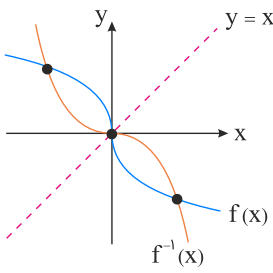


چون تابع  $f(x)$  اکیداً صعودی است، مبنای لگاریتم باید بزرگ‌تر از ۱ باشد. داریم:

$$۲ - |۴m| > ۱ \Rightarrow |۴m| < ۱ \Rightarrow -۱ < ۴m < ۱ \Rightarrow -\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4}$$

برای رسم نمودار وارون  $f(x)$  باید آن را نسبت به خط  $y = x$  قرینه کنیم:

نمودار دو تابع در سه نقطه باهم برخورد می‌کنند، به علاوه می‌توانید از این نکته مهم استفاده کنید که نمودار  $y = -\sqrt[3]{x}$  شبیه تابع  $y = -\sqrt[3]{x}$  است.



بررسی موارد:

مورد "الف":

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}, f(x) = -1$$

$$-\sin^r \pi x \neq 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} -1 \leq -\sin^r \pi x < 0 \Rightarrow [-\sin^r \pi x] = -1 \Rightarrow g(x) = -1$$

$$\Rightarrow D_f = D_g, f(x) = g(x) \Rightarrow f = g$$

مورد "ب":

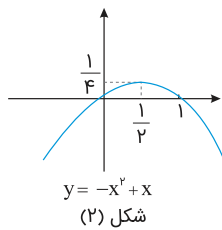
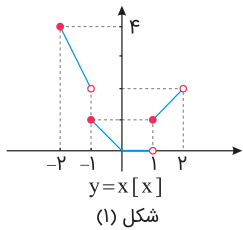
$$-x[x] \geq 0 \Rightarrow x[x] \leq 0 \xrightarrow{\text{شکل ۱}} 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_f = [0, 1), f(x) = 0$$

$$\begin{cases} -x^r + x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow D_g = [0, 1)$$

$$y = -x^r + x = -\left(x - \frac{1}{r}\right)^r + \frac{1}{r} \xrightarrow{\text{شکل ۲}, 0 \leq x < 1} 0 \leq y \leq \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt[r]{y} \leq \frac{1}{r} \Rightarrow [\sqrt[r]{y}] = 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

$$\Rightarrow D_f = D_g, f(x) = g(x) \Rightarrow f = g$$



مورد "پ":

$$f(x) = \sqrt{x^r - 2x^r + 1} = \sqrt{(x^r - 1)^2} = |x^r - 1|$$

$$\Rightarrow f(x) \neq g(x) \Rightarrow f \neq g$$

نکته: اگر  $f(x)$  یک چندجمله‌ای معکوس‌پذیر از درجه  $n \in \mathbb{N}$  باشد،  $f^{-1}(x)$  تابعی از درجه  $\frac{1}{n}$  خواهد بود.  
در این تست از آنجایی که  $y = f(x) + f^{-1}(x)$  تابعی خطی و از درجه اول است، نتیجه می‌گیریم که  $n = 1$  بوده است؛ یعنی خود  $f$  تابعی درجه اول است:

$$\begin{aligned} f(x) = ax + b &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \\ \Rightarrow f(x) + f^{-1}(x) &= ax + b + \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = x\left(a + \frac{1}{a}\right) + b - \frac{b}{a} \\ \Rightarrow x\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b - \frac{b}{a}\right) &= -2x + 4 \\ \Rightarrow a + \frac{1}{a} = -2, \quad b\left(1 - \frac{1}{a}\right) &= 4 \\ a^2 + 2a + 1 = 0 &\Rightarrow a = -1 \Rightarrow b\left(1 - \frac{1}{(-1)}\right) = 4 \\ \Rightarrow 2b = 4 &\Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -x + 2, \quad f^{-1}(x) = -x + 2 \\ \Rightarrow f^{-1}(4) + f(4) &= (-4 + 2) + (-4 + 2) = -6 \end{aligned}$$

