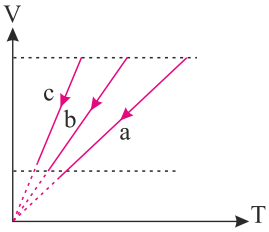
www.alirezaafshar.org

۱ مقدار معینی از یک گاز آرمانی تک اتمی سه فرآیند a، b و c را مطابق شکل انجام داده است. کار انجام‌شده روی گاز در کدام فرآیند بیشتر است؟



۱) a

۲) b

۳) c

۴) در هر سه فرآیند یکسان است.

۲ گاز کاملی در یک فرآیند بی‌دررو منبسط می شود. دما و انرژی درونی آن به ترتیب چگونه تغییر خواهد کرد؟

۱) ثابت - کاهش

۲) ثابت - ثابت

۳) کاهش - ثابت

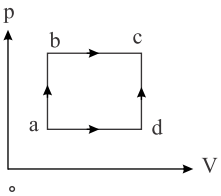
۴) کاهش - کاهش

هریک از مفاهیم زیر را توضیح دهید.

۳ فرآیند هم‌حجم

۴ ضربه تراکم

۵ یک گاز کامل تک‌اتمی از دو مسیر adc و abc از حالت a به حالت c می‌رود. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



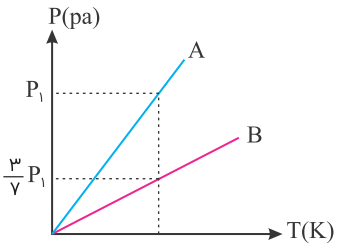
۱) گرمایی که گاز در هر دو مسیر می گیرد، یکسان است.

۲) گرمایی که گاز در مسیر abc می گیرد، بیشتر از گرمایی است که در مسیر adc می گیرد.

۳) کار انجام‌شده توسط گاز در مسیر adc، بیشتر از کار انجام‌شده در مسیر abc است.

۴) تغییر انرژی درونی گاز در مسیر abc، بیشتر از تغییر انرژی درونی گاز در مسیر adc است.

۶ اگر نمودار $(P-T)$ ۱۴ مول گاز کامل A به حجم ۹ لیتر و n مول گاز کامل B به حجم ۱۵ لیتر به‌صورت شکل زیر باشد، n کدام است؟



۱) ۱۴

۲) ۱۰

۳) ۲۰

۴) ۷

۷ ۱/۰۵ مول گاز کامل تک اتمی در سیلندری به حجم ۳ لیتر تحت فشار $۳/۵\text{atm}$ قرار دارد. اگر به‌صورت سریع حجم گاز را ۵۰ درصد افزایش دهیم، دمای گاز در حالت دوم چند کلوین می‌تواند باشد؟ $(R = ۸\text{J}/\text{mol.K})$

۱) ۱۲۰
۲) ۱۲۵
۳) ۱۳۰
۴) هر سه حالت ممکن است رخ دهد.

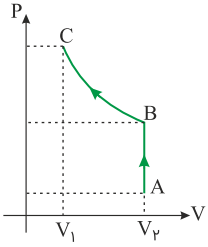
۸ مقداری گاز کامل، در فرآیندی از محیط گرما می‌گیرد. در این صورت:

۱) دمای گاز افزایش می‌یابد.
۲) الزاماً انرژی درونی گاز ثابت می‌ماند.
۳) ممکن است دمای گاز ثابت بماند.
۴) الزاماً گاز روی محیط، کار انجام می‌دهد.

۹ حجم گاز کاملی $V_۱$ و فشارش $P_۱$ است. آن را یک‌بار به‌صورت هم دما و یک‌بار هم به‌صورت بی دررو منبسط می کنیم تا فشارش به $P_۲ = \frac{۱}{۲}P_۱$ برسد. حجم ثانویهٔ گاز در فرآیند هم دما $V_۲$ و در فرآیند بی دررو $V'_۲$ است. در این خصوص، کدام رابطهٔ درست است؟

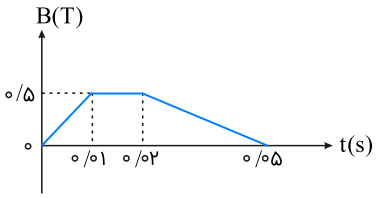
۱) $V_۲ = V'_۲ < ۲V_۱$
۲) $V_۲ = V'_۲ = ۲V_۱$
۳) $V'_۲ > ۲V_۱, V_۲ = ۲V_۱$
۴) $V'_۲ < ۲V_۱, V_۲ = ۲V_۱$

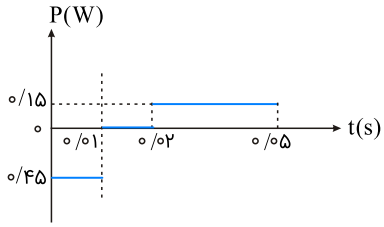
۱۰ در شکل زیر، مقدار معینی گاز کامل تک‌اتمی طی دو فرآیند AB و هم‌دمای BC از حالت A به C می‌رود. اگر تغییر انرژی درونی گاز در فرآیند AB برابر با ۲۰۰J و کار انجام‌شده توسط محیط روی گاز در فرآیند BC برابر با ۳۰۰ ژول باشد، کل گرمای مبادله‌شده توسط گاز در فرآیند ABC چند ژول است؟

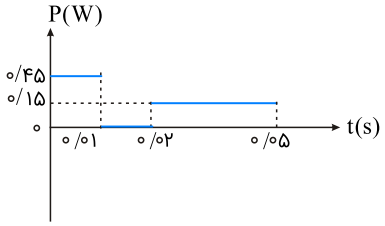


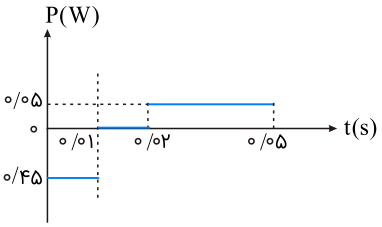
۱) ۱۰۰−
۲) ۵۰۰
۳) ۵۰۰−
۴) ۱۰۰

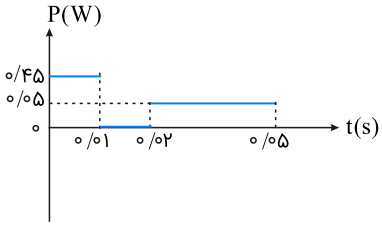
۱۱ نمودار تغییرات میدان مغناطیسی برحسب زمان، که بر یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع $۱۰\,cm$ و مقاومت $۵\,\Omega$، عمود است، مطابق شکل زیر است. نمودار آهنگ تولید انرژی گرمایی برحسب زمان در این حلقه کدام است؟ $(\pi \simeq ۳)$



۱)


۲)


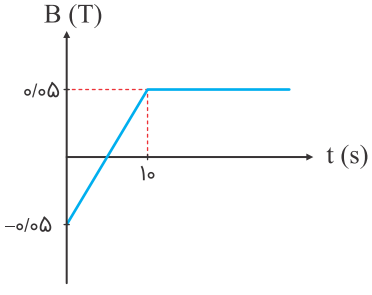
۳)


۴)


۱۲ معادلهٔ جریان الکتریکی عبوری از یک سیملوله در SI به‌صورت $I = ۳\sqrt{۲}\sin ۳۰۰t$ است. اگر بیشینهٔ انرژی ذخیره‌شده در سیملوله $۰/۹$ ژول باشد، ضریب القاوری سیملوله چند هانری است؟

۱) $۰/۱$
۲) $۰/۲$
۳) $۰/۳$
۴) $۳\sqrt{۲}$

۱۳ سطح یک پیچهٔ مسطح بر خطوط میدان مغناطیسی عمود است. پیچهٔ مسطح ۱۰۰ دور سیم دارد و قطر هر حلقهٔ آن $۲۰\,cm$ است. اگر نمودار تغییرات میدان مغناطیسی برحسب زمان به‌صورت زیر باشد، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی بین دو سر پیچهٔ مسطح در $t = ۵\,s$ چند ولت است؟ $(\pi \simeq ۳)$



۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۰۶
۳) ۰/۰۳
۴) صفر

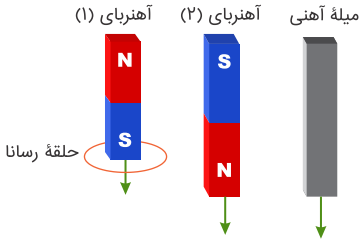
۱۴ مهم‌ترین مزیت جریان متناوب بر جریان مستقیم آن است که برای توزیع توان در مسافت‌های طولانی، افزایش و کاهش ..... ac ساده‌تر از dc است که برای این تغییرات از ..... استفاده می‌شود.

۱) ولتاژ - مبدل
۲) ولتاژ - ژنراتور
۳) جریان - ژنراتور
۴) جریان - مبدل

۱۵ طول یک سیملولهٔ بدون هسته، $۵۰\,cm$ و سطح هر حلقهٔ آن $۱۰\,cm^۲$ است. این سیملوله دارای ۲۰۰۰ حلقهٔ نزدیک به هم است و از آن جریان الکتریکی $۰/۵\,A$ می‌گذرد. ضریب القاوری سیملوله در SI چقدر است؟$(\mu_۰ = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۷}\ T.m/A)$

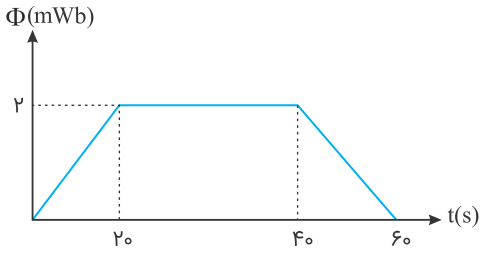
۱) ۰/۰۱
۲) ۰/۰۵
۳) ۰/۱۰
۴) ۰/۵۰

۱۶ مطابق شکل زیر، دو آهنربای میله‌ای و یک میلهٔ آهنی مشابه را به‌طور قائم از ارتفاع معینی نزدیک سطح زمین رها می‌کنیم. اگر سطح زمین در محل برخورد آهنرباها و میلهٔ آهنی به‌طور یکسان نرم باشد، مقدار فرورفتگی کدام‌یک در سطح زمین بیشتر است؟ (تأثیر میدان مغناطیسی زمین را نادیده بگیرید)



۱) میلهٔ آهنی
۲) آهنربای ۲
۳) آهنربای ۱
۴) میلهٔ آهنی و آهنربای ۲ به یک‌میزان و بیشتر از آهنربای ۱

۱۷ نمودار تغییرات شار مغناطیسی که از یک قاب فلزی مربع شکل می‌گذرد برحسب زمان در شکل زیر نشان داده شده است. نیروی محرکهٔ القایی متوسط در قاب مربع شکل در ۲۰ ثانیهٔ سوم چند ولت است؟



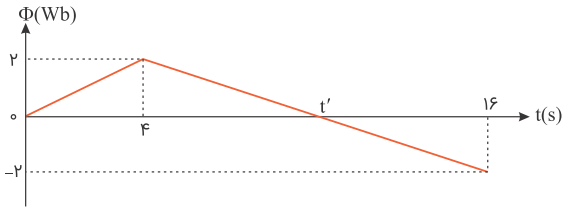
۱) ۱×۱۰^{-۴}
۲) ۱×۱۰^{-۳}
۳) ۱
۴) ۰/۱

۱۸ سطح حلقه‌ای به مساحت $۲۰۰\,cm^۲$ که دارای مقاومت $۲\,\Omega$ است با خطوط میدان زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. اگر در مدت ۰/۰۲ ثانیه اندازهٔ میدان از ۰/۰۸ تسلا به ۰/۰۴ تسلا در خلاف جهت اولیه تغییر کند، مقدار بار شارش شده در حلقه چند میلی کولن می‌باشد؟

۱) ۰/۶
۲) ۶
۳) ۱/۲
۴) ۱۲

www.alirezaafshar.org

۱۹ نمودار تغییرات شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه نسبت به زمان مطابق شکل زیر است. در لحظهٔ t' بزرگی نیروی محرکهٔ القایی در حلقه چند ولت است؟



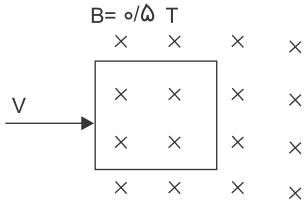
۱) صفر

۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۰ مطابق شکل، یک سیم‌پیچ مربع‌شکل، با ۲۰ دور سیم که طول هر ضلع آن ۴۰ سانتی‌متر است، با سرعت $۳m/s$ در یک میدان مغناطیسی درون‌سو، به‌سمت راست حرکت می‌کند. بزرگی نیروی محرکهٔ القاشده در سیم‌پیچ در لحظه‌ای که ۳۰ سانتی‌متر از آن در میدان وارد شده است، چند ولت است؟



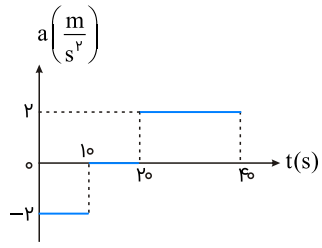
۱) ۶

۲) ۸

۳) ۱۲

۴) ۱۶

۲۱ نمودار شتاب- زمان متحرکی که از حال سکون روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی $t_۱ = ۲۰s$ تا $t_۲ = ۳۵s$، کدام مورد درست است؟



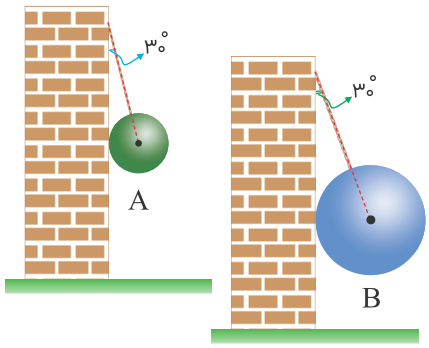
۱) حرکت تندشونده است.

۲) حرکت کندشونده است.

۳) جهت حرکت یک بار تغییر می‌کند.

۴) متحرک درجهت محور x حرکت می‌کند.

۲۲ مطابق شکل دو کرهٔ توپر و هم‌جنس A و B توسط نخ‌های سبکی به دیوار قائم بدون اصطکاکی متصل شده‌اند. اگر شعاع کرهٔ B دو برابر شعاع کرهٔ A باشد، نسبت نیروی واکنش سطح وارد بر کرهٔ B به نیروی واکنش سطح وارد بر کرهٔ A کدام است؟ (امتداد نخ‌ها از مرکز کره‌ها می‌گذرد)



۱) ۸

۲) ۴

۳) ۲

۴) $۴\sqrt{۳}$

۲۳ به جسم ساکنی به جرم $۲\,kg$ نیروی خالص ۲۰ نیوتونی وارد می‌شود. مسافت طی‌شده در ۵ ثانیهٔ نخست پس از وارد شدن نیرو چند متر است؟

۱) ۵ ۲) ۲۵

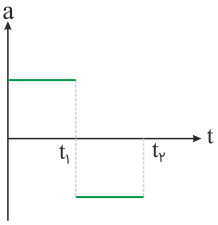
۳) ۵۰ ۴) ۱۲۵

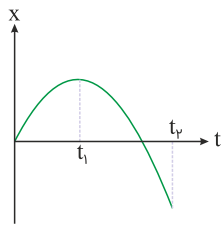
۲۴ یک جعبه به جرم ۱ کیلوگرم روی سطح افقی قرار دارد و نیروی افقی F به آن وارد می‌شود. بعد از طی مسافت ۴ متر، سرعت جعبه به $۲\sqrt{۲}\,m/s$ می‌رسد. اگر ضریب اصطکاکی جنبشی سطح $\mu_k = ۰/۴$ باشد، نیروی افقی F چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\,m/s^۲)$

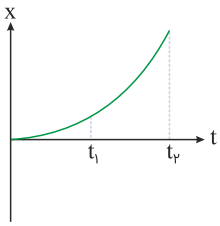
۱) ۳ ۲) ۴

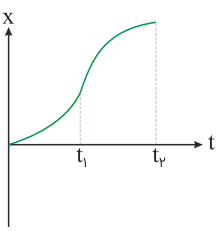
۳) ۵ ۴) ۶

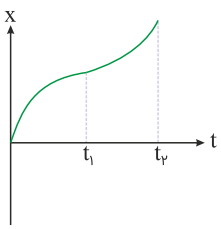
۲۵ نمودار شتاب- زمان متحرکی که از حال سکون و از مبدأ محور مکان در مسیر مستقیم حرکت می‌کند به‌صورت زیر است. نمودار مکان- زمان جسم کدام است؟



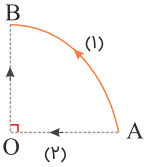
۱)


۲)


۳)


۴)


۲۶ مطابق شکل، متحرکی یک‌بار از مسیر (۱) و بار دیگر از مسیر (۲) از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود. اگر تندی متحرک در هر دو مسیر ثابت و با یکدیگر برابر باشد، نسبت اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در مسیر (۱) به‌اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در مسیر (۲) کدام است؟ (مسیر (۱) ربع دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O است)



۱) $\frac{\pi}{۴}$

۲) $\frac{۴}{\pi}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}$

۴) $\frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}$

۲۷ اتومبیلی روی یک خط راست با سرعت $۱۰۸\,km/h$ در حال حرکت است. راننده با دیدن مانعی در فاصلهٔ $۱۶۵\,m$، با شتاب ثابت $۳\,m/s^۲$ ترمز می‌کند و درست جلو مانع می‌ایستد. اگر زمان واکنش راننده $t_۱$ و زمانی که حرکت اتومبیل کندشونده بوده، $t_۲$ باشد، $\frac{t_۲}{t_۱}$ کدام است؟

۱) ۵

۲) ۱۰

۳) ۱۵

۴) ۲۰

۲۸ معادلهٔ برداری تکانه بر حسب زمان جسمی با جرم ۵۰۰ گرم در SI به صورت $\vec{p} = ۹t\vec{i} + ۶t^۲\vec{j}$ است. در لحظه $t = ۲\ s$ اندازهٔ سرعت جسم چند متر بر ثانیه است؟

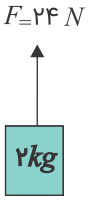
۱) ۶۰

۲) ۳۰

۳) ۱۵

۴) ۱۲

۲۹ در شکل زیر نیروی ثابت F در راستای قائم به یک جسم ۲ کیلوگرمی وارد می‌شود. اندازهٔ (قدر مطلق) کار این نیرو در ثانیه‌های متوالی یک بازهٔ زمانی معین .....



۱) افزایش می‌یابد.

۲) کاهش می‌یابد.

۳) ابتدا کاهش، سپس افزایش می‌یابد.

۴) بسته به شرایط، هرکدام ممکن است درست باشد.

۳۰ دو متحرک A و B از نقطه‌ای بدون سرعت اولیه بر مسیر مستقیم شروع به حرکت کرده و جابه‌جایی‌های مساوی را می‌پیمایند. اگر اندازهٔ شتاب A، ۳ برابر اندازهٔ شتاب B باشد، سرعت متوسط متحرک A چندبرابر سرعت متوسط متحرک B است؟

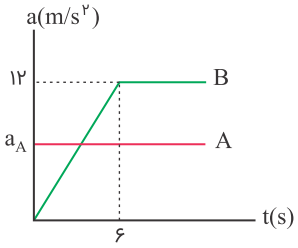
۱) ۳

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳۱ باتوجه‌به نمودار زیر، اگر دو متحرک همزمان و از حال سکون به راه افتاده باشند و در لحظهٔ $t = ۹\,s$، بزرگی سرعت آن‌ها باهم برابر شود، شتاب متحرک A چند متر بر مجذور ثانیه است؟



۱) ۸

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۵

۳۲ در لحظهٔ $t = ۰$ متحرک A با سرعت $v_A = +۴\vec{i}$ متر بر ثانیه از مکان $x = -۴۰\,m$ شروع به حرکت می‌کند. اگر ۵ ثانیه بعد متحرک B با سرعت $v_B = -۶\vec{i}$ متر بر ثانیه از مکان $x = +۶۰\,m$ شروع به حرکت کند در چه لحظاتی بعد از $t = ۰$ فاصلهٔ دو متحرک از هم $۲۰\,m$ می‌شود؟

۱) ۱۱ و ۱۵

۲) ۱۱ و ۱۸

۳) ۱۰ و ۱۵

۴) ۱۰ و ۱۸

۳۳ وزن جسمی به جرم ثابت m، در ارتفاع h از سطح زمین، ۲۱ درصد بیشتر از وزن جسم در ارتفاع $۳h$ از سطح زمین است. شتاب گرانش زمین در ارتفاع h از سطح زمین تقریباً چند متر بر مربع ثانیه است؟ (شتاب گرانش در سطح زمین $۱۰\,m/s^۲$ است)

۱) ۹

۲) ۸

۳) ۷

۴) ۶

۳۴ اتومبیلی از حال سکون با شتاب $۶\,m/s^۲$ روی خط راست شروع به حرکت می‌کند. $۶\,s$ بعد ناگهان راننده مانعی را در برابر خود می‌بیند و به‌شدت با شتاب ثابت ترمز می‌کند و اتومبیل پس از طی مسافتی در راستای مسیر اولیه متوقف می‌شود. اگر از زمان واکنش راننده چشم‌پوشی کنیم، سرعت متوسط اتومبیل از لحظهٔ شروع حرکت تا توقف آن چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۳۶

۲) ۲۴

۳) ۱۸

۴) ۱۲

۳۵ به یک جسم دو کیلوگرمی هم زمان چهار نیرو به اندازه های ۲۰، ۱۵، ۱۰، ۸ نیوتون وارد می شود و جسم به حالت تعادل قرار دارد. اگر فقط نیروی ۱۵ نیوتنی حذف شود و دیگر نیروها با همان اندازه و جهت اثرگذار باشند، تغییر سرعت جسم بعد از دو ثانیه چند متر بر ثانیه خواهد شد؟

۱) ۸

۲) ۱۰

۳) ۱۵

۴) ۲۰

www.alirezaafshar.org

۳۶ سنگی در هوا و در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. هنگامی‌که سنگ به سمت بالا حرکت می‌کند، واکنش نیروهای وارد بر آن:

۱) همسو و به سمت بالا هستند.