گزینه ۱

۱۲۲

اول:  $x = -[x^2 + 1] + 5 + [x]$  است و تمامی عبارت‌های سمت راست این تساوی اعداد صحیح هستند، پس  $x$  نیز عددی صحیح است.  
اگر  $x$  صحیح باشد،  $x^2 + 1$  نیز صحیح خواهد بود. پس تمامی جزء صحیح‌ها را می‌توانیم حذف کنیم زیرا اگر  $x \in \mathbb{Z}$  آنگاه  $[x] = x$  است.  
دوم:

$$x^2 + 1 + x = 5 + x \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

هر دو جواب به دست آمده صحیح هستند، پس قابل قبول‌اند. مجموع جواب‌ها برابر  $0 = (-2) + 2$  است.

گزینه ۳

۱۲۳

در تابع یک‌به‌یک هر خط موازی محور  $x$ ها نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. تنها گزینه "۳" این ویژگی را دارد.

گزینه ۳

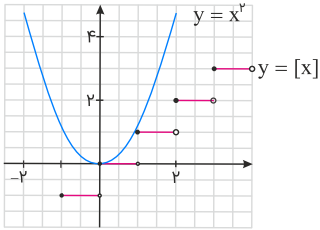
۱۲۴

$$\begin{aligned} f \text{ دامنهٔ تابع } &: x + a \geq 0 \Rightarrow x \geq -a \\ g \text{ برد تابع } &: \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} - 2 \geq -2 \end{aligned}$$

اگر دامنه تابع  $f$  با برد تابع  $g$  برابر باشد  $a = 2$  است. حال محاسبهٔ ریشهٔ مشترک:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x = 3 \\ f(3) = 0 &\Rightarrow b - \sqrt{3+2} = 0 \Rightarrow b = \sqrt{5} \Rightarrow b^2 = 5 \Rightarrow b^2 - a = 3 \end{aligned}$$

نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = [x]$  را رسم کرده‌ایم. این دو تابع در نقاط  $x = 0$  و  $x = 1$  برابرند:



$$f(x) = \sqrt{x^2 - [x]} \Rightarrow D_f = x^2 - [x] \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq [x]$$

جاهایی را می‌خواهیم که نمودار  $x^2$  بالای  $[x]$  یا با آن برابر باشد مطابق شکل در نقاط  $x = 0$  و  $x = 1$ ، دو نمودار با هم برابرند و در دیگر نقاط، نمودار  $x^2$  بالای  $[x]$  قرار دارد. بنابراین دامنه تابع برابر با  $\mathbb{R}$  است. به راحتی با عددگذاری هم می‌توانید تست را حل کنید.

در گزینه‌های ۲ و ۴ دو تابع دامنه‌های نابرابر دارند و در گزینه ۳ دامنه‌ها برابرند اما مقادیر برابر نیستند.

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x)$$

اما گزینه (۱) صحیح است.

$$f(x) = \frac{x}{x^2}, g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow D_f = D_g, f(x) = g(x)$$

$$[x^2 - 1] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 1 < 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

تابعی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد. در حالت زوج مرتب نیز تابعی یک‌به‌یک است که مولفه دوم یکسان نداشته باشد.

در تابع مفروض کافی است که سه جمله‌ای زیر رادیکال مثبت باشد.

$$2x - x^2 + 3 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$$

پس دامنه تابع بازه  $(-1, 3)$  است.

می‌دانیم در تابع رادیکالی فرجهٔ زوج، عبارت زیر رادیکال باید  $\geq 0$  باشد:  $\frac{f(x)}{x}$

$$\begin{cases} \text{اگر } x < 0 \Rightarrow f(x) > 0 & ; \frac{f(x)}{x} < 0 \\ \text{اگر } x > 0 \Rightarrow f(x) < 0 & ; \frac{f(x)}{x} < 0 \end{cases}$$

ضمن اینکه مخرج نباید صفر شود، پس:  $D_y = \emptyset$