۲) همسو و به سمت پایین هستند.

۳) ناهمسو، یکی به سمت بالا و یکی به سمت پایین است.

۴) هم‌راستا نیستند.

۳۷ چه تعداد از گزینه‌های زیر در مورد نیروی اصطکاک نادرست است؟

الف) مقدار نیروی اصطکاک ایستایی برای یک جسم از رابطهٔ $f_s = \mu_s F_N$ به دست می‌آید.

ب) نیروی اصطکاک بین دو جسم همواره نیرویی اتلافی و مزاحم است.

پ) مقدار نیروی اصطکاک جنبشی از نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه، کمتر است.

ت) مقدار نیروی اصطکاک ایستایی برای یک جسم همواره مقداری ثابت است.

ث) نگه‌داشتن یک قلم در دست، بدون اصطکاک ممکن نیست.

ج) بدون اصطکاک حتی ایستادن ناممکن است.

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

۳۸ فاصلهٔ ماهوارهٔ A تا سطح زمین به اندازهٔ شعاع زمین است و این فاصله برای ماهوارهٔ B به اندازهٔ دو برابر شعاع زمین است. اندازهٔ تندی حرکت ماهوارهٔ A چندبرابر تندی حرکت ماهوارهٔ B است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

۳۹ در یک تصادف اتومبیل، سرعت اتومبیل از $۵۴\,km/h$ به صفر می رسد و زمان این حرکت کندشونده $۰/۳\,s$ است. در این تصادف، برای اینکه مسافری به جرم $۶۰\,kg$ از پشتی صندلی جدا نشود (به جلو پرت نشود)، بزرگی نیروی متوسطی که کمربند ایمنی باید بر او وارد کند، تقریباً چند نیوتون است؟

۱) ۳۶۰۰ ۲) ۳۰۰۰

۳) ۶۰۰۰ ۴) ۶۳۰۰

۴۰ گلوله‌ای به جرم $۶۰۰\,g$ از ارابهٔ توپی به جرم $۱۰۰\,kg$ که روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد، شلیک می‌شود. اگر سرعت گلوله هنگام خارج شدن از دهانهٔ توپ ۱۵۰۰ متر بر ثانیه باشد، سرعت ارابهٔ توپ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲

۳) ۶ ۴) ۱۰

۴۱ چه تعداد از ویژگی‌های زیر در اتانول مشهودتر و یا بیشتر از استون است؟

الف) نقطهٔ جوش　　ب) نیروی بین مولکولی

پ) شمار اتم‌های یک مول از آن‌ها　　ت) جرم مولی

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

۴۲ کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) در مواد مولکولی ناقطبی با افزایش جرم مولی، نیروهای بین مولکولی افزایش می‌یابد.

ب) با اینکه جرم مولی گازهای N_2 و CO برابر است، CO زودتر از N_2 به مایع تبدیل می‌شود.

پ) آب و هیدروژن سولفید، هر دو مولکول‌های خمیده، قطبی و نقطهٔ جوش نزدیک به یکدیگر دارند.

ت) چون جرم مولی F_2 از جرم مولی HCl بیشتر است، نقطهٔ جوش آن از نقطهٔ جوش HCl بالاتر است.

۱) الف - ب　　۲) الف - ت

۳) ب - پ　　۴) ب - ت

۴۳ معادلهٔ "انحلال‌پذیری- دما" برای نمک A در آب به‌صورت $S = ۰/۹۷\theta + ۳۵$ است. اگر نسبت انحلال‌پذیری نمک A به نمک B در دماهای $۰^\circ C$ و $۴۰^\circ C$ به ترتیب برابر ۱ و ۲/۴۶ باشد، نسبت غلظت مولار محلول سیرشدهٔ B به غلظت مولار محلول سیرشدهٔ A در دمای $۵۰^\circ C$، به‌تقریب کدام است؟ (جرم مولی نمک A و B به ترتیب برابر ۳۳۰ و ۱۱۰ گرم در نظر گرفته شود؛ از تغییر حجم آب در اثر حل کردن نمک، چشم‌پوشی شود؛ معادلهٔ "انحلال‌پذیری- دما" در آب برای نمک B به‌صورت خطی است)

۱) ۰/۶۹　　۲) ۱/۰۳

۳) ۱/۶۵　　۴) ۲/۵۱

۴۴ نام و فرمول کدام ماده به‌درستی بیان شده است؟

۱) آلومینیم کربنات: $AlCO_3$　　۲) آمونیوم سولفات: $(NH_4)_2SO_4$

۳) آمونیوم کلرید: $(NH_4)_2Cl$　　۴) آهن (II) نیترات: $Fe(NO_3)_3$

۴۵ میانگین قدرت پیوند یونی در $MgSO_4$ و پیوندهای هیدروژنی در آب ..... از نیروی جاذبهٔ یون- دوقطبی در محلول است. به همین دلیل $MgSO_4$ در آب ..... است.

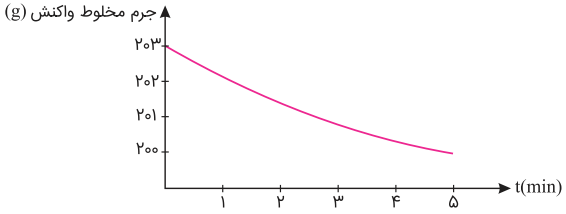
۱) بیشتر - محلول　　۲) کمتر - نامحلول

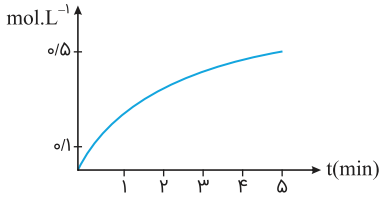
۳) بیشتر - نامحلول　　۴) کمتر - محلول

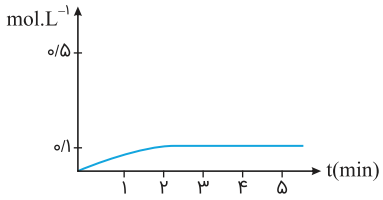
www.alirezaafshar.org

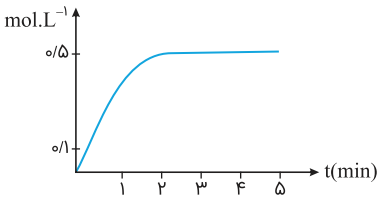
۴۶ قطعه‌ای از فلز $Bi(s)$، درون ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۵ مولار نیتریک اسید انداخته شده است. اگر نمودار تغییر جرم مخلوط واکنش به‌صورت زیر باشد، نمودار تغییر غلظت $Bi^{3+}(aq)$، کدام است؟ (از تغییر حجم محلول، صرف‌نظر شود) $(O = ۱۶ \ , \ N = ۱۴ : g.mol^{-۱})$

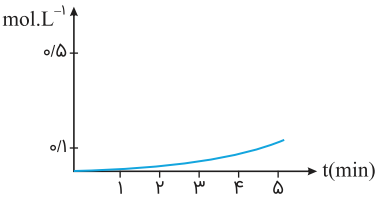
$$Bi(s) + HNO_۳(aq) \rightarrow Bi(NO_۳)_۳(aq) + NO(g) + H_۲O(l) \quad \text{(معادله موازنه شود)}$$



۱)


۲)


۳)


۴)


استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۴۷ انحلال‌پذیری یک نمک در آب از رابطهٔ $S = ۰/۷۵\theta + ۲۷$ به دست می‌آید که در آن S انحلال‌پذیری برحسب گرم مادهٔ حل‌شونده در ۵۰ گرم آب و θ برحسب درجهٔ سلسیوس می‌باشد. براین‌اساس مولاریتهٔ این نمک در دمای $۶۰^{\circ}C$ کدام است؟ (جرم مولی نمک برابر $۱۸ \ g.mol^{-۱}$ و چگالی این نمک نیز برابر $۱۲/۲ \ g.L^{-۱}$ است)

۱) ۰/۴
۲) ۰/۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۷

۴۸ در ترکیب آمونیوم سولفات نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی برابر با ..... است و در ۲۰ گرم محلول ۶۶ درصد جرمی آمونیوم سولفات ..... مول یون وجود دارد. $(N = ۱۴ \ , \ O = ۱۶ \ , \ H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۰/۱ - ۱
۲) ۰/۳ - $\frac{۲}{۳}$
۳) ۰/۱ - $\frac{۲}{۳}$
۴) ۰/۳ - ۱

۴۹ جاهای خالی معادله‌های (۱)، (۲) و (۳) با کدام گزینه کامل می‌شوند؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید)

۱) $Na_2S(s) \rightarrow \ldots (aq) + 2Na^+(aq)$

۲) $\ldots (s) \rightarrow Al^{3+}(aq) + 3NO_3^-(aq)$

۳) $BaCl_2(s) \rightarrow \ldots (aq) + 2Cl^-(aq)$

۱) $Ba^{2+}, AlNO_3, S^{2-}$

۲) $Ba^{+}, Al(NO_3)_3, S^{2-}$

۳) $Ba^{2+}, Al(NO_3)_3, S^{2-}$

۴) $Ba^{+}, AlNO_3, S^{2-}$

۵۰ چند مورد از عبارت‌های داده‌شده، درست است؟

الف) ۷۵٪ سطح زمین را آب پوشانده است.

ب) ۵۰٪ جمعیت جهان از کم‌آبی رنج می‌برند.

پ) آب باران در هوای پاک تقریباً خالص است؛ زیرا هنگام تشکیل باران و برف تقریبا همهٔ مواد حل‌شده در آب از آن جدا می‌شوند.

ت) همهٔ آب‌های روی زمین شور است و نمی‌توان از آن‌ها در کشاورزی و مصارف خانگی و صنعتی استفاده کرد.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۵۱ کدام گزینه از لحاظ درستی یا نادرستی مشابه عبارت زیر است؟

"چگالی پلی‌اتن سبک و سنگین تفاوت زیادی با یکدیگر دارند."

۱) پلیمرها ترکیباتی سیرشده هستند.

۲) به ازای جرم یکسان از پلی‌اتن سبک و سنگین، حجم پلی‌اتن سبک بیشتر است.

۳) هر ترکیب آلی که در ساختار خود پیوند دوگانه کربن- کربن دارد، قابلیت پلیمری شدن دارد.

۴) جاذبهٔ بین مولکول‌های پلی‌اتن سنگین بیشتر از پلی‌اتن سبک است.

۵۲ تشکیل الیاف سلولز با تولید آب همره است. اگر هر رشته از الیاف سلولز از اتصال ۳۰۰۰ مولکول گلوکز به یکدیگر تشکیل شده باشد و فرمول مولکولی هر رشته از آن $C_{18000}H_{30200}O_{15100}$ باشد، به ازای تولید یک کیلوگرم سلولز به‌تقریب چند مولکول آب تولید می‌شود؟ (جرم مولی سلولز $= 487800\ g.mol^{-1}$)

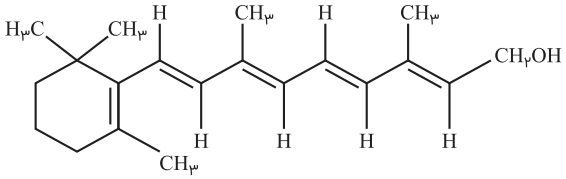
۱) $3/6N_A$

۲) N_A

۳) $5/9N_A$

۴) $7/2N_A$

۵۳ اگر ویتامین آ با ساختار زیر، با استفاده از اتانوییک اسید به استر مربوطه تبدیل شود، کدام مورد، درست است؟



۱) فراوردهٔ واکنش، نوعی پلی‌استر است.

۲) انحلال‌پذیری آن در آب، افزایش می‌یابد.

۳) خاصیت آب‌گریزی فراوردهٔ آلی، کاهش می‌یابد.

۴) جرم فراوردهٔ آلی از مجموع جرم دو واکنش‌دهنده، کمتر است.

www.alirezaafshar.org

۵۴ کدام گزینه نادرست است؟

۱) در ویتامین (آ)، بخش ناقطبی به بخش قطبی غلبه می‌کند، ازاین‌رو این ویتامین $CH_3-CH_2-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-CH_2-CH_3$ در چربی حل می‌شود.

۲) مزهٔ ترش میوه‌هایی مثل ریواس، انگور و لیموترش به دلیل وجود مولکول‌های اسید در آن‌ها است.

۳) در اتیل بوتانوات، گروه متصل به کربن گروه استری، سه‌کربنه است.

۴) نام ترکیب بالا، اتیل اتانوات است.

۵۵ چند مورد از مطلب‌های زیر در مورد آمید حاصل از واکنش ساده‌ترین آمین با ساده‌ترین اسید آلی درست است؟ $(H=1\ ,\ C=12\ ,\ N=14\ ,\ O=16 : g.mol^{-1})$

الف) جرم مولی آن برابر با ۷۳ گرم است.

ب) توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی بین مولکول‌های آب را دارد.

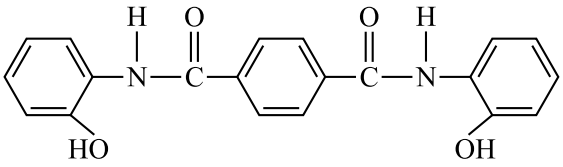
پ) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در آن برابر با ۲ است.

ت) مجموع آنتالپی‌های پیوند در آن از مجموع آنتالپی‌های پیوندی در آمین و اسید آلی سازندهٔ آن کمتر است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۵۶ دربارهٔ ترکیبی که ساختار مولکول آن نشان داده شده، کدام مطلب درست است؟



۱) شمار پیوندهای کربن- هیدروژن در مولکول آن، برابر ۱۴ است.

۲) شمار پیوندهای یگانه بین اتم‌ها در مولکول آن، برابر ۲۴ است.

۳) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در مولکول آن با شمار پیوندهای دوگانه کربن- کربن، برابر است.

۴) مولکول آن از دو بخش مشابه متصل به یک حلقهٔ بنزنی شامل دو گروه آمیدی، تشکیل شده است.

۵۷ چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

الف) کولار، معروف‌ترین پلی‌آمید است.

ب) کولار ۵ برابر از پلی‌استر هم‌جرم خود مقاوم‌تر است.

پ) آمیدها در ساختار خود حداقل از ۴ اتم مختلف تشکیل شده‌اند.

ت) پلی‌آمیدها را می‌توان از واکنش دی‌آمین و دی‌استر تهیه کرد.

۱) ۱ ۲) ۲

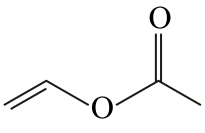
۳) ۳ ۴) ۴

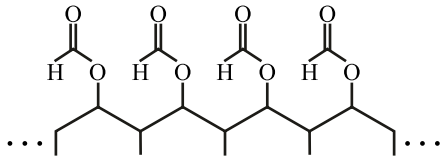
۵۸ اگر بازدهٔ درصدی واکنش پلیمری شدن پلی‌استیرن ۸۳ درصد باشد، ۱۳۰ گرم پلی‌استیرن از واکنش تقریباً چند مول استیرن تولید شده است؟ $(C = ۱۲ \ , \ H = ۱ : g.mol^{-۱})$

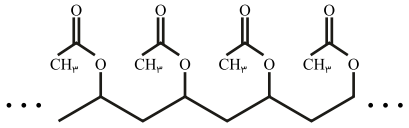
۱) ۱/۰۴ ۲) ۳

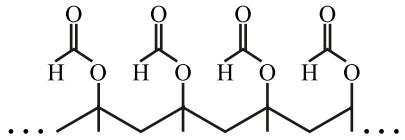
۳) ۱/۵ ۴) ۲/۰۸

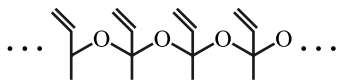
۵۹ پلی‌وینیل استات پلیمری است که در تهیهٔ انواع پاستیل به کار می‌رود. باتوجه‌به ساختار وینیل استات ساختار پلی‌وینیل استات در کدام گزینه آمده است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۶۰ کدام مطلب، دربارهٔ فرمیک اسید، درست است؟

۱) پرکاربردترین کربوکسیلیک اسید، است.

۲) با آب، پیوند هیدروژنی، تشکیل می‌دهد.

۳) در ساختار آن، پنج جفت‌الکترون ناپیوندی وجود دارد.

۴) به‌صورت مصنوعی تهیه می‌شود و در طبیعت یافت نمی‌شود.

۶۱ چند مورد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

- یکی از چالش‌هایی که در کاربرد سلول سوختی هیدروژن- اکسیژن خودنمایی می‌کند، تأمین سوخت آن‌ها است.
- آب خالص رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد، ازاین‌رو برای برقکافت آن باید اندکی الکترولیت به آن افزود.
- در سلول‌های الکترولیتی، می‌توان با اعمال یک ولتاژ بیرونی و عبور جریان الکتریکی از درون یک محلول، یک واکنش شیمیایی را در خلاف جهت طبیعی پیش برد.
- نیم‌واکنش کاتدی در سلول برقکافت آب عکس نیم‌واکنش آندی در سلول سوختی هیدروژن- اکسیژن است.

۱) ۲ ۲) ۱

۳) ۴ ۴) ۳

۶۲ ثابت یونش اسید ضعیف HA به ازای هر ۱۰ درجهٔ سلسیوس افزایش دما، ۱۲/۵ درصد به‌صورت خطی افزایش می‌یابد. اگر ثابت یونش این اسید در $45^\circ C$، برابر با 2×10^{-4} و غلظت HA در $25^\circ C$، پس از یونش، برابر با ۶ مولار باشد، نسبت شمار یون‌های هیدروکسید به شمار یون‌های هیدرونیوم در محلول آن با دمای $25^\circ C$ به‌تقریب کدام است و در کدام دما (با یکای $^\circ C$) نسبت شمار یون‌های هیدروکسید به شمار یون‌های هیدرونیوم کمتر است؟

۱) $20, 1/1 \times 10^{-11}$
۲) $30, 6 \times 10^{-12}$
۳) $20, 6 \times 10^{-12}$
۴) $30, 1/1 \times 10^{-11}$

۶۳ در معادله مربوط به کدام نیم‌واکنش‌ها، تشخیص اکسایش و کاهش به درستی صورت نگرفته است؟ (نیم‌واکنش‌ها موازنه نشده‌اند)

الف) نیم‌واکنش اکسایش منگنز : $MnO_4^{2-} \rightarrow MnO_4^-$

ب) نیم‌واکنش کاهش کروم : $Cr_2O_7^{2-} \rightarrow CrO_4^{2-}$

ج) نیم‌واکنش اکسایش کربن : $CO \rightarrow CH_3OH$

د) نیم‌واکنش کاهش گوگرد : $SO_4^{2-} \rightarrow SO_3^{2-}$

۱) الف - ب
۲) الف - ج - د
۳) ب - ج
۴) ب - ج - د

۶۴ باتوجه‌به جدول زیر مقدار x چند برابر z است؟

باز ضعیف	pH	ثابت یونش	غلظت مولی
NH_3	۱۰/۸	$1/8 \times 10^{-5}$	z
CH_3NH_2	۱۲/۳	4×10^{-4}	x

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۳۰
۴) ۵۰

۶۵ در مورد سلول گالوانی $Fe - Sn$ کدام گزینه درست است؟ $(Fe = 56 \ , \ Sn = 119 \, g.mol^{-1})$
$(E^\circ(Fe/Fe^{2+}) = -0/41 \, V \ , \ E^\circ(Sn^{2+}/Sn) = -0/14 \, V)$

۱) در الکترود قلع نیم‌واکنش اکسایش رخ می‌دهد.
۲) یون‌های Sn^{2+} از دیوارهٔ متخلخل به‌سمت الکترود Fe حرکت می‌کنند.
۳) در محل اتصال کاتد با محلول، الکترون در رسانای الکترونی به رسانای یونی منتقل می‌شود.
۴) با انجام واکنش در سلول، جرم کلی سلول کاهش می‌یابد.

۶۶ کدام گزینه عبارت زیر را به‌درستی کامل می‌کند؟

"کلوئیدها نور را ..... و ..... هستند. ذره‌های سازندهٔ آن ..... هستند."

۱) پخش می‌کنند - ناهمگن - ذره‌های ریز ماده

۲) پخش می‌کنند - ناهمگن - مولکول‌های بزرگ یا تودهٔ مولکولی

۳) پخش نمی‌کنند - همگن - ذره‌های ریز ماده

۴) پخش نمی‌کنند - همگن - مولکول‌های بزرگ یا تودهٔ مولکولی

۶۷ کدام گزینهٔ زیر نادرست است؟

۱) برای افزایش میزان کف مخلوط آب و صابون، می‌توان مقداری کلسیم کلرید به آن اضافه کرد.

۲) قدرت پاک‌کنندگی آب چشمه بیشتر از آب دریا است.

۳) مولکول‌های صابون نقش پلی میان مولکول‌های آب و چربی را به هنگام شست‌وشو بازی می‌کنند.

۴) آنزیم موجود در مواد شوینده همانند افزایش دما باعث افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن می‌شود.

۶۸ مطابق واکنش زیر،اگر ۰/۸ گرم سدیم هیدروکسید جامد به ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار هیدروکلریک اسید اضافه شود، pH محلول حاصل، کدام است و چند مول فرآوردهٔ یونی تشکیل می‌شود؟ $(H = ۱, O = ۱۶, Na = ۲۳ : g.mol^{-۱})$ (با کمی تغییر)

$$HCl(aq) + NaOH(aq) \rightarrow H_۲O(l) + NaCl(aq)$$

۱) ۴ ، ۰/۰۱

۲) ۴ ، ۰/۰۲

۳) ۱۳ ، ۰/۰۱

۴) ۱۳ ، ۰/۰۲

۶۹ مولکول‌های اسید چرب ..... بوده و بخش قطبی در ساختار آن‌ها ..... است. این مولکول‌ها در ..... حل می‌شوند.

۱) قطبی - $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$ - آب

۲) ناقطبی - $-OH$ - هگزان

۳) قطبی - $-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-$ - آب

۴) ناقطبی - $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$ - هگزان

۷۰ کدام مطلب درمورد سلول سوختی نادرست است؟

۱) رایج‌ترین سلول سوختی، سلول هیدروژن- اکسیژن است.

۲) در آن واکنش گاز هیدروژن با گاز اکسیژن همراه با آزادشدن شدید و سریع گرما است.

۳) گاز اکسیژن در کاتد با گرفتن الکترون کاهش می‌یابد.

۴) گاز هیدروژن در آند با از دست دادن الکترون اکسایش می‌یابد.

www.alirezaafshar.org

۷۱ مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی n که به ازای آن $۲n+۳$ و $۵n-۲$ نسبت به هم اول نیستند، کدام است؟

۱) ۲۳
۲) ۲۴
۳) ۱۶
۴) ۱۷

۷۲ برای اینکه ثابت کنیم "اگر a و b دو عددی حقیقی باشند و $ab=۰$، آنگاه $a=۰$ یا $b=۰$ است." در این صورت از کدام هم‌ارزی استفاده کرده‌ایم؟

۱) $(p\wedge q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$
۲) $(p\vee q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$
۳) $(p\wedge q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r)$
۴) $(p\vee q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r)$

۷۳ کدام‌یک از معادلات همنهشتی زیر، جواب ندارد؟

۱) $۳x\overset{۲}{\equiv}۴$
۲) $۴x\overset{۶}{\equiv}۱۸$
۳) $۶x\overset{۹}{\equiv}۱۱$
۴) $۵x\overset{۷}{\equiv}۱$

۷۴ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۲+b^۲+۵$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

۷۵ حاصل $(a^۲-۳a+۱,\ a-۲)$ $(a\in\mathbb{Z})$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱ یا ۵
۳) ۱ یا ۳
۴) ۳ یا ۵

۷۶ برای اثبات درستی گزارهٔ "به ازای هر دو عدد حقیقی a و b به دست می‌آید $a^۲+ab+b^۲\geq ۰$" به روش اثبات بازگشتی به کدام‌یک از گزاره‌های زیر نمی‌توان رسید؟

۱) $(a+\frac{b}{۲})^۲+\frac{۳b^۲}{۴}\geq ۰$
۲) $(a+b)^۲+a^۲+b^۲\geq ۰$
۳) $(\frac{a}{۲}+b)^۲+\frac{۳a^۲}{۴}\geq ۰$
۴) $(a+\frac{b}{۲})^۲+\frac{۳a^۲}{۴}\geq ۰$

۷۷ کدام رابطه شرطی زیر خاصیت بازگشتی دارد؟

۱) $x>۰,y>۰\Rightarrow x+y\geq ۲\sqrt{xy}$
۲) $x.y>۰\Rightarrow x+y\geq ۲\sqrt{xy}$
۳) $(a,b)=(c,d)\Rightarrow a+b=c+d$
۴) $(a,b)=(c,d)\Rightarrow ab=cd$

۷۸ اگر $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ عددهای صحیح و $b_۱$ و $b_۲$ و $b_۳$ همان سه عدد با ترتیبی دیگر باشد، در این صورت عبارت $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ همواره ..... است و به کمک روش ..... قابل‌اثبات است.

۱) فرد - مثال نقض نادرستی آن
۲) فرد - برهان خلف درستی آن
۳) زوج - مثال نقض نادرستی آن
۴) زوج - برهان خلف درستی آن

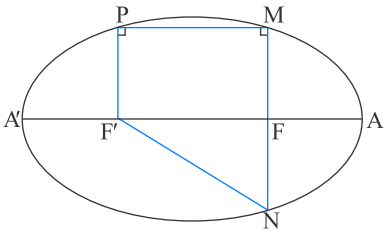
۷۹ باقی‌ماندهٔ تقسیم $(۵۳۰)^{۱۷} \times ۱۱۳$ بر ۲۰ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱۰
۴) ۱۹

۸۰ در تقسیم عدد a بر b، باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را دارد. اگر خارج‌قسمت را با q نمایش دهیم، کدام گزینه نتیجه نمی‌شود؟

۱) $q|a$
۲) $b|a+۱$
۳) $q+۱|a+۱$
۴) $b|a^۲-۱$

۸۱ شکل زیر مربوط به بیضی است. اگر $a^۲=۳۶\ ,\ b^۲=۴$ باشد، مساحت ذوزنقهٔ $PMNF'$ چقدر است؟



۱) $۱۰\sqrt{۲}$
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $۶\sqrt{۲}$
۴) $۸\sqrt{۲}$

۸۲ کدام ماتریس هم سطری و هم ستونی است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}۹\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}$
۴) ۱۳۵

۸۳ اگر ماتریس $AB=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۴ & ۶\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس BA کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}۶ & -۲\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۴ & ۴\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$

۸۴ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از نقطهٔ $(۲,۳)$ عبور می‌کنند و بر خط $x=۴$ مماس هستند کدام است؟

۱) $x^۲-۶x+۴y-۳=۰$
۲) $x^۲-۴x+۶y+۳=۰$
۳) $y^۲-۶y+۴x-۳=۰$
۴) $y^۲-۴x+۶y+۳=۰$

۸۵ B و A ماتریس‌های مربعی از مرتبهٔ ۲ هستند به‌طوری‌که $۴A-۳I=\bar{O}$ و $|B|=۸$، حاصل دترمینان $|۲AB-۳B|$ کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۵

۸۶ اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۷ & ۳\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۲ & -۴ & -۵\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\left|\,|A|\,(-A^{۲})^{-۱}\right|$ کدام است؟

۱) ۴
۲) -۴
۳) ۸
۴) -۸

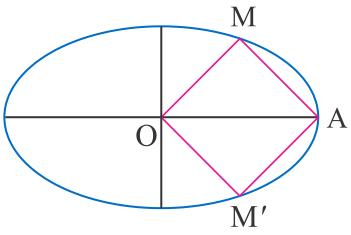
۸۷ درایه‌های ماتریس A با ۶ درایه به‌صورت $a_{ij}=i^{j}$ است. اگر حداکثر تعداد ستون ماتریس A عددی اول باشد، مجموع درایه‌های سطر اول با مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A کدام است؟

۱) ۵
۲) ۳
۳) ۱۲
۴) ۸

۸۸ کدام ماتریس سطری است؟

۱) $\begin{bmatrix}۲\\ ۳\\ ۴\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۵ & ۷\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۰\\ ۲ & ۵ & ۷\end{bmatrix}$

۸۹ در بیضی زیر، چهار ضلعی $OMAM'$ یک مربع است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۹۰ در ماتریس $A=\left[i^{۲}+j\right]_{۳\times ۲}$، i و j به‌ترتیب شمارهٔ سطر و ستون است. مجموع درایه‌های ستون دوم چقدر از مجموع درایه‌های ستون اول بیشتر است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۹

۹۱ اگر ارزش گزارهٔ $p\vee q$ نادرست باشد، عبارت زیر با کدام گزینه هم‌ارز است؟

$$[(\sim p\wedge q)\vee(p\vee F)]$$

(T گزارهٔ همیشه درست و F گزارهٔ همیشه نادرست است.)

۱) T
۲) $\sim p$
۳) F
۴) q

www.alirezaafshar.org

۹۲ اگر تساوی $(x^{۲}-y^{۲}\ ,\ ۸)=(x+y\ ,\ ۱۶)$ برقرار باشد، مقدار $۲x-۳y$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) -۴
۴) ۴

۹۳ اگر ارزش گزاره‌های r و p و q به‌ترتیب T و T و F باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

۱) $(\sim p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$
۲) $(p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
۳) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$
۴) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q)$

۹۴ حاصل هم‌ارزی زیر کدام است؟

$$\sim r \wedge \sim (\sim s \wedge r) \equiv ?$$

۱) s
۲) $\sim s$
۳) r
۴) $\sim r$

۹۵ کدام‌یک از جملات زیر نادرست است؟

۱) در ترکیب شرطی اگر هر دو گزاره هم‌ارزش باشند، آنگاه ارزش گزارهٔ شرطی نادرست است.
۲) در ترکیب شرطی اگر هر دو گزاره مخالف ارزش یکدیگر باشند، گزاره هم می‌تواند درست و هم نادرست باشد.
۳) در ترکیب شرطی اگر مقدم نادرست باشد، ارزش ترکیب همواره درست است.
۴) در ترکیب شرطی اگر مقدم درست و تالی نادرست باشد، ارزش ترکیب همواره نادرست است.

۹۶ کدام‌یک از ترکیب‌های زیر دوشرطی نیست؟

۱) $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$
۲) $A = \varnothing\ ,\ B = \varnothing \Rightarrow A \cap B = \varnothing$
۳) $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$
۴) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$

۹۷ اگر دو مجموعه $A = \{۳\ ,\ \{a+۱\ ,\ c^{۲}\}\ ,\ \{b-۱\}\}$ و $B = \{\{۴\ ,\ ۱\}\ ,\ \{a+۱\}\ ,\ b+۱\}$ مساوی باشند، مقدار $|c|$ کدام است؟

۱) ۳
۲) صفر
۳) ۲
۴) ۴

۹۸ ارزش عبارت "اگر آب سر بالا برود، قورباغه ابوعطا می‌خواند." کدام است؟

۱) درست
۲) نادرست
۳) این عبارت گزاره نیست.
۴) نمی‌توان تعیین کرد.

www.alirezaafshar.org

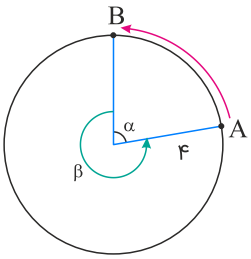
۹۹ اگر دو مجموعهٔ $A = \{۱, x+۱, y-۲\}$ و $B = \{۰, x, y\}$ باهم برابر باشند، در این صورت حداقل $x+y$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۱۰۰ در جای خالی کدام عبارت قرار گیرد تا ارزش کل گزاره درست شود؟
"اگر ۳۷ عددی مرکب باشد، آنگاه ..... و بالعکس."

۱) ۱۷ عددی فرد است.
۲) $x = ۱$ ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۳ - x - ۲ = ۰$ است.
۳) ۵۴ عددی مربع کامل است.
۴) ۴ عدد اول طبیعی و یک‌رقمی داریم.

۱۰۱ در شکل زیر، اگر $\frac{\beta}{\alpha} = ۵$ باشد، طول کمان AB کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۳}$
۲) $\frac{\pi}{۲}$
۳) $\frac{۲\pi}{۳}$
۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

۱۰۲ ساده‌شدهٔ عبارت $\cos ۵۰^\circ (\tan ۷۰^\circ + \tan ۱۰^\circ)$ برابر کدام است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ$
۲) $\cos ۲۰^\circ$
۳) $۲\sin ۲۰^\circ$
۴) $۲\cos ۲۰^\circ$

۱۰۳ حاصل $\sin(a+b) + \sin(a-b)$ کدام است؟

۱) $۲\sin a\cos b$
۲) $۲\cos a\sin b$
۳) $۲\sin a\sin b$
۴) $۲\cos a\cos b$

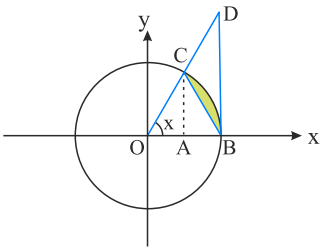
۱۰۴ اگر $\tan\alpha = ۲$ و $\tan\beta = \frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\tan(۲\alpha - \beta)$ کدام است؟

۱) -۳
۲) -۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۳

۱۰۵ حاصل $\cot ۲۰^\circ (۱ - \cos ۴۰^\circ)$ کدام است؟

۱) $\cos ۵۰^\circ$
۲) $\cos ۴۰^\circ$
۳) $\cos ۲۰^\circ$
۴) $\cos ۱۰^\circ$

۱۰۶ باتوجه‌به شکل زیر در دایرهٔ مثلثاتی، مساحت قسمت هاشورخورده، در کدام گزینه آمده است؟



۱) $\tan x - x$

۲) $x - \sin x$

۳) $۰/۵\,(\sin x - x)$

۴) $۰/۵\,(x - \sin x)$

۱۰۷ حاصل $\dfrac{\sin\frac{۴\pi}{۳}}{\tan\frac{۷\pi}{۴} + \cot(\frac{۳\pi}{۴})}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴) تعریف نشده

۱۰۸ اگر $f(\alpha) = ۴\sin(\alpha)\cos(۲\alpha) + ۲\sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f(\frac{۴۱\pi}{۹})$، کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۳}$

۳) ۱

۴) -۱

۱۰۹ اگر $a = \cos ۱$، $b = \cos ۲$ و $c = \cos ۳$ باشد، کدام گزینه درست است؟

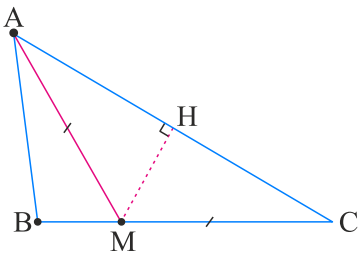
۱) $c < b < a$

۲) $b < c < a$

۳) $a < b < c$

۴) $b < a < c$

۱۱۰ در شکل زیر مثلث AMC متساوی‌الساقین است $(AM = MC)$. اگر $AM = ۵$ و $MH = ۳$ باشد، حاصل $\sin(A\hat{M}B)$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۴}{۲۵}$

۲) $\frac{۷}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۱۱ اگر $\sin\alpha > \tan\alpha$ و $\cos\alpha > ۰$، α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول

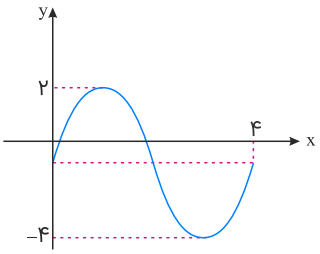
۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم

www.alirezaafshar.org

۱۱۲ اگر نمودار تابع $f(x) = a + b\sin cx$ به‌صورت زیر باشد، abc کدام است؟



۱) -۱

۲) ۱

۳) $-\frac{۳\pi}{۲}$

۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۱۱۳ اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = x^۲\ ;\ x \geq ۰$ باشد، تابع $y = ۲^{g^{-۱}of(x)}$ روی دامنه‌اش چگونه است؟

۱) صعودی

۲) نزولی

۳) نه صعودی، نه نزولی

۴) هم صعودی، هم نزولی

۱۱۴ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x(x-۳)(x+۳)$ برابر $۵x^۲ + ۳x + ۱$ باشد و باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^۲ - ۳x$ برابر $ax + b$ باشد، آن‌گاه $۲a + b$ کدام است؟

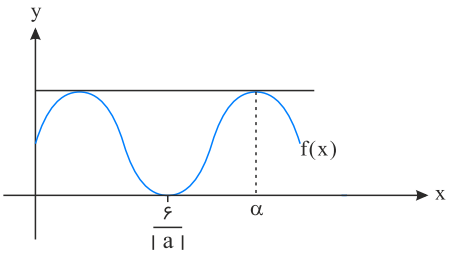
۱) ۲۰

۲) ۳۷

۳) -۲۳

۴) ۱۹

۱۱۵ اگر قسمتی از نمودار $f(x) = a\sin(\frac{\pi x}{a}) - a$ در شکل زیر رسم شده باشد، α کدام است؟



۱) ۵

۲) ۱

۳) $۲\sqrt{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) ۳

۱۱۶ معادلهٔ $\tan ۳x = \tan ۲x$ در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۱۷ تابع نمایی $y = a^x\ (a > ۰)$ وارون خود را قطع می‌کند، کدام گزینه در مورد آن نادرست است؟

۱) مقدار تابع همواره مثبت است.

۲) طول و عرض نقطهٔ برخورد در بازهٔ $(۰, ۱)$ است.

۳) وارون تابع صعودی است.

۴) نقطهٔ برخورد روی خط $y = x$ قرار دارد.

۱۱۸ معادلهٔ $۲\tan(x + \frac{۵\pi}{۲})\cot(\pi - x) + \frac{\sin^۲(۳\pi - x)}{\sin^۲(\frac{۷\pi}{۲} + x)} = ۶\sin\frac{۵\pi}{۶}$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ چند جواب دارد؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

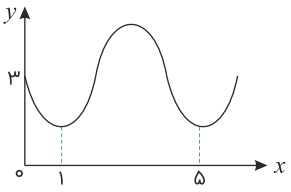
۴) ۶

www.alirezaafshar.org

۱۱۹ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos x(\cos x - \sin x) = \sqrt{۲} + ۱$ کدام است؟

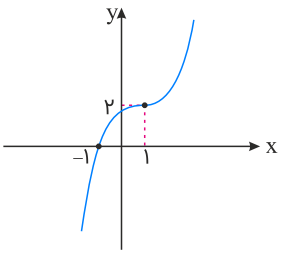
۱) $x = k\pi - \frac{\pi}{۸}$
۲) $x = k\pi + \frac{\pi}{۸}$
۳) $x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$
۴) $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$

۱۲۰ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ می‌باشد. مقدار y در نقطهٔ $x = \frac{۲۵}{۳}$، کدام است؟



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

۱۲۱ هرگاه نمودار تابع $f(x) = ax^۳ - ۳ax^۲ + ۳ax + b$ به شکل زیر باشد، b کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۴}$
۲) $\frac{-۷}{۴}$
۳) ۱
۴) -۱

۱۲۲ دورهٔ تناوب تابع $y = \frac{\sin ۲x}{\tan x + \cot x}$ کدام است؟

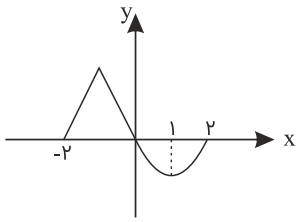
۱) $\frac{\pi}{۲}$
۲) π
۳) ۲π
۴) $\frac{\pi}{۴}$

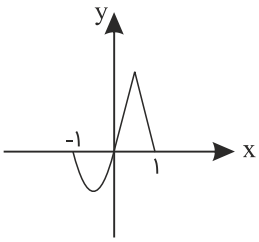
۱۲۳ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin ۳x - ۱ = ۰$ در بازهٔ $[۰, \pi]$ کدام است؟

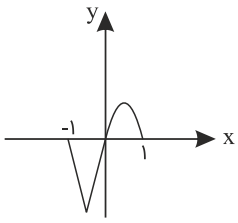
۱) π
۲) $\frac{۳\pi}{۲}$
۳) ۲π
۴) $\frac{۲۹\pi}{۱۸}$

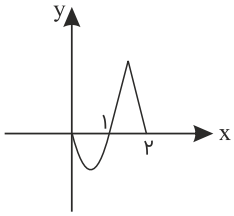
www.alirezaafshar.org

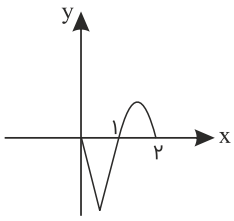
۱۲۴ نمودار تابع $y = f(۱ - x)$ به شکل زیر است. نمودار تابع $f(۲x - ۱)$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۱۲۵ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log_{\sqrt{۲}}(x + ۲) < \log_{\sqrt{۲}}(\sqrt{x + ۱})$ کدام است؟

۱) $\varnothing$
۲) $\mathbb{R}$
۳) $(-۱, +\infty)$
۴) $(۰, +\infty)$

۱۲۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan ۳x = \frac{۱ - \tan x}{۱ + \tan x}$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۱۶}$
۲) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۶}$
۳) $\frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۸}$
۴) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

۱۲۷ دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \frac{\cos x}{۲\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$
۲) $\frac{\pi}{۲}$
۳) π
۴) ۲π

۱۲۸ یکی از نقاط تقاطع منحنی $y = \sqrt[۳]{-x + ۱}$ با منحنی وارون خود کدام است؟

۱) $(۲, ۰)$
۲) $(۳, ۳)$
۳) $(-۲, -۱)$
۴) $(۰, ۱)$

۱۲۹ اگر تابع $y = f(x)$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۴ قطع کند، آنگاه تابع $g(x) = f(\frac{۴ - ۲x}{۳})$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -۴ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۲

۱۳۰ برد تابع $y = \tan(\tan x)$ اگر x در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی باشد، کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\mathbb{R}^+$

۳) $\mathbb{R}^-$ ۴) $\mathbb{R}$

استاد علیرضا افشار
”همایش ها“
@hamayesh_dr_afshar

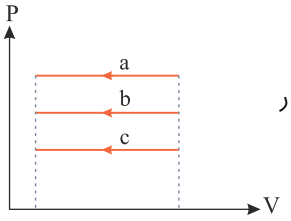
www.alirezaafshar.org

۱ گزینه ۱

هر سه فرآیند هم‌فشار هستند و شیب این نمودارها معادل $\frac{nR}{P}$ است؛ بنابراین می‌توان گفت:

$$P_c < P_b < P_a$$

نمودار $P - V$ برای این سه فرآیند به‌صورت زیر است:



سطح زیر نمودار $P - V$ نشان‌دهندهٔ کار است و چون سطح زیر نمودار a از b و c بیشتر است، پس کار در فرآیند a از b و c بیشتر است.

۲ گزینه ۴

گام اول

گاز در یک فرآیند بی‌دررو منبسط می‌شود $\leftarrow Q = 0 \, , \, \Delta V > 0$

گام دوم

طبق قانون اول ترمودینامیک خواهیم داشت:

$$\Delta U = W + Q \xrightarrow{Q=0} \Delta U = W$$

با توجه به اینکه سیستم منبسط شده است $(\Delta V > 0)$، داریم:

$$\begin{cases} \Delta U = W \\ W = -P\,\Delta V \end{cases} \rightarrow \Delta U = -P\,\Delta V \rightarrow \Delta U < 0$$

انرژی درونی سیستم کاهش می‌یابد و ازآنجایی‌که انرژی درونی سیستم متناسب با دمای مطلق گاز است، پس دما نیز کاهش می‌یابد.

پاسخ سؤالات ۳ تا ۴

۳ حجم گاز طی این فرآیند ثابت می‌ماند و بنابراین کاری انجام نمی‌شود. در این فرآیند گاز با محیط فقط تبادل گرما می‌کند و تغییر انرژی درونی گاز برابر با گرمایی است که با محیط مبادله می‌کند.

۴ پیستون بالا می‌آید و مخلوط را متراکم می‌کند و آن را به حجم V_1 می رساند. این تراکم به سرعت رخ می دهد. بنابراین می توان آن را بی‌دررو در نظر گرفت. درنتیجه در پایان این مرحله، دما و فشار مخلوط بسیار بالا رفته است.

۵ گزینه ۲

ازآنجایی‌که نقاط ابتدا و انتهای در مسیرهای abc و adc یکسان است، بنابراین تغییرات انرژی هر دو مسیر یکسان است:

$$\Delta U_{abc} = \Delta U_{adc}$$

در فرآیندهای ab و cd کار صفر است (زیرا فرآیند هم‌حجم است)، و در فرآیندهای bc و ad که انبساط هم‌فشار هستند، کار انجام‌شده منفی است:

$$W_{abc} = W_{ab} + W_{bc} = ۰ + (-P_۲(V_۲ - V_۱) = -P_۲(V_۲ - V_۱)$$
$$W_{adc} = W_{ad} + W_{bc} = ۰ + (-P_۱(V_۲ - V_۱) = -P_۱(V_۲ - V_۱)$$

گرمای داده‌شده در مسیر abc از adc بیشتر است زیرا:

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow Q = \Delta U - W$$
$$\begin{cases} Q_{abc} = \Delta U_{abc} + P_۲(V_۲ - V_۱) \\ Q_{adc} = \Delta U_{adc} + P_۱(V_۲ - V_۱) \end{cases} \xrightarrow{P_۲>P_۱ \ , \ \Delta U_{abc}=\Delta U_{adc}} Q_{abc} > Q_{adc}$$

۶ گزینه ۲

$$\frac{P_A V_A}{n_A T_A} = \frac{P_B V_B}{n_B T_B} \xrightarrow{T_A=T_B} \frac{P_۱ \times ۹}{۱۴} = \frac{\frac{۳}{۷}P_۱ \times ۱۵}{n} \Rightarrow \frac{۹}{۱۴} = \frac{۳ \times ۱۵}{۷ \times n} \Rightarrow n = ۱۰ mol$$

۷ گزینه ۱

چون فرآیند به‌صورت سریع انجام شده است، پس فرآیند از نوع بی‌دررو است.
قدرمطلق تغییرات فشار در فرآیند بی‌دررو نسبت به فرآیند هم‌دما بیشتر است (به ازای تغییر حجم یکسان)

$$\text{به ازای تغییر حجم یکسان} \Rightarrow |\Delta P_{\text{بی‌دررو}}| > |\Delta P_{\text{هم‌دما}}|$$

در فرآیند هم‌دما رابطهٔ $P_۱V_۱ = P_۲V_۲$ برقرار است:

$$P_۱V_۱ = P_۲(۱/۵V_۱) \Rightarrow ۳/۵ = ۱/۵ \times P_۲ \Rightarrow P_۲ = \frac{۳۵}{۱۵} = \frac{۷}{۳} atm$$

پس در فرآیند بی‌دررو که ذکرشده، فشار ثانویه از $\frac{۷}{۳} atm$ کمتر تا شرایط تغییرات فرآیند بی‌دررو بیشتر باشد.

$$(P_۲)_{\text{بی‌دررو}} < \frac{۷}{۳}$$
$$\Rightarrow (P_۲)(V_۲) < \frac{۷}{۳} \times ۱۰^۵ \times ۴/۵ \times ۱۰^{-۳} \ , \ T_۲ = \frac{P_۲V_۲}{nR}$$
$$\Rightarrow T_۲ < \frac{۱۰/۵ \times ۱۰^۲}{۱/۰۵ \times ۸} = \frac{۱۰۰۰}{۸} = ۱۲۵K$$

۸ گزینه ۳

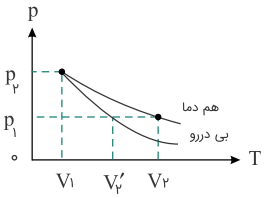
فرآیندی که طی آن گاز از محیط گرما می‌گیرد ($Q > ۰$)، می‌تواند فرآیندی هم‌دما باشد و در فرآیند هم‌دما، دمای گاز ثابت می‌ماند. (رد گزینهٔ "۱")

این فرآیند می‌تواند فرآیندی هم‌فشار باشد که با گرفتن گرما از محیط، دمای گاز نیز بالا می‌رود و انرژی درونی گاز افزایش می‌یابد. (رد گزینهٔ "۲")

این فرآیند می‌تواند فرآیندی هم‌حجم نیز باشد که کار برابر صفر می‌شود. (رد گزینهٔ "۴")

۹ گزینه ۴

نمودار فرآیند انبساط بیدررو و هم‌دما را نظر می‌گیریم:



در فرآیند هم‌دما، فشار و حجم رابطهٔ عکس دارند. $V_۲$ را برحسب $V_۱$ محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} PV = nRT \\ P_۱V_۱ = P_۲V_۲ \\ P_۲ = \frac{۱}{۲}P_۱ \end{cases} \rightarrow P_۱V_۱ = \frac{۱}{۲}P_۱V_۲ \rightarrow V_۲ = ۲V_۱$$

در فرآیند انبساط بیدررو طبق نمودار بالا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} V'_۲ < V_۲ \\ V_۲ < ۲V_۱ \end{cases} \rightarrow V'_۲ < ۲V_۱$$

۱۰ گزینه ۱

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} + W_{AB}$$

$$\xrightarrow[W_{AB}=۰]{\text{فرآیند هم‌حجم است } AB} \Delta U_{AB} = Q_{AB} = ۲۰۰\,J$$

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} + W_{BC}$$

$$\xrightarrow[\Delta U_{BC}=۰]{\text{فرآیند هم‌دما است } BC} ۰ = Q_{BC} + ۳۰۰ \Rightarrow Q_{BC} = -۳۰۰\,J$$

$$Q_{ABC} = Q_{AB} + Q_{BC} = ۲۰۰ + (-۳۰۰) = -۱۰۰\,J$$

۱۱ گزینه ۴

ابتدا نیروی محرکهٔ القایی را در سه بازهٔ زمانی مختلف به دست آورده و درنهایت نمودار آهنگ تولید انرژی گرمایی برحسب زمان را رسم می‌کنیم:

$$\varepsilon = -N\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = -N\frac{A\cos\theta\Delta B}{\Delta t} \xrightarrow[\cos\theta=1]{A=0/01\pi m^2} \varepsilon = -1\times 0/01\times 3\times 1\times\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

بازهٔ ۰ تا ۰/۰۱:

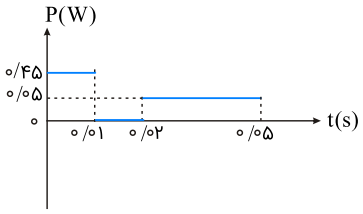
$$\varepsilon = -0/03\times\frac{0/5}{0/01} = -1/5V \Rightarrow P = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{2/25}{5} = 0/45W$$

بازهٔ ۰/۰۱ تا ۰/۰۲:

$$\varepsilon = -0/03\times 0 = 0 \Rightarrow P = 0$$

بازهٔ ۰/۰۲ تا ۰/۰۵:

$$\varepsilon = -0/03\times\frac{-0/5}{0/03} = 0/5V \Rightarrow P = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{0/25}{5} = 0/05W$$



۱۲ گزینه ۱

$$U = \frac{1}{2}LI_m^2 \Rightarrow 0/9 = \frac{1}{2}L(3\sqrt{2})^2 \Rightarrow 0/9 = \frac{1}{2}L\times 9\times 2 \Rightarrow L = 0/1H$$

۱۳ گزینه ۳

همان‌طور که از نمودار مشخص است، در بازهٔ زمانی ۰s تا ۱۰s، با تغییر میدان مغناطیسی $\vec{B}$، شار گذرندهٔ عبوری از پیچه تغییر می‌کند. با استفاده از رابطهٔ $|\bar{\varepsilon}| = |-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}|$ داریم:

$$N = ۱۰۰ \quad , \quad A = \pi r^۲ = \pi \times (\frac{۲۰}{۲} \times ۱۰^{-۲})^۲ = ۰/۰۱\pi \quad , \quad \theta = ۰^\circ$$

$$|\bar{\varepsilon}| = |-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}| = NA\cos\theta|\frac{\Delta B}{\Delta t}|$$

$$\Rightarrow |\bar{\varepsilon}| = ۱۰۰ \times ۰/۰۱\pi \times ۱ \times |\frac{\Delta B}{\Delta t}| = \pi\frac{\Delta B}{\Delta t} \quad (*)$$

$\frac{\Delta B}{\Delta t}$ همان شیب نمودار $B-t$ است. باید شیب خط در لحظهٔ $t = ۵s$ را به دست آوریم که با توجه به نمودار شیب خط از $t = ۰s$ تا $t = ۱۰s$ ثابت است:

$$(\frac{\Delta B}{\Delta t})_{۰s\text{تا}۱۰s} = \frac{B_{۱۰} - B_۰}{۱۰ - ۰} = \frac{۰/۰۵ - (-۰/۰۵)}{۱۰} = ۰/۰۱\,T/s$$

درنهایت با جایگذاری مقدار به‌دست‌آمده در (*) داریم:

$$|\bar{\varepsilon}| = \pi\frac{\Delta B}{\Delta t} = \pi \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۰/۰۳\,V$$

۱۴ گزینه ۱

برای توزیع جریان الکتریکی متناوب در مسافت‌های طولانی با استفاده از مبدل در ابتدای مسیر ولتاژ را بالا می‌برند و در انتهای مسیر ولتاژ را کاهش می‌دهند. بدین‌وسیله اتلاف توان را کاهش می‌دهند.

۱۵ گزینه ۱

ضریب خودالقایی یک سیملوله از رابطهٔ $L = \frac{\mu_۰ N^۲ A}{l}$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$L = \frac{\mu_۰ N^۲ A}{l} = \frac{۱۲/۵ \times ۱۰^{-۷} \times ۴ \times ۱۰^۶ \times ۱۰ \times ۱۰^{-۴}}{۰/۵} = ۱۰^{-۲} = ۰/۰۱\,H$$

۱۶ گزینه ۴

بر اساس قانون لنز در حلقهٔ رسانا چه در هنگام ورود آهنربای ۱ و چه در هنگام خروج آن جریانی القا می‌شود که با تغییرات شار (یعنی ورود یا خروج آهنربا) مخالفت می‌کند. درنتیجه در هنگام ورود و خروج آهنربا نیرویی در خلاف جهت حرکت (رو به بالا) به آهنربای ۱ اثر می‌کند و سرعت آن را کاهش می‌دهد. اما آهنربای ۲ و میلهٔ آهنی فقط تأثیر نیروی وزنشان و با شتاب ثابت g به سطح زمین برخورد می‌کنند.

۱۷ گزینه ۱

۲۰ ثانیهٔ سوم یعنی از $t = ۴۰s$ تا $t = ۶۰s$

$$\bar{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -۱ \times \frac{۰ - ۲ \times ۱۰^{-۳}}{۶۰ - ۴۰} = \frac{+۲ \times ۱۰^{-۳}}{۲۰} = ۱ \times ۱۰^{-۴}\,V$$

۱۸ گزینه ۱

$$\begin{cases}\Phi_۱ = B_۱ A \cos\alpha_۱ = ۸ \times ۱۰^{-۲} \times ۲ \times ۱۰^{-۲} \times \cos ۶۰^\circ = ۸ \times ۱۰^{-۴} \\ \Phi_۲ = B_۲ A \cos\alpha_۲ = ۴ \times ۱۰^{-۲} \times ۲ \times ۱۰^{-۲} \times \cos ۱۲۰^\circ = -۴ \times ۱۰^{-۴}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi = \Phi_۲ - \Phi_۱ = ۱۲ \times ۱۰^{-۴}$$

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \left| -\frac{N}{R} \times \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \Rightarrow \Delta q = \frac{N\Delta\Phi}{R}$$

$$N = ۱ \Rightarrow \Delta q = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۱۰^{-۴} = ۶ \times ۱۰^{-۴}\,C = ۰/۶\,mC$$

۱۹ گزینه ۴

باتوجه‌به ثابت بودن شیب نمودار شار- زمان از ۴ تا ۱۶، در این بازه نیروی محرکهٔ القایی ثابت بوده و برابر با حاصل‌ضرب تعداد دور سیم (N) در شیب ($\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$) است.

$$\begin{cases}\varepsilon = -N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} \\ \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \dfrac{-۲-۲}{۱۶-۴} = -\dfrac{۴}{۱۲} = -\dfrac{۱}{۳}\end{cases} \Rightarrow |\varepsilon| = \frac{۱}{۳}\,V$$

۲۰ گزینه ۳

گام اول

الف) یک سیم‌پیچ با ۲۰ دور سیم $\leftarrow N = ۲۰$

ب) طول هر ضلع آن ۴۰ سانتی‌متر است $\leftarrow L = ۴۰cm = ۰/۴m$

ج) با سرعت $۳m/s$ به‌سمت راست حرکت می‌کند $\leftarrow v = ۳m/s$

د) در لحظه‌ای که ۳۰ سانتی‌متر از آن وارد شده است $\leftarrow x_۲ = ۳۰cm = ۰/۳\,m = ۳ \times ۱۰^{-۱}m$

ه) بزرگی نیروی محرکهٔ القاشده چند ولت است $\leftarrow \varepsilon = ?$

گام دوم

کافی است مدت‌زمانی که طول می‌کشد که ۳۰ سانتی‌متر از سیم‌پیچ وارد میدان مغناطیسی شود را محاسبه کنیم و با محاسبهٔ شار مغناطیسی و استفاده از قانون فارادی، نیروی محرکهٔ القایی را به دست بیاوریم.

$$x = vt \Rightarrow ۳ \times ۱۰^{-۱} = ۳ \times t \Rightarrow t = ۱۰^{-۱}s$$

حالت اول:

سیم‌پیچ هنوز وارد میدان نشده $(B = ۰)$؛ بنابراین $\varphi_۱ = ۰$ است.

حالت دوم:

$$\begin{cases} \varphi = BA\cos\theta \\ A = xL \\ \theta = ۰ \end{cases} \Rightarrow \varphi_۲ = BxL$$

$$\xrightarrow{B=۰/۵T} \varphi_۲ = ۰/۵ \times ۳ \times ۱۰^{-۱} \times ۴ \times ۱۰^{-۱} = ۶ \times ۱۰^{-۲}Wb$$

با استفاده از قانون القای فارادی داریم:

$$|\varepsilon| = \left|-N\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \left|-۲۰ \times \frac{(۶ \times ۱۰^{-۲} - ۰)}{۱۰^{-۱}}\right| = ۱۲V$$

۲۱ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار، در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت، مقدار تغییرات سرعت برابر است با $۲ \times ۱۰ = ۲۰m/s$؛ یعنی سرعت در لحظهٔ $t_۱ = ۲۰s$، $-۲۰m/s$ است (مساحت زیر نمودار $a - t$، برابر تغییرات سرعت است)

از لحظهٔ $t_۱ = ۲۰s$ به بعد، شتاب $+۲m/s^۲$ است؛ پس داریم:

$$\text{ثانیهٔ ۲۰ به بعد}: v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۲t - ۲۰$$

متحرک در لحظه‌ای (لحظه‌هایی) تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر می‌شود، بنابراین:

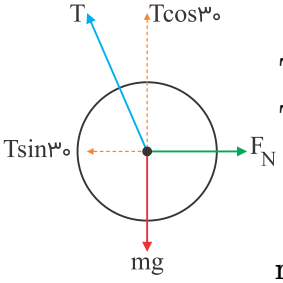
$$v = ۰ \Rightarrow ۲t - ۲۰ = ۰ \Rightarrow t = ۱۰s$$

پس متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد (در لحظهٔ $t = ۱۰s$).

t		۱۰	
V	−	۰	+

۲۲ گزینه ۱

ابتدا نیروهای وارد بر یکی از کره‌ها را رسم کرده و شرط تعادل جسم را بررسی می‌کنیم:



$$\left.\begin{matrix} T\sin ۳۰ = F_N \\ T\cos ۳۰ = mg \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم بر هم}} \tan ۳۰ = \frac{F_N}{mg} \Rightarrow F_N = mg \times \tan ۳۰^\circ$$

باتوجه‌به ابعاد کره‌ها و هم‌جنس بودن آن‌ها نسبت جرم آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$r_B = ۲r_A \Rightarrow V_B = ۸V_A \xrightarrow{\rho_A=\rho_B} m_B = ۸m_A$$

$$\frac{F_{N(B)}}{F_{N(A)}} = \frac{m_B g \times \tan ۳۰}{m_A g \times \tan ۳۰} = \frac{m_B}{m_A} = ۸$$

۲۳ گزینه ۴

گام اول: ابتدا شتاب جسم را به دست می‌آوریم:

$$F = ma \Rightarrow ۲۰ = ۲ \times a \Rightarrow a = ۱۰\,m/s^۲$$

گام دوم: چون جابه‌جایی جسم هم‌جهت با نیروی خالص است، مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی جسم برابر است؛ بنابراین:

$$l_{(۰/۵s)} = \Delta x_{(۰/۵s)} = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times (۵)^۲ + ۰ = ۱۲۵\,m$$

۲۴ گزینه ۳

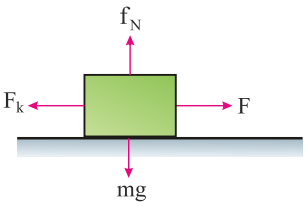
برای حل این سؤال به دلیل اینکه مسافت طی‌شده داده شده، بهترین راه ممکن استفاده کردن از قضیه کار و انرژی است.

$$F - f_k = F_{net}$$

$$F_{net} \times d = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow F_{net} \times ۴ = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۸ \Rightarrow F_{net} = ۱\,N$$

$$f_k = \mu_k \times F_N \Rightarrow F_N = mg \Rightarrow f_k = ۰/۴ \times ۱ \times ۱۰ = ۴\,N$$

$$\Rightarrow F_{net} = F - f_k \Rightarrow ۱ = F - ۴ \Rightarrow F = ۵\,N$$



۲۵ گزینه ۳

در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$ شتاب حرکت ثابت و مثبت است؛ پس نمودار مکان- زمان به صورت سهمی و با تقعر روبه‌بالا است. در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ شتاب حرکت ثابت و منفی است، پس نمودار مکان- زمان به صورت سهمی و با تقعر روبه‌پایین است.

۲۶ گزینه ۲

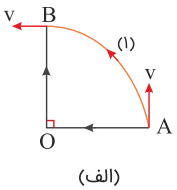
شعاع دایرهٔ مسیر را R در نظر می‌گیریم و مسافتی که متحرک در مسیرهای (۱) و (۲) می‌پیماید برحسب R به دست می‌آوریم:

$$l_۱ = \frac{۱}{۴}(۲\pi R) = \frac{۱}{۲}\pi R$$
$$l_۲ = R + R = ۲R$$

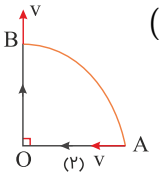
باتوجه‌به اینکه تندی متحرک در پیمودن مسیرهای (۱) و (۲) با یکدیگر برابر است، داریم:

$$s'_۱ = s_۲ \Rightarrow \frac{l_۱}{\Delta t_۱} = \frac{l_۲}{\Delta t_۲} \Rightarrow \frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲} = \frac{l_۱}{l_۲} = \frac{\frac{۱}{۲}\pi \cancel{R}}{۲\cancel{R}} \Rightarrow \frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲} = \frac{\pi}{۴} \qquad (I)$$

بردار سرعت متحرک در نقاط A و B هنگامی‌که در مسیر (۱) حرکت می‌کند، مطابق شکل (الف) و هنگامی‌که در مسیر (۲) حرکت می‌کند مطابق شکل (ب) است؛ درنتیجه شتاب متوسط در هریک از مسیرهای (۱) و (۲) برابر است با:



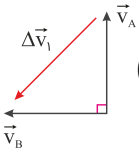
(الف)



(ب)

شکل (الف) : $\Delta\vec{v}_{(۱)} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

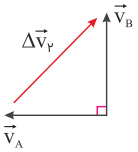
$$\Delta v_{(۱)} = \sqrt{v^۲ + v^۲} = \sqrt{۲}v$$
$$a_{av_{(۱)}} = \frac{\Delta v_{(۱)}}{\Delta t_{(۱)}} = \frac{\sqrt{۲}v}{\Delta t_{(۱)}} \qquad (II)$$



شکل (ب) : $\Delta\vec{v}_{(۲)} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

$$\Delta v_{(۲)} = \sqrt{v^۲ + v^۲} = \sqrt{۲}v$$
$$a_{av_۲} = \frac{\Delta v_{(۲)}}{\Delta t_{(۲)}} = \frac{\sqrt{۲}v}{\Delta t_{(۲)}} \qquad (III)$$

در پایان، خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:



$$(II)\,,\,(III) \Rightarrow \frac{a_{av_{(۱)}}}{a_{av_{(۲)}}} = \frac{\frac{\cancel{\sqrt{۲}}v}{\Delta t_{(۱)}}}{\frac{\cancel{\sqrt{۲}}v}{\Delta t_{(۲)}}} = \frac{\Delta t_{(۲)}}{\Delta t_{(۱)}} \xrightarrow{(I)} \frac{a_{av_{(۱)}}}{a_{av_{(۲)}}} = \frac{۴}{\pi}$$

۲۷ گزینه ۴

گام اول

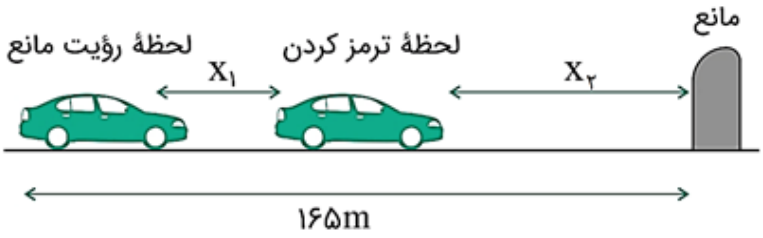
الف) اتومبیلی روی خط راست با سرعت $۱۰۸\,km/h$ در حال حرکت است. $\leftarrow v_۰ = ۱۰۸\,km/h = \frac{۱۰۸}{۳/۶} = ۳۰\,m/s$

ب) راننده با دیدن مانعی در فاصلهٔ $۱۶۵\,m \leftarrow$ فاصلهٔ اتومبیل از مانع در لحظهٔ دیدن آن $= ۱۶۵\,m$

ج) با شتاب ثابت $۳\,m/s^۲$ ترمز می‌کند و جلوی مانع می‌ایستد $\leftarrow a = -۳\,m/s^۲$

گام دوم

باتوجه‌به شکل زیر و معادلهٔ سرعت- زمان خواهیم داشت:



$$x_۲ = \frac{-v_۰^۲}{۲a} = \frac{-(۳۰)^۲}{-۲ \times ۳} = ۱۵۰\,m$$

$$x_۱ = ۱۶۵ - x_۲ = ۱۶۵ - ۱۵۰ = ۱۵\,m$$

$$v = \frac{x_۱}{t_۱} \Rightarrow t_۱ = \frac{۱۵}{۳۰} = \frac{۱}{۲}\,s$$

$$v = at_۲ + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۳ \times t_۲ + ۳۰ \Rightarrow t_۲ = ۱۰\,s$$

$$\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۱۰}{\frac{۱}{۲}} = ۲۰$$

۲۸ گزینه ۱

با جایگذاری $t = ۲\ s$ در معادل داریم:

$$\vec{p} = ۱۸\vec{i} + ۲۴\vec{j}$$

اندازه آن برابر است با:

$$|p| = \sqrt{۱۸^۲ + ۲۴^۲} = ۳۰\ kg.m/s$$

و درنهایت با کمک رابطهٔ $p = mv$ می توان تندی جسم در لحظهٔ $t = ۲\ s$ را به دست آورد:

$$p = mv \Rightarrow ۳۰ = \frac{۵}{۱۰}v \Rightarrow v = ۶۰\ m/s$$

۲۹ گزینه ۴

اگر جهت مثبت را به طرف بالا در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} F - mg = ma \\ mg = ۲ \times ۱۰ = ۲۰ N \\ F = ۲۴ N \end{cases} \Rightarrow ۲۴ - ۲۰ = ۲a \Rightarrow ۴ = ۲a \Rightarrow a = ۲ m/s^۲$$

پس جهت شتاب جسم روبه بالا است. از طرفی کار برابر است با حاصل‌ضرب F و d. باتوجه‌به اینکه F ثابت است، اندازهٔ کار با جابه‌جایی متناسب است. حال به بررسی حالت‌های مختلف می‌پردازیم:

الف) اگر ابتدا جسم ساکن باشد یا به طرف بالا در حرکت باشد، حرکت جسم تندشونده می‌شود و در ثانیه‌های متوالی جابه‌جایی جسم افزایش پیدا می‌کند درنتیجه اندازهٔ کار F نیز افزایش پیدا می‌کند.

ب) درصورتی‌که ابتدا جهت حرکت جسم روبه پایین باشد، حرکت جسم کندشونده می‌شود اما بعد از توقف جسم دوباره حرکتش روبه بالا و تندشونده می‌شود، پس در ثانیه‌های متوالی، جابه‌جایی جسم تا توقف کم می‌شود و بعد از توقف زیاد می‌شود؛ بنابراین اندازهٔ کار نیروی F ابتدا کاهش و بعد افزایش پیدا می‌کند.

۳۰ گزینه ۳

چون جابه‌جایی‌ها مساوی است، برای به دست آوردن رابطهٔ سرعت دو متحرک از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} v_A^۲ - v_{۰A}^۲ = ۲a_A \Delta x \\ v_B^۲ - v_{۰B}^۲ = ۲a_B \Delta x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} v_A^۲ = ۲(۳a_B)\Delta x \\ v_B^۲ = ۲a_B \Delta x \end{cases}$$

$$\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^۲ = ۳ \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{۳}$$

ازطرفی در حرکت با شتاب ثابت $v_{av} = \frac{v + v_۰}{۲}$ است؛ داریم:

$$\frac{v_{av_A}}{v_{av_B}} = \frac{\frac{v_A + v_{۰A}}{۲}}{\frac{v_B + v_{۰B}}{۲}} = \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{۳}$$

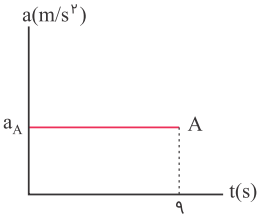
نکته: وقتی دو متحرک از حال سکون حرکت کنند و جابه‌جایی‌های مساوی داشته باشند، نسبت سرعت متوسط آن‌ها با نسبت سرعت آن‌ها برابر خواهد بود.

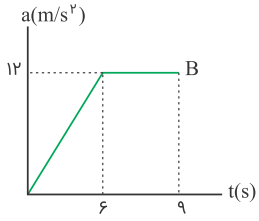
۳۱ گزینه ۱

باتوجه‌به صورت سؤال، این دو متحرک در $۹\,s$ ابتدای حرکت، دارای سرعت اولیه و سرعت ثانویهٔ یکسان هستند.

$$\text{در } ۹\,s \begin{cases} v_{۰A} = v_{۰B} = ۰ \\ v_A = v_B \end{cases} \Rightarrow \Delta v_A = \Delta v_B$$

این بدان معنا است که سطح زیر نمودار $(a-t)$ برای هر دو متحرک یکسان بوده است.





$$\left.\begin{aligned} \Delta v_A &= ۹a_A \\ \Delta v_B &= \frac{(۳+۹)۱۲}{۲} = ۷۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۹a_A = ۷۲ \Rightarrow a_A = ۸\,m/s^۲$$

۳۲ گزینه ۱

$$x_A = ۴t - ۴۰$$

$$x_B = -۶(t-۵) + ۶۰ = -۶t + ۳۰ + ۶۰ = -۶t + ۹۰$$

فاصلهٔ دو متحرک از هم دو بار $۲۰\,m$ می‌شود (یک‌بار قبل از رسیدن به یک‌دیگر و یک‌بار بعد از رسیدن به‌هم)

$$x_B - x_A = ۲۰ \;\Rightarrow\; (-۶t + ۹۰) - (۴t - ۴۰) = ۲۰ \;\Rightarrow\; t = ۱۱\,s$$

$$x_A - x_B = ۲۰ \Rightarrow (۴t - ۴۰) - (-۶t + ۹۰) = ۲۰ \Rightarrow t = ۱۵\,s$$

۳۳ گزینه ۱

گام اول: اگر شعاع زمین R_e باشد، h را برحسب R_e به دست می‌آوریم.

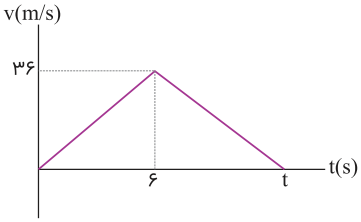
$$\frac{W_h}{W_{۳h}} = ۱/۲۱ \xrightarrow{W=mg} \frac{g_h}{g_{۳h}} = ۱/۲۱ \xrightarrow{g=\frac{GM}{r^۲}} \frac{g_h}{g_{۳h}} = \left(\frac{r_{۳h}}{r_h}\right)^۲ = ۱/۲۱$$
$$\Rightarrow \left(\frac{R_e + ۳h}{R_e + h}\right)^۲ = ۱/۲۱ \Rightarrow \frac{R_e + ۳h}{R_e + h} = ۱/۱ \Rightarrow h = \frac{۱}{۱۹}R_e$$

گام دوم: شتاب گرانش در ارتفاع h را با استفاده از رابطهٔ نسبتی شتاب گرانش به دست می‌آوریم:

$$\frac{g_h}{g_۰} = \left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^۲ \Rightarrow \frac{g_h}{۱۰} = \left(\frac{R_e}{R_e + \frac{۱}{۱۹}R_e}\right)^۲ \Rightarrow g_h \simeq ۹\,m/s^۲$$

۳۴ گزینه ۳

برای حل مسئله نمودار $v-t$ حرکت را رسم می‌کنیم.



در ۶ ثانیهٔ اول:

$$v = at + v_{\circ}$$

$$v = ۶ \times ۶ + ۰ = ۳۶\,m/s$$

در هنگامی‌که حرکت کندشونده است زمان و شتاب را نداریم، اما سرعت به صفر می‌رسد. جابه‌جایی را به کمک مساحت زیر نمودار محاسبه می‌کنیم:

$$S = \Delta x = \frac{۱}{۲} \times ۳۶ \times t = ۱۸t$$

حالا سرعت متوسط را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{t} = \frac{۱۸t}{t} = ۱۸\,m/s$$

۳۵ گزینه ۳

گام اول

الف) جسم ۲ کیلوگرمی $\leftarrow m = ۲kg$

ب) تغییر سرعت جسم بعد از ۲ ثانیه چند متر بر ثانیه خواهد شد؟ $\leftarrow \Delta t = ۲s\ ,\ \Delta v = ?\,m/s$

گام دوم

هم‌زمان چهار نیرو به جسم وارد می‌شود، با توجه به اینکه جسم در حالت تعادل قرار دارد $(\sum F = ۰)$ با حذف نیروی ۱۵ نیوتنی، اندازهٔ بردار برآیند بقیهٔ نیروها برابر ۱۵ نیوتن است. بنابراین با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\begin{cases} F = ma \\ a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \\ \sum F = ۱۵N \end{cases} \Rightarrow F = m\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۱۵ = ۲ \times \frac{\Delta v}{۲} = ۱۵m/s$$

۳۶ گزینه ۱

هنگامی‌که سنگ به‌سوی بالا حرکت می‌کند، دو نیروی وزن و مقاومت هوا به آن وارد می‌شوند که هر دو به سمت پایین هستند؛ بنابراین واکنش هر دوی آن‌ها به‌سوی بالا است. (توجه: واکنش نیروی وزن به زمین و واکنش مقاومت هوا به ذرات هوا وارد می‌شود)

۳۷ گزینه ۲

گزینه‌های "الف" و "ب" و "ت" نادرست هستند.

الف) نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه از رابطهٔ $f_{s_{max}} = \mu_s F_N$ به دست می‌آید.

ب) نیروی اصطکاک همواره نیرویی مزاحم نیست و در زندگی روزمره لازم است. مثلاً هنگام قدم زدن و یا نگه‌داشتن یک قلم در دست، اصطکاک مفید است.

ت) مقدار نیروی اصطکاک ایستایی بین صفر و $f_{s_{max}}$ است و ثابت نیست.

۳۸ گزینه ۴

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_e m}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} = \sqrt{\frac{R_e + 2R_e}{R_e + R_e}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

۳۹ گزینه ۲

گام اول

الف) در یک تصادف سرعت اتومبیل از $54km/h$ به صفر می‌رسد. $\leftarrow v_2 = 0 \;,\; v_1 = 54km/h = 15m/s$

ب) زمان این حرکت کندشونده، $0/3s \leftarrow t = 0/3s$

ج) مسافری به جرم $60kg \leftarrow m = 60kg$

د) بزرگی نیروی متوسط کمربند ایمنی به مسافر تا به جلو پرت نشود؟$\leftarrow |F_{av}| = ?$

گام دوم

روش اول:

بااستفاده از روابط تکانه، زیر داریم:

$$\Delta p = m\Delta v = 60 \times 15$$
$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{60 \times 15}{0/3} = 3000N$$

روش دوم:

نیرویی که باعث پرت شدن مسافر به جلو می‌شود همان نیرویی است که شتاب متوقف‌کنندهٔ اتومبیل را به وجود می‌آورد.

ابتدا با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان، شتاب حرکت کند شونده را به دست می آوریم:

$$v_2 = at + v_1 \Rightarrow 0 = a \times 0/3 + 15 \Rightarrow a = -50 m/s^2$$

حالا به کمک قانون دوم نیوتن، نیرویی را که کمربند باید به این مسافر وارد کند، تا به جلو پرت نشود، محاسبه می‌کنیم:

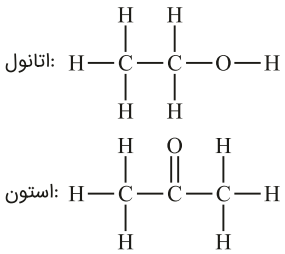
$$\left|\sum F\right| = m|a| \Rightarrow |F_{av}| = 60 \times |-50| = 3000N$$

۴۰ گزینه ۱

طبق قانون سوم نیوتون هنگام شلیک، نیرویی که گلوله و ارابهٔ توپ بر هم وارد می‌کنند برابر و در خلاف جهت هم است، پس داریم:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow m_1 a_1 = -m_2 a_2 \Rightarrow m_1\left(\frac{v_1 - 0}{t}\right) = -m_2\left(\frac{v_2 - 0}{t}\right)$$
$$\Rightarrow m_1 v_1 = -m_2 v_2 \Rightarrow |0/6 \times 1500| = |-100 \times v_2| \Rightarrow v_2 = 9\, m/s$$

۴۱ گزینه ۲



اتانول به علت H متصل به O دارای پیوند هیدروژنی است، درحالی‌که استون قادر به تشکیل این نوع پیوند نیست؛ پس نیروی بین مولکولی در اتانول و به‌تبع نقطهٔ جوش آن بیشتر از استون است.

۴۲ گزینه ۱

بررسی عبارت‌ها:

الف) درست. در مواد ناقطبی با افزایش جرم مولی، نیروهای بین مولکولی افزایش می‌یابد.

ب) درست. اگرچه جرم مولی N_2 و CO باهم برابر است، اما CO یک مادهٔ قطبی و N_2 یک مادهٔ ناقطبی است؛ بنابراین میزان جاذبه‌های بین مولکولی در CO بیشتر بوده و نقطهٔ جوش بالاتری نسبت به N_2 دارد. از طرف دیگر می‌دانیم گازی آسان‌تر مایع می‌شود که نقطهٔ جوش بالاتری داشته باشد؛ بنابراین CO زودتر از N_2 به مایع تبدیل می‌شود.

پ) نادرست. گشتاور دوقطبی مولکول آب تقریباً دو برابر گشتاور دوقطبی مولکول هیدروژن سولفید است.

این کمیت نشان می‌دهد که میزان قطبیت مولکول‌های آب و قدرت نیروهای بین مولکولی آن نزدیک به دو برابر مولکول‌های هیدروژن سولفید است که دلیل آن را می‌توانیم به وجود پیوندهای هیدروژنی بین مولکول‌های آب نسبت دهیم. وجود پیوندهای هیدروژنی بین مولکول‌های آب باعث می‌شود نقطهٔ جوش این ماده به مراتب از گاز هیدروژن سولفید بیشتر باشد.

نکته: آب و هیدروژن سولفید، هر دو مولکول‌های خمیده بوده و ساختار لوویس مشابه دارند.

$(\mu = ۱/۸۵D)$ $(\mu = ۰/۹۷D)$

ت) نادرست. در مواد مولکولی با جرم مولی مشابه (نزدیک به هم)، ماده با مولکول‌های قطبی، نقطهٔ جوش بالاتری دارد. جرم مولی F_2 و HCl به هم نزدیک است $(F_2 = ۳۸ \ , \ HCl = ۳۶/۵ : g.mol^{-1})$. F_2 یک مادهٔ ناقطبی و HCl یک مادهٔ قطبی می‌باشد. در این شرایط ماده با مولکول‌های قطبی (یعنی HCl) نقطهٔ جوش بالاتری دارد.

۴۳ گزینه ۲

برای به دست آوردن غلظت مولار محلول سیرشدهٔ B و A درنهایت محاسبهٔ نسبت غلظت مولار این دو محلول در دمای $۵۰^{\circ}C$، ابتدا می‌بایست بر اساس معادلهٔ انحلال‌پذیری این دو نمک، انحلال‌پذیری آن‌ها را در دمای $۵۰^{\circ}C$ حساب کنیم. همان طور که در متن سوال ملاحظه می‌کنید، معادلهٔ انحلال‌پذیری نمک B داده نشده است، اما از روی اطلاعات موجود در سوال می‌توانیم به معادلهٔ انحلال‌پذیری این نمک دست پیدا کنیم.

ابتدا انحلال‌پذیری نمک A را (باتوجه‌به معادلهٔ انحلال‌پذیری آن) در دمای $۰^{\circ}C$ و $۴۰^{\circ}C$ حساب کرده و سپس باتوجه‌به نسبت انحلال‌پذیری نمک به نمک B (که در متن سوال داده شده)، انحلال‌پذیری نمک B را در این دماها به دست می‌آوریم:

$$S_A = ۰/۹۷\theta + ۳۵ \begin{cases} \xrightarrow{\theta=۰^{\circ}C} S_A = (۰/۹۷ \times ۰) + ۳۵ = ۳۵ \\ \xrightarrow{\theta=۴۰^{\circ}C} S_A = (۰/۹۷ \times ۴۰) + ۳۵ = ۷۳/۸ \end{cases}$$

$$\theta = ۰^{\circ}C \text{ در دمای } : \frac{S_A}{S_B} = ۱ \Rightarrow \frac{۳۵}{S_B} = ۱ \Rightarrow S_B = ۳۵$$

$$\theta = ۴۰^{\circ}C \text{ در دمای } : \frac{S_A}{S_B} = ۲/۴۶ \Rightarrow \frac{۷۳/۸}{S_B} = ۲/۴۶ \Rightarrow S_B = ۳۰$$

با در اختیار داشتن انحلال‌پذیری نمک B در دمای $۰^{\circ}C$ و $۴۰^{\circ}C$، معادلهٔ انحلال‌پذیری نمک B را به دست می‌آوریم:

$$S_B = \underbrace{a}\theta + \underbrace{b} \Rightarrow S_B = \frac{۳۰ - ۳۵}{۴۰ - ۰}\theta + ۳۵ \Rightarrow S_B = -۰/۱۲۵ + ۳۵$$

$$a : \text{شیب خط} = \frac{S_۲ - S_۱}{\theta_۲ - \theta_۱}$$

$$b : \text{انحلال‌پذیری در دمای } ۰^{\circ}C \text{ (عرض از مبدأ)}$$

اکنون می‌توانید با در اختیار داشتن معادلهٔ انحلال‌پذیری هر دو نمک، انحلال‌پذیری آن‌ها را در دمای $\theta = ۵۰^{\circ}C$ حساب کنیم:

$$S_A = (۰/۹۷ \times ۵۰) + ۳۵ = ۸۳/۵$$
$$S_B = (-۰/۱۲۵ \times ۵۰) + ۳۵ = ۲۸/۷$$

انحلال‌پذیری نمک A و B در دمای $۵۰^{\circ}C$ به ترتیب برابر ۸۳/۵ و ۲۸/۷ گرم در ۱۰۰ گرم از آب است.

$$۸۳/۵\,g\,A \times \frac{۱\,mol\,A}{۳۳۰\,g} = ۰/۲۵۳\,mol$$
$$۲۸/۷\,g\,B \times \frac{۱\,mol\,B}{۱۱۰\,g\,B} = ۰/۲۶۱\,mol$$

به عبارتی در محلول سیرشدهٔ نمک A و نمک B به ترتیب ۰/۲۵۳ و ۰/۲۶۱ مول نمک حل‌شده داریم. ازآنجاکه مطابق فرض سوال از تغییر حجم آب در اثر حل کردن نمک، چشم‌پوشی می‌شود؛ بنابراین حجم این دو محلول سیرشده را می‌توانیم یکسان در نظر بگیریم.

$$\frac{\text{غلظت مولار محلول سیرشده } B}{\text{غلظت مولار محلول سیرشده } A} = \frac{\frac{mol\,B}{V_B}}{\frac{mol\,A}{V_A}} \xrightarrow{V_A = V_B} \frac{mol\,B}{mol\,A} = \frac{۰/۲۶۱}{۰/۲۵۳} = ۱/۰۳$$

۴۴ گزینه ۲

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. آلومینیم کربنات: $Al_۲(CO_۳)_۳$

گزینهٔ ۳: نادرست. آمونیوم کلرید: $NH_۴Cl$

گزینهٔ ۴: نادرست. آهن (II) نیترات: $Fe(NO_۳)_۲$

۴۵ گزینه ۴

$MgSO_۴$ جزء نمک‌های محلول در آب است؛ بنابراین نیروی جاذبهٔ یون- دوقطبی در محلول بیشتر از میانگین قدرت پیوند یونی در $MgSO_۴$ و پیوندهای هیدروژنی آب است.

۴۶ گزینه ۱

معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم. ابتدا می‌توانیم ضریب Bi و $Bi(NO_۳)_۳$ را برابر عدد ۱ قرار دهیم.

$$۱Bi(s) + aHNO_۳(aq) \rightarrow ۱Bi(NO_۳)_۳(aq) + bNO(g) + CH_۲O(l)$$

باتوجه‌به عنصر هیدروژن : $a = ۲c$

باتوجه‌به عنصر نیتروژن : $a = ۳ + b \Rightarrow ۲c = ۳ + b$

باتوجه‌به عنصر اکسیژن : $۳a = ۹ + b + c \Rightarrow ۶c = ۹ + b + c$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -۲c = -۳ - b \\ ۵c = ۹ + b \end{matrix} \Rightarrow ۳c = ۶ \Rightarrow c = ۲ \ , \ a = ۴ \ , \ b = ۱$$

$$Bi(s) + ۴HNO_۳(aq) \rightarrow Bi(NO_۳)_۳(aq) + NO(g) + ۲H_۲O(l)$$

$$\text{تعداد مول‌های } Bi^{۳+} \text{ تولیدشده} = \text{تعداد مول‌های } NO \text{ تولیدشده} = (۲۰۳ - ۲۰۰)\,g\,NO \times \frac{۱\,mol\,NO}{۳۰\,g\,NO} = ۰/۱\,mol$$

$$\Delta[Bi^{۳+}] = \frac{۰/۱\,mol}{۰/۲\,L} = ۰/۵\,mol.L^{-۱}$$

در گزینهٔ (۱) غلظت $Bi^{۳+}(aq)$ پس از ۵ دقیقه به‌اندازهٔ $۰/۵\,mol.L^{-۱}$ افزایش یافته است.

۴۷ گزینه ۱

باتوجه‌به معادلهٔ داده‌شده انحلال‌پذیری نمک مورد مذکور را در آب در دمای $۶۰^{\circ}C$ می‌یابیم:

$$S = ۰/۷۵\theta + ۲۷ \Rightarrow S = ۷۲\,g$$

$$?\,mol\,\text{نمک} = ۷۲\,g\,\text{اتم} \times \frac{۱\,mol\,\text{نمک}}{۱۸\,g\,\text{نمک}} = ۴\,mol\,\text{نمک}$$

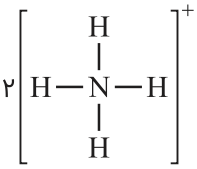
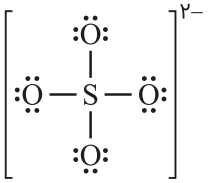
$$\text{جرم محلول} = \text{جرم حلال} + \text{جرم حل‌شونده} = ۵۰ + ۷۲ = ۱۲۲\,g$$

$$?\,L\,\text{محلول} = ۱۲۲\,g\,\text{محلول} \times \frac{۱\,L\,\text{محلول}}{۱۲/۲\,g\,\text{محلول}} = ۱۰\,L\,\text{محلول}$$

$$\text{مولاریته} = \frac{mol\,\text{حل‌شونده}}{L\,\text{محلول}} = \frac{۴}{۱۰} = ۰/۴\,mol.L^{-۱}$$

۴۸ گزینه ۴

بخش اول سؤال:

$(NH_4)_2SO_4$ {
$2NH_4^+ \Rightarrow 2$  $\Rightarrow$ مجموعاً ۸ جفت الکترون پیوندی
$SO_4^{2-} \Rightarrow$  $\Rightarrow$ مجموعاً ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی و ۴ جفت الکترون پیوندی

بنابراین نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی برابر با یک خواهد بود.

بخش دوم سؤال:

$$?\,mol\ \text{یون} = 20\,g\,(NH_4)_2SO_4(aq) \times \frac{66\,g\,(NH_4)_2SO_4}{100\,g\,(NH_4)_2SO_4(aq)} \times \frac{1\,mol\,(NH_4)_2SO_4}{132\,g\,(NH_4)_2SO_4}$$
$$\times \frac{3\,mol\ \text{یون}}{1\,mol\,(NH_4)_2SO_4} = 0/3\,mol\ \text{یون}$$

۴۹ گزینه ۳

۱) $Na_2S(s) \rightarrow S^{2-}(aq) + 2Na^+(aq)$
۲) $Al(NO_3)_3(s) \rightarrow Al^{3+}(aq) + 3NO_3^-(aq)$
۳) $BaCl_2(s) \rightarrow Ba^{2+}(aq) + 2Cl^-(aq)$

۵۰ گزینه ۳

باتوجه‌به کتاب درسی عبارت‌های "الف"، "ب" و "پ" درست هستند.

بررسی عبارت نادرست:

ت) بیشتر آب‌های روی زمین شور است و نمی‌توان از آن‌ها در کشاورزی و مصارف خانگی و صنعتی استفاده کرد.

۵۱ گزینه ۱

عبارت داده‌شده نادرست است. اختلاف چگالی این دو نوع پلی‌اتن $0/05\,g.cm^{-3}$ است.

پس باید گزینهٔ نادرست را انتخاب کنیم.

گزینهٔ ۱: نادرست. پلی‌استیرن یک پلیمر دارای حلقهٔ بنزن (پیوند کربن- کربن دوگانه) است، پس سیرشده نیست.

گزینهٔ ۲: درست. چگالی پلی‌اتن سبک کمتر است، پس به ازای جرم یکسان حجم بیشتری دارند.

گزینهٔ ۳: درست. طبق کتاب درسی.

گزینهٔ ۴: درست. پلی‌اتن سنگین به دلیل فشردگی و ساختار خطی و درنتیجه سطح تماس بیشتر، نیروی جاذبهٔ بین مولکولی قوی‌تری دارد.

www.alirezaafshar.org

۵۲ گزینه ۳

معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به‌صورت زیر است:

$$۳۰۰۰C_۶H_{۱۲}O_۶ \rightarrow C_{۱۸۰۰۰}H_{۳۰۲۰۰}O_{۱۵۱۰۰} + ?\,H_۲O$$

که باتوجه‌به قانون پایستگی جرم، ضریب $H_۲O$ برابر با ۲۹۰۰ است.

$$?\ \text{مولکول آب} = ۱۰۰۰\,g\ \text{سلولز} \times \frac{۱\,mol\ \text{سلولز}}{۴۸۷۸۰۰\,g\ \text{سلولز}} \times \frac{۲۹۰۰\,mol\ \text{آب}}{۱\,mol\ \text{سلولز}} \times \frac{N_A\ \text{مولکول آب}}{۱\,mol\ \text{آب}} \simeq ۵/۹N_A$$

۵۳ گزینه ۴

در واکنش استری‌شدن به دلیل تولید $H_۲O$، جرم استر تولیدشده از مجموع جرم دو واکنش‌دهنده (الکل و کربوکسیلیک اسید) کمتر است.

$$\text{آب} + \text{استر} \xrightarrow{H_۲SO_۴} \text{الکل} + \text{کربوکسیلیک اسید}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: فرآورده واکنش یک استر است و پلی‌استر نیست.

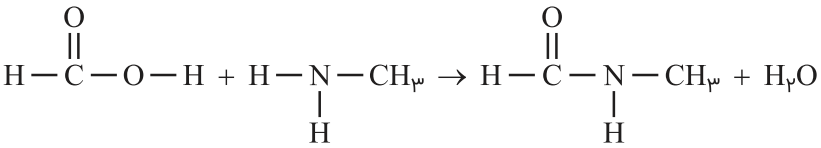
گزینه‌های ۲ و ۳: در استر تولیدشده بخش ناقطبی غلبهٔ بیشتری بر بخش قطبی نسبت به ویتامین (آ) دارد؛ بنابراین انحلال‌پذیری در آب افزایش نمی‌یابد و خاصیت آب‌گریزی بیشتر می‌شود.

۵۴ گزینه ۴

نام درست ترکیب گزینهٔ "۴"، اتیل پروپانوات است.

۵۵ گزینه ۲

ساده‌ترین آمین، $CH_۳ - NH_۲$ و ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید، $H - COOH$ است؛ بنابراین معادلهٔ واکنش این دو ماده به‌صورت زیر است:



الف) نادرست است. جرم مولی آمید تشکیل‌شده برابر با ۵۹ گرم است.

ب) درست است. در ساختار آن یک اتم H به اتم N متصل است. ازاین‌رو می‌تواند با مولکول‌های آب، پیوند هیدروژنی دهد.

پ) نادرست است.

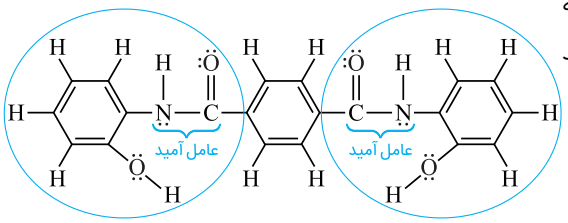
$$\frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۹}{۳} = ۳$$

ت) درست است. در اسید آلی باید ۲ پیوند $C - O$ و $O - H$ و در آمین یکی از پیوندهای $N - H$ باید شکسته شود تا پیوند جدید $C - N$ در آمید تشکیل شود؛ پس مجموع آنتالپی‌های پیوند در واکنش‌دهنده‌ها از آمید بیشتر است.

www.alirezaafshar.org

۵۶ گزینه ۴

ساختار این مولکول با جزئیات دقیق‌تر به‌صورت زیر است:



همان طور که ملاحظه می‌کنید ساختار این مولکول از دو بخش مشابه، متصل به یک حلقهٔ بنزنی تشکیل شده است. در این دو بخش، مجموعاً دو گروه عاملی آمید مشاهده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. شمار پیوندهای $(C-H)$ در ساختار این ترکیب برابر ۱۲ است.

گزینهٔ ۲: نادرست. شمار پیوندهای یگانه بین اتم‌ها در مولکول این ترکیب برابر ۳۳ است.

گزینهٔ ۳: نادرست. در مولکول این ترکیب، ۱۰ جفت‌الکترون ناپیوندی و ۹ پیوند دوگانهٔ کربن- کربن وجود دارد.

۵۷ گزینه ۳

عبارت‌های "الف"، "ب" و "ت" نادرست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) کولار، یکی از معروف‌ترین پلی‌آمیدها است.

ب) کولار ۵ برابر از فولاد هم‌جرم خود مقاوم‌تر است.

ت) پلی‌آمید از واکنش دی‌آمین و دی‌اسید تولید می‌شود.

۵۸ گزینه ۳

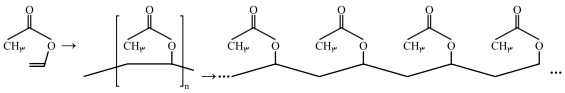
واکنش پلیمری شدن استیرن به‌صورت زیر است:

$$nC_8H_8 \rightarrow C_8H_{8n}$$

$$?\,mol = 130\,g \text{ پلی‌استیرن} \times \frac{100\,g \text{ پلی‌استیرن ناخالص}}{83\,g \text{ پلی‌استیرن خالص}} \times \frac{1\,mol \text{ پلی‌استیرن}}{104n\,g \text{ پلی‌استیرن}} \times \frac{n\,mol \text{ استیرن}}{1\,mol \text{ پلی‌استیرن}} = 1/5\,mol \text{ استیرن}$$

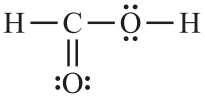
۵۹ گزینه ۲

برای رسم پلیمر حاصل از وینیل استات می‌توانیم مراحل زیر را انجام دهیم:



۶۰ گزینه ۲

ساختار لوویس فرمیک‌اسید به‌صورت زیر است:



بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: متانوئیک‌اسید (فرمیک‌اسید) اولین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک‌اسیدها و اتانوییک‌اسید (استیک‌اسید) پرکاربردترین آن‌ها است.

گزینهٔ ۲: در ساختار این اسید، پیوند $(O-H)$ وجود دارد بنابراین می‌تواند با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کند.

گزینهٔ ۳: در ساختار این اسید ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

گزینهٔ ۴: این اسید در طبیعت در بدن مورچه سرخ وجود دارد و بر اثر گزش مورچه وارد بدن شده و باعث سوزش و خارش در محل گزیدگی می‌شود.

۶۱ گزینه ۴

عبارت‌های اول، دوم و سوم درست هستند.

عبارت چهارم نادرست است.

نیم‌واکنش کاتدی در سلول برقکافت آب : $۲H_۲O(l)+۲e^- \rightarrow H_۲(g)+۲OH^-(aq)$

نیم‌واکنش آندی در سلول سوختی هیدروژن- اکسیژن : $H_۲(g) \rightarrow ۲H^+(aq)+۲e^-$

۶۲ گزینه ۴

اگر ثابت یونش اسید را در دمای $۲۵^\circ C$ با K_a و در دمای $۴۵^\circ C$ با $K_{a'}$ نمایش دهیم، طبق فرض سؤال خواهیم داشت:

$$K_{a'} = K_a + \frac{۱}{۴}K_a \Rightarrow ۲ \times ۱۰^{-۴} = \frac{۵}{۴}K_a \Rightarrow K_a = ۱/۶ \times ۱۰^{-۴}$$

(دقت داشته باشید وقتی به ازای هر ۱۰ درجه افزایش دما، ثابت یونش ۱۲/۵ درصد افزایش یابد، بنابراین به ازای ۲۰ درجه افزایش دما، ثابت یونش، ۲۵ درصد افزایش خواهد یافت)

	HA	$\rightleftarrows$	H^+	$+$	A^-
قبل از یونش :	M		۰		۰
پس از یونش(حالت تعادل) :	$M-x$		x		x

طبق داده‌های مسئله، غلظت HA پس از یونش (غلظت تعادلی)، برابر با $۶\ mol.L^{-۱}$ است؛ بنابراین:

$$m - x = ۶$$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow ۱/۶ \times ۱۰^{-۴} = \frac{x \times x}{۶} \Rightarrow x^۲ = ۹/۶ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\Rightarrow x = [H^+] = ۳/۰۹ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [OH^-] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۳/۰۹ \times ۱۰^{-۲}} = ۳۲/۳۶ \times ۱۰^{-۱۴}$$

اکنون با دراختیارداشتن غلظت $[H^+]$ و $[OH^-]$ نسبت غلظت یون هیدروکسید به یون هیدرونیوم را به دست می‌آوریم:

$$\frac{[OH^-]}{[H^+]} = \frac{۳۲/۳۶ \times ۱۰^{-۱۴}}{۳/۰۹ \times ۱۰^{-۲}} \simeq ۱/۱ \times ۱۰^{-۱۱}$$

پاسخ بخش دوم مسئله:

با افزایش دما، ثابت یونش اسید افزایش یافته است؛ بنابراین غلظت یون هیدرونیوم در دمای ۳۰ درجه نسبت به دمای ۲۰ درجه بیشتر است. از طرف دیگر می‌دانیم با افزایش غلظت $[H^+]$، غلظت $[OH^-]$ کاهش می‌یابد، بنابراین:

$$\underbrace{\frac{[OH^-]}{[H^+]}}_{\text{در دمای } ۳۰^\circ C} < \underbrace{\frac{[OH^-]}{[H^+]}}_{\text{در دمای } ۲۰^\circ C}$$

۶۳ گزینه ۳

بررسی عبارت‌ها:

الف) $\underbrace{\overset{\downarrow}{Mn}\ O_۴^{۲-} \rightarrow \overset{\downarrow}{Mn}\ O_۴^-}_{\text{اکسایش} \uparrow (۱)}$ درست ، ب) $\underbrace{\overset{\downarrow}{Cr_۲}\ O_۷^{۲-} \rightarrow \overset{\downarrow}{Cr}\ O_۴^{۲-}}_{\text{تغییر درجه نداده}}$ نادرست

ج) $\underbrace{\overset{\downarrow}{CO} \rightarrow \overset{\downarrow}{CH_۳}\ OH}_{\text{کاهش} \downarrow (۴)}$ نادرست ، د) $\underbrace{\overset{\downarrow}{SO_۴^{۲-}} \rightarrow \overset{\downarrow}{SO_۳^{۲-}}}_{\text{کاهش} \downarrow (۲)}$ درست

۶۴ گزینه ۴

ابتدا با استفاده از pH، غلظت یون هیدروکسید را در دو محلول به دست می‌آوریم:

$$pH = ۱۰/۸ \Rightarrow pOH = ۳/۲ \Rightarrow [OH^-] = ۶ \times ۱۰^{-۴}$$
$$pH = ۱۲/۳ \Rightarrow pOH = ۱/۷ \Rightarrow [OH^-] = ۲ \times ۱۰^{-۲}$$

اکنون با استفاده از ثابت یونش غلظت مولی دو باز داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$۱/۸ \times ۱۰^{-۵} = \frac{(۶ \times ۱۰^{-۴})(۶ \times ۱۰^{-۴})}{[NH_۳]} \Rightarrow [NH_۳] = ۲ \times ۱۰^{-۲}$$
$$۴ \times ۱۰^{-۴} = \frac{(۲ \times ۱۰^{-۲})(۲ \times ۱۰^{-۲})}{[CH_۳NH_۲]} \Rightarrow [CH_۳NH_۲] = ۱$$

بنابراین مقدار $\frac{x}{z}$ برابر می‌شود با:

$$\frac{۱}{۲ \times ۱۰^{-۲}} = ۵۰$$

۶۵ گزینه ۳

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. در الکترود قلع نیم‌واکنش کاهش رخ می‌دهد.

گزینهٔ ۲: نادرست. کاتیون‌های کاتد (در اینجا $Sn^{۲+}$) از دیواره متخلخل عبور نمی‌کنند و در کاتد مصرف می‌شوند.

گزینهٔ ۴: نادرست. با انجام واکنش جرم محلول موجود (الکترولیت) کاهش می‌یابد، اما جرم کلی سلول ثابت است.

۶۶ گزینه ۲

گزینهٔ "۱" مربوط به سوسپانسیون است.

۶۷ گزینه ۱

وجود یون کلسیم در آب باعث سخت شدن آب و به‌تبع کاهش قدرت پاک‌کنندگی می‌گردد. همچنین صابون در آب سخت به خوبی کف نمی‌کند.

۶۸ گزینه ۳

ابتدا تعداد مول‌های H^+ موجود در محلول اسید و OH^- موجود در سدیم هیدروکسید جامد را حساب می‌کنیم:

$$۰/۸\,g\,NaOH \times \frac{۱\,mol\,NaOH}{۴۰\,g\,NaOH} \times \frac{۱\,mol\,OH^-}{۱\,mol\,NaOH} = ۰/۰۲\,mol\,OH^-$$

$$۱۰۰\,mL\,HCL(aq) \times \frac{۱\,L\,HCl(aq)}{۱۰۰۰\,mL} \times \frac{۰/۱\,mol\,HCl}{۱\,L\,HCl(aq)} \times \frac{۱\,mol\,H^+}{۱\,mol\,HCl} = ۰/۰۱\,mol\,H^+$$

در واکنش خنثی شدن اسید و باز، H^+ از اسید و OH^- از باز، به نسبت ۱ به ۱ با هم واکنش می‌دهند. بنابراین در عمل ۰/۰۱ مول OH^- در ظرف باقی می‌ماند که بر اساس آن pH خطوط نهایی را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مول‌های } OH^- \text{ باقی‌مانده در ظرف} = ۰/۰۲\,mol\,OH^- - ۰/۰۱\,mol\,H^+ = ۰/۰۱\,mol\,OH^-$$

$$[OH^-] = \frac{۰/۰۱\,mol}{۰/۱\,L} = ۰/۱\,mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [H^+] \times ۱۰^{-۱} = ۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱۳}$$
$$PH = -\log [H^+] = -\log ۱۰^{-۱۳} = ۱۳$$

در بخش دوم مسئله، برای محاسبه شمار مول ترکیب یونی حاصل از واکنش اسید و باز، باید از مقدار اولیه هیدروکلریک اسید استفاده کنیم (به این نکته توجه داشته باشید که تمام مقدار باز اولیه در واکنش خنثی شدن شرکت نمی‌کند و بخشی از آن در ظرف باقی می‌ماند، بنابراین نباید از مقدار اولیه باز برای محاسبه مقدار نمک حاصل استفاده کنیم!!).

$$۹\,mol\,NaCl = ۱۰۰\,ml\,HCl(aq) \times \frac{۱\,L\,HCl(aq)}{۱۰۰\,mL} \times \frac{۰/۱\,mol\,HCl}{۱\,L\,HCl(aq)} \times \frac{۱\,mol\,NaCl}{۱\,mol\,HCl} = ۰/۰۱\,mol\,NaCl$$

۶۹ گزینه ۴

اسید چرب کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی هستند که مولکول‌های آن‌ها ناقطبی بوده و در هگزان حل می‌شوند.

۷۰ گزینه ۲

در سلول سوختی گاز هیدروژن با گاز اکسیژن به‌صورت کنترل شده واکنش می‌دهد.
در سلول سوختی واکنش $H_۲$ با $O_۲$ به آرامی انجام می‌شود جهت حرکت الکترون در این سلول از سمت آند که در آن $H_۲$ مصرف می‌شود به طرف کاتد که در آن $O_۲$ مصرف می‌شود، می‌باشد.

۷۱ گزینه ۲

اگر $۲n+۳$ و $۵n-۲$ نسبت به هم اول نباشند، باید:

$$(۲n+۳\ ,\ ۵n-۲)=d\ ,\ d\neq ۱$$

درنتیجه:

$$\begin{cases} d|۲n+۳ \xrightarrow{\times ۵} d|۱۰n+۱۵ \\ d|۵n-۲ \xrightarrow{\times ۲} d|۱۰n-۴ \end{cases} \Rightarrow d|۱۹$$

$$\Rightarrow ۱۹|۲n+۳ \Rightarrow ۲n+۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲n \overset{۱۹}{\equiv} -۳+۱۹ \Rightarrow ۲n \overset{۱۹}{\equiv} ۱۶ \Rightarrow n \overset{۱۹}{\equiv} ۸$$

$$\Rightarrow n=۱۹k+۸ \Rightarrow n<۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۹k+۸<۱۰۰۰ \Rightarrow k\leq ۵۲$$
$$\xrightarrow{k=۵۲} n=۱۹\times ۵۲+۸=۹۹۶ \Rightarrow ۹+۹+۶=۲۴$$

۷۲ گزینه ۲

در اثبات با در نظر گرفتن حالت‌ها از هم‌ارزی $(p_۱ \vee p_۲ \vee \ldots \vee p_n) \Rightarrow r \equiv (p_۱ \Rightarrow r) \wedge (p_۲ \Rightarrow r) \wedge \ldots \wedge (p_n \Rightarrow r)$ استفاده می‌کنیم. درنتیجه این گزارش دارای دو حالت است؛ پس گزینهٔ "۲" صحیح است.

۷۳ گزینه ۳

معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a\ ,\ m)|b$. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱ : $۳x \overset{۲}{\equiv} ۴\ ,\ (۳\ ,\ ۲)=۱|۴ \Rightarrow$ جواب دارد.

گزینهٔ ۲ : $۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۸\ ,\ (۴\ ,\ ۶)=۲|۱۸ \Rightarrow$ جواب دارد.

گزینهٔ ۳ : $۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۱\ ,\ (۶\ ,\ ۹)=۳\not|\ ۱۱ \Rightarrow$ جواب ندارد.

گزینهٔ ۴ : $۵x \overset{۷}{\equiv} ۱\ ,\ (۵\ ,\ ۷)=۱|۱ \Rightarrow$ جواب دارد.

۷۴ گزینه ۱

فرض می‌کنیم $a=۲n+۱$ و $n\in\mathbb{Z}$:

$$a=۲n+۱ \xrightarrow{b|a+۲} b|۲n+۳ \Rightarrow b \text{ عددی فرد است.} \Rightarrow b=۲m+۱\ ,\ m\in\mathbb{Z}$$

بنابراین:

$$a^۲+b^۲+۵=(۲n+۱)^۲+(۲m+۱)^۲+۵=۴n^۲+۴n+۱+۴m^۲+۴m+۱+۵$$
$$=\underbrace{۴n(n+۱)}_{۲k}+\underbrace{۴m(m+۱)}_{۲k'}+۷=۸k+۸k'+۷$$
$$=۸(\underbrace{k+k'}_{k''})+۷ \Rightarrow a^۲+b^۲+۵=۸k''+۷ \Rightarrow r=۷$$

۷۵ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} d|a-۲ \xrightarrow{\times(a-۱)} d|a^۲-۳a+۲ \\ d|a^۲-۳a+۱ \rightarrow d|a^۲-۳a+۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} d|۱ \Rightarrow d=۱$$

۷۶ گزینه ۴

می‌توان به روش‌های زیر، با اثبات بازگشتی این نابرابری را اثبات کرد:

روش اول:

$$a^۲+ab+b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow ۲a^۲+۲ab+۲b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow a^۲+b^۲+۲ab+a^۲+b^۲ \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^۲+a^۲+b^۲ \geq ۰$$

روش دوم:

$$a^۲+ab+b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow a^۲+ab+b^۲+\frac{b^۲}{۴}-\frac{b^۲}{۴} \geq ۰ \Leftrightarrow (a+\frac{b}{۲})^۲+\frac{۳b^۲}{۴} \geq ۰$$

مشابه روش دوم، با اضافه و کم کردن $\frac{a^۲}{۴}$ به نابرابری زیر می‌رسیم:

$$(\frac{a}{۲}+b)^۲+\frac{۳a^۲}{۴} \geq ۰$$

۷۷ گزینه ۱

اگر $x>۰, y>۰$ باشند می‌توان نوشت:

$$(x-y)^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲+y^۲ \geq ۲xy \Rightarrow (x+y)^۲ \geq ۴xy$$

چون xy عدد مثبت است می‌توان از طرفین نامساوی جذر گرفت $x+y \geq ۲\sqrt{xy}$ در هر یک از نتیجه‌گیری ها عمل عکس برقرار است پس خاصیت بازگشتی دارد. ولی با مثال نقض معلوم می‌شود که سه گزینه بعد خاصیت بازگشتی ندارند.

۷۸ گزینه ۴

به کمک اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف درستی حکم را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی فرد باشد، درنتیجه هر سه عبارت $a_۱-b_۱$ و $a_۲-b_۲$ و $a_۳-b_۳$ بایستی فرد باشد، بنابراین مجموع آن‌ها نیز فرد خواهد بود.

$$a_۱-b_۱+a_۲-b_۲+a_۳-b_۳ = \text{فرد}$$
$$(a_۱+a_۲+a_۳)-(b_۱+b_۲+b_۳) = \text{فرد}$$

$\text{فرد} = ۰$ در تناقض است

پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

۷۹ گزینه ۱

$$۱۱۳ \times (۵۳۰)^{۱۷} \overset{۲۰}{\equiv} ۱۳ \times ۱۰^{۱۷}$$
$$۱۰^۲ \overset{۲۰}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۰ \times ۱۰^{۱۶} \overset{۲۰}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۳ \times ۱۰^{۱۷} \overset{۲۰}{\equiv} ۰$$

۸۰ گزینه ۱

در رابطهٔ تقسیم $a = bq + r$ باقی‌مانده دارای شرط $0 \leq r < b$ است. پس بیشترین مقدار باقی‌مانده برابر $b - 1$ است. با جایگذاری داریم:

$$a = bq + b - 1 \Rightarrow a + 1 = b(q + 1)$$

پس $b|a + 1$ و $q + 1|a + 1$ درست هستند. با ضرب سمت راست $b|a + 1$ در $a - 1$ نتیجه می‌شود، $b|a^2 - 1$ ولی گزینهٔ ۱ در حالت کلی نادرست است.

۸۱ گزینه ۴

در این سؤال قرار است مساحت ذوزنقهٔ $PMNF'$ را به دست بیاوریم. ارتفاعش که $|PM|$ و برابر با $|FF'|$ است، پس ارتفاعش برابر $2c$ می‌شود. دو قاعده هم $|PF'|$ و $|MN|$ است. پس قاعده‌ها وتر کانونی و نصف وتر کانونی است. پس:

$$S_{PMNF'} = \frac{1}{2}(|PF'| + |MN|)|FF'| = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a} + \frac{2b^2}{a}\right)2c = \frac{3b^2c}{a}$$

$$a^2 = 36 \ , \ b^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \\ c = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{PMNF'} = \frac{3b^2c}{a} = \frac{3 \times 4 \times 4\sqrt{2}}{6} = 8\sqrt{2}$$

۸۲ گزینه ۴

گزینهٔ ۱ : ماتریس مربعی از مرتبهٔ 3×3 می‌باشد (مرتبهٔ ۳)

گزینهٔ ۲ : ماتریس مربعی از مرتبهٔ 2×2 می‌باشد (مرتبهٔ ۲)

گزینهٔ ۳ : ماتریس از مرتبهٔ 1×3 می‌باشد (این ماتریس فقط ستونی است.)

گزینهٔ ۴ : این ماتریس فقط یک سطر و یک ستون دارد.

پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

نکته: هر عدد حقیقی یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ 1×1 می‌باشد، که هم سطری و هم ستونی است.

نکته: ماتریس مربعی که هم سطری می‌باشد و هم ستونی، همواره ماتریس 1×1 است. پس هریک از اعداد حقیقی چنین خاصیتی را دارند.

۸۳ گزینه ۱

برای حل این سؤال دو شرط زیر را داریم:

۱) $|AB| = |BA|$

۲) مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس AB و BA حتماً باهم برابر است.

از بین گزینه‌های داده‌شده، تنها گزینهٔ اول دو شرط بالا را دارد.

$$|AB| = -12 \quad , \quad |BA| = -12$$

مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس AB و ماتریس گزینهٔ ۱ برابر ۴ است.

۸۴ گزینه ۳

می‌دانیم این مکان هندسی سهمی به کانون $(۲,۳)$ و خط هادی $x = ۴$ می‌باشد. پس:

رأس سهمی : $S = (۳,۳)$

فاصلهٔ کانونی : $a = ۱$

این سهمی افقی و رو به چپ است و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$(y-۳)^۲ = -۴(x-۳)$$

$$y^۲ - ۶y + ۹ = -۴x + ۱۲$$

$$y^۲ - ۶y + ۴x - ۳ = ۰$$

۸۵ گزینه ۱

$$|۲AB - ۳B| = |(۲A - ۳I)B| = |۲A - ۳I||B|$$

$$\xrightarrow{A=\frac{۳}{۴}I} |۲A - ۳I||B| = \left|-\frac{۳}{۲}I\right||B| = \frac{۹}{۴} \times ۱ \times ۸ = ۱۸$$

۸۶ گزینه ۴

مقدار $|A|$ را با بسط نسبت به سطر دوم یافته و از ویژگی‌های دترمینان کمک می‌گیریم:

$$|A| = ۲(-۱)^۴ \begin{vmatrix} -۲ & ۳ \\ ۲ & -۵ \end{vmatrix} = ۸ \quad (*)$$

ماتریس A ۳ × ۳ است $\Rightarrow ||A|(-A^۲)^{-۱}| = |A|^۳ |(-A^۲)^{-۱}| = |A|^۳ \times \frac{۱}{|-A^۲|}$

$$= |A|^۳ \times \frac{۱}{(-۱)^۳|A^۲|} = |A|^۳ \times \frac{۱}{-|A^۲|} = -|A| \xrightarrow{(*)} -|A| = -۸$$

۸۷ گزینه ۴

A ماتریس با ۶ درایه است پس این ماتریس یکی از حالات ۶ × ۱، ۱ × ۶، ۳ × ۲ و ۲ × ۳ است چون حداکثر تعداد ستون ماتریس A عددی اول است، پس این ماتریس از مرتبهٔ ۳ × ۲ می‌باشد. در این صورت، $A = [a_{ij}]_{۲\times۳}$ است، درنتیجه:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

چون $a_{ij} = i^j$، پس در این صورت ماتریس A به‌صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} ۱^۱ & ۱^۲ & ۱^۳ \\ ۲^۱ & ۲^۲ & ۲^۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{مجموع درایهٔ سطر اول} : ۱+۱+۱ = ۳ \\ \text{مجموع درایهٔ ستون دوم} : ۱+۴ = ۵ \end{cases} \Rightarrow ۳+۵ = ۸$$

درنتیجه گزینهٔ ۴ صحیح است.

۸۸ گزینه ۲

می‌دانیم هر ماتریس از چند سطر و چند ستون تشکیل شده است.

در ماتریس سطری همواره یک سطر و چند ستون داریم.

گزینهٔ ۱ : ماتریس یک ستون و ۳ سطر دارد و از مرتبهٔ ۱×۳ است.

گزینهٔ ۲ : ماتریس یک سطر و چهار ستون دارد و مرتبهٔ آن، ۴×۱ است.

گزینهٔ ۳ : ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲×۲ است.

گزینهٔ ۴ : ماتریس ۲ سطر و ۳ ستون دارد و مرتبهٔ آن، ۳×۲ است.

پس گزینهٔ ۲ صحیح است.

نکته: ماتریس سطری، همواره از مرتبهٔ $n \times ۱$ است. (یک سطر و n ستون).

۸۹ گزینه ۲

فرض کنیم محورهای مختصات منطبق بر قطرهای بیضی باشند و مرکز بیضی مبدأ مختصات باشد. در این صورت ازآنجاکه قطر مربع $OMAM'$ عدد a است، پس $M(\frac{a}{۲}, \frac{a}{۲})$. اگر مختصات کانون‌های بیضی به‌صورت $F(c, ۰)$ و $F'(-c, ۰)$ باشند، آنگاه داریم:

$$MF + MF' = ۲a \xrightarrow{\text{توان ۲}} MF^۲ + MF'^۲ - ۴a^۲ = -۲MF \times MF'$$

$$\Rightarrow (\frac{a}{۲} - c)^۲ + \frac{a^۲}{۴} + (\frac{a}{۲} + c)^۲ + \frac{a^۲}{۴} - ۴a^۲ = -۲MF \times MF'$$

$$\Rightarrow -۳a^۲ + ۲c^۲ = -۲MF \times MF'$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۹a^۴ - ۱۲a^۲c^۲ + ۴c^۴ = ۴(\frac{a^۲}{۲} - ac + c^۲)(\frac{a^۲}{۲} + ac + c^۲)$$

$$\Rightarrow ۹a^۴ - ۱۲a^۲c^۲ + ۴c^۴ = a^۴ + ۴a^۲c^۲ + ۴c^۴ - ۴a^۲c^۲ \Rightarrow ۸a^۴ = ۱۲a^۲c^۲$$

$$\Rightarrow ۸a^۲ = ۱۲c^۲ \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۹۰ گزینه ۱

باتوجه‌به اطلاعات مسئله، ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \\ ۱۰ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم $(۳ + ۶ + ۱۱ = ۲۰)$ از مجموع درایه‌های ستون اول $(۲ + ۵ + ۱۰ = ۱۷)$، $۲۰ - ۱۷ = ۳$ واحد بیشتر است.

۹۱ گزینه ۳

می‌دانیم ارزش گزارهٔ $(p \vee F)$ بستگی به ارزش p دارد.

$$(p \vee F) \equiv p$$

$$(\sim p \wedge q) \vee p \equiv p \vee (\sim p \wedge q)$$

از خاصیت توزیع‌پذیری استفاده می‌کنیم:

$$(\sim p \wedge q) \vee (p \vee F) \equiv (\sim p \wedge q) \vee p$$
$$\equiv (\sim p \vee p) \wedge (q \vee p) \equiv T \wedge (q \vee p) \equiv T \wedge F \equiv F$$

۹۲ گزینه ۱

$$\begin{cases} x^۲ - y^۲ = ۱۶ \\ x + y = ۸ \end{cases} \Rightarrow (x-y)(x+y) = ۱۶ \Rightarrow x - y = ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = ۲ \\ x + y = ۸ \end{cases} \Rightarrow x = ۵ \ , \ y = ۳ \Rightarrow ۲x - ۳y = ۱۰ - ۹ = ۱$$

۹۳ گزینه ۱

$$r \equiv T \ , \ p \equiv T \ , \ q \equiv F$$

گزینه "۱":

$$\left.\begin{matrix} (\sim p \ \Leftrightarrow \sim q) \equiv F \\ (q \ \Leftrightarrow \ r) \equiv F \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ [(\sim p \ \Leftrightarrow \sim q) \ \Leftrightarrow \ (q \ \Leftrightarrow \ r)] \equiv T$$

پس گزینه "۱" صحیح است.

گزینه "۲":

$$\left.\begin{matrix} (p \Leftrightarrow r) \equiv T \\ p \Leftrightarrow q \equiv F \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ [(p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)] \equiv F$$

گزینه "۲" نادرست است.

گزینه "۳":

$$[\overbrace{(p \Rightarrow \underbrace{(q \ \Rightarrow \ r)}_{T})}^{T} \ \Rightarrow \ \underbrace{(r \ \Rightarrow \ q)}_{F}] \equiv F$$

گزینه "۳" نیز نادرست است.

گزینه "۴":

$$[\overbrace{p \ \Rightarrow \ \underbrace{(q \ \Rightarrow \ r)}_{T})}^{T} \ \Leftrightarrow \ \underbrace{(r \ \Rightarrow \ q)}_{F}] \equiv F$$

بنابراین گزینه "۴" نیز نادرست است.

۹۴ گزینه ۴

ابتدا حاصل $\sim(\sim s \wedge r)$ را به‌کمک قانون دمورگان به دست می‌آوریم:

$$\sim(\sim s \wedge r) \equiv \sim(\sim s) \vee (\sim r) \equiv s \vee \sim r$$

حال حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم.:

$$\sim r \wedge \underbrace{\sim(\sim s \wedge r)}_{s \vee \sim r} \equiv \sim r \wedge \underbrace{(s \vee \sim r)}_{\text{جای } s \text{ و } r \sim \text{ را عوض می‌کنیم}} \equiv \sim r \wedge (\sim r \vee s) \underset{\text{قانون جذب}}{\equiv} \sim r$$

۹۵ گزینه ۱

p	q	$p \Rightarrow q$
ن	ن	د
ن	د	د
د	ن	ن
د	د	د

۹۶ گزینه ۲

گزینهٔ "۱" و "۳": دوشرطی‌اند؛ زیرا می‌دانیم:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ \text{و} \\ A \cup B = B \end{cases}$$

گزینهٔ "۴": دوشرطی است.

$$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$$

گزینهٔ "۲": دوشرطی نیست. زیرا اگر $A \cap B = \varnothing$ باشد، الزاماً A و B تهی نیستند.

۹۷ گزینه ۳

باتوجه‌به تعریف تساوی ۲ مجموعه داریم:

$$b + ۱ = ۳ \Rightarrow b = ۲$$

$$\{a + ۱\} = \{b - ۱\} \xrightarrow{b=۲} a + ۱ = ۱ \Rightarrow a = ۰$$

$$\{a + ۱, c^۲\} = \{۱, ۴\} \xrightarrow{a=۰} \{۱, c^۲\} = \{۱, ۴\} \Rightarrow c^۲ = ۴ \Rightarrow |c| = ۲$$

۹۸ گزینه ۱

عبارت صورت تست یک گزارهٔ شرطی است. در این گزاره می‌دانیم قسمت فرض یعنی "آب سر بالا می‌رود." گزاره‌ای نادرست است پس کل گزارهٔ شرطی به انتفای مقدم درست خواهد بود.

۹۹ گزینه ۴

دو حالت امکان‌پذیر است.

حالت اول:

$$\begin{cases} x = ۱ \\ y = x + ۱ = ۲ \end{cases} \Rightarrow x + y = ۳$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} y = ۱ \\ x = y - ۲ \Rightarrow x = -۱ \end{cases} \Rightarrow x + y = ۰$$

پس حداقل $x + y$ برابر صفر است.

۱۰۰ گزینه ۳

برای اینکه یک گزارهٔ دوشرطی درست باشد، باید هر دو گزاره هم‌ارز باشند. می‌دانیم ۳۷ عددی مرکب نیست، پس گزینه‌ای را باید انتخاب کنیم که ارزش آن نیز نادرست باشد. ارزش تمامی گزاره‌ها درست است به‌جز گزینهٔ "۳"!

۱۰۱ گزینه ۴

می‌دانیم $\alpha + \beta = ۲\pi$، پس داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = ۲\pi \\ \beta = ۵\alpha \end{cases} \Rightarrow ۶\alpha = ۲\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳}$$

با جایگذاری $\alpha = \frac{\pi}{۳}$ در رابطهٔ $\alpha = \frac{L}{r}$، که L طول کمان مقابل α و r شعاع دایره است، طول کمان AB را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\pi}{۳} = \frac{AB}{۴} \Rightarrow AB = \frac{۴\pi}{۳}$$

۱۰۲ گزینه ۴

گام اول

می‌دانیم:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\tan ۷۰^\circ + \tan ۱۰^\circ = \frac{\sin ۷۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ} + \frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ} = \frac{\sin ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ + \sin ۱۰^\circ \cos ۷۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ} = \frac{\sin(۱۰^\circ + ۷۰^\circ)}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ}$$

$$= \frac{\sin ۸۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ} = \frac{\sin(\frac{\pi}{۲} - ۱۰^\circ)}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ} = \frac{\cos ۱۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ} = \frac{۱}{\cos ۷۰^\circ}$$

بنابراین داریم:

$$\cos ۵۰^\circ(\tan ۷۰^\circ + \tan ۱۰^\circ) = \frac{\cos ۵۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ} = \frac{\cos(\frac{\pi}{۲} - ۴۰^\circ)}{\cos(\frac{\pi}{۲} - ۲۰^\circ)} = \frac{\sin ۴۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ} = \frac{\sin ۲(۲۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ}$$

$$= \frac{۲\sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ} = ۲\cos ۲۰^\circ$$

۱۰۳ گزینه ۱

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a\cos b + \cancel{\cos a\sin b} + \sin a\cos b - \cancel{\cos a\sin b} = ۲\sin a\cos b$$

۱۰۴ گزینه ۱

$$\tan\alpha = ۲\,,\ \tan\beta = \frac{۱}{۳}$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} = \frac{۲\times ۲}{۱-۲^۲} = -\frac{۴}{۳}$$

$$\tan(۲\alpha-\beta) = \frac{\tan ۲\alpha - \tan\beta}{۱+\tan ۲\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{-۴}{۳} - \frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۴}{۳}\times\frac{۱}{۳}} = \frac{\frac{-۵}{۳}}{\frac{۵}{۹}} = -۳$$

۱۰۵ گزینه ۱

نکته: $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$

اول: $۱ - \cos ۴۰^\circ$ را ساده می‌کنیم:

$$۱ - \left(۱ - ۲\sin^۲ ۲۰^\circ\right) = ۱ - ۱ + ۲\sin^۲ ۲۰^\circ = ۲\sin^۲ ۲۰^\circ$$

دوم:

$$\cot ۲۰^\circ \left(۱ - \cos ۴۰^\circ\right) = \frac{\cos ۲۰^\circ}{\cancel{\sin ۲۰^\circ}}\left(۲\sin^{\cancel{۲}} ۲۰^\circ\right) = ۲ \sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ = \sin ۴۰^\circ$$

سوم: زوایای ۴۰° و ۵۰° متمم هستند، پس:

$$\sin ۴۰^\circ = \cos ۵۰^\circ$$

۱۰۶ گزینه ۴

اگر روی دایره به‌اندازهٔ ۲π رادیان بچرخیم، مساحتی برابر با $\pi r^۲$ به دست می‌آید. با دورانی به‌اندازهٔ x مساحت قطاع OBC (اسلایس پیتزا) با یک تناسب ساده به دست می‌آید:

$$\begin{matrix} ۲\pi & \pi r^۲ \\ x & ? \end{matrix} \Rightarrow ? = \frac{x\pi r^۲}{۲\pi} = \frac{۱}{۲}xr^۲$$

پس مساحت قطاع OCB به‌صورت $S_{OBC} = \frac{۱}{۲}x(r=۱)^۲ = \frac{x}{۲}$ است. از مساحت این قطاع مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OCB}$ را کسر می‌کنیم.

$$S_{\overset{\Delta}{OCB}} = \frac{(AC)(OB)}{۲} = \frac{(\sin x)(۱)}{۲}$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\text{قطاع } OCB} - S_{\overset{\Delta}{OCB}} = \frac{x}{۲} - \frac{\sin x}{۲} = \frac{۱}{۲}(x - \sin x)$$

۱۰۷ گزینه ۳

$$\sin \frac{۴\pi}{۳} = \sin(\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\sin \frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan \frac{۷\pi}{۴} = \tan(۲\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan \frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$\cot \frac{۳\pi}{۴} = \cot(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cot \frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$\text{جواب} : \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-۱-۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

www.alirezaafshar.org

۱۰۸ گزینه ۱

با عرض شرمندگی باید این فرمول را بلد باشید:

$$\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$$

اول از اتحاد $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$f(\alpha) = ۴\sin\alpha\left(۱ - ۲\sin^۲\alpha\right) + ۲\sin\alpha = ۶\sin\alpha - ۸\sin^۳\alpha$$

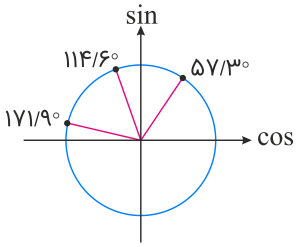
$$\xrightarrow{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}} f(\alpha) = ۲\left(\underbrace{۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha}_{\sin ۳\alpha}\right) = ۲\sin ۳\alpha$$

پس:

$$f\left(\frac{۴۱\pi}{۹}\right) = ۲\sin\left(\frac{۴۱\pi}{۳}\right) = ۲\sin\left(۱۴\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = ۲\left(-\sin\frac{\pi}{۳}\right) = ۲\times\frac{-\sqrt{۳}}{۲} = -\sqrt{۳}$$

۱۰۹ گزینه ۱

رادیان ۱ $\simeq ۵۷/۳^\circ$ رادیان ۲ $\simeq ۱۱۴/۶^\circ$ رادیان ۳ $\simeq ۱۷۱/۹^\circ$



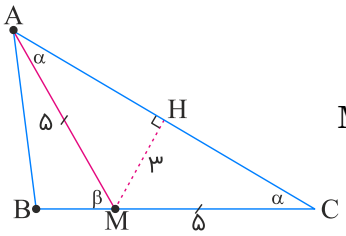
$$\Rightarrow \underbrace{\cos ۱۷۱/۹^\circ}_{c} < \underbrace{\cos ۱۱۴/۶^\circ}_{b} < \underbrace{\cos ۵۷/۳^\circ}_{a}$$

۱۱۰ گزینه ۱

فرض می‌کنیم:

$$A\hat{M}B = \beta$$

باتوجه‌به شکل $\beta = ۲\alpha$ است.



$$MC = AM = ۵$$

ازطرفی:

$$\sin\beta = \sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

همچنین باتوجه‌به شکل:

$$CH^۲ = MC^۲ - MH^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ \Rightarrow CH = ۴$$

$$\xrightarrow{\text{باتوجه‌به شکل}} \sin\alpha = \frac{۳}{۵}, \cos\alpha = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin\beta = ۲ \times \frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۵} = \frac{۲۴}{۲۵}$$

۱۱۱ گزینه ۴

$$\begin{cases} \sin\alpha > \tan\alpha \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیهٔ دوم یا چهارم} \\ \cos\alpha > ۰ \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیهٔ اول یا چهارم} \end{cases} \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیهٔ چهارم}$$

۱۱۲ گزینه ۳

$$\left.\begin{matrix} \max(f) = a + |b| = ۲ \\ \min(f) = a - |b| = -۴ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲a = -۲ \Rightarrow a = -۱,\ |b| = ۳ \Rightarrow b = \pm ۳$$

دورهٔ تناوب تابع داده‌شده باتوجه‌به نمودار، برابر ۴ است.

$$T = \frac{۲\pi}{|c|} = ۴ \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow c = \pm\frac{\pi}{۲}$$

باتوجه‌به نمودار b و c هم‌علامت هستند، پس یا هر دو منفی یا هر دو مثبت می‌باشند، درنتیجه: $abc = \frac{-۳\pi}{۲}$

۱۱۳ گزینه ۴

$$g(x)=x^{۲} \xrightarrow{x\geq ۰} g^{-۱}(x)=\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow g^{-۱}of(x)=\sqrt{[x]-x}$$

باتوجه‌به اینکه:

$$[x]-x=\begin{cases} ۰ & ;x\in\mathbb{Z} \\ -۱< \text{عددی} <۰ & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین دامنهٔ $g^{-۱}of$ برابر است با $x\in\mathbb{Z}$ و مقدار $g^{-۱}of$ همواره برابر صفر خواهد بود. پس تابع $y=۲^{g^{-۱}of(x)}=۲^{۰}=۱$ یک تابع ثابت است. یعنی روی دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی است.

۱۱۴ گزینه ۲

روش اول: با استفاده از رابطهٔ تقسیم داریم:

$$f(x)=x(x-۳)(x+۳)Q(x)+(۵x^{۲}+۳x+۱)\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=۱\\ f(۳)=۵۵\\ f(-۳)=۳۷\end{cases}$$

برای یافتن باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x^{۲}-۳x$ نیز رابطهٔ تقسیم به‌صورت زیر وجود دارد:

$$f(x)=(x^{۲}-۳x)Q'(x)+(ax+b)$$
$$\left.\begin{array}{l} f(۰)=۱ \Rightarrow b=۱ \\ f(۳)=۵۵ \Rightarrow ۳a+b=۵۵\Rightarrow ۳a=۵۴\Rightarrow a=۱۸\end{array}\right\}\Rightarrow ۲a+b=۳۷$$

روش دوم: با استفاده از رابطهٔ تقسیم می‌توان نوشت: $f(x)=x(x-۳)(x+۳)Q(x)+۵x^{۲}+۳x+۱$، از طرفی چون باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x^{۲}-۳x$ خواسته شده است می‌توان $f(x)$ را به رابطهٔ تقسیم با مقسوم علیه $x^{۲}-۳x$ تبدیل کرد، یعنی:

$$f(x)=(x^{۲}-۳x)(x+۳)Q(x)+۵x^{۲}-\underbrace{۱۵x+۱۸x}+۱$$
$$\Rightarrow f(x)=(x^{۲}-۳x)(x+۳)Q(x)+۵(x^{۲}-۳x)+۱۸x+۱$$
$$\xrightarrow{\text{فاکتور از } x^{۲}-۳x} f(x)=(x^{۲}-۳x)((x+۳)Q(x)+۵)+۱۸x+۱$$
$$\Rightarrow f(x)=(x^{۲}-۳x)Q'(x)+\underbrace{۱۸x+۱}_{R(x)}$$
$$\Rightarrow R(x)=ax+b=۱۸x+۱\Rightarrow\begin{cases}a=۱۸\\ b=۱\end{cases}\Rightarrow ۲a+b=۳۷$$

۱۱۵ گزینه ۱

اگر T دوره تناوب تابع باشد، آنگاه باتوجه‌به شکل $\frac{۳}{۴}T = \frac{۶}{|a|}$، پس $T = \frac{۸}{|a|}$:

$$\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{|a|}} = \frac{۸}{|a|} \Rightarrow ۲|a| = \frac{۸}{|a|} \Rightarrow |a|^{۲} = ۴ \Rightarrow \begin{matrix} a = ۲ \\ a = -۲ \end{matrix}$$

باتوجه‌به شکل عرض از مبدأ تابع مثبت است، پس $-a$ باید مثبت باشد و $a = -۲$.

$$f(x) = -۲\sin(\frac{-\pi x}{۲}) + ۲ = ۲\sin(\frac{\pi x}{۲}) + ۲$$

حالا باید این تابع را با خط ماکزیمم تابع تقاطع دهیم، یعنی $y = ۴$:

$$۲\sin(\frac{\pi x}{۲}) + ۲ = ۴ \Rightarrow \sin(\frac{\pi x}{۲}) = ۱ \Rightarrow \frac{\pi x}{۲} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$x = ۴k + ۱ \xrightarrow{k=۱} x = ۵$$

۱۱۶ گزینه ۳

$$\tan ۳x = \tan ۲x \Rightarrow ۳x = k\pi + ۲x \Rightarrow x = k\pi$$

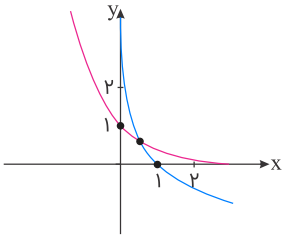
جواب‌های معادله که در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ قرار دارند عبارت‌اند از:

k	۰	۱	۲
$x=k\pi$	۰	π	۲π

$$x = ۰ \ , \ x = \pi \ , \ x = ۲\pi$$

۱۱۷ گزینه ۳

اول: اگر تابع نمایی $y = a^x$ وارون خود را قطع کند آنگاه $۰ < a < ۱$ است. ضابطهٔ وارون این تابع $y = \log_a^x$ می‌باشد.



دوم: مطابق شکل هر دو تابع $y = a^x$ و $y = \log_a^x$ $(۰ < a < ۱)$ نزولی هستند و طول و عرض نقطهٔ برخورد در بازهٔ $(۰, ۱)$ قرار دارد.
این تابع وارون خودش را روی خط $y = x$ قطع می‌کند.

۱۱۸ گزینه ۲

$$\tan(x+\frac{5\pi}{2})=-\cot x\ ,\ \cot(\pi-x)=-\cot x$$

$$\sin(3\pi-x)=\sin x\ ,\ \sin(\frac{7\pi}{2}+x)=-\cos x\ ,\ \sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$2\tan(x+\frac{5\pi}{2})\cot(\pi-x)+\frac{\sin^2(3\pi-x)}{\sin^2(\frac{7\pi}{2}+x)}=6\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2(-\cot x)(-\cot x)+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=3$$

$$\Rightarrow 2\cot^2 x+\tan^2 x=3\xrightarrow{\tan^2 x=t}\frac{2}{t}+t-3=0\Rightarrow\frac{2+t^2-3t}{t}=0$$

$$\Rightarrow t^2-3t+2=0\Rightarrow(t-1)(t-2)=0\Rightarrow t=1\text{ یا }2$$

$$\Rightarrow \tan x=\pm 1\text{ یا }\pm\sqrt{2}$$

پس $\tan x=\pm 1$ یا $\pm\sqrt{2}$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ دارای ۴ جواب است.

۱۱۹ گزینه ۱

اول:

$$2\cos x(\cos x-\sin x)=2\cos^2 x-2\sin x\cos x=\sqrt{2}+1$$
$$\Rightarrow(2\cos^2 x-1)-(2\sin x\cos x)=\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}$$

دوم: یادآوری:

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$$
$$\cos(2x+\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi$$
$$2x=2k\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{8}$$

۱۲۰ گزینه ۲

در $x=0$، مقدار تابع برابر است با $y=3$؛ لذا با جایگذاری در تابع خواهیم داشت $a=3$. به‌سادگی نتیجه می‌شود که به ازای $x=\frac{25}{3}$، مقدار تابع برابر است با $y=2/5$.

$$T=\frac{2\pi}{|\pi b|}=4\Rightarrow|b|=\frac{1}{2}\Rightarrow b=-\frac{1}{2}\ \checkmark\ ,\ b=\frac{1}{2}\ \times\ ,\ y=3+\sin(\frac{-\pi}{2}x)$$
$$\xrightarrow{x=\frac{25}{3}}y=3+\sin(\frac{-25}{6}\pi)\Rightarrow y=3+\sin(-4\pi-\frac{\pi}{6})\Rightarrow y=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2/5$$

۱۲۱ گزینه ۱

باتوجه‌به نمودار تابع دو نقطهٔ $(۲\ ,\ ۱)$ و $(۰\ ,\ -۱)$ روی تابع قرار دارد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} f(۱) = a - ۳a + ۳a + b = ۲ \Rightarrow a + b = ۲ \\ f(-۱) = -a - ۳a - ۳a + b = ۰ \Rightarrow b - ۷a = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}\ ,\ b = \frac{۷}{۴}$$

۱۲۲ گزینه ۱

نکته: $\tan x + \cot x = \dfrac{۲}{\sin ۲x}$

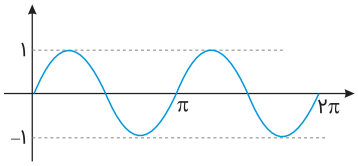
اثبات:

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\sin x \cos x}$$
$$= \frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x} = \frac{۲}{\sin ۲x}$$

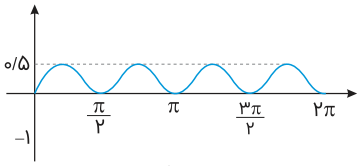
حال داریم:

$$y = \frac{\sin ۲x}{\tan x + \cot x} = \frac{\sin ۲x}{\frac{۲}{\sin ۲x}} = \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$$

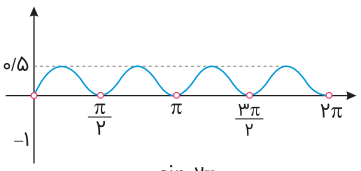
همان‌طور که در شکل می‌بینیم، دورهٔ تناوب تابع $\dfrac{\pi}{۲}$ است.



$y = \sin\ ۲x$



$y = \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$



$y = \dfrac{\sin\ ۲x}{\tan x + \cot x}$

۱۲۳ گزینه ۳

اول:

$$۲\sin ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin ۳x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$$

دوم:

$$\begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۸} \\ ۳x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{۵\pi}{۱۸} \end{cases}$$

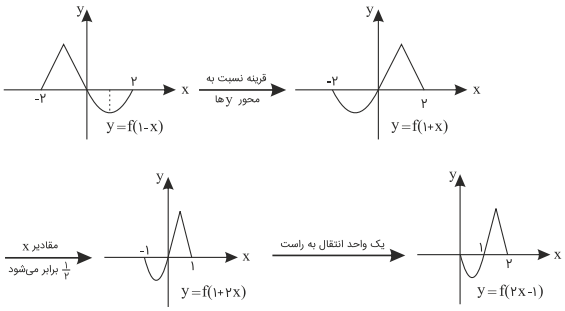
k	۰	۱
$\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۸}$	$\frac{\pi}{۱۸}$	$\frac{۱۳\pi}{۱۸}$
$\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{۵\pi}{۱۸}$	$\frac{۵\pi}{۱۸}$	$\frac{۱۷\pi}{۱۸}$

مقادیر به دست آمده به ازای $k = ۰, ۱$ در دو معادلهٔ فوق در بازهٔ $[۰, \pi]$ قرار می‌گیرد. مجموع این مقادیر برابر است با:

$$\frac{\pi}{۱۸} + \frac{۵\pi}{۱۸} + \frac{۱۳\pi}{۱۸} + \frac{۱۷\pi}{۱۸} = \frac{۳۶\pi}{۱۸} = ۲\pi$$

۱۲۴ گزینه ۳

$$y = f(۱-x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y = f(۱+x) \xrightarrow{\text{طول نقاط تقسیم بر دو}} y = f(۱+۲x)$$
$$\xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به راست}} y = f(۱+۲(x-۱)) = f(۲x-۱)$$



۱۲۵ گزینه ۳

می‌دانیم تابع $y = \log_a x$ به ازای $a > ۱$، تابعی صعودی است و چون $\sqrt{۲} > ۱$، داریم:

$$\log_{\sqrt{۲}}(\sqrt{x+۱}) < \log_{\sqrt{۲}}(x+۲)$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+۱} < x+۲ \Rightarrow x+۱ < x^۲ + ۴x + ۴$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۳x + ۳ > ۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار است} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \quad (۱)$$

از طرف دیگر دامنهٔ نامعادله برابر است با: $x \in (-۱, +\infty)$ (۲)

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} x \in (-۱, +\infty)$$

۱۲۶ گزینه ۲

نکته:

$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

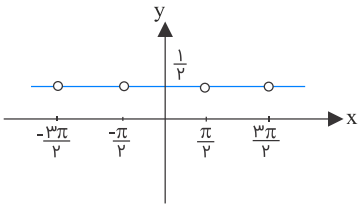
از نکتهٔ بالا می‌توان فهمید $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan(\frac{\pi}{4} - x)$؛ بنابراین:

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan 3x \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4} - x) = \tan 3x$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + (\frac{\pi}{4} - x) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

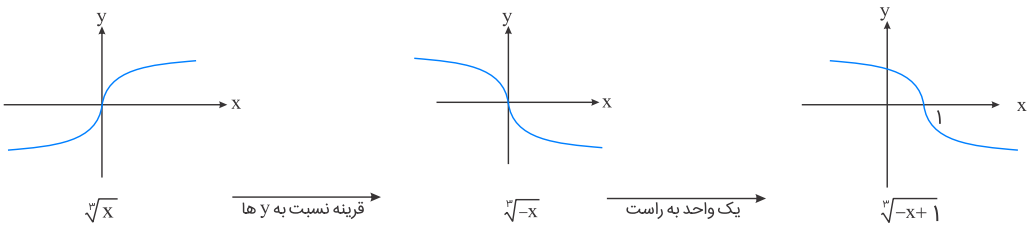
۱۲۷ گزینه ۳

$$f(x) = \frac{\cos x}{2\cos x} = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \\ \text{تعریف نشده} & ; x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \end{cases}$$

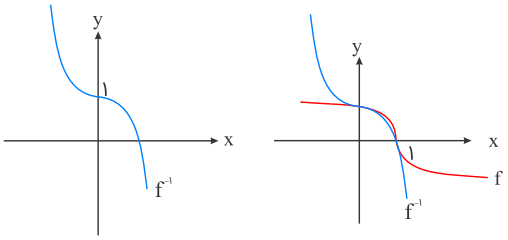


پس دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \frac{\cos x}{2\cos x}$ ، π است.

۱۲۸ گزینه ۴



$$y = \sqrt[3]{-x+1} \xrightarrow{\text{به توان } 3} y^3 = -x+1 \Rightarrow x = -y^3 + 1$$
$$y = -x^3 + 1 = f^{-1}(x)$$



طبق شکل می‌بینیم یک نقطهٔ برخورد f و f^{-1}، $(۰,۱)$ است.

$$A(۰,۱) \in f(x) = \sqrt[3]{-x+1}$$
$$A(۰,۱) \in f^{-1}(x) = -x^3 + 1$$

۱۲۹ گزینه ۱

صفر تابع $f(x)$ عدد ۴ است، پس $f(۴) = ۰$ است.

$$\frac{۴ - ۲x}{۳} = ۴ \Rightarrow ۴ - ۲x = ۱۲ \Rightarrow ۲x = -۸ \Rightarrow x = -۴$$
$$\Rightarrow g(-۴) = f(۴) = ۰ \Rightarrow (-۴\ ,\ ۰) \in g(x)$$

۱۳۰ گزینه ۴

$$\tan(\underbrace{\tan x}_{t}) = \tan(t) \quad , \quad ۰ \le t < \infty \Rightarrow \tan(t) \in \mathbb{R}$$